Tesis de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Orientación: Matemática

Comprensión del número real en estudiantes de secundaria y universidad

Autora: Mg. Virginia Montoro

Directora: Dra. Nora Scheuer

Codirector: Dr. Claudio Padra

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

FACULTAD DE INGENIERIA

Diciembre 2022

A mi hermosa familia: Daniel, Aldana, Ayelén, Nehuén y Adriel

A mi más reciente amor: Lauti

A mi amiga que nos dejó temprano Ma. Teresa Juan

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a aquellas personas que han colaborado de una u otra forma en la elaboración de este trabajo de tesis.

- *Dra. Nora Scheuer, directora de esta tesis. Por su acompañamiento constante, su incansable trabajo colaborativo, su honestidad intelectual, su flexibilidad de pensamiento, sus precisas reflexiones y discusiones. Por su colaboración en la interpretación y discusión de resultados, interminables lecturas del manuscrito y sobre todo por la enorme generosidad con que me brindó sus conocimientos e ideas. Por su amistad.*
- *Dr. Claudio Padra: codirector de esta tesis, por su visión epistemológica, apoyo y confianza.*
- *Dra. María del Puy Pérez Echeverria por su apoyo y aportes a la interpretación de resultados, en cuanto a las concepciones de infinito manifestadas por los/las participantes.*
- *A todos/as los/las estudiantes y docentes participantes anónimos/as de este estudio que brindaron su tiempo y esfuerzo.*
- *A los y las colegas (amigos/as) del grupo de investigación:*

Mg. Mayte Juan y Prof. Martha Ferrero por su colaboración constante, trabajo de revisión y reflexión en todas las etapas de este trabajo. Particularmente en las pruebas inter-juez, análisis de entrevistas a docentes, colaboración en la interpretación de resultados, lecturas, discusiones y aportes. Por su compañía.

Prof. Marcela Cifuentes, Prof. Ma. Jesús Bianchi, Dra. Nora Baccalá, Dra. Natalia Salva, Dr. Maximiliano Palacios- Amaya, Prof. Verónica Bianchi, Prof. Guillermo Fernandez Rajoy, Dra. Flavia Santamaría e Ing. Virginia Zilio. Por sus aportes en las primeras etapas de este trabajo, en el ajuste del cuestionario, toma de datos, sistematización de la información, entrevistas a docentes, lecturas y reflexiones.

Prof. M. Cifuentes, Dra. N. Salva, Prof. Ma. J. Bianchi por su participación en la categorización de las tareas sobre la naturaleza de la recta numérica.

Dr. M. Palacios-Amaya y Prof. V. Bianchi, por sus aportes sobre la comprensión de los números racionales en la escuela secundaria.

Dra. N. Baccalá: Por su acompañamiento en los primeros tiempos de este trabajo y sus aportes de saberes estadísticos

Prof. Andrea Rivera, por su disposición a discutir ideas y lecturas atentas al manuscrito.

Resumen

En esta tesis investigamos cómo comprenden el número real estudiantes de secundaria y de universidad. Situamos nuestro objeto de estudio analizando histórica y epistemológicamente la teoría matemática en torno al número real y el infinito matemático. Abordamos perspectivas cognitivas y educativas para dimensionar desafíos y sentidos que intervienen en las distintas concepciones estudiantiles.

Trescientos siete estudiantes de los últimos años de secundaria y universitarios/as ingresantes o avanzados/as de carreras con distinta especificidad de estudios en Matemática respondieron a un cuestionario que indaga sobre: concepción de número y número irracional, la densidad, el orden de los números reales, el infinito en este entorno y la recta como representación de éstos.

La integración de métodos cualitativos y estadísticos multivariados posibilitó construir un repertorio de respuestas, analizar sus relaciones e identificar siete modos de comprensión del número real, que interpretamos según un arco de amplitud y profundidad conceptual. Identificamos seis hitos que hacen notable la ampliación y profundización entre modos de comprensión. Éstos son, la incorporación de: la recta como representación de los números; la problemática de lo finito y lo discreto; la densidad potencialmente infinita y la comparación por inclusión; las magnitudes con discretitud y finitud intencional; el orden y la densidad potencial identificada con la continuidad; el infinito actual-cardinal y la completitud-continuidad. Mostramos una progresión en las concepciones numéricas, desde la centralidad de los enteros como modelos de números, pasando por los racionales como decimales, a los reales como unión de racionales e irracionales.

Si bien un mayor nivel de estudio matemático se asocia a una mayor amplitud y profundidad conceptual, en cada nivel de estudio se presentan una variedad de modos de respuesta. La excepción es el grupo de estudiantes avanzados/as de Matemática, que concentra los modos más cercanos a una visión matemática.

Concluimos que conceptualizar el número real requiere de complejos procesos representacionales, comunicativos y semióticos en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión y explicitación matemáticas.

Palabras claves: número real - concepciones - infinito matemático - recta numérica

Abstract

In this thesis we investigate how high school and university students understand real numbers. To situate our object of study, we analyze in a historical and epistemological key the construction of mathematical theory around the real number and mathematical infinity. We approach cognitive and educational perspectives to visualize the challenges and senses that intervene in the different student conceptions.

Three hundred and seven students in the last years of high school and university courses where Mathematics has different weight responded to a questionnaire that inquiries about: conception of number and irrational number, density, order and infinity of real numbers, and the representation of real numbers on the number line.

The integration of qualitative and multivariate statistical methods made it possible to build a repertoire of responses, analyze their relationships, and identify seven ways of understanding the real number, which we interpreted according to an arc of conceptual breadth and depth. We identified as conceptual milestones the understanding of: the straight line as a representation of numbers; the problem of the finite and the discrete; potentially infinite density and comparison by inclusion; magnitudes, with intentional discreteness and finiteness; order and potential density identified with continuity; actual-cardinal infinity and the completeness-continuity. We show a progression in students' numerical conceptions, beginning with the centrality of the integers as a model of numbers, going through rational numbers as decimal numbers, to the real numbers as the union of rational and irrational numbers.

Although the higher level of mathematical study is associated with a greater conceptual breadth and depth, at each level of study a variety of response modes coexist. The exception is the group of advanced students of Mathematics, which concentrates the modes closest to a mathematical vision.

Conceptualizing the real number requires complex representational, communicative, and semiotic processes in educational contexts that encourage a high degree of reflection and mathematical explanation.

Keywords: real number - conceptions - mathematical infinity - number line

Contenido

INTRODUCCIÓN

> *"[...] por consiguiente, de la misma forma que un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, sino que yace oculto en una nube de infinitud"*
>
> Michael Stifel[1] (1486-1567) en su obra *Aritmética Íntegra*

La educación matemática en la escuela primaria, en nuestro país, se centra durante sus dos primeros ciclos en el dominio de números naturales. En el último ciclo de este nivel, se introducen los números enteros y se considera un objetivo escolar que el alumnado trabaje con números racionales y con sus distintas formas de representación: como fracciones o por sus expresiones decimales.

Los lineamientos curriculares proponen, para la enseñanza secundaria, profundizar la comprensión y el uso de los números racionales y hacia el final de este período se espera que el estudiantado comprenda el concepto de número racional y el de número real, manejen el sistema de representación decimal de números reales y puedan ordenarlos, representarlos sobre la recta y usarlos para resolver problemas.

En la matemática universitaria, es frecuente observar que la noción de número real se trabaja como un contenido naturalizado en la escuela secundaria. Sin embargo, las expectativas respecto a que al ingresar a la universidad la noción de número real sea una noción disponible en el estudiantado de modo que les facilite el acceso a la matemática avanzada, frecuentemente no son satisfechas y es posible que una cantidad importante de estudiantes recorran esta etapa de transición entre la escuela secundaria y la universidad sin una comprensión cabal de los números reales.

El número real fue a través de la historia de la matemática un concepto complejo y muy difícil de formalizar, entre otras cosas por estar íntimamente ligado al infinito actual. Una noción que se presenta como contraintuitiva y que por más de veinte siglos no fue aceptada, ni precisada formalmente, por la comunidad matemática. La de número real es, de hecho, una de las ideas más fructífera e importantes de la matemática, ya que sobre ella se construye gran parte del desarrollo de esta ciencia y, como esbozamos, se la encuentra en el centro de la enseñanza matemática en las escuelas secundarias y en la universidad.

Es precisamente con este concepto que se hace patente en los y las estudiantes la transición entre un pensamiento matemático elemental (escolar) y un

1 Michael Stifel (1487-1567). Monje y matemático alemán renacentista. Asistió a la Universidad de Wittenberg donde obtuvo una maestría. En la Universidad de Jena impartió conferencias de aritmética y geometría.

pensamiento matemático avanzado (universitario). Esta transición, de un tipo de pensamiento al otro, requiere una reconstrucción cognitiva que implica, por ejemplo, el paso de describir a definir y de convencer a demostrar y que principalmente requiere de la comprensión de conceptos matemáticos más abstractos, por ejemplo, el infinito. Por estos aspectos podemos enmarcar a nuestra investigación en lo que se denomina Pensamiento Matemático Avanzado (Tall, 1991; 2004).

Acordamos con las teorías del aprendizaje que enfatizan que las concepciones o comprensiones que van construyendo los y las estudiantes son uno de los puntos de partida del aprendizaje y sostienen qué, para que el aprendizaje sea significativo es necesario partir de las ideas que el estudiantado construye y utiliza en diferentes contextos, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas. Estas comprensiones se originan y modifican por múltiples factores, que incluyen disposiciones del razonamiento humano, la cultura y en particular, las experiencias educativas. Dependiendo de los enfoques de enseñanza, pueden incluso interferir con la adquisición de conocimientos académicos.

En esta línea, la investigación en educación matemática se ha ocupado de establecer las relaciones entre el conocimiento personal (concepciones) y el conocimiento legitimado y objetivado por una comunidad de especialistas (concepto), destacando que en las situaciones en que se registran relevantes brechas entre ambos, de no ser conocidas y trabajadas deliberadamente, pueden conducir a cierto fracaso de la enseñanza.

En el presente trabajo nos propusimos estudiar cómo comprenden y qué concepciones han construido estudiantes que han interactuado con la noción de número real en los últimos años de la secundaria o en distintas carreras universitarias, cuando ingresan y cuando ya han avanzado en sus estudios.

Viéndonos en la necesidad de acotar los aspectos del número real a investigar nos hemos propuesto indagar las ideas de estos grupos de estudiantes sobre aspectos básicos de la noción de número real, que no involucren cuestiones tan abstractas que no estén al alcance siquiera de estudiantes con mayor recorrido académico en matemática. Estos aspectos son: concepciones sobre número en general y sobre números racionales, irracionales y reales en particular; comprensiones de la densidad y del orden de los números reales; concepciones sobre el infinito matemático en contexto del número real y diferentes representaciones externas del número real, incluyendo la notacional y la recta numérica.

La complejidad epistemológica, cognitiva y educativa que tiene la comprensión del número real nos plantea desafíos metodológicos para el estudio integrado y refinado de estos aspectos. La comprensión de los matices epistémicos implicados en la comprensión de este concepto puede constituirse en un importante aporte al conocimiento de los procesos cognitivos sofisticados.

La tesis la organizamos en cinco secciones. La presente Introducción, la sección Encuadre del Estudio, la de Metodología, la de Resultados y por último la de Discusión y Conclusiones.

La sección Encuadre del Estudio, comienza con el Capítulo 1, en el que atendemos, a los conceptos matemáticos que nos ocupan y desarrollamos algunos aspectos históricos y epistemológicos de la Matemática, que pueden ayudar a comprender las dificultades que conlleva el concepto de número real y la relevancia de la comprensión de éste para el acceso a una Matemática avanzada.

En el Capítulo 2 nos explayamos sobre cómo comprenden los y las estudiantes al número real, explicitando algunos aspectos educativos y cognitivos al respecto; presentamos un resumen de las investigaciones que hemos examinado en cuanto a las concepciones de los y las estudiantes sobre esta noción. En el Capítulo 3 ofrecemos una síntesis de los anteriores a modo de planteo del problema y detallamos los objetivos específicos de este trabajo.

La sección Metodología, comprende los Capítulos 4 y 5 en los que describimos la metodología utilizada para lograr el objetivo de indagar en profundidad las comprensiones estudiantiles acerca de varias facetas del número real.

En el Capítulo 4 describimos el cuestionario con tareas focalizadas que sirvió de instrumento de obtención de la información. Describimos en detalle las diez tareas utilizadas, presentando el objetivo y la lógica de cada una de ellas, agrupadas según el aspecto del número real que indagan principalmente. En este sentido organizamos las tareas en cuatro Grupos Temáticos (N, D, I y R), conformados por tareas que indagan: las concepciones sobre número y número irracional; sobre el orden y la densidad de los reales; las concepciones de infinito en este contexto y la comprensión de la recta como representación de los números reales, respectivamente. También, en este Capítulo 4, informamos la población de estudiantes de secundaria y universidad que participaron del estudio, mostrando cómo fue seleccionada y cómo quedó en definitiva constituida.

Mientras que en el Capítulo 5, damos cuenta de cómo sistematizamos esta información y de los métodos (cualitativos y estadísticos multivariados) que utilizamos en varias instancias del análisis de la información. Presentamos la metodología de análisis de la información en dos fases: la primera referida al análisis de la información aportada por cada tarea en particular, principalmente tendiendo a obtener una clasificación de las respuestas a la misma. Estas clasificaciones son los insumos para el análisis que realizamos, en una segunda fase, sobre la información aportada por las respuestas a todas las tareas del cuestionario integralmente.

En la sección Resultados, en los Capítulos 6, 7, 8 y 9 mostramos los resultados del análisis de la información, realizado a las respuestas a las tareas del cuestionario correspondientes a los Grupos Temáticos N, D, I y R, respectivamente. Para cada tarea exhibimos el objetivo por el cual fue considerada y describimos, de forma pormenorizada, los resultados de la serie de análisis de grano fino realizada y brindamos un apartado con la síntesis de resultados de cada tarea. Finalmente los integramos por grupos temáticos y damos una primera interpretación de estos resultados. También en la sección Resultados, en el Capítulo 10 brindamos los resultados del análisis de las respuestas a todas las tareas del cuestionario integralmente. Tratamos la serie de análisis realizados tendiente a describir los modos integrales de comprensión del número real, interrelacionando los distintos aspectos de este concepto, indagados en cada tarea y en búsqueda de inferir la incidencia en la profundidad de esta comprensión de los estudios de matemática realizados.

Finalmente, en la sección Discusión y Conclusiones, en el Capítulo 11 interpretamos y discutimos estos resultados poniéndolos en dialogo con la bibliografía consultada. Discutimos los modos de comprensión determinados, en búsqueda de establecer un posible un gradiente de profundidad de las comprensiones inferidas y su relación con el nivel de estudios. Mientras que en el Capítulo 12, brindamos un panorama general de la tesis, damos cuenta de los resultados poniendo énfasis en los más importantes y originales. Brindamos conclusiones en cuanto al enfoque metodológico, en cuanto a los modos de comprensión por grupos temáticos y de los modos integrales de comprensión de los números reales determinados y su relación con el nivel de estudios. Sintetizamos el gradiente de profundidad y amplitud en la comprensión de los números reales, los hitos característicos en los pasos entre grados de comprensión y la visión de los conjuntos numéricos según el nivel de estudio en Matemática. Reflexionamos sobre la diversidad de ideas en un mismo nivel de estudios, la complejidad cognitiva de estos aspectos y esbozamos algunos pensamientos sobre la enseñanza del número real y futuras líneas de investigación.

El trabajo se complementa con cuatro anexos: el Anexo I donde consta el cuestionario, tal como fue presentado a los y las participantes; el Anexo II con la justificación y aplicación de los métodos multivariados empleados; el Anexo III con algunos complementos de los Capítulos 6, 7, 8 y 9; el Anexo IV con la síntesis de las tipologías de respuesta que hemos detectado, en la población en estudio, para cada tarea y el Anexo V con algunos complementos del Capítulo 10.

ENCUADRE DEL ESTUDIO

Capítulo 1

Algunos conceptos claves y breve repaso histórico-epistemológico sobre los números reales

En Educación Matemática, varias investigaciones han señalado la relevancia del análisis epistemológico para el análisis educativo, sus potencialidades y sus alcances (Artigue et al., 1995; Bergé y Sessa, 2003; Sierpinska y Lerman, 1996). En esa línea, para nuestro trabajo cobra especial interés repasar desde la Historia y la Epistemología la dinámica implícita en la construcción de las teorías científicas en comunidades de especialistas, ya que puede darnos instrumentos para identificar y comprender los ensayos, desafíos y sentidos que intervienen en las distintas concepciones que los y las estudiantes elaboran en el campo de nuestro interés.

No es nuestra intención plantear una "simbiosis" entre la Epistemología y la Ciencia Cognitiva, lo cual presenta numerosas dificultades (Castorina, 1995). Más bien, creemos que considerar los aportes de ambas disciplinas puede contribuir a una comprensión más completa y profunda del proceso de construcción del conocimiento, tanto desde la evolución histórica de las ideas, como en la génesis individual de las mismas (Carretero, 1997; Pozo, 1987). En este capítulo nos centramos en aspectos de la Epistemología e Historia de la Matemática en torno al número real, en tanto que en el siguiente abordamos perspectivas psicoeducativas al respecto.

A modo de clarificar algunos conceptos empleados en este capítulo haremos una breve introducción a los conjuntos numéricos (reales y subconjuntos de los reales) describiendo su estructura. Luego presentaremos un acercamiento histórico y epistemológico al concepto de número real. Sin pretender hacer un análisis exhaustivo, ni acabado, más bien orientado a plasmar aspectos que se nos presentan como nodales en la comprensión del número real y a los cuales prestaremos especial atención en este trabajo. También realizaremos un repaso histórico y epistemológico de la noción de infinito matemático, por su importancia en la fundamentación del número real.

En este recorrido nos hemos basado en muchos libros y artículos de Historia de la Matemática y de la Matemática misma (entre otros: Arrigo et al., 2011; Babini, 1980; Bourbaki, 1972; Boyer, 1968; Dauben, 1995; de Torres Curth, 1999; Dehaene, 1997; 2001; Dieudonné, 1965; Mainzer, 1991; Montoro, 1999; Santinelli, 1999). Para hacer más fluida la lectura solo incluiremos referencias precisas en el cuerpo del texto para las citas textuales o contribuciones muy específicas.

1.1. Los conjuntos numéricos

Matemáticamente podemos introducir los números reales de dos maneras: mediante un proceso de extensión de los conjuntos numéricos a partir del conjunto de naturales (definido axiomáticamente), o bien mediante una definición axiomática del conjunto de los números reales (que explicitaremos en el apartado 1.1.3) y considerar las propiedades de sus subconjuntos. Cualquier aproximación que se adopte, permite reconocer que los naturales están incluidos en los enteros, estos en los racionales y estos últimos en los reales.

Daremos una sintética descripción de los conjuntos numéricos incluidos en el conjunto de números reales, entendiendo por número a un elemento de un conjunto con ciertas operaciones y que posee determinadas propiedades.

Los números naturales (N). Son los números que sirven para contar y pueden sumarse. A partir del 1 obtenemos el número 1+1=2 que denominamos dos, luego 2+1=3 que denominamos tres… y así siguiendo. Si n es un número natural, n+1 se denomina sucesor de n**.** Este conjunto no es acotado superiormente dado que todo número natural tendrá un siguiente. Se lo denomina N.

La adición es una operación[2] en N ya que si se suman dos naturales se obtiene otro natural. Esta operación es asociativa y conmutativa. Otra operación definida sobre N es la multiplicación (si se multiplica dos naturales se obtiene otro natural), esta operación es también asociativa y conmutativa, tienen elemento neutro (1) y es distributiva respecto de la adición.

En cuanto al orden[3] en N, es tal que: dados x, y naturales: $x < y$ si y sólo si existe un natural n que verifica: $y = x + n$. Este orden de N es un *orden total*, es decir todo par de números naturales puede ser comparado. El orden en N es compatible con la suma y con la multiplicación[4].

Una propiedad específica del orden en el conjunto de números naturales es que cualquier subconjunto de naturales (distinto de vacío) tiene un primer elemento, por ello se dice que este conjunto está *bien ordenado*. Entre dos números naturales no consecutivos, existe un número finito de naturales. El orden en N es discreto: todo natural tendrá un siguiente y (salvo el 1) un anterior.

---

[2] Dado un conjunto A: * es una operación en A si es una función de AxA en A. Es decir que, si a y b son elementos de A y a*b=c, entonces c pertenece a A.

[3] Una relación de orden en A cumple con las propiedades: antisimétrica (si $a<b$ y $b<a$, entonces a=b) y transitiva (si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$) cualesquiera sean a,b y c de A.

[4] Compatibilidad con la adición: si $a<b$, entonces $a+c < b+c$. Compatibilidad con la multiplicación: si $a<b$ y n un natural entonces $n.a < n.b$. Cualesquiera sean a,b y c de A.

Los números enteros (Z). Son los naturales unidos con el 0 y con los opuestos de los naturales. El opuesto de un natural n es -n de modo que n+(-n) = 0. Al conjunto de los números enteros lo denominamos Z = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}. Luego un entero es un natural, cero o un opuesto de un natural. Los naturales se denominan (también) enteros positivos y sus opuestos, enteros negativos.

La adición y la multiplicación son operación en Z (si se suman dos enteros o si se multiplica dos enteros se obtiene un entero). Estas operaciones son asociativas, conmutativas y tienen elemento neutro (0 y 1 respectivamente). Para la adición cada entero tiene su opuesto en Z y la multiplicación es distributiva respecto de la adición. Estas operaciones con sus propiedades hacen de Z un *anillo conmutativo con unidad.*

La relación de orden en Z se define basándose en la afirmación 0<1, por lo tanto, todos los naturales son mayores que cero y además: si x, y son enteros entonces x < y, si y sólo si existe un entero positivo n que verifica: y = x + n. El orden de Z es un orden total y Z no es bien ordenado (ya que el mismo Z no tienen primer elemento). El orden en Z es compatible con la suma y con la multiplicación por un entero positivo.

Entre dos números enteros cualesquiera, existe un número finito de enteros. Es un orden discreto, ya que todo entero tendrá un siguiente y un anterior. Todo intervalo de extremos enteros en Z es finito y este sí tendrá primer elemento.

Los números racionales (Q). Son aquellos que se escriben como cociente de enteros (con denominador distinto de cero), por ejemplo: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{-1}{2}$; $\frac{-23}{7}$. Incluyen a los naturales y a los enteros ($\frac{-2}{1} = -2$; $\frac{-1}{1}$=-1; $\frac{0}{1} = 0$; $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{2}{1} = 2$).

La adición y la multiplicación son operación en Q (si se suman dos racionales o se multiplican dos racionales se obtiene un racional en ambos casos). Estas operaciones son asociativas, conmutativas y tienen elemento neutro (0 y 1 respectivamente). Para la adición cada racional tienen su opuesto en Q y la multiplicación es distributiva respecto de la adición. Por lo que Q es también un anillo conmutativo con unidad, sin embargo, como cada racional (distinto de cero) tiene un inverso multiplicativo decimos que Q tiene estructura de *cuerpo.*

La relación de orden en Q verifica: si x, y son racionales, x < y si y sólo si existe un racional positivo (q>0) que verifica: y = x + q. El orden de Q es un orden total y Q no es bien ordenado. El orden en Q es compatible con la suma y con la multiplicación por un racional positivo.

Dados dos racionales distintos, siempre existe otro racional comprendido entre ambos (por ejemplo, su media aritmética). Debido a esta propiedad se dice que el orden del conjunto de números racionales es un orden *denso*. Como consecuencia, entre dos números racionales existen infinitos números racionales. La densidad es una propiedad que distingue el orden de Q del orden discreto de N o de Z.

Los números reales (R). Se sabe desde la antigüedad que no es posible encontrar un cociente de enteros que corresponda a un número cuyo cuadrado es 2, es decir que $\sqrt{2}$ no es un número racional, también se ha demostrado que otros números como π no se pueden escribir como cociente de enteros. A estos números que no son racionales, se los denomina *irracionales*. Los irracionales no tienen por sí mismos una estructura con estas operaciones, sino que completan a los números denominados reales. Los números reales son la unión de los racionales e irracionales: $Q \cup I = R$.

Es posible distinguir entre los números racionales y los irracionales mediante su representación en el sistema decimal, los racionales se representan por medio de una expresión decimal finita o infinita con período y los irracionales por una expresión decimal infinita sin período.

Los reales incluyen a los racionales y por lo tanto a los enteros y a los naturales. La adición y la multiplicación son operación en R (si se suman dos reales o se multiplican dos reales se obtiene un real en ambos casos). Estas operaciones son asociativas, conmutativas y tienen elemento neutro (0 y 1 respectivamente), para la adición cada real tiene su opuesto en R, cada real (distinto de cero) tiene un inverso multiplicativo y la multiplicación es distributiva respecto de la adición. Por todo esto R tiene tienen estructura de cuerpo.

La relación de orden en R verifica que: si x, y son reales, entonces $x < y$ si y sólo si existe un real positivo ($r>0$) que verifica: $y = x + r$. Este orden es un orden total y es compatible con la suma y con la multiplicación por un real positivo. Dados dos reales distintos, siempre existe un racional comprendido entre ambos, por lo tanto, el orden del conjunto de números reales es un orden *denso* y se verifica que entre dos números reales existen infinitos números reales.

La propiedad que caracteriza al conjunto de números reales y lo diferencia del subconjunto (también cuerpo ordenado y denso) de racionales es la *propiedad de completitud o del supremo* y que se enuncia: dado un subconjunto de números reales si es acotado superiormente - es decir, que existe un número real mayor que todos los elementos de dicho subconjunto – entonces, existe un número real que es la menor de esas cotas superiores y se lo llama *supremo.* La *existencia* refiere a que *es* un número real. Por ejemplo, el conjunto de todos los reales que elevados al cuadrado son menores o iguales a 2 está acotado superiormente por 2, también por 3; por 3,5 o por 4, etc. y la menor de esas cotas superiores sería aquel número que elevado al cuadrado es igual a 2, es decir $\sqrt{2}$, pero se sabe que ese “número” no es un racional, es decir que *es* un número real (no-racional).

Es posible demostrar que la relación de orden en R es *arquimediana*, lo cual puede visualizarse por el hecho de que el conjunto de los números reales no es acotado superiormente. Como resultado de la propiedad de completitud podemos decir que el orden de R es continuo, no es posible asignar un sucesor (o anterior) a un número real. Si bien los racionales son densos y arquimedianos estas propiedades no son suficientes para que sean continuos; si representamos a los racionales en la recta numérica esta tendrá “agujeritos” que no podríamos percibir a simple vista.

En la vida cotidiana es suficiente con utilizar los números racionales ya sea como fracciones o como decimales finitos, sin embargo, la formalización científica de las magnitudes escalares continuas (como la longitud, por ejemplo) requiere de los números reales, más aún gran parte del avance de las teorías matemáticas se basa en los números reales).

1.2. Los números reales como magnitudes continuas

La utilización de los números reales en la geometría, en la física y la tecnología encuentran su fundamento en el concepto abstracto de magnitud continua.

La teoría de las magnitudes continuas se ocupa de las leyes que rigen las operaciones entre números reales y cantidades físicas –entre éstas, las geométricas. El ejemplo más representativo de una magnitud continua es la longitud. Las longitudes pueden sumarse y compararse por su tamaño y las propiedades de dichas operaciones tienen su origen en experiencias concretas. Otros ejemplos de magnitudes continuas son el tiempo y la masa, así como las magnitudes derivadas: área, volumen, velocidad, aceleración, fuerza, presión, trabajo, etc.

Es usual en las aplicaciones de la Matemática identificar el conjunto de las magnitudes continuas con el de los números reales no-negativos. Consideremos un conjunto de elementos denominados magnitudes escalares continuas, entre cuyos elementos se ha definido una operación “+”, llamada adición, de modo que esta operación sea asociativa, conmutativa, exista un elemento neutro 0 y la única posibilidad de que los elementos sumados den el cero, sea que ambos sean cero.

Las magnitudes se pueden comparar mediante una relación $<$ (menor que), que será tricotómica[5] y verifica que: (a y b son magnitudes): si $0 < a$, entonces existe b entre 0 y a ($0<b<a$). Se enuncia un axioma llamado de *continuidad,* como sigue: si *H* y *K* son subconjuntos (no vacíos) de magnitudes escalares continuas, con la propiedad

---

[5] Ley de tricotomía: si a y b son magnitudes: $a<b$ o $b<a$ o $a=b$.

de que cualquier elemento del primero es menor que cualquiera del segundo, entonces existe una magnitud b tal que $h \leq b \leq k$ para cualquier h del primer conjunto *H* y cualquier k del segundo conjunto *K*.

Se define a los enteros no negativos operando sobre las magnitudes y con el axioma de continuidad se pueden probar los teoremas de divisibilidad y arquimedianidad, esto es: dados a magnitud y n un natural, existe un único b tal que: $n.b = a$ y si $0 < b < a$, entonces existe n tal que $n.b > a$. Los reales positivos actúan sobre el conjunto de magnitudes de la siguiente manera: k por un elemento $a > 0$ de M, se define como el único elemento b de M que satisface $r.a<b<r'.a$ para cualquier par de números racionales positivos r y r' que verifiquen $r < k < r'$. La existencia y la unicidad de b están garantizadas por el postulado de continuidad y la propiedad de Arquímedes (los reales positivos no son acotados superiormente. Conviene extender la definición poniendo $0.a = 0$ y $k.0 = 0$.

Los números reales permiten comparar dos segmentos de recta cualesquiera según su longitud. Desde el punto de vista físico, la determinación de la longitud de un segmento es siempre aproximada, ya sea por el instrumento que se utilice o por las limitaciones humanas de percepción, por lo que sólo es posible hablar de una medición exacta desde un punto de vista abstracto e ideal.

1.3. Aspectos históricos y epistemológicos de los números reales

En la Grecia antigua, los números enteros y las proporciones entre dos enteros (origen de los números racionales) ya fueron utilizados por los pitagóricos en el siglo VI a.C. Para la misma época, en Grecia, reconocieron las magnitudes inconmensurables vinculadas con la geometría. Sabemos que en aquellos tiempos descubrieron que, si se traza un cuadrado de lado 1, su diagonal, por la aplicación del teorema de Pitágoras, es tal que el cuadrado de su longitud vale 2. La magnitud de esta diagonal no es conmensurable (es inconmensurable) con el lado del cuadrado.

Generalizando, podemos decir que un segmento de longitud a es inconmensurable con otro de longitud b, si a/b no se puede escribir como cociente de dos enteros. Encontramos aquí el germen del número irracional interpretado como la razón entre las longitudes de dos segmentos inconmensurables.

Luego, por más de veinte siglos (desde el siglo XVI facilitado por la incorporación de la notación decimal), los matemáticos trabajaron con los números aplicando las reglas operacionales de la aritmética, sin realizar diferencias entre distintos conjuntos numéricos y sin que les preocupara mayormente su fundamentación.

La necesidad de conceptualización de los números no aparece hasta fines del siglo XVII, con I. Newton[6] y W. Leibniz[7] , que realizaron desarrollos importantes en el dominio del cálculo diferencial e integral, basados en un empleo libre de las propiedades numéricas, de lo infinitamente pequeño y de lo infinitamente grande.

Durante el siglo XIX, el reconocimiento hecho por los matemáticos de que las propiedades algebraicas y de orden no bastaban para dar respuesta a las diferencias esenciales entre los números racionales y los números reales desembocó en varias definiciones constructivas de este conjunto numérico (en especial por parte de K. Weierstrass[8], G. Cantor[9] y R. Dedekind[10]). Estas definiciones las veremos con un poco más de detalle en el apartado 1.3.2.

Hacia fines de ese siglo y a comienzos del XX, a partir de la teoría de conjuntos abstractos enunciada por Cantor se hace posible la definición axiomática del conjunto de números reales. Esta teoría supera las paradojas que habían sacado al infinito de la Matemática desde la antigüedad al reconocer a los conjuntos infinitos como actualmente infinitos (con todos sus elementos existiendo simultáneamente), es decir como objetos matemáticos sobre los cuales se puede operar.

Desde el movimiento formalista de comienzos del siglo XX, se considera el conjunto de los números reales definido axiomáticamente. Es decir, se considera al *número real* como *un elemento de un conjunto* con estructura algebraica de *cuerpo ordenado y completo.* Tanto la estructura de cuerpo, como el orden de los números reales son dados en forma axiomática, es decir no se definen o deducen, sino que se describen mediante axiomas. Explicaremos el sentido de esta estructura más adelante en el apartado 1.3.3.

Los números racionales, como vimos, son también un cuerpo ordenado y comparten con los números reales propiedades fundamentales como la *densidad* y la *ar-*

---

[6] Isaac Newton (1642-1727). Matemático y físico británico, considerado uno de los más grandes científicos de la historia. Sus descubrimientos y teorías sirvieron de base a la mayor parte de los avances científicos desarrollados desde su época. Fue junto a Leibniz uno de los inventores del cálculo diferencial e integral.

[7] Wilhelm von Leibniz (1646 -1716). Filósofo, matemático, jurista y político alemán. Realizó profundas e importantes contribuciones en las áreas de Metafísica, Epistemología, Lógica, Filosofía, Matemática, Física, Geología, Jurisprudencia e Historia. Construye el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces.

[8] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 -1897). Matemático alemán. Entre sus logros figuran la definición de la continuidad de una función, demostración del teorema del valor medio y del teorema de Bolzano-Weierstrass usado para estudiar las propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados.

[9]Georg Ferdinand Cantor (1845 –1918). Matemático alemán de origen ruso. En 1874 publicó su primer trabajo sobre teoría de conjuntos. Llamó a los números infinitos *números transfinitos* y articuló una aritmética transfinita completa. Sus teorías sólo fueron reconocidas a principios del siglo XX. En la actualidad se le considera el creador de la teoría de conjuntos infinitos, punto de partida para el desarrollo de la Matemática moderna.

[10] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 -1916). Matemático alemán. Sus cortaduras zanjan definitivamente el problema de la fundamentación del análisis al definir el conjunto de los números reales a partir de los racionales. En 1872 caracterizó los números reales como un cuerpo ordenado y completo y ofreció su desarrollo como modelo de organización y claridad.

quimedianidad, sin embargo, la propiedad que caracteriza a los reales y lo diferencia del subconjunto de racionales es la *completitud* (axioma de completitud o propiedad del supremo). Profundizaremos en esta distinción más adelante.

1.3.1. La necesidad matemática del número real

Como dijimos, en la antigüedad previeron a los números irracionales vinculados con la geometría, unidos a la constatación de magnitudes inconmensurables, sin embargo, la necesidad de conceptualización de los números no aparece hasta fines del siglo XVII, con Newton y Leibniz y la necesidad de fundamentar sus resultados (a los que habían llegado en forma independiente) del cálculo diferencial e integral, basados en conceptos como continuidad e infinito.

La noción de número irracional fue introducida por las necesidades del cálculo, de la misma manera que fueron introducidos los números negativos. En este sentido podemos distinguir una Matemática de aproximación y una Matemática de precisión (Klein, 1972). La primera se usa en el mundo concreto, donde ni los instrumentos de medida, ni nuestra percepción son exactos y es bajo esta modalidad que el cálculo utilizó libremente a los números reales. La segunda implica el uso de la abstracción, de la demostración como medio de validación y la aceptación de nociones tales como el infinito actual.

Recién a fines del siglo XIX, a través de trabajos de fundamentación de la Matemática se solucionan al mismo tiempo los problemas de la definición de número real y de límite, gracias a la aceptación explícita de la existencia de conjuntos actualmente infinitos. Estas fundamentaciones y necesidades de explicitación, axiomatización y definición se presentaron como problemas al interior de la ciencia Matemática y nacen como necesidad de matemáticos y lógicos de fundamentar resultados utilizados tanto en la teoría como para el cálculo.

Para el cálculo (comercial o experimental) es suficiente con los racionales. Si se considerara a la Matemática una simple herramienta práctica, los irracionales pueden parecer innecesarios. Sin embargo, la predicción de ciertos comportamientos físicos, biológicos, económicos, sociológicos, etc., se hace mediante ecuaciones diferenciales, que necesitan en su base teórica de la completitud de los reales.

En la actualidad aun cuando nos encontramos en pleno auge de la "discretización del análisis" para aprovechar las herramientas de la tecnología y gracias al uso de las computadoras, se torna de fundamental importancia para la Matemática aplicada, no sólo la resolución del problema, sino también asegurar la convergencia, estabilidad y dominio de validez de la solución y para ello es necesario trabajar en un espacio completo.

La complejidad de las nociones en este campo (la inconmensurabilidad, la no-numerabilidad, la completitud de los reales, la continuidad de la recta, el orden denso y el infinito actual), todas ellas nociones de pensamiento matemático avanzado, puede atribuirse, en buena parte, a que los números reales fueron conceptualizados en la Matemática respondiendo a necesidades netamente teóricas a fin de fundamentar resultados de la Matemática misma.

1.3.2. Las definiciones constructivas de los reales

Los matemáticos de fines del siglo XVIII y del siglo XIX reconocieron que las propiedades algebraicas y de orden no bastaban para diferenciar los números reales de los racionales. Esto derivó en varias definiciones constructivas, principalmente las realizadas por Weierstrass, Cantor y Dedekind quienes, para construir los *irracionales,* se basaron en las propiedades de cuerpo ordenado de los números racionales.

Las cortaduras de Dedekind. Dedekind construyó los números reales por el método de las cortaduras. Una cortadura es una separación del conjunto de los números racionales (Q) en dos subconjuntos A, B tales que su unión sea Q y que todos los elementos de A son menores que todos los elementos de B. Si el elemento que realiza la separación es un número racional, se trata de una *cortadura propia*. Si no, es una *cortadura impropia.*

Luego, *en el conjunto de todas las cortaduras* se definen dos operaciones y una relación de orden y se demuestra, en base a las propiedades de cuerpo ordenado de los racionales y de las operaciones entre conjuntos, que este nuevo conjunto conformado por las cortaduras goza de las propiedades de cuerpo ordenado y la del supremo. Cada cortadura propia se identifica con el número racional que realiza la separación, mientras que cada cortadura impropia recibe el nombre de (se identifica con) un número irracional.

Los reales de Weierstrass. Weierstrass construyó los números reales asegurando el cumplimiento de una propiedad métrica, llamada *propiedad de completitud*, que asegura que ciertas sucesiones, llamadas elementales o de Cauchy, son siempre convergentes.

Una sucesión $\{x_n\}$ *converge a un elemento x* si a partir de un índice determinado, los infinitos términos de ésta se encuentran a una distancia[11] arbitrariamente pequeña de x. Entonces se dice que $\{x_n\}$ es *convergente* y que x es el *límite* de la sucesión. Se llama sucesión *elemental* o *de Cauchy* a una sucesión $\{x_n\}$ tal que, a partir de un índice determinado, sus infinitos términos están a una distancia

11. Consideraremos la distancia entre dos números como el valor absoluto de la diferencia entre ellos.

arbitrariamente pequeña. Se desprende de las definiciones que toda sucesión convergente es de Cauchy. La recíproca no es cierta en general.

La idea es identificar cada número real *con la clase de equivalencia de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales que tienen el mismo límite*. En definitiva, el número real puede identificarse con el límite mismo de alguna sucesión representante de la clase. Este límite puede ser un número racional o no, en el segundo caso el límite se llama número irracional.

Los encajes de intervalos de Cantor. Cantor fundamentó los irracionales partiendo de la idea de aproximaciones racionales por defecto y por exceso. Estas aproximaciones son los extremos de una sucesión de intervalos cerrados de extremos *racionales* incluidos unos en otros, cuyos diámetros tienden a cero para n suficientemente grande. Esta sucesión recibe el nombre de *encaje de intervalos* y el número real queda definido como el único número común del encaje. La definición entonces tiene sentido si está asegurada la existencia de un número común a todos los intervalos del encaje.

Por lo tanto esta construcción supone el cumplimiento de la propiedad de encaje: dada una sucesión $\{[a_n,b_n]\}$ de intervalos cerrados tales que $a_n \leq a_{n+1}$ y $b_{n+1} \leq b_n$ para cada $n \in N$, la intersección de esta sucesión es no vacía. Una vez aceptada esta propiedad, notemos que cualquier otro encaje $\{[c_n,d_n]\}$ definirá el mismo número real que $\{[a_n, b_n]\}$, si $c_i \leq b_j$ y $a_i \leq d_j$ para cualquier par de índices $i,j \in N$. En ese caso, $\{[a_n, b_n]\}$ y $\{[c_n, d_n]\}$ son equivalentes. Entonces un número real queda definido como una clase de equivalencia de encajes de intervalos de extremos racionales según la relación establecida.

La construcción completa de las cortaduras de Dedekind está desarrollada en Spivak (1991, cap.28) y en Rudin (1990, pp.18-23). Una idea intuitiva bastante completa de los métodos de Cantor y Dedekind se ofrece en Kline (1972, pp. 984-987) y en Trejo (1968, pp. 239–244). Weierstrass presentó sus ideas regularmente en sus cursos en Berlín que fueron volcadas por Kossak (1872) en un libro. Cantor (1872a; 1872b) y Dedekind (1963/1872) publicaron sus resultados en sendos artículos.

Desde el punto de vista teórico todas estas definiciones vistas para el número real son equivalentes. Se comprende intuitivamente la estrecha relación entre los distintos métodos constructivos, ya que los extremos inferiores y superiores de los intervalos de Cantor son sucesiones monótonas acotadas y, asumiendo la propiedad del supremo, resultan convergentes al supremo y al ínfimo de dichos extremos, respectivamente, y ambos coinciden puesto que las longitudes de los intervalos tienden a 0. Del mismo modo definen una cortadura, ya que los extremos inferiores son todos los racionales menores que todos los extremos superiores. Estas definiciones constructivas definen elementos nuevos (cortaduras, sucesiones, encajes) de forma que con las operaciones adecuadas cumplen todas las propiedades de cuerpo ordenado y completo. El desarrollo del Álgebra y el Análisis Matemático permitió demostrar que estas definiciones son equivalentes. Un camino adecuado puede ser demostrando que la propiedad del supremo implica la de completitud y la de Arquímedes; la completitud es equivalente a la de encaje y por último la de encaje y la de Arquímedes implican la del supremo. Estas demostraciones pueden encontrarse en Iribarren (1973, pp. 119-129) ó Rudin (1990, p. 57); Iribarren (1973, p. 129), Dieudonné (1966, p. 58), Dieudonné (1966, p. 31), respectivamente.

1.3.3. Definición axiomática de los números reales

Como dijimos, en la actualidad se considera el conjunto de los números reales definido axiomáticamente. Es decir, el número real es *un elemento de un conjunto con estructura algebraica de cuerpo, ordenado y completo* (una definición de este tipo puede verse en Gentile (1976 pp 13-16 y 200).

Esto es que se tiene como elementos primitivos un conjunto R con elementos llamados *números reales* y dos operaciones: *adición (+)* y *multiplicación (.)*. El hecho de que, axiomáticamente, sean operaciones nos dice que si sumamos dos reales obtendremos un (único) real, en forma similar si multiplicamos dos reales obtendremos un (único) real.

R con estas dos operaciones verifica los siguientes *axiomas de cuerpo.*

Cualesquiera sean los números reales a, b y c:

A1. Ley asociativa para la adición: $a+(b+c) = (a+b) + c$

A2. Existencia de una identidad para la adición: *para todo a se verifica:* $a + 0 = 0 + a = a$

A3. Existencia de inversos para la adición: *para cada a existe -a tal que:* $a + (-a) = (-a) + a = 0$

A4. Ley conmutativa para la adición: $a + b = b + a$

A5. Ley asociativa para la multiplicación: $a.(b.c) = (a.b).c$

A6. Existencia de una unidad para la multiplicación: *para todo a se verifica* $a.1=1.a=a$. $(1\neq 0)$

A7. Existencia de inversos para la multiplicación: *para cada a existe* a^{-1}, *tal que,* $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

A8. Ley conmutativa para la multiplicación: $a.b= b.a$

A9. Ley distributiva: $a.(b+c) = a.b + a.c$

El *orden* de los números reales es dado en forma axiomática, mediante la definición de una relación de orden, denominada “<” (*menor que*), que verifica los siguientes *axiomas de orden.*

Cualesquiera sean los reales a, b y c:

A10. Ley de antisimetría*: si* $a<b$ *y* $b<a$ *entonces* $a=b$

A11. Ley de transitividad: *si* $a<b$ *y* $b<c$ *entonces* $a<c$

A12. Ley de tricotomía: *a<b o b<a o a=b (se verifica una y sólo una de estas posibilidades)*

A13. Compatibilidad con la adición: *si a<b entonces a+c < b+c*

A14. Compatibilidad con la multiplicación: *si a<b y r>0 entonces r.a < r.b*

Este orden es un orden total derivado del axioma de tricotomía y posee la característica de que un intervalo acotado puede no tener primer elemento, lo que lo diferencia del orden de los números naturales.

Con las propiedades de cuerpo ordenado podemos deducir (y demostrar) en el conjunto de los números reales todas las propiedades y todos los teoremas algebraicos (incluidas la resolución de ecuaciones) y aquellos que involucren el orden total.

Otra propiedad importante, que no es un axioma, sino que se deduce de ellos, es la propiedad de *densidad* de los racionales en los reales. Se puede demostrar a partir de los axiomas de cuerpo ordenado que: dados dos números reales distintos (supongamos a<b) hay por lo menos un número racional q tal que a<q<b. Esto puede ser expresado con la frase: *entre dos reales siempre hay un racional*, lo que nos lleva a concluir, que entre dos números reales hay infinitos números reales. La *densidad* es una propiedad que diferencia a los números reales y racionales de los números enteros.

El conjunto de los números racionales es también un cuerpo ordenado, y por lo dicho anteriormente es denso. Sin embargo, hemos visto que hay números que no se corresponden con los números racionales, como $\sqrt{2}$ o π.

El axioma que caracteriza al conjunto de números reales y lo diferencia del subconjunto de racionales es el *axioma de completitud* y se enuncia:

A15*. Dado un subconjunto de números reales acotado superiormente existe un número real que es la menor de esas cotas superiores* y se lo llama *supremo.*

La existencia del supremo refiere a que es (axiomáticamente) un número real. Del axioma de completitud se deducen dos propiedades fundamentales de los números reales pero que sin embargo comparten con los números racionales: la *densidad* y la *arquimedianidad.* Ya hemos planteado el significado de la primera. La propiedad de Arquímedes se enuncia: *dados dos reales positivos p y q, siempre existe un número natural n tal que p < n.q*. Sin embargo, de la densidad y la arquimedianidad no puede deducirse la completitud.

A partir de esta definición axiomática, se define el conjunto de números naturales (N) como el menor (en sentido de la inclusión) de los conjuntos inductivos en R. Un conjunto inductivo es aquel que tiene como elemento al 1 (que es un real por A6) y cumple con que, si n es un elemento de tal conjunto, entonces n+1 también lo es.

Los enteros (Z) surgen de la unión de los naturales, el cero y los opuestos de los naturales (asegurados por A3); enteros positivos, cero y enteros negativos respectivamente. $Z = N \cup \{0\} \cup N^{-}$

Los racionales (Q) es el conjunto de todos los cocientes de enteros (producto de un entero por el inverso de un entero distinto de cero), el inverso asegurado por A7. Todo número real que no sea racional se llamará irracional. De modo que $R = Q \cup I$.

Tendremos que los naturales están incluidos en los enteros, estos en los racionales y estos últimos en los reales. Esto es: $N \subset Z \subset Q \subset R$

1.3.4. La completitud de los reales

El conjunto de números racionales a pesar de ser denso y arquimediano, no alcanza a ser completo. La densidad del conjunto de los racionales no es suficiente para asegurar su completitud, ya que, por ejemplo, el conjunto de todos los racionales tales que al cuadrado sean menores que 2 es acotado superiormente y sin embargo no posee supremo racional. Con la misma idea, podemos aceptar que entre dos números reales siempre habrá al menos un número real, es más, habrá *infinitos* y esto no sería suficiente para asegurar la completitud que debe darse necesariamente en forma axiomática.

Todo cuerpo ordenado con la propiedad del supremo es un cuerpo ordenado *completo*, lo cual, además de introducir un nuevo nombre, sugiere que el conjunto en cuestión ya no puede ampliarse con nuevos elementos (o reducirse) de manera que se sigan cumpliendo sus propiedades esenciales.

En efecto, se demuestra que todo cuerpo ordenado completo es *isomorfo* al conjunto de los números reales (R), lo cual significa que es estructuralmente idéntico a R, salvo quizá por la forma de representar sus elementos o por un cambio de nombre de estos. Es decir que el conjunto de los números reales (R) es una muy buena representación del concepto: *cuerpo ordenado y completo.*

Esto nos permite prescindir de cualquier interpretación de la naturaleza de los entes a los cuales nos referimos y así, según el contexto, se puede hablar indistintamente, por ejemplo, de números reales, de cortaduras, de puntos de una recta o de números complejos con parte imaginaria nula. La definición de isomorfismo de cuerpo ordenado y una demostración algebraica del teorema *"todo cuerpo ordenado completo es isomorfo a R",* se puede encontrar en Spivak (1991, pp. 831-835). Otra demostración analítica, basada en propiedades métricas se puede consultar en Iribarren (1973, pp. 189-194).

Es de destacar que hacia el interior de la Matemática misma la "técnica" de completar el espacio fue la idea que se usó para conseguir otros espacios completos (por ejemplo, los espacios de funciones) es decir se creó una nueva tecnología Matemática que es la *completación* de espacios.

1.3.5. Representaciones externas de los números reales

Los matemáticos de fines del siglo XVIII y del siglo XIX reconocieron que las propiedades algebraicas y de orden no bastaban para diferenciar los números reales de los racionales. Esto derivó en varias definiciones constructivas, principalmente las realizadas por Weierstrass, Cantor y Dedekind quienes, para construir los *irracionales,* se basaron en las propiedades de cuerpo ordenado de los números racionales.

Como dijimos, en la actualidad se considera el conjunto de los números reales definido axiomáticamente. Es decir, el número real es *un elemento de un conjunto con estructura algebraica de cuerpo, ordenado y completo* El axioma que caracteriza al conjunto de números reales y lo diferencia del subconjunto de racionales es el *axioma de completitud* y se enuncia:

A15. *Dado un subconjunto de números reales acotado superiormente existe un número real que es la menor de esas cotas superiores* y se lo llama *supremo.*

La existencia del supremo refiere a que es (axiomáticamente) un número real. Del axioma de completitud se deducen dos propiedades fundamentales de los números reales pero que sin embargo comparten con los números racionales: la *densidad* y la *arquimedianidad.* El conjunto de números racionales a pesar de ser denso y arquimediano, no alcanza a ser completo. La densidad del conjunto de los racionales no es suficiente para asegurar su completitud, ya que, por ejemplo, el conjunto de todos los racionales tales que al cuadrado sean menores que 2 es acotado superiormente y sin embargo no posee supremo racional. Con la misma idea, podemos aceptar que entre dos números reales siempre habrá al menos un número real, es más, habrá *infinitos* y esto no sería suficiente para asegurar la completitud que debe darse necesariamente en forma axiomática.

El conjunto de los números reales posee varias representaciones externas, cada una de las cuales tiene el potencial de evidenciar diferentes propiedades de estos números. Sin embargo, la carencia intrínseca de una representación que pueda dar cuenta de todas las características de este conjunto numérico (Steiner, 1984; Stevenson, 2000) añade complejidad epistemológica a estas representaciones.

En particular nos centraremos en dos tipos de sus representaciones externas: los desarrollos decimales, basados en la aceptación del infinito actual y la recta como representación de los números reales, que implica la aceptación de la recta geométrica como *continua* y la correspondencia uno a uno del conjunto de los números reales y la recta como conjunto de puntos.

La notación decimal de los números reales. En el siglo XVI surge entre los matemáticos la idea general de número irracional como consecuencia de la introducción de la notación decimal. Si se transforma una fracción en número decimal, obtenemos *finitas* o *infinitas-periódicas cifras decimales* (también puede ser mixtas, es decir finitas sin período, seguidas de infinitas-periódicas). Recíprocamente es sencillo expresar cualquier número de forma decimal finita o periódica como una fracción. Este hecho da paso a pensar en la existencia de expresiones decimales de *infinitas cifras sin período* (es decir, sin ninguna regularidad). De esta manera estas expresiones, que pueden pensarse, pero no escribirse, pueden concebirse como números que no son racionales.

En la Matemática escolar por lo general se distinguen los números racionales de los irracionales mediante su representación en el sistema decimal (esto es los racionales representados por una expresión decimal finita o infinita periódica y los irracionales por una expresión decimal infinita no-periódica). Vale destacar que esta definición presenta dificultades teóricas, ya que puede suceder que frente a determinado número no podamos decidir si es irracional o no. Por ejemplo 3,14159… (si no sabemos que es PI), podría ser 3,141599999… (con infinitos 9s) y por lo tanto ser racional.

Es decir, si sabemos que es irracional (por construcción o por demostración) sabemos que tiene una expresión decimal infinita no-periódica, sin embargo, dada una expresión decimal infinita (sin más detalles) no podremos saber si se trata de un número racional o irracional. Destacamos que la cualidad de ser racional o irracional es independiente de la notación decimal, incluso lo es de cualquier base que se tome para representar el número. Es una cualidad intrínseca del número independiente de la notación utilizada.

La recta geométrica como representación de los números reales. En el trabajo matemático es usual pensar a la recta geométrica como una representación del conjunto de los números reales y en este sentido se piensa a la recta geométrica como *continua*, es decir que la recta matemática no posee huecos o vacíos. Esta característica fue usada en forma transparente por los matemáticos a través de los siglos. El *axioma de continuidad* formaliza esta característica de la recta fijando la relación uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales, de alguna manera identificando la continuidad de ésta con la completitud de los reales. Una versión del axioma de continuidad es presentada por Ferraris y Ferrero (2000).

Esto se puede interpretar como que, a todo número real, ya sea racional o irracional, le corresponde un único punto sobre la recta y recíprocamente. Este hecho, que no puede ser demostrado a partir de los axiomas de cuerpo ordenado y completo, es en realidad un axioma, llamado *axioma de Cantor* (Crossley, 1987). Este axioma establece una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta y es la base de la Geometría Analítica.

La afirmación de que la recta está constituida por puntos ha generado por siglos mucha controversia y debate. Para Aristóteles (siglo IV a.C.) la recta no estaba constituida por puntos, ya que esto llevaría a contradicciones. Este debate pudo ser zanjado a través de establecer en forma axiomática la continuidad de la recta en correspondencia con la completitud de los números reales.

Tanto Cantor como Dedekind, aunque de manera independiente, basaron la biyección entre números reales y el conjunto ordenado de puntos de la recta en un axioma. Cantor afirma que una vez que ha sido determinado un origen y la unidad sobre la recta, todo punto de la misma queda determinado por su abscisa. De manera recíproca, asegura que a cada magnitud numérica corresponde también un punto determinado de la recta, cuya ordenada es igual a esta magnitud numérica.

Dedekind (1963/1872) reconoce que es necesario expresar la continuidad de la recta mediante algún axioma, expresando que: si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases.

Es interesante el hecho de que la recta geométrica puede actuar no sólo como representante del conjunto de los números reales, sino que también puede representar a otras estructuras numéricas diferentes. Como ejemplo podemos mencionar la estructura numérica de los hiperreales desarrollada por Robinson (1974) en el análisis no estándar y el continuo geométrico de Veronese (1994). Ambos, en el contexto de determinado sistema axiomático, utilizan a la recta como modelo de sendas estructuras numéricas diferentes de los números reales.

1.4. Breve repaso histórico-epistemológico sobre el infinito matemático

La de número real es una potente idea sobre la cual se construye gran parte del desarrollo de la Matemática y está íntima y esencialmente ligada a la de infinito matemático, idea contraintuitiva que por más de veinte siglos no fue aceptada y precisada formalmente en la ciencia Matemática, por lo que aquí nos ocuparemos de hacer un breve repaso histórico-epistemológico sobre el infinito en las Matemáticas.

Pese a la falta de sustento empírico para la noción de infinito -no hay nada en la vida cotidiana que sea infinito- éste posee una estructura formal innegable para la Matemática contemporánea y ha sido fuente de importantes resultados en esta ciencia. Según D. Hilbert[12], el concepto de infinito "como ninguno ha turbado tan profundamente el espíritu humano, ha estimulado tan profundamente su intelecto y, sin embargo, ningún otro concepto tiene mayor necesidad de clarificación" (citado en D'Amore, 1996, p. 345).

Como hemos venido adelantando, a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX tuvo lugar un profundo proceso de reestructuración en la Matemática que involucró las nociones de límite y número real, la identificación del conjunto de los números reales con el continuo geométrico y el uso de los métodos infinitesimales, cuestiones todas en las que subyace el concepto de infinito.

Como culminación explícita de ese proceso encontramos la obra de Cantor, quien dotó de sentido matemático al concepto de infinito actual, desarrollando lo que bautizó aritmética de los números transfinitos. Puso así los cimientos de la teoría de conjuntos abstractos y contribuyó a fundamentar el cálculo diferencial y el continuo de los números reales. A continuación, repasamos brevemente la evolución histórica de este concepto, sin pretender más que dar una idea global de este vasto proceso.

La famosa paradoja de Aquiles y la tortuga atribuida a Zenón de Elea (siglo V a.C.), que pretende demostrar la imposibilidad del movimiento, plantea tempranamente el problema de la verdad razonada versus verdad sensible que presenta el concepto de infinito. De acuerdo con Bourbaki (1972, p.45): "desde los griegos hasta Cantor y Bolzano vemos fracasar a filósofos y matemáticos ante la paradoja de una magnitud finita formada por infinitos puntos 'sin medida'".

En las contribuciones Matemáticas y filosóficas de la Grecia antigua se presenta tempranamente la dicotomía infinito potencial - actual. El infinito potencial remite a diversas experiencias mentales fácilmente reconocibles, tales como comenzar a contar *uno, dos, tres*, ... y seguir contando, o imaginar que contamos, sin detenernos jamás, ya que cada vez que tengamos un número, podremos obtener otro más grande y así sucesivamente. El infinito pensado de esta manera es conocido por Aristóteles en la Grecia del siglo IV a.C. como *infinito potencial*, posiblemente asociado a la infinitud potencial del tiempo.

Aristóteles, asimismo, establece la imposibilidad de considerar el *infinito actual*, ya que éste se le presentaba necesariamente como paradójico y contradictorio. Con ello, podríamos decir que se expulsa de las Matemáticas la posibilidad de pensar en conjuntos formados por una infinidad de elementos concebidos como simultáneamente

---

12 David Hilbert (1862 –1943.) Matemático alemán que trabajó en muchas ramas de la Matemática. Su trabajo en geometría tuvo la mayor influencia en el campo desde Euclides. Su papel fue fundamental en la fundamentación de la Matemática del siglo XX.

existentes. De hecho, esta imposibilidad resultó dominante en el trabajo que matemáticos y filósofos desarrollaron durante más de 20 siglos.

Euclides, en su magnífica obra *Elementos*, usa sólo el infinito potencial, evitando permanentemente la explicitación del infinito actual. Asimismo, los matemáticos clásicos expresan que un punto pertenece a una recta, pero no hacen explícito que la misma está compuesta de infinitos puntos. Esta actitud persiste en Gauss[13], quien en 1831 manifiesta que el hablar de una cantidad infinita como cantidad completa jamás está permitido en Matemática (Dauben, 1995).

Por otra parte, Euclides enuncia, asignándole el estatus de *noción común*, que *el todo es mayor que cada una de las partes*. Este principio lleva a Galileo Galilei[14] (1564-1642) a fundamentar la imposibilidad de la existencia de conjuntos actualmente infinitos, al comprobar que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números enteros y sus cuadrados, lo que contradice esa noción común.

En el siglo XVII, como vimos, Newton y Leibniz emplean en forma implícita las nociones tales como el infinito y las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes a fin de desarrollar el cálculo infinitesimal e integral.

A comienzos del siglo XIX, B. Bolzano[15] redacta las *Paradojas del infinito*, donde reivindica la existencia del infinito actual e introduce el uso de conjuntos arbitrarios. También reconoce que la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos es, precisamente, la posibilidad de estos últimos de estar en correspondencia biunívoca con una parte propia.

La aceptación explícita de la existencia de conjuntos *actualmente* infinitos, que se da a fines del siglo XIX, permitió que se solucionen los problemas de la definición de número real y de la noción de límite, con los trabajos, como dijimos, de matemáticos como Cantor, Dedekind y Weierstrass.

A fines de ese siglo, Cantor enuncia la teoría de conjuntos abstractos, en la cual trabaja con números transfinitos cardinales y ordinales, y muestra que no todos los conjuntos infinitos son *igualmente* infinitos. Establece el concepto de *potencia* de una colección infinita, que más tarde conoceríamos como *cardinalidad*. Durante años, este matemático evita hablar de la potencia de un conjunto como un número.

---

13 Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) matemático, astrónomo y físico alemán. Contribuyó significativamente en Teoría de Números, Análisis Matemático, Geometría Diferencial, Estadística, Álgebra, Geodesia, Magnetismo y Óptica, teniendo una influencia notable en muchos campos de las Matemáticas y de la Física.

14 Galileo Galilei (1564- 1642). Astrónomo, ingeniero, filósofo, matemático y físico italiano, relacionado estrechamente con la revolución científica. Eminente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura). Sus logros incluyen la mejora del telescopio, observaciones astronómicas, la primera ley del movimiento y un apoyo determinante a la Revolución de Copérnico.

15 Bernard Bolzano (1781–1848). Matemático, lógico, filósofo y teólogo bohemio que escribió en alemán y que realizó importantes contribuciones a las Matemáticas y a la Teoría del Conocimiento.

En 1883 comienza a considerar a todos los conjuntos de igual potencia con un mismo cardinal infinito. Recién diez años después la bautiza con la letra hebrea *Alef (*ℵ). Cantor introduce los números transfinitos (o infinitos), a modo de extensión autónoma y sistemática de los números naturales.

Una vez superado por los matemáticos lo que el mismo Cantor (1899) llamó *horror infiniti* o imposibilidad de visualizar el infinito actual, y bajo la luz de la formalización de la Matemática introducida principalmente a partir del trabajo de Hilbert a principios del siglo XX, se llega a la axiomatización de la teoría de conjuntos. Uno de los más grandes logros de esta axiomatización es la definición precisa de conjunto infinito y con ella, la definición de número natural como cardinal de los conjuntos finitos.

***Comparando conjuntos infinitos de números*.** Para comparar el tamaño de dos conjuntos finitos se puede ir aparejando cada elemento del primero, con cada uno del segundo. Por ejemplo, si tenemos dos baldes uno con bolillas rojas y otro con bolillas negras, podemos ir sacándolas de a pares, una roja y una negra. Si cuando no puedo formar más pares no han quedado bolillas en ningún balde, concluiríamos que ambos tienen la misma cantidad de bolillas. Si en cambio han quedado bolillas en uno de los baldes, esto nos sirve de comparación. De este principio elemental se valió Cantor para comparar conjuntos ahora infinitos.

Para Cantor dos conjuntos tienen la misma potencia (o cardinal) si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos. Propone considerar a todos los conjuntos de igual potencia con un mismo cardinal infinito. En esta teoría los conjuntos infinitos son comparados por cardinalidad, estableciéndose una relación de orden entre las cardinalidades de los conjuntos.

Cantor demostró que hay tantos números pares como enteros, tantos naturales como enteros, tantos enteros como racionales (o fracciones). A estos conjuntos coordinables con los naturales se les denomina numerables. El siguiente paso de Cantor fue todavía más notable: demostró que no puede existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales, es decir que estos últimos son no-numerables.

Cantor, yendo más allá de los números reales, comunica a Dedekind que, contrariamente a la opinión Matemática prevaleciente, es posible establecer una correspondencia biunívoca entre la recta y el plano, por ejemplo, entre un cuadrado y uno de sus lados, para lo que usa la expresión: *¡Lo veo y no lo creo!*

Cantor mostró que hay infinitos números naturales y que hay tantos enteros como naturales, más aún, que hay tantos naturales como racionales. Sin embargo, mostro que los números reales no son coordinables con los números naturales. Los reales son infinitos, como lo son los naturales, los enteros o los racionales, pero de una magnitud infinita mayor. Destacaremos aquí otro aspecto característico de los números reales que es la *cantidad infinita no-numerable de números reales.* Esta no-numerabilidad de los reales les viene dada por los irracionales.

Nos interesa destacar la figura de Bolzano quien al comienzo del siglo XIX reivindica la existencia del infinito actual y precisamente, reconoce que la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos es la posibilidad de estos últimos de estar en correspondencia biunívoca con una parte propia. Por ejemplo, los números enteros se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números pares, es decir que, para cada entero n, hay un número par 2.n, a diferencia de lo que sucede con un conjunto finito como el de los 10 primeros enteros, en el que los pares son la mitad de los enteros. Sin embargo, considera que los conjuntos sólo pueden ser comparados por inclusión, respetando a la hora de comparar la noción común, establecida por los griegos antiguos que el todo es mayor que cada una de las partes.

Entonces que los conjuntos infinitos pueden ser comparados de dos maneras:

- por inclusión: un conjunto incluido estrictamente en otro es menor (en el sentido de la inclusión) que éste. La relación de inclusión es una relación de orden parcial, es decir puede haber conjuntos incomparables. El todo es considerado mayor que la parte y la correspondencia uno a uno entre el todo y una parte es una característica de la infinitud del conjunto.

- por cardinalidad: en este modo de comparar, mediante correspondencias biunívocas, el todo puede ser igual (o equivalente) a la parte. Todo par de conjuntos es comparable. Se establece que todos los conjuntos coordinables poseen un mismo cardinal. Cada cardinal infinito se constituye en un nuevo objeto (número cardinal, cantidad infinita o número transfinito). Se puede operar con estos nuevos objetos.

Capítulo 2

Aspectos educativos y cognitivos en torno a los números reales

Dado que nos hemos propuesto estudiar cómo comprenden estudiantes de secundaria y de universidad el número real, en el capítulo anterior nos hemos ocupado de repasar desde la Historia y la Epistemología la construcción de conceptos claves para nuestro estudio en comunidades de especialistas, en búsqueda de instrumentos para identificar y comprender las distintas concepciones que los y las estudiantes elaboran en este campo de la Matemática. En el presente capítulo daremos cuenta de qué entendemos por comprensión en matemática, por concepciones sobre el número real y por último reseñaremos aspectos educativos y cognitivos de este concepto, dando cuenta de bibliografía que nos ha servido de base para avanzar en el estudio.

2.1. La comprensión en Matemática

Una idea arraigada en la comunidad Matemática y de Educación Matemática es que para *hacer* matemática y para aprenderla se deben *comprender* los conceptos, métodos, procedimientos, relaciones y formas de representación de esta ciencia.

Para caracterizar qué es la comprensión partimos de la idea de qué, al interactuar con el mundo, participando en una variedad de prácticas socioculturales en una diversidad de ámbitos (cotidianos, académicos, profesionales) las personas generan conocimientos y aprenden. Estos procesos se representan internamente y esas representaciones internas están estructuradas de alguna manera. Según la clásica caracterización de Hiebert y Carpenter (1992, p.67) “Las Matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de esas conexiones”. En términos similares se expresa Sierpinska (1994) en su libro sobre la comprensión en Matemática.

Sin dudas estas representaciones internas de los conocimientos son fundamentales y necesarias en Matemática. Coincidimos con Sfard (1991; 2008) cuando afirma que, a diferencia de los objetos materiales, los conceptos matemáticos avanzados son totalmente inaccesibles a nuestros sentidos y solo podemos acceder a ellos a través de nuestras representaciones internas. Cuando graficamos una función o escribimos un número tenemos que enfatizar que el signo que utilizamos es una de las posibles representaciones externas de la entidad abstracta matemática y que nos sirven para interactuar con ella y para comunicarla.

Desde esta perspectiva la comprensión requiere mucho más que ejecutar procesos y aplicar resultados matemáticos. Es un proceso constructivo que implica elaborar un vínculo entre acciones sobre objetos conocidos y representaciones internas de la acción, dando lugar a la construcción de una estructura interna asociada a los signos y significados matemáticos externos (Sfard, 1991; 2008). Las personas comprenderán la matemática interactuando con sus representaciones internas (concepciones), reflexionando, interrelacionándolas y usándolas para resolver problemas a través de las representaciones externas de los conceptos. Según Godino (2000) esta faceta psicológica de la comprensión como "experiencia mental" y como "conexión a redes internas de representación de información" debería ser complementada con la faceta antropológica como "correspondencia entre los significados personales e institucionales", enfatizando, asimismo, el papel de las situaciones-problemas y las formas de expresión en los procesos de comprensión, tanto en su sentido personal como institucional.

Concluimos que comprender en matemática es ir más allá de la simple lectura o escritura de axiomas, definiciones, teoremas y de la aplicación de algoritmos, de modo de dar significado a la información relacionándola con otras informaciones o ideas, dar sentido a esta información, dar explicaciones conectándolas con experiencias o conocimientos anteriores, integrar distintos modos de visualizar un concepto y distintas representaciones externas del mismo, relacionar éste con otros conceptos y utilizar esta información para construir nuevos conocimientos o resolver problemas.

En este trabajo nos hemos propuesto estudiar la comprensión que han construido estudiantes de nivel secundario y universitario sobre la noción de número real, por lo cual señalamos la importancia de distinguir, en el campo de las matemáticas, entre los conceptos (consensuados en comunidades científicas) y las concepciones (personales) de los y las estudiantes, que por momentos se relacionarán con las concepciones institucionales (escuela, universidad), como así también con el contexto de la tarea a resolver.

2.2. Las concepciones estudiantiles

Desde la década 1970-1980, las teorías del aprendizaje enfatizan en el estudio de las concepciones de los y las estudiantes como uno de los puntos de partida y referencia permanente de la enseñanza orientada hacia la construcción de un aprendizaje significativo (Ausubel et al., 1978/83) y consideran que es necesario movilizar las ideas que los y las aprendices utilizan en diferentes contextos, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas.

Estas ideas se originan en una constelación de factores, que incluyen formas habituales de razonamiento humano, la cultura en la que los y las estudiantes participan y en particular sus experiencias educativas. Suelen, además, interferir con la adquisición de conocimientos académicos (Pozo, 2014; Pozo y Gómez-Crespo, 1998; Vosniadou, 2008). Vigotsky (1973) señaló, años antes, que en todo proceso de enseñanza y aprendizaje existe una prehistoria del aprendizaje y Bachelard (1938/1987), por su parte, afirmó que en todo proceso educativo se conoce contra un conocimiento anterior; las concepciones son al mismo tiempo herramientas para interpretar la realidad y conducirse a través de ella y barreras que impiden en ocasiones, adoptar perspectivas y cursos de acción diferentes.

Podríamos considerar a Piaget como precursor del estudio de las concepciones de los niños, las niñas y jóvenes en distintos dominios de conocimiento, incluidos los números y la geometría (Piaget, 1952; Piaget e Inhelder, 1956; 1969). Sin embargo, en el marco de la investigación cognitiva, el aspecto destacado en sus teorías de "estadio evolutivo" fue muy criticado ya a partir de esa misma década (Carretero, 1997).

Desde los años ochenta del siglo XX, se han estudiado las concepciones de los sujetos ya no como una manifestación de estadios evolutivos, sino en relación con el nivel de pericia en dominios específicos y del contexto de la tarea (Eylon y Linn, 1988; Godino, 2000; Pozo y Carretero, 1987). Este aspecto de la influencia del contenido sobre el razonamiento de jóvenes y adultos, otrora llamado formal, ha hecho que se preste atención a las ideas previas del sujeto en distintos dominios de conocimiento y dio origen a investigaciones específicas sobre las concepciones del estudiantado en distintos campos de conocimiento en el nivel secundario y universitario (Bergé, 2008; Montoro, 2005; Pérez-Echeverría et al., 2010; Scheuer, N., 2005; Voskoglou y Kosyvas, 2012)

La corriente de investigación interesada en las concepciones pretende comprender cómo el sujeto es capaz de construir representaciones acerca del mundo, predecir y controlar sus acciones en el entorno e incluso relacionarse y apropiarse de representaciones externas (Martí, 2003; Pérez-Echeverría et al., 2010) o sistemas notacionales críticos para almacenar y transformar el conocimiento cultural. Debemos tener en cuenta que las concepciones de los y las estudiantes generalmente no son algo arbitrario o casual, por lo contrario, presentan cierta sistematicidad. Al ser, en la mayoría de los casos un producto cultural que intenta dar sentido al mundo forma parte del "sentido común" a través del cual el sujeto interactúa con el medio y por lo tanto se presentan como muy difíciles de modificar (Pozo y Gómez-Crespo, 1998)

Una primera diferenciación clásica en las investigaciones sobre las concepciones de los sujetos estaría dada por cuanto éstas se analicen desde *la perspectiva de la ciencia,* en la cual las concepciones de los sujetos son evaluadas desde la adecuación o inadecuación que presentan con respecto a las explicaciones científicas o cuando se lo hace desde *la perspectiva del sujeto* en la cual se intenta describir y explicar la naturaleza, estructura y funciones del conocimiento personal del sujeto (Driver y Easley, 1978). Dependiendo de estas dos posturas, las concepciones de los sujetos han recibido diversas denominaciones. Por ejemplo, desde la primera perspectiva tendremos *generalizaciones correctas o incorrectas; ideas correctas o erróneas,* etc., mientras que desde la segunda encontraremos *modelos personales de la realidad y caminos espontáneos de razonamiento, etc.* En la actualidad esta distinción no es tan drástica, pudiendo vérselas como complementarias.

Según Pozo y Carretero (1987), existen características comunes de las concepciones previas (o alternativas) del estudiantado. Éstas pueden ser: funcionales, son un buen instrumento para entender y actuar sobre el entorno; personales; pueden ser científicamente incorrectas; resistentes al cambio; ubicuas; pueden ser incoherentes o contradictorias entre sí; en algunos casos reproducen etapas pasadas en la evolución del conocimiento científico y pueden ser espontáneas, es decir que pueden surgir sin que medie actividad educativa específicamente diseñada para producirlas.

Consideramos que las concepciones que las personas construyen, si bien son persistentes y no se cambian fácilmente, tienen la propiedad de modificarse a partir de la práctica educativa, con nuevos contextos y objetos de estudio. Es por ello que el conocimiento de estas concepciones por parte de los y las docentes puede actuar como herramienta que favorece el aprendizaje.

La dualidad conceptos – concepciones

Tratándose de educación matemática, el tratamiento de las concepciones nos remite rápidamente al término *concepto*, problemático en sí mismo. White (1988) y White y Gunstone (1989) consideran que el término *concepto* es usado de dos maneras distintas, por un lado, designando un sistema de clasificación que permite ubicar una instancia dentro de una clase y, por otro lado, como todo conocimiento que un sujeto asocia al nombre (del concepto). En cuanto a la idea de *concepción,* piensan que se trata de un sistema de explicación, más complejo y difícil de definir. Si consideramos que las dos formas de entender un concepto, lejos de ser opuestas, se pueden ver como complementarias, la noción de concepto se encuentra muy próxima a la de concepción, por cuanto todo el conocimiento asociado a un nombre no deja de ser una explicación cuando se aplica a la interpretación de la realidad.

Estudios empíricos realizados ponen de manifiesto que las personas emplean diversos tipos de representaciones con relación a los fenómenos a los que refiere un concepto, dependiendo del nivel de conocimiento el sujeto (de hecho, expertos y novatos establecen distintas representaciones de los conceptos); del concepto a representar (no es lo mismo representar “silla”, “libertad” o “circunferencia”) (Chi et al.,1989; Eylon y Linn, 1988; Rodrigo, 1997; Sfard, 2008). Además, como indica Howard (1987), la formación de conceptos en contextos cotidianos acostumbra a ser relativamente concreta y basada en la percepción, mientras que en ámbitos académicos las representaciones tienden a ser más abstractas y a establecer relaciones con otros conceptos de la disciplina, en busca de explicaciones pertinentes.

En palabras de Sfard (2010, p. 211) entendemos el concepto como la palabra junto con sus usos discursivos, entendida como dicha por los miembros competentes de la comunidad de discurso, mientras que la concepción es la versión individual del concepto. El término concepción refiere a la manera especial en que una persona emplea la palabra en su discurso y resuelve situaciones en las que el respectivo concepto está involucrado.

Conceptos y concepciones en la investigación en educación matemática

Desde la investigación en educación matemática, diversos/as autores/as se han ocupado de establecer las relaciones entre el conocimiento personal (concepciones) y el conocimiento académico, legitimado y objetivado por una comunidad de especialistas (concepto) (Freudenthal, 1983; Sfard, 1991; 1994; 2008; Vinner y Dreyfus, 1989; entre otros/as), destacando que en muchas situaciones se registran relevantes brechas entre ambos, que en caso de no ser conocidas y trabajadas deliberadamente pueden conducir al fracaso de la enseñanza.

Desde la escuela holandesa de Didáctica de la Matemática, Freudenthal (1983) distingue explícitamente entre concepto y objeto mental. Lo que Freudenthal llama objeto mental es el concepto que una persona tiene de un determinado objeto matemático, "el campo semántico personal". Esta idea de objeto mental incluye la posibilidad de que las propias definiciones formales de los conceptos formen parte de los objetos mentales que estamos constituyendo. Pero vale la pena señalar que no es necesario que la definición matemática forme parte del objeto mental y que cuando ésta interviene en el objeto mental, forma parte de este, pero no lo sustituye.

Brousseau (1983) señala que todos generamos concepciones sobre determinadas nociones, que en algunas ocasiones se revelan falsas, insuficientes, ineficaces o inadaptadas para la resolución de situaciones y problemas, lo que provoca errores repetitivos y resistentes, convirtiéndose en obstáculos en el surgimiento de nuevas comprensiones. En esta perspectiva, es claro que la manifestación de obstáculos en el aprendizaje de los y las estudiantes está caracterizada por cierto tipo de conocimiento y no ausencia de éste.

Por otra parte, Herscovics y Bergeron (1983); Vinner (1983; 1992); Vinner y Dreyfus (1989) distinguen entre concepto e imagen conceptual (o esquema conceptual). El concepto es lo que se desprende de una definición matemática, mientras la imagen conceptual corresponde al concepto en la mente individual; esto es, el producto de los procesos de formación del concepto en la mente. Denominan imagen conceptual (concept image) a una entidad no-verbal que el sujeto asocia mentalmente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual y puede ser un conjunto de impresiones y experiencias. La imagen conceptual del o la estudiante es el resultado de su experiencia con ejemplos y no-ejemplos del concepto. Incluye todo lo que puede actualizar la mente relacionado con el concepto (todo lo que se evoca cuando, por ejemplo, se escucha la palabra o se ve un dibujo asociado al concepto). Las representaciones visuales, los dibujos mentales, las impresiones y las experiencias asociadas al nombre del concepto pueden traducirse en formas verbales, que generalmente no son lo primero que la memoria evoca cuando se oye o ve el nombre del concepto. Para algunos conceptos, además de su imagen, el sujeto dispone de una definición conceptual (concept definition) que refiere a la definición verbal que se tiene para cierta noción y que no tiene por qué ser la definición matemática. La imagen y la definición conceptuales dependen de la persona y del contexto, puede que no sean matemáticamente correctas y puede suceder que no se pueda describir la imagen del concepto verbalmente.

Para un concepto dado, desarrollamos una imagen conceptual, según Tall (2001) o esquema conceptual tal como lo llama Garbín (2005) que consiste en "toda la estructura cognoscitiva que tiene que ver con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados" (Tall y Vinner, 1981, p.152). Esta imagen conceptual crece y cambia con la experiencia y reflexión y puede no ser totalmente coherente, ya que varias partes de la imagen conceptual se desarrollan en tiempos diferentes y de modos diferentes, las conexiones usadas en una ocasión pueden ser diferentes de aquellas evocadas en otra. Las imágenes conceptuales se organizan a partir de experiencias parciales, que se concentran en ciertos aspectos de una situación, conectadas por distintas asociaciones (Tall, 2013a).

Desde la perspectiva de la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), un individuo desarrolla su comprensión de conceptos matemáticos construyendo y utilizando determinadas estructuras mentales. La construcción de estructuras asociadas a un concepto particular se relaciona íntimamente con la concepción que un individuo alcanza sobre dicho concepto. Una concepción es “algo intrapersonal, es decir, la idea o comprensión del individuo” (McDonald et al., 2000, p. 78); “que se desarrolla como resultado de una actividad reflexiva” (Arnon et al., 2014, p. 128). Cabe mencionar que dicho desarrollo no es lineal, hay un ir y venir entre diferentes etapas en la construcción del conocimiento matemático.

Sfard (2008) estudia la comprensión en matemática y establece la diferencia entre concepto como el constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento de la disciplina y concepción como la idea del concepto que vive en la mente humana, que depende de la experiencia personal y está sujeta a cambios. Tenemos, por un lado, el conocimiento matemático que se comparte socialmente y que está sujeto a transformaciones para poder ubicarlo como objeto de enseñanza, y, por el otro, el conocimiento subjetivo que los y las estudiantes relacionan con el conocimiento oficial.

Concepciones y comprensiones sobre el número real.

Cuando hablamos de comprensiones que han construido y naturalizado (Pozo, 2014) estudiantes sobre el número real, nos referirnos a toda la estructura cognoscitiva que tiene que ver con el concepto de número real, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados, en el sentido de imagen conceptual (Tall y Vinner, 1981, p.152). De manera similar entenderemos como concepción sobre aspectos del número real a todas las representaciones que evoque y ponga en juego el sujeto frente a situaciones que involucren el aspecto del concepto en cuestión. Incluyendo representaciones de diferente orden de complejidad, desde las llamadas concepciones intuitivas (Fischbein et al., 1979; Tirosh, 1991), hasta ideas acordes con la conceptualización matemática del mismo.

2.3. Aspectos educativos y cognitivos del número real

En los primeros años de la escuela primaria los niños y las niñas conocen los números naturales (N), se encuentran con que el 1 es el primer número natural y todo número natural tienen un *siguiente*, de lo que se puede concluir que N es un conjunto infinito, también conocen que entre dos números naturales consecutivos no hay otro número natural y la comparación entre números naturales es tal que se cumple que cualquier subconjunto de naturales (no vacío) tendrá un primer elemento.

Los números enteros se introducen, generalmente, en el tercer ciclo de la escuela primaria y se formalizan en los primeros cursos de la escuela secundaria, en un contexto aritmético a partir de la necesidad de ampliar el conjunto de números naturales con los números negativos que aparecen en situaciones concretas y permiten extender la recta numérica, al mismo tiempo el 0 (cero) toma sentido en ésta como número.

Al adentrarse en los estudios secundarios, la enseñanza propone profundizar la comprensión y el uso de los números racionales y hacia el final de este período se espera que los y las estudiantes comprendan el concepto de número racional, de número real, manejen el sistema de representación decimal, puedan ordenarlos, representarlos sobre la recta numérica y usarlos para resolver problemas.

La diferenciación de número racional y número irracional es esencial para la construcción del concepto de número real, que se realiza en la escolaridad extendiendo el campo numérico desde el conjunto de números racionales, propios de la matemática escolar, hacia el de números reales ámbito de la matemática avanzada. En los primeros cursos de matemáticas universitarias, frecuentemente se trabaja con la noción de número real, como si fuese un contenido ya naturalizado en la escuela, sin proponer un estudio deliberado y formal al respecto.

2.3.1. Estudiantes pensando los números reales

El pasaje de los números naturales a los enteros con que se enfrentan los y las estudiantes al finalizar la escuela primaria, presenta dificultades epistemológicas y cognitivas importantes, relacionada generalmente con los números negativos. Muchas investigaciones afirman que estas dificultades y obstáculos, generalmente son debidos al obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983) que surge al considerar el número como una cantidad referida al mundo concreto.

En este trabajo no nos ocuparemos de las posibles concepciones sobre números negativos, entendiendo que aun cuando pueda permanecer como obstáculo, nuestra población en general ha extendido su campo numérico hacia los números racionales primero y reales luego; teniendo amplia experiencia educativa al respecto. Sin embargo, tendremos en cuenta las investigaciones que muestran que el estudiantado de los primeros cursos de la secundaria mantiene las concepciones sobre el número natural construidas en la escuela primaria y que la trasladan al campo de los enteros (positivos, cero y negativos). No solo en cuanto el número como cantidad concreta, sino la suma como aumento, la resta como disminución, la multiplicación y la división como operadas entre naturales (Bell, 1986; Bruno, 1997; Conne, 1985; Glaeser, 1981; Küchemann, 1981; Vergnaud, 1982; Vergnaud y Durand, 1976).

De lo discreto a lo denso

Luego de los números enteros, el currículo matemático escolar contempla la enseñanza de los racionales como fracciones de enteros o como decimales. Según Ni y Zhou (2005), el acto de contar es el primer acercamiento a una representación del número natural, de lo discreto. Esta representación persiste en la o el estudiante hasta tal punto que en problemas relacionados con fracciones o decimales considerará propiedades de los números naturales para resolverlos. Vamvakoussi y Vosniadou (2004) afirman que el conocimiento previo sobre los números naturales (discretos) restringe la comprensión de la propiedad de la densidad de los números racionales.

En ocasiones se enseñan las fracciones y los decimales como tipos distintos de números, lo que puede llevar a que alumnos y alumnas consideren que diferentes representaciones de un mismo número racional representan diferentes números (Khoury y Zazkis, 1994; O'Connor, 2001) y más aún que los decimales y las fracciones son subconjuntos disjuntos del conjunto de números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010). El concepto de número racional puede permanecer aislado de la clase más amplia de números reales (Moseley, 2005).

Vamvakoussi y Vosniadou (2004), estudiaron cómo comprenden la densidad de los racionales, estudiantes de noveno grado (alrededor de 15 años) y elaboraron cinco categorías de respuestas de los participantes que da cuenta de un proceso gradual, de lo discreto a lo denso. (i) *discretitud ingenua*: se piensa que no hay número entre dos números racionales (falsamente) consecutivos, la idea es que existe el sucesor de un número racional; (ii) *discretitud avanzada*: se piensa que hay una cantidad finita de números entre dos números racionales (falsamente) consecutivos; (iii) *discretitud-densidad:* en algunos casos, se piensa que entre dos números racionales hay infinitos números, y en otros casos que hay una cantidad finita de números; (iv) *densidad ingenua*: se piensa que hay una infinidad de números en un intervalo, pero esta situación no se justifica usando la propiedad de densidad. La representación simbólica de los extremos de un intervalo influye en esta forma de pensar y (v) *densidad sofisticada*: se piensa que hay infinitos números entre dos números racionales, independientemente de su representación simbólica y esto se justifica mediante el uso de la densidad.

Consideramos que una correcta comprensión del número racional es básica para la comprensión de los números reales, sin embargo, algunas investigaciones dan cuenta que los y las estudiantes de primaria y secundaria se encuentran con dificultades y suelen tener ideas contradictorias al aprender y utilizar conceptos relacionados con números racionales (Merenluoto, 2003; Palacios-Amaya et al., 2018; Stafylidou y Vosniadou, 2004; Steinle y Pierce, 2006; Tirosh et al., 1998). Siendo una de las principales dificultades para comprender los números racionales la transferencia (incorrecta) de las propiedades de los números naturales a los números racionales (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004; 2007; Yujing y Yong- Di, 2005). Se puede observar con frecuencia que los y las estudiantes trasladan a los números racionales el tipo de orden de los números naturales (Behr et al., 1983; Palacios-Amaya et al., 2018), por ejemplo, muchos estudiantes creen que el principio del "número siguiente" se aplica también a los números racionales (Malara, 2001; Merenluoto y Lehtinen, 2002). Vamvakoussi y Vosniadou (2010), concluyeron que estudiantes de secundaria (entre 12 y 17 años) muestran dificultad para comprender la propiedad de densidad. Algunos/as creían que no hay un número (o hay finitos números) entre pares de números (falsamente) consecutivos (por ejemplo, entre 0,005 y 0,006 o entre 1/3 y 1/4) y parecen creer en la existencia de un sucesor en los números reales.

Concepciones de número real como unión de los racionales e irracionales

Las expectativas sostenidas desde la enseñanza, respecto a que al ingresar a la universidad la noción de número real sea una noción disponible en el estudiantado, frecuentemente no son satisfechas y una cantidad importante de estudiantes recorren esta etapa de transición entre la escuela secundaria y la universidad sin una comprensión cabal del número real (Artigue et al., 1995; Sirotic y Zazkis, 2007a, 2007b; Tirosh et al.,1998; Zazkis y Sirotic, 2004; 2010). Algunos de los estudios en pensamiento numérico muestran que los y las estudiantes tienden a extrapolar las propiedades del número natural (que les resultan indudablemente más accesibles) no solo, como vimos, a los racionales sino a los reales (Lehtinen et al., 1997; Moss y Case, 1999; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

Un estudio pionero en cuanto a la concepción de número irracional fue el de Arcavi et al. (1987) en el que participaron maestros en servicio (con estudios universitarios). Encontraron que las y los participantes tenían problemas para reconocer los números como racionales o irracionales y que existían una creencia generalizada de que la irracionalidad se basa en las representaciones decimales. Años después, Fischbein et al. (1994); (1995), utilizaron un cuestionario tomado a estudiantes de nivel de estudio similares al de nuestro estudio, en dicho trabajo concluyeron que la inconmensurabilidad de magnitudes y la no-numerabilidad del conjunto de números reales aportada por los irracionales no son de naturaleza intuitiva, sino que implican una cierta madurez intelectual (o nivel de estudio) que los sujetos de su estudio no poseían. Además, las y los participantes de todos los niveles tenían grandes dificultades para diferenciar correctamente los números racionales, irracionales y reales.

Dificultades similares fueron reportadas por Tirosh et al. (1998), con estudiantes de profesorado de primaria con estudios universitarios, especialmente aquellos que no tenían una especialización en matemáticas. Estas y estos estudiantes basaron sus concepciones de número casi en su totalidad en su experiencia con los números naturales. Castela (1996) encontró que en la escuela secundaria francesa el conjunto numérico con el cual se trabajaba son los racionales (operando, además con $\sqrt{2}$ y π) y que los irracionales son unos pocos números muy especiales.

En un estudio de Peled y Hershkovitz (1999), que involucró a estudiantes de profesorado de matemática en su segundo o tercer año de matemáticas universitarias, encontraron que las y los participantes del estudio, a pesar de que conocían las definiciones y características de los números irracionales, fracasaban en tareas que requerían de un uso flexible de diferentes representaciones de estos. Al respecto, Zazkis y Sirotic (2004) centraron su análisis en cómo los números irracionales pueden ser representados. Sirotic y Zazkis (2007b) consideraron los conocimientos, intuiciones y creencias de las y los participantes de su estudio con respecto a la relación entre racionales e irracionales. Las explicaciones utilizadas por las y los participantes se basaron principalmente en considerar las representaciones decimales infinitas no-periódicas de los irracionales. Además, observaron confusión para distinguir entre los números irracionales y su aproximación decimal y una importante dependencia de esta última. También Zazkis y Sirotic (2010) estudiaron las formas en que diferentes representaciones decimales de los números reales influyen fuertemente en las respuestas de los y las estudiantes con respecto a su posible irracionalidad.

Voskoglou y Kosyvas (2012) realizaron un cuestionario y entrevistas a estudiantes de secundaria (13-14 años) pocos meses después de estudiar los números reales y a estudiantes de un instituto tecnológico de pregrado (18-19 años) que utilizan las matemáticas como herramienta para estudiar y comprender mejor la ciencia. Sus resultados mostraron un fracaso casi completo de los y las estudiantes de tecnología en las tareas relacionadas a magnitudes inconmensurables. Sin embargo, sobre el papel de sus representaciones semióticas para la comprensión de los números reales, la superioridad de sus respuestas correctas con respecto a las respuestas de los y las estudiantes de secundaria fue evidente en la mayoría de los casos; lo cual constituye, expresan en su artículo, que la amplitud del conocimiento matemático del individuo juega un papel importante para la mejor comprensión de los números reales.

La necesidad matemática de los irracionales

Además de la comprensión incompleta de los números racionales, también, como ya dijimos, hay otras dificultades (cognitivas y epistemológicas) que hacen aún más difícil la comprensión de los números irracionales, principalmente la inconmensurabilidad y la no-numerabilidad (Herscovics, 1989; Sierpinska, 1987, 1994; Sirotic y Zazkis, 2004, 2007a). Ambas cuestiones llevan implícitas la noción de infinito, que está también relacionada con el orden, la densidad y la notación decimal de los números reales (infinitos decimales periódicos o no-periódicos). De hecho, la comprensión de los números reales se suele mencionar en la literatura que trata de las concepciones de infinito (Cornu, 1991; Tall, 2001; Tall y Schwarzenberger, 1978).

Las generalizadas dificultades del estudiantado de secundaria y universidad en este campo podrían, además, atribuirse a que los números irracionales fueron conceptualizados en la matemática respondiendo a necesidades netamente teóricas (Bergé, 2008; Bergé y Sessa, 2003; Cantor, 1899; Dedekind, 1963/1972), de las que resulta difícil que los y las estudiantes se apropien como auténticos problemas. En estas cuestiones se encuentran las raíces del propio método matemático, ya que muchos de estos conceptos son axiomáticos o se fundamentan en demostraciones matemáticas que implicarían una aceptación, por parte del estudiante, de la demostración como validación de los conocimientos y es sabido que esta visión de la demostración no es común siquiera en los y las estudiantes más avanzados (Arsac, 1988; Balacheff, 1987; Montoro, 2010; Tall, 1979; Tall, 2013b).

En cuanto a la completitud de los reales Bergé (2008) describe ejes del panorama cognitivo del estudio de la completitud de los reales (a nivel universitario). En nuestro trabajo, dado que nuestra población en su mayoría aun no estudió la completitud a nivel universitario, nos interesó lo que esta autora llama estado inicial y que corresponde a una visión sobre la completitud intuitiva, no problematizada. En este estado un sujeto opera como si las propiedades se verificasen naturalmente y hace uso de ciertos resultados, sin preocuparse por su fundamentación; además, hay una naturalización de las herramientas para producir conocimiento. En tal sentido, es un estado inicial teórico donde pueden convivir varias concepciones contradictorias (Bergé 2008, p. 39). Luego describe que para estudiantes de Matemática hay seis ejes del panorama cognitivo del estudio de la completitud de los reales (a nivel Universitario), que requieren de estudios de Análisis Matemático superior y de la valorización de la demostración como único medio de validación en matemática.

Múltiples representaciones para un mismo número

Es necesario considerar que un número real tiene diferentes representaciones, sin embargo, Duval (1983) señala que este hecho no es fácil para un/a estudiante, de hecho, les es difícil reconocer a un mismo objeto matemático a través de varios registros de representación (Reina et al., 2012). Hemos visto como algunas investigaciones reportan como las fracciones (de enteros con denominador distinto de cero) suelen ser para los y las estudiantes un conjunto disjunto con los números racionales. Incluso los números con coma (aun cuando tengan decimales finitos o periódicos) pueden ser concebidos como números distintos a los racionales (Khoury y Zazkis, 1994; O'Connor, 2001; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

Los y las estudiantes, en ocasiones, interpreta una fracción (ej. 1/2) como una división sin resolver, por lo que 1/2 y 0,5 puede que no se consideren dos representaciones de un mismo número. Más aun, cuando el racional en cuestión implica infinitos decimales, como el caso de 1/3=0,333… puede interpretarse la notación 0,333… como un proceso infinito de dividir 1 por 3. Edwards (1997, p. 20), por ejemplo, reporta que los y las estudiantes pueden afirmar que 0.333...es igual a 1/3 porque se puede dividir 1 entre 3 para obtener 0.333 .... Sin embargo, 0.999 ... = 1 es falso, porque si divides 1 por 1, no obtienes 0.999 ...

La caracterización de los números mediante la notación decimal alude a una colección infinita (las infinitas cifras decimales) tanto en el caso de los racionales (infinitas cifras decimales periódicas) como en el de los irracionales (infinitas cifras decimales no-periódicas), la aceptación de estas notaciones involucra la aceptación del infinito actual, idea que se suele presentar como contraintuitiva, como describirnos más adelante, en gran parte debido a su complejidad epistemológica (Fischbein et al., 1979; Sierpinska, 1985; 1987).

En el caso de los irracionales la imposibilidad intrínseca de representar todas sus (infinitas no-periódicas) cifras decimales ha llevado a expresarlos mediante una expresión algebraica (ej $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$+1) y un nombre (ej. Π; e) en el caso de ser muy conocidos. Esto puede llevar al estudiante a pensar que los números irracionales son algunos números muy especiales (Castela, 1996; Crespo-Crespo, 2009; Romero y Rico, 1999). En la práctica solo se usan sus aproximaciones racionales (decimales finitos), lo que puede llevar a los y las estudiantes a identificar los reales con los racionales.

La notación decimal infinita periódica de los números racionales (con puntos suspensivos o sin ellos) también suele ser cognitivamente compleja. En particular cuando se tratan de dos representaciones (muy) distintas del mismo número, como el caso de 0,9999…= 1, que ha sido ampliamente estudiada. Se han reportado diversos estudios con estudiantes de secundaria o de los primeros cursos de matemática universitaria, enfrentados a la tarea de decidir si 0.999 ... < 1 o 0,999 ... = 1. Una amplia mayoría de los y las estudiantes dice que 0.999 ... < 1. Daremos cuenta de un resumen de las posibles concepciones estudiantiles reportadas para esta tarea, mediante las justificaciones realizadas al decidir que 0.999 ... < 1.

(i) *Si un número decimal comienza con un cero es menor que uno* (Eisenmann, 2008); esta respuesta podría derivar de la enseñanza ya que cuando se enseña la notación decimal se especifica que primero se compara la parte entera de los números a comparar. (ii) *El número 0.999 ... es igual a aproximadamente 1, se acerca más y más a 1, pero no es exactamente 1* (Ferrini-Mundy y Graham, 1994). (iii) *La diferencia entre 0.999... y 1 es infinitesimalmente pequeña, pero hay diferencia;* concepción cercana a la visión del análisis no estándar de Robinson (1974) (Ely 2010; Katz y Katz, 2010; Tall y Katz, 2014). (iv) *El número 0.999 ... es el último número antes del 1* (Cornu, 1991; Tall y Schwarzenberger, 1978). (v) *De todos modos, nunca es igual a 1, solo se acerca cada vez más a 1, pero nunca llega allí. A 1 siempre le falta un poco, incluso si seguimos agregando, siempre faltaría un poco*; comprensión infinito potencial de la tarea (Fischbein et al., 1979; Marx, 2006; Richman, 1999).

En el caso de universitarios, aun cuando ha sido planteado que 0.999 ... puede entenderse como la suma infinita $0,999... = 0,9+0,09 + 0,009 + 0,0009 + \ldots$ persiste la concepción de los y las estudiantes de que es menor (Bero,1985; Eisenmann, 2008). Bero (1985) afirma que los y las estudiantes de secundaria o primer año de universidad suelen no aceptar que *la suma de un número infinito de reales positivos es un número real*. Eisenmann (2008) especifica en este caso tres obstáculos básicos en relación con la comprensión de los y las estudiantes del concepto de series infinitas: (i) la actitud de los y las estudiantes que *una serie infinita no se puede sumar*. *La suma no tiene fin*. *Uno no puede sumar los números hasta el infinito*; (ii) la idea común de que la secuencia de sumas parciales de una serie infinita de términos positivos crece por encima de todos los límites: *cuando agrego un número más, crece más y sigue creciendo hasta el infinito* y (iii) la idea potencial del infinito, *0,999… nunca es igual a uno, solo se acerca cada vez más a uno, pero nunca llega.*

2.3.2. Estudiantes pensando el infinito

Como vimos desde un punto de vista epistemológico el concepto de número real está íntima y esencialmente ligado al de infinito matemático. Es mediante el sentido que G. Cantor le da al concepto de infinito por medio de su teoría de conjuntos actualmente infinitos que se llega a la fundamentación del continuo de los números reales.

Significados de infinito

La palabra "infinito" forma parte del lenguaje cotidiano, en ocasiones como adjetivo y en ocasiones como sustantivo, y está cargada de significados que, frecuentemente, difieren del significado matemático. El nivel más básico de entendimiento puede ser una cognición de un proceso que no termina (como la subdivisión continua de una recta), una secuencia sin fin (como los números naturales) o la posibilidad de perpetuar continuamente una operación. El infinito puede también entenderse como una colección sin límites o sin fronteras.

Ciertamente el infinito es una construcción intelectual que implica un alto grado de abstracción. No contamos, en la realidad física, con ninguna experiencia que nos permita aceptar o rechazar su existencia. Sin embargo, el infinito matemático posee una estructura formal innegable para la Matemática académica, que fue fuente de importantes resultados a lo largo del siglo XX y continúa siéndolo. Pero esto no implica que el concepto se haya vuelto más accesible para un/una estudiante. En realidad, las estructuras cognoscitivas de los y las estudiantes, construidas a partir de las experiencias cotidianas y escolares con cantidades finitas, no favorecen la asimilación del concepto, más bien constituyen en un obstáculo para alcanzarlo (Waldegg, 1993b).

Por otra parte, no hay un único modo de comprender el infinito, sino que podemos identificar grados y aspectos en esa comprensión. Además, no sólo podemos encontrar dificultades en el paso de la conceptualización de lo finito a la conceptualización de lo infinito. Están también, por ejemplo, las cuestiones concernientes a la naturaleza dicotómica del infinito en cuanto a la distinción potencial-actual o del infinito como adjetivo o infinito cardinal

El infinito en la educación matemática, un contenido invisibilizado

Los niños y las niñas se encuentran muy tempranamente con una experiencia que pone en juego la noción de infinito al contar e intentar extender más y más su dominio sobre la serie de los números naturales (Sophian, 1996). El alumnado de secundaria interactúa con la idea de aproximación vinculada a la operación de medir, y más adelante con la noción de variación continua. Esta evolución indica que el infinito potencial aparece en primer lugar, casi sin conflicto con la intuición. Podemos suponer que esta concepción del infinito, casi etimológica, como un sinónimo de lo que no tiene fin, o de algo que sigue y sigue y no termina, permanece mucho tiempo sin evolucionar, ya que no son frecuentes las experiencias cotidianas ni escolares diseñadas especialmente para favorecer la reflexión en este campo (Monaghan, 2001).

El infinito matemático constituye un concepto poco familiar incluso para docentes de nivel primario. Tal como muestran las investigaciones de Arrigo et al., (2011) y Sbaragli (2004), estos/as docentes mantienen concepciones del infinito basadas en la intuición, que por lo general lo reducen a una extensión de lo finito. Los resultados de estos autores ponen de relieve cómo las dificultades observadas en la comprensión de lo infinito por los y las estudiantes no sólo se deben a obstáculos epistemológicos, sino que también se pueden ver reforzadas por obstáculos didácticos derivados de modelos intuitivos proporcionados por los y las docentes desde los primeros años escolares.

En la enseñanza de la matemática de los últimos años de secundaria y de los primeros años de universidad se trabaja con los conjuntos infinitos como tema destacable, sin embargo, es habitual que se use esta noción como si resultara parte del sentido común, o fuese evidente para la comprensión de los y las estudiantes (Montoro y de Torres Curth, 1999). Solo en un estadio muy avanzado del estudio de matemática se estudia de manera axiomática, sistemática y formal los conjuntos infinitos.

En la matemática de los primeros años de universidad se trabaja con diversos conceptos que involucran la noción de infinito como un punto destacable y problemático. Desde la enseñanza de Matemática en la universidad, el concepto de infinito suele utilizarse con diversos significados, ya sea para señalar un proceso, como para identificar un atributo de una colección o como un objeto. Es habitual que estos usos y significados se planteen sin un trabajo reflexivo previo, simultáneo o posterior sobre esta noción, como si la misma resultara parte del sentido común, o fuese "transparente" para la cognición de los y las estudiantes. Sin embargo, el infinito matemático no constituye un objeto de conocimiento que pueda generarse fácilmente. Tanto el análisis histórico de este concepto matemático, como los modos en que estudiantes de secundaria y universitarios/as resuelven tareas que lo involucran, indican que para que el infinito se convierta en una entidad acerca de la cual y con la cual es posible pensar y operar se requiere la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión (Juan et al., 2012; Monaghan, 2001; Montoro y Scheuer, 2004; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Waldegg, 1993b; 1996).

Las dos caras del infinito

Históricamente se ha concebido al infinito en al menos dos formas: la de infinito potencial y la de infinito actual. El infinito potencial, posiblemente asociado a una potencial infinitud del tiempo, es el que se puede pensar como: *algo que puede seguir sucediendo siempre o un proceso sin fin* y el llamado infinito matemático o también infinito actual, es aquel en que los *infinitos elementos existen simultáneamente*, son concebidos como una unidad.

Si nos situamos en el contexto de los números naturales, una aproximación al infinito potencial está implicada cuando nos percatamos de que podemos comenzar a contar 1, 2, 3, ... y seguir contando, o al menos imaginar que contamos, y cada vez que tengamos un número, tendremos otro más grande. En cambio, pensar en el conjunto de todos los números naturales como una unidad es pensarlo en forma actual.

Cuando contamos n “cosas” establecemos una relación uno a uno entre las n cosas y los n primeros números naturales. Si las n cosas son una cantidad muy grande de cosas, n será un número (finito) muy grande. Pero ¿cuántas son todas las cantidades posibles de cosas? ¿Cuántos son los números naturales? ¿Cuántos los números racionales? ¿Cuántos los números reales?

Concebir una colección de infinitos elementos presentes simultáneamente requiere poner en juego procesos mentales de un notable nivel de abstracción. Para representarnos una cantidad infinita es necesario tratar las cantidades de un modo muy diferente al que es habitual cuando enumeramos o precisamos la cantidad de elementos de una colección finita (Montoro, 2005). Esta dualidad del infinito potencial y actual ha sido vista como un obstáculo de corte epistemológico (Artigue et al., 1995; Moreno-Armella y Waldegg, 1991; Sierpinska, 1987) que es persistente y resistente a la formación matemática (Brousseau, 2006; Mena-Lorca et al., 2015).

Podemos considerar que la idea de infinito potencial aborda el infinito como un proceso, mientras que el infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación, la cosificación de este proceso (Dubinsky et al., 2005a; 2005b; Lakoff y Nuñez, 2000). Cuando una situación requiere que los y las estudiantes vean este proceso como terminado, pensando en las colecciones formadas por una infinidad de elementos en forma actual, la idea construida fuera y dentro del aula de matemáticas suelen suscitar inconsistencias, incoherencias (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014) o presentarse como nociones paradójicas, en función del contexto o de la tarea (Fischbein et al., 1979; Garbín, 1998; Garbín y Azcárate, 2000; Mántica y Carbó, 2013; Waldegg, 1993b). Muy a menudo, estas inconsistencias provienen de aplicar a conjuntos infinitos procesos propios de las colecciones finitas con las que se interactúa normalmente (Arrigo y D’Amore, 2004).

Los y las estudiantes más jóvenes se suelen ubicar en esta dualidad más cercanos a una visión potencial del infinito (Fischbein, 1987). Este autor considera que intuitivamente, el infinito se acepta en su forma dinámica, como un proceso que se repite sin fin (potencial), sin embargo, en un contexto matemático estas intuiciones no sirven a la hora de interactuar con un infinito actual incluso llegan a convertirse en un obstáculo (Fischbein, 2001; Monaghan, 2001).

Un aspecto destacable que interviene en la comprensión del número real es la complejidad de sus representaciones externas, en particular la notación decimal de los números reales puede pensarse como aludiendo a un proceso infinito. Sin embargo, una comprensión más profunda nos llevaría a que tanto en el caso de los racionales como en el de los irracionales, esta notación involucra la aceptación del infinito actual.

La cardinalidad de los conjuntos numéricos

Considerando la cardinalidad de los conjuntos numéricos, la demostración de G. Cantor de que hay tantos números pares como naturales, tantos naturales como enteros y tantos enteros como fracciones, enfrenta aspectos nucleares del sentido numérico básico humano (Dehaene, 1997; Pérez-Echeverría y Scheuer, 2005). La afirmación de que los números enteros y los racionales tienen el mismo cardinal (es decir son igualmente abundantes, son la misma cantidad) es contraintuiva debido a que entre dos racionales hay siempre otro racional, mientras que los números enteros se sitúan alejados entre sí en la recta numérica. También resulta contraintuitivo pensar que siempre podemos situar infinitos números irracionales entre dos números racionales por pequeño que sea el intervalo que elijamos.

Por otra parte, como argumenta Waldegg (1993b; 1996), el establecimiento de una correspondencia biunívoca entre un conjunto infinito y una parte propia se presenta como un obstáculo para la comprensión de los conjuntos infinitos, dándose en los estudiantes, frente a esta idea, una fuerte resistencia a la instrucción. Esto se aprecia en el trabajo de Moreno-Armella y Waldegg (1991) en el que solicitaron a estudiantes de matemática del primer semestre de la universidad (sin instrucción formal sobre el infinito matemático) comparar pares de conjuntos numéricos (naturales/sus cuadrados y enteros/pares) presentados explícitamente como infinitos, como incluidos uno en otro y al mismo tiempo equipotentes. En la mayoría de las respuestas (43%) prevaleció el énfasis en el conflicto parte/todo comparando por inclusión, 22% comparó afirmando que son infinitos según una única cantidad infinita y sólo 2% comparó por cardinalidad.

En cuanto a la comprensión de cardinalidades transfinitas por parte de estudiantes de los últimos años de la secundaria, se ha encontrado que normalmente piensan que los números enteros son más que los naturales, debido a que los naturales están incluidos en los enteros (Fischbein et al., 1995; Tsamir y Tirosh, 1994; Waldegg, 1993b). En algunas ocasiones los y las estudiantes aceptan que el conjunto de los números naturales es equipotente al conjunto de los números enteros, no obstante, esta aceptación proviene de considerar que existe una sola cantidad infinita, o en palabras de Arrigo y D´Amore (1999; 2004), de que se ha producido un aplanamiento de los cardinales transfinitos. Desde este punto de vista, los racionales, los irracionales y por lo tanto los reales tienen simplemente la misma cardinalidad, *son infinitos.*

Concepciones de estudiantes acerca de infinito

En las últimas décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Artigue et al. (1995); Cornu (1983); Fischbein et al. (1979), Moreno-Armella y Waldegg (1991; 1995); Montoro (2005); Sierpinska (1985) y Waldegg (1993) han observado que los y las estudiantes suelen presentar una comprensión lábil del infinito matemático y que en muchos casos apelan a ideas contradictorias, lo que los y las lleva a serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con problemas que implican esta noción (Montoro y de Torres Curth, 1999).

El contexto de la tarea también influye en la visión sobre el infinito puesta en juego al resolverla (Dreyfus y Tsamir, 2004), por ejemplo, si se plantea un contexto dinámico, es decir que contienen uno o más procesos explícitos, puede llevar a pensar el infinito en forma potencial. Mientras un contexto estático, que no evidencie procesos sino objetos que ya han sido conceptualizados, puede acercarnos a una visión actual del infinito (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014). En otro sentido el contexto de la tarea puede asociase al contexto matemático por ejemplo una tarea de conteo o en un contexto geométrico o algebraico. El primero puede inducir una visión finitista (Juan et al., 2012; Montoro, 2005), los contextos geométricos generan argumentos asociados a la vida real (Sacristán, 1991) y un contexto algebraico puede propiciar una concepción de conjuntos infinitos como actualmente infinitos (Moreno-Armella y Waldegg, 1991).

Algunos estudios muestran que casi la mitad de los y las estudiantes de secundaria (Juan et al., 2012) y universitarios en carreras con diferente nivel de estudio en Matemática (Montoro, 2005) admiten la posibilidad de obtener colecciones infinitas discretas. Según esos estudios, otros estudiantes de secundaria (22%) o de universidad (37%), especialmente aquellos de carreras sin estudios de matemática, muestran concepciones finitistas, tales como: infinito como número muy grande. Alrededor de 20% de los y las estudiantes en ambos niveles no considera posibles las colecciones infinitas y 12% de los y las estudiantes de secundaria (la mayoría en primer año de este nivel) manifiesta duda e inseguridad al respecto.

En un estudio acerca de los modelos intuitivos sobre el infinito, con estudiantes de secundaria, bachillerato y primero de universidad, Belmonte y Sierra (2011) identificaron el modelo *de indefinición,* que consiste en respuestas asociadas a la imposibilidad de conocer, operar o calcular con procesos u objetos infinitos. La presencia de este modelo fue disminuyendo en los grupos de estudiantes con mayor nivel de estudio en Matemática.

Dubinsky et al. (2013) y Millán et al. (2022) proponen una posible visión del infinito como *totalidad* (completez) en la cual el individuo puede ver un proceso infinito como un todo, sin que esto implique que se pueda realizar acciones sobre él. Interpretamos, sería un estadio de comprensión intermedio entre el infinito potencial (proceso dinámico de infinitos pasos) y el infinito actual (objeto nuevo que no hereda las propiedades de los pasos anteriores). En este estadio se perciben los infinitos pasos en su totalidad.

Síntesis de las concepciones estudiantiles sobre la noción de infinito

Como dijimos, existe una relación estructural entre el concepto de número real y el de infinito actual, por lo que aquí destacaremos aspectos de las concepciones de infinito reportadas en la bibliografía respecto de las ideas que los y las estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a tareas que involucran la noción de infinito. Estas visiones no son excluyentes, pueden convivir en un/a mismo/a estudiante y dependen del contexto de la tarea.

Inseguridad o resistencia a las colecciones infinitas. Los y las estudiantes más jóvenes o con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a la posibilidad de la existencia de colecciones infinitas (Juan et al., 2012; Montoro, 2005; Waldegg, 1993).

Finitistas. En cuanto a las concepciones finitistas de las y los estudiantes, encontramos dos muy arraigadas como son: concebir el *infinito como mucho o un número muy grande* y extender las propiedades de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos (por ejemplo, *el todo es mayor que las partes*) (Fischbein et al., 1979; Juan et al., 2012; Monaghan, 2001; Montoro et al., 2016; Waldegg, 1993)

Infinito como Indefinido: En cuanto a la imposibilidad de conocer, operar o calcular con procesos u objetos infinitos. La presencia de este modelo fue disminuyendo en los grupos de estudiantes con mayor nivel de estudio de matemática. Belmonte y Sierra (2011); Montoro

Infinitistas, en cuanto a la cardinalidad:

Único infinito. La concepción de *aplanamient*o donde se considera una única cantidad infinita (Arrigo y D´Amore, 2004; Fischbein et al., 1979; 1987)

Infinito cardinal. Muy minoritariamente se encuentra en jóvenes, la concepción de infinito cardinal y sólo está presente en estudiantes de universidad (Moreno-Armella y Waldegg, 1991, Montoro, 2005).

Infinitistas, en cuanto a la dualidad potencial - actual

Infinito potencial. Los resultados de Arrigo y D'Amore (2004); Fischbein et al. (1979); Monaghan (2001); Montoro y Scheuer (2004), muestran que las y los jóvenes conciben al infinito, principalmente, en forma potencial, como un proceso.

Infinito actual. Una minoría de estudiantes concibe el infinito actual, como un objeto sobre el que se puede operar (Juan et al. 1012; Montoro, 2005; Moreno-Armella y Waldegg, 1995)

Otras infinitistas

Totalidad. Visión del infinito como totalidad (completez) en la cual el individuo puede imaginar las características que tiene la *totalidad* de los pasos en un proceso infinito. Podría considerarse intermedia entre potencial y actual (Dubinsky et al., 2013; Millán et al., 2022).

Infinito identificado con todo. Visión en la que media una identificación de infinito con todo, razonamientos del estilo *si una colección es infinita en ella deben estar todos los elementos posibles*. La diferenciación entre infinito y todo, requiere de cierta profundidad en el estudio de matemática (Juan y Montoro, 2015; Montoro, 2005)

2.3.3. Estudiantes pensando en la recta numérica

La comunidad científica ha adoptado la recta como una buena representación del conjunto de los números reales, sin embargo ésta puede ser modelo de otras, estructuras numéricas diferentes, como es el caso de los números hiperreales del análisis no-estándar de Robinson (1974), que se definen a modo de extensión de los números reales y permiten formalizar algunas operaciones con infinitésimos y probar algunos resultados clásicos del análisis matemático de manera más sencilla.

Varios autores han mostrado que en ocasiones en el estudio del análisis matemático el enfoque del análisis no-estándar puede llevar a una comprensión más cercana a la de los y las estudiantes de la continuidad (Ely, 2010; Katz y Katz, 2010; Tall y Katz, 2014). Sin embargo, Oktaç y Vivier (2016, p.93) mencionan que, "a pesar de los prometedores intentos de su introducción en la enseñanza, el análisis no estándar sigue siendo marginal"

La recta numérica en la educación matemática

En los primeros grados de la escuela primaria, se utiliza la recta numérica para representar números naturales y luego en el último ciclo los enteros, también es frecuentemente utilizada para la enseñanza de las operaciones con números enteros. En la escuela secundaria continúa siendo un recurso cotidiano para profundizar el estudio de los números enteros y luego introducir los números racionales y en ocasiones los irracionales. En consecuencia, podríamos esperar que la recta numérica resulte conocida como representación de los números reales para los y las estudiantes de universidad.

El aprendizaje de la representación del número real en la recta numérica está mediado necesariamente por lo simbólico. Se trata de una "representación" por ende la simbología y las cuestiones convencionales, como por ejemplo que los números positivos se hallan a la derecha del cero y que los negativos están a la izquierda, están presentes cuando hablamos del tema. Un concepto matemático (el conjunto de números reales) es explicado, por otro (la recta geométrica) (Scaglia, 2000).

Sin dudas que el aprendizaje de la representación de los números reales en la recta numérica es un aprendizaje que se alcanza mediante la explicitación, ya que es totalmente dependiente de la cultura y la educación. Así como culturalmente se ha decidido adoptar la recta como representante del conjunto de los números reales, también se podría haber decidido enseñar la recta como representante de otros conjuntos numéricos, o bien se podría optar por elegir otro sistema de representación para enseñar los reales.

La recta numérica a pesar de ser un contenido transversal a toda la educación formal resulta de particular complejidad educativa (Romero, 2003; Scaglia, 2000). En este sentido Coriat y Scaglia (2000) señalan que la recta en ámbitos educativos debe ser utilizada con determinadas precauciones que atañen a la "naturaleza" de la recta y a las intuiciones que soportan una concepción de la recta geométrica, las dificultades conceptuales y procedimentales de la misma.

Ferrero y Montoro (2011), consultaron a docentes de matemática de secundaria y de universidad y estos/as creen que, a causa de la imprecisión en la medida, la "recta numérica" es un recurso que no aporta a la distinción entre números racionales e irracionales, ya que estos últimos se toman por sus aproximaciones racionales para ser representados. A su vez, consideran que es un recurso que puede contribuir a mejorar la noción de orden en los números.

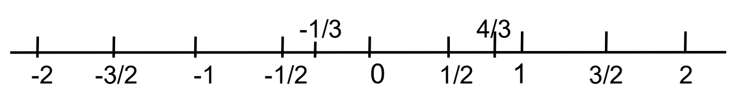
Si bien la representación de cada número mediante un punto, podría ayudar a intuir el orden continuo y total del conjunto de números reales y la continuidad de la recta permitiría visualizar la completitud de este conjunto, como dijimos, esta representación implica la comprensión de cuestiones cognitivamente complejas como el continuo geométrico, la biyección entre el conjunto de los números reales y la recta y la del infinito actual, que como vimos es una noción especialmente contraintuitiva y que requiere de contextos educativos que propicien la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas (Coriat y Scaglia, 2000; Juan et al., 2012; Monaghan, 2001; Montoro, 2005; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Waldegg, 1996).

A cierto nivel de la escolaridad, asumir implícitamente o no, la correspondencia entre puntos y números pareciera que permite avanzar en el tiempo didáctico, pero es preciso tomar en cuenta los resultados de las investigaciones que muestran que esa correspondencia no es evidente para los/las alumnos/as (Coriat y Scaglia, 2000; Romero, 1996; Scaglia, 2000). Aun asumiendo la correspondencia entre puntos y números, no es tan claro que esta comprensión apunte a mejorar la conceptualización del conjunto de números reales, por ejemplo, la idea de sucesor puede estar presente tanto para los números como para los puntos Bergé (2004).

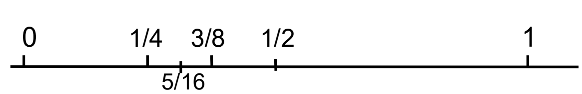
Scaglia (2000) detecta principalmente dos conflictos que surgen en los y las estudiantes en tareas de representación de números reales construibles en la recta. El conflicto 1: *dificultad para admitir el control de un proceso infinito* que surge ante la presencia explícita de un proceso infinito, indicado por los puntos suspensivos del número en la representación decimal, esa representación simbólica de lo infinito obstaculiza la interpretación del número y de la magnitud. El conflicto 2, planteado por *la relación entre objeto matemático y objeto físico*, refiere a la inexactitud (material) de la representación de un número como punto de la recta ya que la determinación del punto nunca es físicamente exacta y la exactitud ideal depende del procedimiento empleado.

La comprensión de la recta numérica

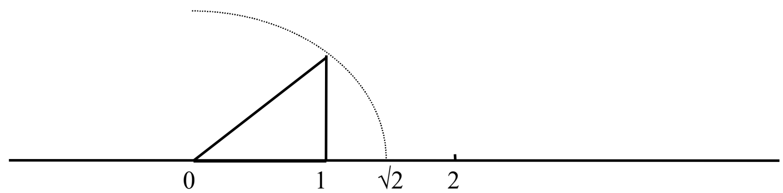
Podemos hacer uso de una recta geométrica y representar los números racionales como puntos sobre la misma, ubicando al 0 como origen de las abscisas y al 1 como unidad. El orden vendrá dado por la regla de que si *a*<*b* entonces (por convención) *a* estará a la izquierda de *b.*



Por la Geometría Euclídea sabemos que en un segmento determinado por dos puntos siempre podemos encontrar otro que corresponde a su punto medio. Haciendo la identificación puntos-números, esto puede ser expresado con la frase: *entre dos racionales hay otro racional*. De hecho, no es difícil aceptar que entre dos puntos racionales hay infinitos puntos racionales. Esta propiedad también se expresa diciendo que *el conjunto de los números racionales es denso.*



Por otra parte, el extremo de la hipotenusa del triángulo rectángulo de lado 1, rebatida sobre la línea recta, determina un segmento de longitud $\sqrt{2}$, que no corresponde a ningún número racional. Por lo tanto, también podemos aceptar que los racionales dejan "huecos" en la recta que son ocupados por los irracionales. Sin embargo, existen números irracionales no construibles lo cual es un aspecto netamente teórico que se presenta como invisibilizado en la educación matemática. La propiedad de completitud de los números reales tiene su correspondencia con la continuidad de la recta



Como vimos en el Capítulo 1, la aceptación del axioma de continuidad implica que al determinar sobre la recta un punto como el cero de la escala y otro como unidad, queda unívocamente determinado un punto para cada número real. A la recta con escala se la denomina recta numérica. Recíprocamente, a cada número real le corresponde un punto de la recta, ya que ubicados el cero y el uno, queda fijado un orden positivo y podemos comparar números observando sus respectivas distancias al cero. La longitud del segmento cuyos extremos son el punto sobre la recta correspondiente a un número dado y el punto correspondiente al cero determina la magnitud asociada a dicho número. Mediante este procedimiento la recta sirve para medir. En general por convención (si la recta es horizontal) se determina el 1 a la derecha del 0 y así si el punto que le corresponde a un número está a la izquierda del que le corresponde a otro, éste es menor que aquel.

La representación de los números reales sobre la recta implica establecer una biyección entre el conjunto de los números reales y la recta como conjunto ordenado de puntos. Esta relación lejos de ser intuitiva debió ser establecida en forma axiomática por Cantor y Dedekind, aunque de manera independiente

La recta, ¿constituida por puntos?

La afirmación de que la recta está constituida por puntos ha generado durante siglos controversia y debate. Para Aristóteles la recta no podría estar compuesta de puntos ya que, si las magnitudes estuviesen constituidas por puntos considerados 'átomos', no se podrían dividir de forma infinita porque se llegaría al límite de encontrarse con estos elementos indivisibles (Waldegg, 1993a). Este debate respecto a si la recta está o no constituida por puntos, debió queda zanjando en la matemática, a través de establecer en forma axiomática la continuidad de la recta en correspondencia con la completitud de los números reales (Bergé y Sessa, 2003).

Pensar a la recta como constituida de puntos podría interpretarse como que la recta no es continua. Arrigo y D'Amore (2004) proponen un modelo intuitivo de la recta, el modelo del "*collar de perlas*", para explicar esta situación. Dicho modelo consiste en atribuir dimensiones o naturaleza material a un punto geométrico, para comparar conjuntos continuos con conjuntos geométricos. Este modelo obstaculizaría el establecimiento de una correspondencia el conjunto de los números reales con el conjunto de "puntos" que componen de la recta (Acuña, 2005).

Freudenthal (1983) afirma que etimológicamente "continuo" significa conectado, entonces éste fue el objeto mental que precedió al concepto moderno de continuidad. Sin embargo, se puede pensar a la recta (y al punto) al menos de dos maneras. La recta como un ente en el que los puntos se ubican o la recta como un conjunto de puntos que la constituyen. Estas dos visiones se refieren a la recta como dos objetos diferentes que poseen diferentes atributos y propiedades. Adicionalmente para la última, hay que expresar que la unión de sus puntos es insuficiente debido a que no da cuenta de que esa unión debe ser una unión no numerable (Bergé, 2004; Lakoff y Nuñez, 2000).

Las concepciones de los y las estudiantes acerca de la recta numérica

Robinet (1986) y Romero (1996) utilizaron tareas similares para indagar las ideas de estudiantes de cursos de matemática, de edades entre 16 y 18 años, sobre la naturaleza de la recta numérica, encontrando de un modo preliminar distintos modelos mentales sobre ésta, sus resultados revelaron que las propiedades de la recta que son específicas de los números reales (continuidad y no-numerabilidad) no resultan intuitivas u obvias como se proponía desde la matemática académica (Dedekind, 1963/1872).

De hecho, Robinet (1986) identifica los modelos mentales de estudiantes de primer año de educación superior sobre los números reales. Encontrando que sólo el 33% de los/las estudiantes piensan que la recta representa la completitud de los números reales y un 43% la ve como no-continua. Realiza una clasificación no disjunta de estas respuestas cuyas categorías son: *ausencia de imagen mental*; *recta dibujada o física* y *modelo discreto.* Una tarea que utiliza este autor y que nos pareció de sumo interés en cuanto podría acercarnos a las concepciones de los y las estudiantes sobre la naturaleza de la recta numérica es: 'Si agrandamos con un microscopio electrónico (o un ordenador) a la recta. ¿Qué crees que obtendríamos como diseño final?' El 12%

responde ‘es una recta’ con algunas justificaciones, el 20% responde ‘es una recta’ sin comentarios y el 15% hace referencia a un modelo discreto de recta.

Por su parte, los resultados de Romero (1996) dan cuenta de que las hipótesis implícitas: i) que el continuo geométrico es un dato universal de la intuición, fácilmente asequible a los individuos, y ii) que la conexión números-geometría es, en el mismo modo, intuitiva, es decir, aprehensible inmediata y universalmente, sin la necesidad de que medien elementos conceptuales, son cuando menos desde el punto de vista didáctico falsas. Este autor utiliza una tarea, modificada convenientemente de la de Robinet (1986), para captar lo que ‘ocurre’ cuando aumenta la potencia del microscopio, pero también para investigar sobre la noción de infinito:

> Imagina que dispones de un microscopio de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar los objetos tanto como tú quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio. ¿Puedes describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?’ (Romero, 1996. p. 5).

Este autor describe los esquemas conceptuales respecto de la recta en relación con la abstracción, la estructura de la recta y la noción de infinito. De acuerdo con la abstracción distingue entre ‘realismo ingenuo’ (7%) y ‘abstracción ingenua’ (83%); el primer grupo corresponde a los y las estudiantes que ‘no juegan el juego’ y proporcionan respuestas cuyo contexto semántico es de tipo físico (átomos, moléculas, etc.) o corresponde a la realidad inmediata (fibras de papel, tinta, etc.), mientras las respuestas del segundo grupo están dadas en un contexto matemático (puntos, números, marcas de medida, etc.), proporcionando una visión de la recta como un conjunto de puntos (discos o esferas pequeñas). De acuerdo con la estructura de la recta distingue entre ‘atomistas’ y ‘continuistas’. Los primeros ven elementos en la recta, más o menos estructurados, algunos ignoran el orden no-discreto; mientras que los segundos ven la recta como un todo, sin reconocer elementos en ella. De acuerdo con la noción de infinito algunos estudiantes son considerados ‘potencialistas’ y otros ‘actualistas’.

En un estudio realizado en la escuela secundaria francesa, Castela (1996) encontró que para los y las estudiantes la recta no se presenta como continua. La concepción más generalizada es que los puntos de la recta no son constitutivos de ésta, sino objetos eventualmente agregados a la recta. Concluye que la correspondencia entre números y puntos está lejos de ser evidente o clara para los y las alumnos/as y en ellos conviven las contradicciones al respecto. Pone en evidencia que casi para la mitad de ellos/as la noción de sucesor es válida para los puntos y para los números, y un segmento se comporta del mismo modo que un número finito de puntos. El marco numérico parece ser más favorable para conceptualizar la densidad del orden y esta propiedad sería transferida a los puntos de la recta.

Planteando lo que denomina un *estado inicial* del panorama cognitivo del estudio de la completitud de los reales a nivel universitario y que corresponde a una visión de *completitud intuitiva*, Bergé (2008) manifiesta que en este nivel ciertas propiedades de los objetos geométricos (por ejemplo, la *continuidad natural* de la recta) son transferidas al dominio numérico y no necesariamente a la inversa.

Capítulo 3

Planteo del problema y objetivos

3.1. Perspectiva de investigación

Los trabajos de investigación descriptos en el capítulo anterior presentan la comprensión de los números reales como compleja epistemológica y cognitivamente y a las concepciones estudiantiles al respecto como frecuentemente contradictorias y lábiles, sobre todo cuando se relacionan con las concepciones de infinito.

Por otra parte, plantean que la razón de las dificultades para aprender estos conceptos de matemática avanzada, e importantes a la hora del paso de la escuela secundaria y la universidad, no es solamente su complejidad sino la naturaleza del conocimiento anterior de los y las estudiantes. Por todo esto se nos presenta como de sumo interés estudiar cómo comprenden al número real y qué concepciones numéricas han construido los y las estudiantes de los últimos años de secundaria, al ingresar a la universidad y en sus estudios de matemática en la universidad.

Cuando hablamos de concepción sobre aspectos del número real consideramos todas las representaciones que evoque y ponga en juego el sujeto frente a situaciones que involucren el aspecto en cuestión (número, densidad, orden, infinito, etc.) incluyendo representaciones de diferente orden de complejidad, que se extienden desde lo que algunos autores llaman concepciones intuitivas (Fischbein et al., 1979; Tirosh, 1991), hasta ideas acordes con la conceptualización matemática del mismo.

Nos interesa describir cómo comprenden el número real estos y estas estudiantes, refiriéndonos con esto a sacar a la luz como interactúan con sus propias comprensiones (concepciones, imágenes mentales, propiedades y procesos asociados), reflexionando, interrelacionándolas y usándolas para resolver tareas que involucran diferentes demandas comunicativas-cognitivas y representaciones externas. Considerando que estas comprensiones cambian con la experiencia y con la reflexión y tienen la característica de no ser totalmente coherentes. Al relacionar las comprensiones de los y las estudiantes con su nivel de estudio en Matemática, buscamos asociarlas con algunos significados institucionales (matemática académica, escuela secundaria o universidad), asimismo con el papel que juega el tipo de tarea.

Consideramos que un estudio de este tipo puede ayudarnos a comprender cómo se configuran las concepciones en función de la educación, así como a analizar más profundamente las posibles barreras para la comprensión de estos conceptos en su forma específicamente matemática.

En este sentido, pensamos que la investigación puede colaborar a zanjar una posible brecha entre el conocimiento legitimado por una comunidad científica y el conocimiento construido por los y las estudiantes, contribuyendo a una comprensión integrada de aspectos como los siguientes: cuáles son y qué características tienen las ideas de los y las estudiantes sobre el número real, de dónde proceden, cómo están organizadas y qué aspectos pueden ayudar a una más ajustada visualización y comprensión de estos conceptos centrales en el desarrollo del pensamiento numérico.

3.2. Centros de interés

Del análisis realizado sobre el estado del arte, enriquecido con la reflexión de nuestra experiencia en investigación en pensamiento matemático avanzado y docencia universitaria, pudimos identificar varios aspectos del concepto de número real que nos permitirán plantear nuestros centros de interés en esta investigación.

Sintéticamente, encontramos en la bibliografía que las dificultades de los y las estudiantes de secundaria y de universidad para comprender a los números reales están asociadas a dos niveles. Un nivel está constituido por la comprensión de los números racionales en cuanto al orden y la densidad, la diferenciación de números racionales e irracionales, las múltiples representaciones de los números reales, la naturaleza continua de la recta geométrica y su relación con la completitud de los reales, la cantidad de números en los diferentes conjuntos numéricos. Como vimos en estos aspectos está involucrada la noción de infinito matemático.

El otro nivel, del cual nos ocuparemos sólo tangencialmente, supone aún mayor abstracción, al estar constituido por la comprensión de la completitud, no-numerabilidad y la inconmensurabilidad de los números reales. Respecto de tareas que implican directamente estos aspectos el contexto de los números reales, la investigación reporta que necesitan cierta madurez cognitiva y en general se presentan como opacas salvo para estudiantes con un alto nivel de formalidad en los estudios de matemática. En nuestro caso pudimos comprobar en las pruebas piloto que tareas de esta característica no eran resueltas por los y las participantes.

Por ello centraremos nuestro estudio en las comprensiones sobre los números reales, de los y las estudiantes de en un amplio rango educativo, en el primer nivel de abstracción citado. Teniendo en cuenta las dificultades que pueden presentarse en el intento de indagar sobre estas nociones de considerable complejidad cognitiva nos interesa indagar sus concepciones en un contexto de situaciones no típicamente escolares, a fin de que puedan ser tratadas con libertad de imaginación, pero no necesariamente como tareas formales matemáticas.

3.3. Objetivos de investigación

Nos hemos propuesto estudiar la comprensión del número real en estudiantes de los últimos años de la escuela secundaria y de carreras universitarias en las que la matemática tiene un rol diferente (ingresantes y avanzados/as).

El presente trabajo tiene los siguientes objetivos específicos:

1. Estudiar con estudiantes de los últimos años de escuela secundaria y de distintas carreras universitarias (ingresantes y avanzados/as):
    - cuáles y cómo son sus concepciones sobre número en general y números racionales, irracionales y reales en particular
    - la comprensión de la densidad y el orden de los números reales
    - cómo se relacionan sus concepciones sobre el infinito matemático y la comprensión del número real (en particular con notaciones con infinitos decimales y la cardinalidad de conjuntos numéricos)
    - cómo se relaciona la comprensión del número real con el uso la recta como representación de los números reales (en particular de la completitud de los números reales y su asociación con la continuidad de la recta).
2. Estudiar las relaciones entre las ideas de los y las estudiantes sobre los diferentes aspectos indagados y delinear posibles niveles de profundidad en la comprensión de estos diferentes aspectos.
3. Construir una tipología de comprensiones de cada uno de estos aspectos y de todos ellos globalmente y analizar la relación de estos diversos modos de comprender a los reales con el nivel de estudio en Matemática.

Así mismo es nuestra expectativa que en base a estos resultados podamos reflexionar acerca de la implicancia de estos hallazgos para la educación matemática.

METODOLOGÍA

Capítulo 4

Instrumento de indagación, procedimiento de obtención de la información y selección de la población participante

Los objetivos de este estudio plantean la necesidad de encontrar el modo de indagar en profundidad las comprensiones estudiantiles acerca de varias facetas del número real. Estas como se ha planteado en los capítulos precedentes, resultan complejas matemática y cognitivamente. A la vez buscamos analizar las interrelaciones entre modos de comprender estos distintos aspectos del número real a fin de entender cómo se acercan estos/as estudiantes al número real como un todo. Además, cuánto, cómo y en qué sentido han influido en esta forma de comprender los estudios de matemática realizados.

En el apartado 4.1 describimos el cuestionario utilizado como instrumento de obtención de la información y que se presentó adecuado a estos objetivos. Serán reseñadas las fases de diseño del cuestionario, describiendo brevemente las pruebas piloto que le dan validez y confiabilidad. Luego describiremos en detalle el cuestionario de diez tareas utilizado, presentando el objetivo y la lógica de cada una de ellas, agrupadas según el aspecto del número real que indagan principalmente.

Informaremos en el apartado 4.2 la población de estudiantes de secundaria y universidad que participaron del estudio, mostrando cómo fue seleccionada a fin de que sea acorde a los objetivos propuestos y cómo quedó en definitiva constituida.

4.1. El cuestionario

En vista de emplear un instrumento que facilite la indagación en profundidad, sobre las comprensiones de los y las estudiantes acerca de varias facetas del número real, se elaboró un cuestionario consistente en una serie de tareas focalizadas, cuidadosamente diseñadas y para ser contestadas en forma individual y por escrito. La mayoría abiertas y no escolarizadas.

Se adoptó la modalidad escrita considerando que permitiría contactar a un número importante de estudiantes, lo que a su vez nos daría acceso a la aplicación de procedimientos del análisis multivariado particularmente adecuados para estudiar las relaciones entre variables inter-participante y variables de la tarea.

4.1.1. Diseño del cuestionario

Para la elaboración del cuestionario se implementaron a forma de pruebas piloto varias instancias con estudiantes de secundaria y de universidad. También se implementaron entrevistas a docentes de Matemática de estos niveles, de modo de contar con la visión experta de docentes respecto de la validez y adecuación de las tareas diseñadas.

Elaboración de un primer listado de tareas específicas

Basándonos en las hipótesis planteadas en el proyecto, en la literatura pertinente, en investigaciones realizadas anteriormente en el equipo y en nuestra propia experiencia docente elaboramos un primer listado de tareas y preguntas a ser resultas por estudiantes de secundaria y de universidad, aptas para informar las comprensiones sobre algunos de los siguientes aspectos relacionados con los números reales: el reconocimiento de los irracionales como números y la diferenciación entre éstos y sus representaciones; la densidad, el orden y su relación con distintas representaciones convencionales; notaciones infinitas de números y cardinalidad de distintos conjuntos numéricos; la representación de los números reales en la recta numérica y la completitud de los números reales y su asociación con la continuidad de la recta.

Primer cuestionario piloto con ingresantes a la carrera de Matemática

Eligiendo del primer listado 12 tareas y preguntas de respuestas abiertas que parecieron, a nuestro criterio, pertinentes a los objetivos del estudio se elaboró un primer cuestionario que denominamos C1.

El cuestionario C1 fue propuesto a siete estudiantes ingresantes a la carrera de Matemática, durante el curso de ingreso, para ser contestado en forma individual por escrito. Se trataba de estudiantes de entre 17 y 19 años que habían recién egresado de la secundaria, lo que representa un intervalo de edad y nivel de estudio intermedio de cara a la población prevista para nuestro estudio. Se realizó luego una puesta en común en forma de diálogo entre los estudiantes, las profesoras a cargo del curso y la autora de esta tesis, quien elaboró un registro etnográfico.

Este cuestionario fue contestado en su totalidad y en tiempo máximo de una hora, lo que lo mostró adecuado para estas edades y nivel educativo. Las respuestas mostraron diversidad (no hubo ninguna tarea en que todos o todas contestaron lo mismo), lo cual evidenció que las preguntas no eran demasiado simples y que nos podían dar indicios de distintas comprensiones estudiantiles.

De esta implementación concluimos en forma sintética que: a estos y estas estudiantes no les resultaban ajenos los números racionales e irracionales, conocían la recta geométrica como el sustento de los números ordenados (al menos en tareas escolarizadas), solían confundir los números con sus representaciones y tendían a rechazar notaciones infinitas como actualmente infinitas. En conjunto, este panorama indicaba que la temática funcionaba como un problema válido, relativamente familiar a la vez que desafiante para ellos y ellas.

Los comentarios surgidos durante la puesta en común nos dieron indicios útiles para ajustar la estructura, contenido y formulación del cuestionario, particularmente en cuanto a algunas tareas más complejas cognitiva y epistemológicamente.

Segundo cuestionario piloto con estudiantes de secundaria y universitarios

Basándose en el listado de tareas inicial, el C1 y su puesta en común, se redactó un segundo cuestionario (C2). El mismo constó de diez tareas de las cuales seis coinciden con las del C1 y cuatro recuperan otras del listado original.

El cuestionario C2 fue respondido por veinte estudiantes de nivel medio: seis estudiantes de primer año de Ingeniería; cuatro estudiantes de primer año de Matemática y trece de primer año de Biología. Esta diversificación de las edades y tipo y nivel de estudio en Matemática fue conducente a la definición de la población del estudio definitivo.

Las nuevas conclusiones fueron, principalmente: que los números irracionales no son comprendidos plenamente por los y las estudiantes, en particular por quienes cursan la escuela secundaria, sin embargo, conocen su existencia. También se constató que muestran dificultades en la diferenciación de los conjuntos numéricos incluidos en los números reales.

Este cuestionario se reveló adecuado para este amplio rango de edad y niveles educativos, ya que ninguna pregunta fue respondida en forma unánime, y ninguna quedó sin contestar por la totalidad de los y las participantes. Observamos que las respuestas cerradas resultaron más fáciles de codificar, pero mucho más pobres en información, sobre todo cuando se refiere a comprensiones o relaciones entre aspectos de los conceptos involucrados. Por ello pensamos en incorporar más preguntas abiertas que suscitaran distintos puntos de vista a fin de profundizar en la comprensión de las ideas que han construido los y las estudiantes.

Tercer cuestionario piloto con estudiantes de 5to año de secundaria

Se elaboró un cuestionario de 13 tareas, a partir del listado de tareas inicial y del C1 y C2. Se implementó una actividad con 30 estudiantes de secundaria, estudiantes de 5to año de secundaria con orientación pedagógica, quienes después de resolver el cuestionario lo discutieron en subgrupos. Todas las tareas fueron respondidas y ninguna en forma unánime. En conjunto, las respuestas muestran gran diversidad.

De sus producciones escritas y de los registros etnográficos del intercambio en subgrupos pudimos corroborar que los y las estudiantes de secundaria conocen la existencia de los números racionales e irracionales y la recta geométrica como el sustento de los números ordenados. En la discusión persistieron algunas ideas alternativas sobre las relaciones de los números con sus representaciones y se problematizaron con la idea de infinito.

Al igual que en el C1, frente a las tareas más complejas cognitiva y epistemológicamente, el trabajo de reflexión y explicitación de las preguntas cerradas entre pares se mostró adecuado para acceder a las ideas de los y las estudiantes, lo que nos llevó a incorporar tareas con preguntas abiertas formuladas desde distintos puntos de vista a fin de dar oportunidad a exteriorizar concepciones en el contexto del cuestionario de resolución individual.

Entrevistas de validación realizadas a docentes de Matemática4F16

Se realizaron entrevistas a diez docentes de matemática en ejercicio, cuatro profesores/as de matemática de secundaria y seis docentes universitarios de materias de primer año de distintas carreras. Las entrevistas tuvieron el objetivo principal de indagar las ideas y dificultades que los docentes advierten en sus estudiantes sobre la comprensión del número real. Teniendo en cuenta los cuestionarios pilotos antes descriptos, se diseñaron preguntas dónde se solicitaba a los docentes información específica, con orientación cognitiva relativa al número real.

Sintéticamente podemos decir que los y las docentes consultadas piensan que a estudiantes de secundaria y de universidad no les resulta ajeno el tema de los números reales. En su totalidad manifestaron haberlo trabajado con sus estudiantes. Han enseñado y esperan que sus estudiantes hubieren aprendido la existencia de los números racionales e irracionales y la recta geométrica como el sustento de los números ordenados.

Manifestaron que es común que sus estudiantes construyan ideas alternativas sobre los números y sus representaciones, particularmente sobre los números irracionales, que en muchas ocasiones consideran como algunos pocos números muy especiales. Piensan que sus estudiantes (sobre todo de secundaria) suelen confundir números racionales con irracionales y tener concepciones contradictorias respecto al infinito. Además, desde su visión de docentes, valoraron que los contenidos planteados en los cuestionarios eran adecuados a las distintas edades y niveles educativos de nuestra población. La información aportada por los docentes nos permitió formular nuevas preguntas o tareas y reformular las existentes para alcanzar el cuestionario definitivo para este estudio.

---

[16]Ferrero, M., y Montoro, V. (2011; 2013)

4.1.2. Conclusiones del proceso de preparación del cuestionario

En cuanto a la confiabilidad de las preguntas o tareas

Contamos con una serie de tareas y preguntas confiables en el sentido de que han sido contestadas por una diversidad de estudiantes de secundaria y de universidad de distintas carreras, y si bien han puesto de manifiesto diversidad de ideas, en la amplia mayoría de los casos las consignas fueron interpretadas en el sentido pretendido. Los cuestionarios fueron en general respondidos en su totalidad y en un tiempo prudencial, lo que también redundaría en confiabilidad de este instrumento.

En las puestas en común se manifestaban en forma explícita las respuestas escritas, confirmando que estas se correspondían con las ideas que pretendíamos evidenciar con ellas, algo similar ocurrió lo mismo con el trabajo en subgrupos.

En cuanto a la validez de las preguntas o tareas

Para ningún/a participante, la temática y las tareas se mostraron fuera de su zona cognitiva. Pudimos observar que estas actividades permiten que los y las estudiantes de distintas edades y niveles educativos de nuestra población objetivo evidencien sus ideas en el sentido de nuestras hipótesis. Todas las preguntas fueron mayoritariamente contestadas y mostraron gran diversidad de respuestas, lo que anula tanto el efecto piso y como el efecto techo de las preguntas, en el sentido de descartar que haya alguna tarea que no nos brinde información, ya sea por demasiado simple o por demasiado compleja. En cada paso fueron capitalizándose ajustes de redacción y clarificación de las consignas.

La consulta a las o los docentes como expertos/as aportó mayor validez al instrumento que luego se implementó con el conjunto definitivo de participantes, puesto que suma elementos de contexto importantes no sólo en cuanto a la adecuación cognitiva de las preguntas sino también hacia una mejor formulación en la presentación de las consignas de las tareas del cuestionario a los y las estudiantes.

4.1.3. Cuestionario utilizado para el estudio. Las tareas del cuestionario

Considerando que las comprensiones, sobre todo en temas de matemática avanzada, no son unívocas, sino que suelen ser lábiles y a menudo incluso contradictorias, hemos pensado el cuestionario como un texto integrado con capacidad de dar diferentes oportunidades a los y las participantes para ponerlas en juego.

Las tareas del cuestionario abarcan distintos aspectos del número real según diferentes demandas y dimensiones del conocimiento, unas pocas escolarizadas y otras que generalmente no se encuentran en las clases de matemática. La versión final del cuestionario, como fue presentada a los y las participantes, se presenta en el Anexo I.

El cuestionario inicia con una solicitud introductoria muy general, con el solo fin de convocar al estudiante a pensar en una variedad de números, que no intervino en el análisis propiamente dicho. Luego propone diez tareas de indagación de las ideas sobre distintos aspectos del número real.

A fines de la presentación del sentido de las tareas y su articulación, es necesario distinguir entre el orden en el que aparecen en el cuestionario y su vinculación temática. Por lo que organizamos las tareas del cuestionario en cuatro grupos según el aspecto del número real que se pusiera en juego principalmente, que denominamos N, D, I y R.

El Grupo Temático N está constituido por dos tareas que tratan principalmente sobre concepción de número y de número irracional en particular (N1 y N2) correspondientes con las Tareas T1 y T2 según el orden en que se presentaron en el cuestionario.

El Grupo Temático Grupo D constituido por dos tareas que tratan principalmente sobre, la densidad de los números reales en relación con el orden y el supremo de un intervalo (D1 y D2) correspondientes con las Tareas T3 y T9 según el orden del cuestionario.

El Grupo Temático I constituido por tareas que tratan principalmente sobre algunos aspectos del infinito implicados en los números reales (I1, I2 y I3) correspondientes con T4, T5 y T10 según el orden del cuestionario.

El Grupo Temático R formado por tareas que tratan sobre la representación de los reales en la recta (R1, R2 y R3) correspondiente con T6, T7 y T8 según el orden del cuestionario.

En la siguiente Tabla 4.1 se resume esta información dando la denominación de los grupos temáticos y de cada tarea, el orden en que se la encuentra en el cuestionario y el tema principal indagado en cada una de ellas. Si bien la agrupación de tareas refleja el aspecto conceptual fundamental que se expresa tales tareas, por la índole de los conceptos trabajados, en cada una de ellas aparecerán relacionados la mayoría de los aspectos indagados en este estudio.

Luego, a continuación, presentamos, por grupo temático, cada tarea tal como fue expuesta a los y las estudiantes, los objetivos particulares de cada una y la lógica imperante en cada una de ellas, analizando qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes.

Tabla 4.1. Grupo Temático, denominación, orden en que se la encuentra en el cuestionario y tema principal indagado para cada tarea.

	Denominación de las Tareas	Orden en el cuestionario	Tema principal indagado en la tarea
	Grupo N. Número en general y número irracional en particular		
	N1	T1	Número en general (según una tipología)
	N2	T2	Concepción de número irracional
	Grupo D. La densidad de los reales, en relación con el orden y el supremo de un intervalo		
	D1	T3	El orden y la densidad en los reales en el contexto de buscar números entre dos dados
	D1	T9	El orden y la densidad en relación con el supremo de un intervalo en los reales
Grupos Temáticos	**Grupo I. El infinito en los números reales**		
	I1	T4	El infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número
	I2	T5	El infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números
	I3	T10	Representación decimal infinito-periódica de un número en relación con el orden y la densidad en los reales
	Grupo R. Representación de los números reales en la recta		
	R1	T6	La representación de números reales en la recta
	R2	T7	La recta como representación de los números reales
	R3	T8	La naturaleza de la recta numérica

Tareas del Grupo Temático N. Número en general y número irracional

Con estas tareas buscamos conocer las concepciones numéricas de estos y estas estudiantes, particularmente sobre número racional, irracional y real.

Tarea N1. Concepciones de número según una tipología

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea N1 que se corresponde con la presentada en primer lugar en el cuestionario (Tarea T1).

> Por favor, menciona los tipos de números que conoces. ¿Podrías darnos un ejemplo de cada uno?
>
> ____

Con esta tarea pretendimos conocer qué es para estos y estas estudiantes “un número” a través de una tipología de números propuesta por ellos y ellas. También si reconocen distintos tipos de números, particularmente si consideran a los racionales, irracionales y reales como números.

La tarea consiste en una pregunta abierta que les que solicita que nombren los tipos de números que conocen y den ejemplos de ellos. Esta es una pregunta cuya respuesta posiblemente consistirá en un listado de “tipos” de números y sus ejemplos.

Dado el nivel de escolarización de la población consultada, es esperable que al referirse a tipo de números reseñen a los conjuntos numéricos escolares - naturales (N), enteros (Z), racionales-irracionales (Q-I) y reales (R).

Desde el punto de vista del concepto de número, éste será *un elemento de un conjunto numérico definido como tal*. Sin embargo, podrán aparecer las concepciones numéricas más diversas, sobre todo relacionadas con los números naturales (cantidad de cosas discretas), los racionales como magnitudes (medidas) y también los números complejos, más relacionados con la enseñanza universitaria. Los ejemplos nos servirán para comprobar si el tipo de número que la o el estudiantes está nombrando se corresponde con el que está pensando.

Tarea N2. Concepción de número irracional

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea N2 que se corresponde la con presentada en segundo lugar en el cuestionario (Tarea T2).

Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracionales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser "irracionales"?

¿Conoces otros números irracionales? …… ¿Cuáles?

Con esta tarea nos propusimos explorar si los y las estudiantes conocen los números irracionales, si los reconocen con condiciones necesarias y suficientes (si los reconocen como los reales que no se pueden escribir como fracción (cociente) de enteros, con denominador distinto de cero o como los que poseen infinitos decimales no-periódicos) y si pueden diferenciarlos de los racionales. La tarea nos habilita a inferir una posible identificación de los reales con los racionales y/o de los irracionales con las raíces o con ciertos números muy especiales.

Se solicita se describa qué se entiende por número irracional y se espera una respuesta abierta que contenga los elementos esenciales que describen a un número irracional. Luego, bajo el supuesto (basado en los estudios piloto) de que la mayoría del estudiantado conoce los números irracionales π y $\sqrt{2}$, se les solicita otros ejemplos de irracionales. En las respuestas tendremos en cuenta si se considera a los irracionales como complemento de los racionales (distintos de las fracciones o cocientes de enteros con denominador distinto de cero) o si se los considera por su notación decimal (como números con infinitos decimales no-periódicos). Los ejemplos nos servirán para corroborar, complementar e ilustrar sus respuestas.

Tareas del Grupo Temático D. La densidad de los números reales

Estas tareas tratan principalmente sobre: la densidad de los números racionales en los reales, las notaciones fraccionaria y decimal de los racionales y su relación con la densidad; la diferenciación entre discretitud y densidad e inferir concepciones sobre el orden y la densidad de los reales y las ideas que han construido estos y estas estudiantes sobre el supremo de un intervalo en el conjunto de números reales.

Tarea D1. Comprensión del orden y la densidad de los reales en el contexto de buscar números entre dos dados

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea D1 que se corresponde con la presentada en tercer lugar en el cuestionario (Tarea T3).

Cuando decimos "un número entre 0 y 2", nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2.

¿Podrías nombrar un número entre…..

0 y 2?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
3,14 y π?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé

¿Cuántos números hay entre:

0 y 2?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
3,14 y π?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos/as estudiantes el orden de los reales en relación con la densidad y con distintas notaciones para los números: fraccionaria, decimal o nominal (esta última para un irracional) e identificar si los y las estudiantes confunden la densidad de los racionales con la completitud de los reales. También buscamos inferir concepciones sobre infinito, en relación con la cantidad de números entre dos dados y con la densidad.

La tarea comienza con una aclaración sobre el significado de la expresión "un número entre" dos números, haciendo referencia a la relación de orden de los números reales. A continuación, se plantean dos preguntas con tres ítems cada una.

En la primera pregunta se solicita *si se puede nombrar un número entre dos dados*, con las opciones *¿sí-cuál?, no hay y no sé.* Se presentan tres parejas de números, en la primera se muestra dos enteros (no consecutivos), en la segunda se proponen dos fracciones (positivas, menores que 1 y con denominador consecutivo) y en la tercera pareja se presentan un racional (3,14) y un irracional (π). Las tres parejas de números se dan de tal manera que el primer número es menor que el segundo, a fin de no introducir un distractor.

Es de esperar que, si la o el estudiante comprende el orden y la densidad de los números reales, responda en los tres ítems: *sí hay un número* y dé un ejemplo correcto. Entre 0 y 2 está al menos el (muy conocido) 1. Entre 1/5 y 1/4, podrían dar como ejemplo una fracción (ej. 2/9) o si les es más cómodo un decimal entre 0,2 y 0,25 (ej. 0,21). Por último, entre 3,14 y π, dado que π es 3,14159…podrá proponer un decimal por ejemplo 3,1414. Podría suceder que, aunque sepa que existe tal número entre estos dados, no pueda determinar cuál, porque no maneje con soltura la relación de orden entre fracciones, la equivalencia de una fracción con un decimal o el orden entre decimales; entre 3,14 y π, porque no opere de forma correcta o fluida con el orden entre decimales o no conozca el valor de π.

Si la o el estudiante elige: *no hay* un número entre 1/5 y 1/4 podríamos pensar que no conoce las fracciones como números o las piense como discretas. La elección: *no hay* un número entre 3,14 y π podría provenir de identificar π con su aproximación decimal 3,14.

Para la segunda pregunta *¿Cuántos números hay?* entre las mismas parejas de números, se presentan cinco opciones de elección (*ninguno, unos pocos, muchísimos, infinitos y no sé*). La respuesta correcta es siempre *infinitos,* sin embargo, por la forma cerrada de la pregunta, no podríamos distinguir que concepción de infinito este actuando.

Al haber infinitos números entre dos reales distintos, las respuestas *unos pocos* y *muchísimos* también son respuestas correctas, sin embargo, es esperable que si está disponible la opción *infinitos* y se elige *unos pocos* o *muchísimos* sea porque se esté pensando en una cantidad finita. Si entre 0 y 2 se elige *unos pocos*, podríamos pensar que se está identificando a los números con los enteros (y sus fracciones), por lo que en este caso podría considerarse que no haya ningún número entre 1/5 y 1/4 ni entre 3,14 y π. En principio las respuestas *unos pocos* o *muchísimos*, nos harían pensar en una concepción de los números reales como discretos.

Tarea D2. Concepción sobre el orden y la densidad en relación con el supremo de un intervalo en los reales

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea D1 que se corresponde con la presentada en noveno lugar en el cuestionario (Tarea T9).

> En matemática solemos considerar el intervalo (1,2) como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo.
> Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus alumnos sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2.

¿Qué pensás al respecto? ¿Se puede identificar el número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenezca al intervalo? ____

____

¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos y estas estudiantes el orden de los reales con sus especiales características en relación con la densidad y el supremo de un intervalo de números reales. En particular identificar si los y las estudiantes confunden la densidad de los racionales con la completitud de los reales e inferir concepciones sobre infinito, en relación con la cantidad de números entre dos dados, la densidad y la completitud.

La tarea comienza con una aclaración sobre el significado de “intervalo abierto” de números, y se plantea la posibilidad de identificar un número “más cercano” al supremo del intervalo. A continuación, se plantean dos preguntas.

La primera pregunta interroga sobre *si es posible encontrar el número “más cercano” al supremo y que pertenezca al intervalo* (es decir que no sea el mismo supremo), mientras que en la segunda se invita a argumentar al respecto. Para la primera pregunta se anticipan las respuestas, *sí es posible, no es posible* o *no sé* y algún tipo de justificación. En la segunda es deseable que se amplíe esta argumentación, a fin de persuadir a alguien que no esté de acuerdo, de esta manera se habilita a explicitar su pensamiento. Es esperable que un o una estudiante que comprenda la idea de supremo (completitud de los reales) responda que no es posible encontrar tal número debido a la densidad infinita de los reales o por su calidad de supremo del intervalo. Sin embargo, puede haber otras razones por las cuales el estudiante puede pensar que esto no es posible. La respuesta *sí es posible*, daría lugar a pensar a los reales como discretos, podríamos encontrar un número anterior a uno dado (al estilo de los enteros).

Tareas del Grupo I: El infinito en los números reales

Estas tareas tratan principalmente sobre: la comparación de colecciones infinitas ordenadas en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número racional; el orden y la densidad de los números reales en relación con la representación decimal infinito-periódica de un número y el infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números.

Tarea I1. Comprensión del infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea I1 que se corresponde la con presentada en cuarto lugar en el cuestionario (Tarea T4).

Probablemente sepas que en matemática solemos escribir al número con infinitas cifras decimales iguales a 3 como: $0,\hat{3} = 0,33333..$
El número con infinitas cifras decimales que se repiten, iguales a 32 se escribe: $0,\overline{32} = 0,323232....$
De modo que por ejemplo $2,2\hat{9} = 2,299999...$ posee infinitas cifras decimales 9 a partir de los centésimos

¿En cuál de los siguientes números hay más cantidad de cifras 3?

Comparando $0,\hat{3} = 0,33333...$ y $0,\overline{32} = 0,3232323232....$

□ Hay más en $0,\hat{3} = 0,33333...$
□ Hay más en $0,\overline{32} = 0,3232323232....$
□ Hay igual cantidad
□ No se pueden comparar
□ No sé

¿Podés explicar por qué elegiste esa opción?

____

____

El objetivo de la tarea es estudiar cómo comprenden los y las estudiantes el infinito cardinal en el contexto de la comparación de colecciones numerables ordenadas. Esto es las infinitas cifras decimales en la representación decimal infinito-periódica de un número racional.

Partiendo del reconocimiento de una diversidad en la formalización del conocimiento estudiantil, en la consigna se explícita el significado de la notación decimal infinito-periódica de un número racional, en términos accesibles, remarcando que se trata de “infinitas cifras (o período) que se repiten”. A partir de esa “socialización” de la información de base, esta tarea solicitó a los y las participantes que comparasen dos colecciones infinitas numerables ordenadas dadas como infinitas (las infinitas cifras decimales de dos racionales).

La tarea plantea dos demandas cognitivo-comunicativas diferentes: una de elección, entre varias opciones (hay más en 0,33333…; hay más en 0,3232323232…; hay igual cantidad; no se pueden comparar y no sé), y una de justificación por escrito. La combinación de estas dos demandas apunta a captar un arco amplio en la precisión, articulación y explicitación de las formas en que los y las estudiantes significan el problema.

En cuanto a la elección de las opciones de respuesta se podría esperar que quienes comprendan la noción de infinito actual, implicada en la notación infinito-periódica de los números racionales, respondan que ambas colecciones infinitas numerables poseen la misma cantidad de elementos. Sin embargo, considerar que hay igual cantidad de “3” en ambas colecciones podría indicar dos razonamientos infinitistas diferentes: que existe una única cantidad infinita en ambas colecciones o que los conjuntos en cuestión son coordinables (se considera que por cada “3” de una colección hay uno y sólo uno de la otra colección). Por último, esa opción de respuesta también puede estar indicando una interpretación literal finitista ya que en la consigna figuran cinco “3” en cada colección.

La respuesta hay más en $0,\overline{32}$ podría indicarnos que no se comprendió la consigna, ya sea porque no se esté considerando que ambos números tienen infinitas cifras decimales o que se consideró a “32” mayor que “3”. La eventual elección correspondiente a más en $0,\overline{32}$ nos indica una visión finitista, ya que, si tomamos una cantidad finita de decimales en ambos números, en $0,\overline{32}$ habría el doble de “3” que en $0,\hat{3}$. La elección *no se puede comparar* puede indicar una concepción de lo infinito como inabarcable, indefinido, o bien a una visión de infinito potencial, es decir lo infinito como sin fin, basada en que, si el proceso no termina nunca, no arrojará resultados a comparar.

Por lo argumentado anteriormente, vemos que la respuesta de elección no es en sí misma concluyente, se les invita a justificaciones estas elecciones de modo de habilitar la explicitación sus concepciones al respecto.

Tarea I2[17]. Concepciones sobre el infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números

El objetivo de esta tarea fue conocer las concepciones de estos y estas estudiantes sobre el infinito en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números, sin plantear explícitamente que se trata de conjuntos infinitos, ni mostrar una posible biyección entre ellos.

[17] Esta tarea fue presentada en: Montoro, V., Scheuer, N. y Echeverría, M. (2016).

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea I2 que se corresponde la con presentada en quinto lugar en el cuestionario (Tarea T5).

A continuación aparecen parejas de conjuntos numéricos. Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números? ¿Por favor, explicarías por qué pensás así en cada caso?

Capicúas	No capicúas	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Los números primos	Los números pares	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Naturales	Enteros	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Enteros	Racionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Racionales	Irracionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?

Esta tarea demandó a los y las participantes que comparasen cinco parejas de conjuntos infinitos de números indicando cuál es más abundante. Las parejas de conjuntos propuestas fueron: A. capicúas/ no-capicúas; B. primos/ pares; C. naturales/ enteros; D. enteros/ racionales y E. racionales/ irracionales.

Se solicitó elegir una respuesta entre las siguientes opciones: que *alguno de los dos conjuntos fuera más abundante*; los dos conjuntos fueran *igualmente abundantes*, *no se pudieran comparar,* o que *no se supiera* la respuesta. Además, se pedía una justificación de la opción elegida. Es decir que se contó con diez respuestas por estudiante: cinco elecciones y cinco justificaciones.

Apelamos a un contexto de comparación de conjuntos infinitos de números, sin plantear explícitamente que se trata de conjuntos infinitos, ni mostrar una posible biyección entre ellos, a fin de habilitar que incluso los y las estudiantes con escaso grado de formalidad en sus estudios de matemática pudiesen abordar la tarea.

La tarea fue diseñada de forma que propusiera a los y las estudiantes un amplio espectro de situaciones de comparación de conjuntos infinitos de números, de manera que los patrones de respuestas de elección y justificación permitan conocer distintas maneras de comprender el infinito. Además, las parejas a comparar habían sido elegidas de modo que hubiera conjuntos numerables y no numerables; discretos y densos; comparables por inclusión o no (disjuntos; con intersección finita y complementarios), como puede verse en la Tabla 4.2. Las parejas de conjuntos estaban ordenadas según su complejidad y la etapa educativa en la que se inicia su estudio.

Los números capicúas (pareja A) aparecen como una curiosidad, dependen de la notación y carecen de estructura algebraica, por lo que tienen mayor relación con la vida cotidiana en contextos letrados (por ejemplo, debido a su presencia en billetes, formularios, identificación de automóviles, números en direcciones postales, etc.) que con la cultura específicamente escolar. Los números primos y pares (pareja B) son subconjuntos de números enteros, estudiados desde la escuela primaria por sus particularidades en la divisibilidad de enteros. Los naturales, enteros y racionales (parejas C y D), son conjuntos de números con estructura aditiva y multiplicativa, estudiados desde la escolaridad primaria. Por último, los irracionales (pareja E) se originan de una necesidad intra-matemática como forma de completar el conjunto de números reales y se estudian en los últimos años de secundaria.

Tabla 4.2. Características de los conjuntos numéricos en la Tarea I2.

Parejas de conjuntos a comparar	Coordinables (numerables)	Inclusión	Disjuntos (complementarios)	Discretos
A (capicúas/ no capicúas)	SÍ	NO	SÍ	SÍ
B (primos/ pares);	SÍ	NO	NO (Intersección finita)	SÍ
C (naturales/ enteros)	SÍ	SÍ $(N \subset Z)$	NO	SÍ
D (enteros/ racionales)	SÍ	SÍ $(Z \subset Q)$	NO	NO (Q denso)
E (racionales/ irracionales)	NO	NO	SÍ	NO (ambos densos)

En cuanto a la elección de las opciones de respuesta, se podría esperar que los y las estudiantes que comprendieran la noción de infinito matemático respondieran que todos los conjuntos numerables son igualmente abundantes y que los irracionales son más que los racionales. Mientras quienes consideraran más los no-capicúas que los capicúas, más los pares que los primos, más los enteros que los naturales y más los racionales que los enteros (dada la densidad de los racionales) estarán respondiendo coherentemente con lo que ocurriría en una colección o intervalo finito o acotado de números. En la pareja E, los irracionales pueden ser considerados más que los racionales aun cuando se piense en un intervalo acotado; o los racionales pueden ser considerados más abundantes que los irracionales si se concibe a los irracionales como números raros (un número finito de ellos); o ambos conjuntos pueden ser vistos como igualmente abundantes debido a la densidad de ambos en un intervalo acotado. Considerar que los irracionales son más abundantes que los racionales se puede interpretar como la respuesta experta si se compara por cardinalidad, o como finitista si se considera que en un intervalo acotado fueran infinitamente más los irracionales que los racionales.

Por otra parte, las eventuales elecciones correspondientes a: más capicúas que no capicúas, más primos que pares, más naturales que enteros, más enteros que racionales, más racionales que irracionales nos indican que posiblemente no conocen o confunden los conjuntos numéricos en cuestión. Considerar que los conjuntos propuestos son igualmente abundantes podría indicar dos razonamientos diferentes: existe una única cantidad infinita o los conjuntos en cuestión son coordinables entre sí.

La elección *no se puede comparar* puede deberse a una concepción de lo infinito como inabarcable, sin reglas, indefinido o bien a una visión de infinito potencial, es decir lo infinito como sin fin. Por último, las elecciones *no sé* evidencian dificultades o falta de disposición para pensar en colecciones infinitas.

Por lo argumentado anteriormente, vemos que las elecciones brindan ciertas pautas sobre cómo se piensa el infinito matemático, pero no son en sí mismas concluyentes, por lo que se habilita a que se justifiquen las elecciones hechas de manera de explicitar de forma más completa las concepciones de los y las estudiantes.

Tarea I3[18]*. Comprensión de la representación decimal infinito-periódico de un número.*

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea I3 que se corresponde con la presentada en décimo lugar en el cuestionario (Tarea T10).

Comparando el número $0,\widehat{9} = 0,9999...$ con 1:

- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es mayor que 1
- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es menor que 1
- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es igual a 1
- □ son incomparables:
- □ otra posibilidad:
- □ no sé

¿Por qué pensás que esto es así?

El objetivo de esta tarea fue estudiar las comprensiones sobre del orden y la densidad de los números reales de los y las estudiantes en una situación de representación decimal infinito-periódico de un número racional y que concepciones sobre infinito operan en estas.

En una tarea anterior en el cuestionario (Tarea I1) se explicitó la notación decimal infinito-periódica remarcando que se trata de "infinitas cifras que se repiten".

[18] Varios/as autores/as han usado la misma tarea en sus estudios (Cornu, 1991; Katz y Katz 2010; Tall, 1991, 2009)

La presente tarea demandó a los y las participantes que comparasen dos notaciones decimales diferentes para un mismo número, en el contexto de la relación de orden de los números reales (la cual es tricotómica, es decir: dos números reales dados o son iguales o uno es mayor que el otro).

En forma similar a la Tarea I1 plantea dos demandas cognitivo-comunicativas diferentes como vía para acceder a las comprensiones de los y las estudiantes: una de elección, entre varias opciones ($0,\hat{9}$ *es mayor que 1;* $0,\hat{9}$ *es menor que 1;* $0,\hat{9}$ *es igual a 1*; *son incomparables; otra posibilidad* y *no sé*) y una de justificación de la elección, como respuesta escrita a la pregunta *¿Por qué pensás que esto es así?*

En cuanto a la elección entre las opciones cerradas de respuesta, se podría esperar que quienes comprendieran la noción de infinito actual implicada en la notación infinito-periódica de los números racionales respondieran que $0,\hat{9}$ es igual a 1. Debido a que, por la propiedad de densidad, si se consideran los infinitos "9" actualmente presentes, no habría entre estos dos números ningún número posible, siendo ésta la respuesta correcta desde un punto de vista estándar, que se establece mediante una prueba basada en la definición formal (axiomática) de los números reales y de límite de una sucesión.

Sin embargo, como se revisa en el Capítulo 2 esta igualdad está muy lejos de ser intuitiva, sino que debió ser establecida, mediante un sistema axiomático y demostrarla haciendo uso (en forma directa o indirecta) del axioma del supremo[19], axioma que completa la formalización usual de los números reales y los distingue de los racionales.

La eventual elección correspondiente a que $0,\hat{9}$ *es menor que 1* puede indicar un amplio arco de visiones. En primer lugar, una visión finitista, basada en considerar que, si se toman una cantidad finita de "9" a la derecha de la coma, por grande que ésta fuera siempre tendríamos un número menor que 1. La misma elección también puede basarse en una concepción de *infinito potencial,* según la cual siempre se podría poner otro "9" antes de llegar al 1 en un proceso sin fin. Pero en esta elección también puede mediar la observación de un aspecto meramente convencional de la notación numérica, que dice que un 0 antes de la coma significa *menor que 1* y por último también puede estar motivada por desconocer la posibilidad de que un mismo número pueda tener dos expresiones decimales distintas.

La elección de la opción *es incomparable* puede estar motivada por una concepción de lo infinito como inabarcable, sin reglas, indefinido o sin fin o

[19] Axioma A15 de la definición axiomática de los números reales dada en el Capítulo 2.

simplemente porque no se sabe cómo hacerlo. Por último, la elección de *no sé* evidencia dificultades o inseguridad para pensar en cuestiones que involucren el infinito. Las opciones $0,\hat{9}$ *es mayor a 1* y *otra posibilidad* no fueron elegidas por ningún participante, por lo que no se tuvieron en cuenta en el análisis. De modo de habilitar a los y las participantes a explicitar sus concepciones la tarea incorpora una respuesta abierta a fin de justificar su elección de opción.

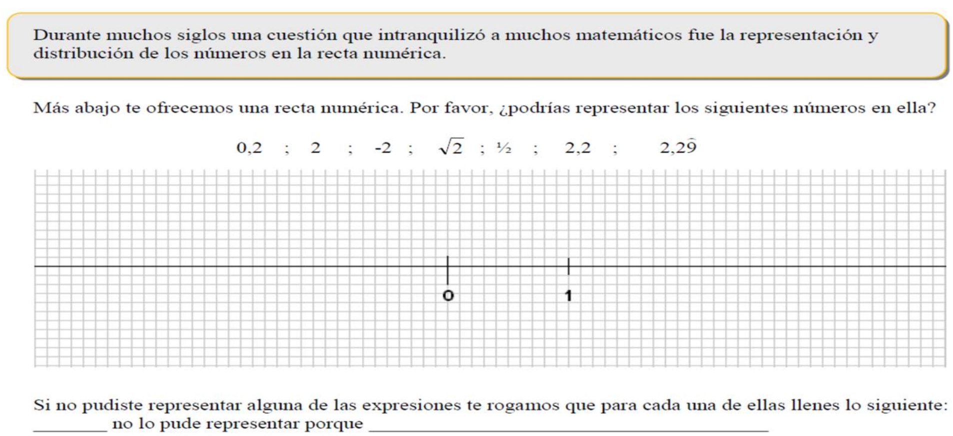
Tareas del Grupo Temático R. Representación de los números reales en la recta

Estas tareas tratan principalmente sobre: la representación de números reales en una recta numérica con escala decimal; la recta numérica como representación de los números reales y la diferenciación entre densidad y completitud-continuidad, y la naturaleza de la recta numérica, el infinito, la densidad y completitud de los números reales en relación con la continuidad de recta.

Tarea R1. Comprensión de la representación de números reales en la recta

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo estos y estas participantes conciben la representación de distintos números reales: enteros, racionales e irracionales (construibles), cuando la recta numérica es dada con una escala decimal.

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea R1 que se corresponde la con presentada en sexto lugar en el cuestionario (Tarea T6).


Durante muchos siglos una cuestión que intranquilizó a muchos matemáticos fue la representación y distribución de los números en la recta numérica.

Más abajo te ofrecemos una recta numérica. Por favor, ¿podrías representar los siguientes números en ella?

$0,2$; 2 ; -2 ; $\sqrt{2}$; $½$; $2,2$; $2,2\hat{9}$

Si no pudiste representar alguna de las expresiones te rogamos que para cada una de ellas llenes lo siguiente:
________ no lo pude representar porque ____

Teniendo en cuenta la pluralidad de formación matemática de los y las estudiantes, en la consigna se presenta un modelo de recta sobre un cuadriculado, marcando en ella el 0 y el 1 de modo de ofrecer una escala y transformar la recta geométrica en una recta numérica. El cuadriculado sugiere una escala del orden de los décimos. Es decir, se ofreció un modelo de recta graduada a los décimos. No se consideraron números no construibles, ya que esta condición apareció como opaca en las pruebas piloto.

La tarea consiste en dados siete números encontrar su lugar en la recta numérica. Se solicita graficar seis números racionales: dos números enteros, uno positivo y uno negativo (2 y -2), una fracción no entera (1/2), dos decimales del orden de los décimos (0,2 y 2,2) y un decimal periódico ($2,2\widehat{9}$). Por último, se solicita se represente un irracional construible ($\sqrt{2}$).

Dada la escolaridad de estos y estas estudiantes es esperable que no tengan dificultad para ubicar en la recta los números enteros (2 y -2), ya que se los presenta de acuerdo con las convenciones escolares habituales, con el 1 a la derecha del 0 y el modelo de recta presentada está graduada a los décimos. Así mismo los decimales con décimos (0,2 y 2,2) debieran ser fáciles de ubicar dado que cada uno de ellos coincidirá con la intersección de una marca decimal con la recta. En el caso de 1/2 se agrega la dificultad de la notación, ya que generalmente en la escuela se asocia la recta numérica con los decimales. En cambio, en los dos números restantes se agrega la notable dificultad de la notación infinita en el caso de $2,2\hat{9}$ y de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Sin embargo, $\sqrt{2}$ es un conocido número construible, dado generalmente como tarea escolar proyectando la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales a 1.

Solamente en el caso de que no se haya podido representar algún número se pide justificar porqué. Es decir, la tarea deja abierta la posibilidad de encontrar (o no) el punto de la recta que los representa. Teniendo en cuenta que los dos últimos números mencionados son aquellos menos familiares para gran parte de la población estudiada, contamos con que las justificaciones nos dieran indicios sobre algunas dificultades respecto a la notación de $2,2\hat{9}$ y de $\sqrt{2}$ como así también de la noción de infinito operante en ésta.

Tarea R2. Concepción de la recta como representación de los números reales

Los objetivos de esta tarea fueron: conocer cómo los y las estudiantes conciben en la recta numérica como representación de los números reales, la diferenciación entre números racionales y números reales y la diferenciación entre densidad y completitud-continuidad.

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea R2 que se corresponde la con presentada en séptimo lugar en el cuestionario (Tarea T7).

Si fuera posible marcar sobre la recta TODAS las fracciones (números racionales), ¿la recta, se llenaría, se completaría? □ Si. □ No.
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

Si además de los racionales, marcáramos todas sus raíces (cuadradas, cúbicas, etc) ¿se completaría la recta? __________. ¿Quedaría lugar para más números? __________ ¿Para cuántos? __________
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

Si de la recta numérica quitásemos todas las fracciones (números racionales) ¿qué pensás que quedaría?

La tarea consiste en tres situaciones hipotéticas de marcar (o quitar) infinitos números sobre la recta, en este caso la recta es dada como sostén de los números.

En la primera situación se propone marcar todos los racionales, pero se lo hace a través de la palabra *fracciones* con la aclaración entre paréntesis de que son los números *racionales* (infinitos numerables), en la segunda se propone marcar, en esa misma recta sostén, todas las raíces de las fracciones (infinitos numerables reales, racionales e irracionales). Por último, se propone la situación inversa a la primera de retirar todos los racionales y pensar qué quedaría en la recta.

La primera situación presenta la posibilidad de marcar en la recta numérica todas las fracciones (racionales) con opciones de elección a la pregunta: *¿la recta, se llenaría, se completaría?* (*sí o no*) y luego se invita a argumentar sobre esta respuesta con las preguntas: *¿cómo lo pensás vos? ¿cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?* En la segunda situación se realizan tres preguntas con respuestas cortas: con todas las raíces de las fracciones *¿se completa la recta numérica?* (*sí, no* o *no sé*) y *¿hay lugar para más números?* (*sí, no* o *no sé*) *¿para cuantos?* (*no sé, algunos, muchos* o *infinitos*) y luego se solicita una argumentación de las respuestas elegidas. Para la tercera situación, recíproca de la primera, se invita a argumentar sobre la siguiente pregunta: *si quitamos todas las fracciones de la recta ¿qué pensás que quedaría?*

La tarea fue diseñada de forma que propusiera a los y las estudiantes la posibilidad de pensar que para cada fracción (número racional) se puede encontrar un punto en la recta (primera situación) y que no todos los puntos de la recta representan fracciones (segunda y tercera situación). En el primer caso se trata de encontrar un punto para cada racional, es decir de representar el conjunto (denso) numerable de racionales en la recta, mientras en el segundo caso, si bien se trata de otro conjunto infinito que incluiría irracionales, se trata aun de un conjunto denso y también numerable, para concluir en el tercer caso en el cual la atención está puesta en quitar un conjunto denso y numerable y quedaría un conjunto (que aun denso) no - numerable de irracionales.

En cuanto a la elección de las opciones de respuesta, se podría esperar que aquellos/as estudiantes que comprendieran a la recta numérica (densa y continua) como una representación de los números racionales y de los números reales (densos y completos) y a los números reales como la unión de los racionales y los irracionales, responderían en la primera situación, diciendo que: cuando se marcan todas las fracciones en la recta esta *no se completa*, debido a que aún se pueden marcar en ella todos los irracionales. Por lo tanto, aun cuando marcáramos además todas las raíces de los racionales, *no se completaría* ya que aún faltan (infinitos no-numerables) números irracionales (segunda situación). Recíprocamente si extrajéramos todas las fracciones, quedaría una recta con infinitos no-numerables puntos o números para marcar (los otros irracionales). Debido a la densidad no podríamos percibir los “agujeritos” sin embargo la recta no estaría completa (tercera situación).

Al presentar a los racionales como fracciones, esta tarea exhibe a los y las estudiantes un conflicto de notación, algunos/as podrían considerar que las fracciones no son números, o considerarlas como números distintos de los decimales o como pedacitos de enteros. Además, los y las estudiantes que en la primera situación contestan que la recta *no se completa*, en la segunda situación podrían contestar que la recta *se completa* si se considera a las raíces de los racionales como los únicos irracionales.

La respuesta *la recta se completa con las fracciones* puede deberse a una identificación de los racionales con los reales (*todos los reales son fracciones*) o a una sobre ponderación de la densidad, es decir, la densidad se confunde con completitud. Al agregar las raíces, si la recta ya estaba completa con las fracciones, sobrevendría un conflicto, sin embargo, pueden considerar que las raíces no son números, o que también son racionales, o que debido a la densidad infinita igual hay lugar para más números.

La tercera situación es recíproca de la primera. Es esperable que, si el/la estudiante confunde los reales con los racionales, al retirar las fracciones no debiera quedar nada en la recta. Matemáticamente, aun cuando los racionales son densos al retirarlos debido a la no-numerabilidad de los irracionales, no percibiríamos la diferencia, el concepto de no numerable frente a numerable se presenta como contra-intuitivo, al igual que la propiedad de que los números racionales puedan ser un conjunto numerable, denso y no-completo al mismo tiempo.

Por lo argumentado anteriormente, vemos que las respuestas a cada una de las situaciones brindan ciertas pautas sobre cómo se piensan estas cuestiones, pero no son cada una en sí mismo concluyente. Para acceder de forma más acabada a las concepciones de los/las estudiantes se solicita se explicite las razones de su elección.

Tarea R3[20]. Concepciones sobre la naturaleza de la recta numérica

A continuación, se reproduce la consigna utilizada para la Tarea R3[21] que se corresponde la con presentada en octavo lugar en el cuestionario (Tarea T8).

Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

¿Podés dibujar lo que ves?

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

El objetivo de la Tarea R3 fue conocer cómo estas/os estudiantes conciben a la recta numérica como representación de los números reales, identificando diferentes modos de pensar la naturaleza de la recta numérica e inferir las concepciones sobre el infinito, la densidad y completitud de los números reales y su relación con la continuidad de recta.

Esta tarea solicita imaginar un microscopio (ideal) de gran potencia que enfoca sobre un fragmento de recta numérica y agranda la imagen, invitando a pensar en un segmento (intervalo) de recta (de reales) que se agranda, que denominaremos primer ítem. Luego se pide que se dibuje lo que se ve durante este proceso de agrandar el segmento, denominado segundo ítem. Por último, se solicita que se describa qué se ve cuando el aumento es "infinito", que denominaremos tercer ítem.

20 El análisis de esta tarea fue publicado en Montoro, V., Cifuentes, M., Salva, N. y Bianchi, M.J. 2017.
21 Tarea similar a la utilizada por Romero (1996) que ya era una modificación de la utilizada por Robinet (1986).

En el primer y tercer ítem se propone “imaginar” y “describir” situaciones particulares, por lo que es de esperar que las respuestas sean de tipo verbal escrita. Mientras que en el segundo ítem se propone explícitamente a los alumnos que “dibujen” lo que ven, por lo que las respuestas a este ítem serán de tipo gráficas. En el primer y tercer ítems difieren entre sí, en que en el enunciado de este último aparece la noción de *infinito* mientras que en el primero solamente se alude al recurso de ir aumentando la potencia de ese microscopio ideal.

Desde un punto de vista de la recta como modelo de los números reales, si enfocamos un fragmento (segmento) de recta, interpretado como un intervalo de números reales, y aumentamos la potencia del microscopio, deberíamos ver un intervalo estrictamente incluido en este y así sucesivamente, encontrando “siempre” un nuevo intervalo, coordinable con el original (desde el punto de vista numérico) y semejante (idéntico) desde el punto de vista geométrico. Sin embargo, con “aumento infinito” tendríamos la intersección infinita de todos los posibles intervalos, y por lo tanto (en un sentido cantoriano) podríamos tener un intervalo o un número real (o un punto). Se solicita que se dibuje al ir aumentando, no en el infinito, por lo nos ayudará a comprender las ideas de los y las estudiantes, expresadas en palabras en el primer ítem. Se incorporó la palabra *ideal* a fin de invitar a los y las estudiantes a que jueguen el juego “imaginando” y se nombra a la recta como recta “numérica”.

4.2. Población participante del estudio

Uno de los objetivos de este estudio es analizar la influencia del nivel de estudio en Matemática sobre las concepciones y comprensiones que han construido los y las estudiantes de secundaria y de universidad. Por ello, para la elección de participantes se tuvo en cuenta el curso de secundaria que estaban cursando o la carrera universitaria en que estaban inscriptos y si se trataba de ingresantes a las mismas o ya habían avanzado en sus estudios.

En el nivel secundario elegimos los tres últimos años dado que nos aseguran que los y las estudiantes hayan cursado asignaturas de matemática en las que se enseñan los conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales y reales. En particular, de acuerdo con el currículo de la provincia de Rio Negro[22], durante el tercer año de secundaria se estudian los números reales, actualizando los enteros y racionales introducidos en primaria. Se enfatiza que los enteros amplían los naturales y están incluidos en los racionales, y que la unión de racionales e irracionales

[22] Diseño Curricular. Escuela Secundaria. Ministerio de Educación y Derechos Humanos Río Negro. En https://educacion.rionegro.gov.ar/files/seccion_238/anexo-1-diseno-curricular-esrn.pdf 127-139.

conforma los números reales. En cuarto y quinto año de este nivel se estudian distintos temas del conjunto de los números reales, llegando incluso a un precálculo, donde se interactúa con el concepto de infinito, generalmente, como proceso sin fin.

Participaron del estudio, estudiantes de secundaria, de dos terceros, dos cuartos y dos quintos años completos, de un colegio público del centro de la ciudad de Bariloche, al que concurren estudiantes de nivel sociocultural medio.

En el nivel universitario elegimos tres carreras, que se cursan en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, en las que los estudios de matemática tienen diferente peso: Matemática, Biología y Educación Física[23]. La primera se centra en la formación matemática, llegando en los últimos años a estudiar formalmente el concepto de infinito cardinal y al conjunto de números reales, en forma axiomática, como un cuerpo ordenado y completo. La segunda es una carrera de ciencias naturales en la cual se cursan asignaturas de matemática, sin que ésta sea una disciplina central. Los temas habituales son cálculo (en una y varias variables) y ecuaciones diferenciales, en los cuales se trabaja implícitamente con el concepto de infinito. En la carrera de Educación Física no se contempla formación matemática. El mismo cuestionario se administró a estudiantes presentes en el cursillo de ingreso (ingresantes) de las carreras citadas y a estudiantes de alguna de las asignaturas del último año de su carrera (avanzados/as).

Cabe destacar que en los registros de la universidad pudimos comprobar que el 66% de los ingresantes a Educación Física no habían aprobado, al momento de contestar el cuestionario, la materia Matemática de 5to año del secundario. Entre los ingresantes a Matemática y a Biología el 100% había aprobado Matemática de 5to año, por lo que en adelante a los y las estudiantes ingresantes a Educación Física se los consideró, en general, con menor nivel de estudio en Matemática que al resto de ingresantes.

En lo sucesivo denominaremos NEM al Nivel de estudio en Matemática en el que en base a la información curricular precedente ubicamos a los y las participantes: desde estudiantes que estuvieran en el comienzo del estudio de los reales como son los y las estudiantes de 3ro de secundaria; siguiendo con 4to y 5to de secundaria, ingresantes y avanzados/as de Educación Física (EFI y EFA), muchos/as sin completar la secundaria y sin estudios universitarios de matemática respectivamente; ingresantes a Biología (BI) y Matemática (MI), recientemente completada la secundaria y avanzados/as de Biología (BA), con estudios universitarios de matemática aplicada.

23 Pueden verse los planes de estudio de las carreras en https://crubwebapp.web.app/carreras.

Hasta los y las estudiantes avanzados/as de Matemática (MA) que han realizado un estudio sistemático y axiomático de este conjunto numérico.

Finalmente se tuvo en cuenta para el análisis los cuestionarios contestados por 307 estudiantes: 167 de secundaria (59 estudiantes de 3ro, 56 estudiantes de 4to y 52 estudiantes de 5to) y 140 Universitarios (83 estudiantes ingresantes a la universidad[24] y 57 universitarios/as avanzados/as). La siguiente Tabla 4.3 muestra la distribución de los y las estudiantes según el NEM y rango de edad.

Tabla 4.3. Distribución según nivel de estudio en Matemática y rango de edad de los y las participantes.

Nivel de Estudios			**Abreviatura (NEM)**	**Rango de edad en años**	**N**
Secundaria	3er año		3ro	15 – 17	59
	4to año		4to	16 – 18	56
	5to año		5to	17 – 19	52
Total estudiantes de secundaria					167
Universidad	Ingresantes	Educación Física	EFI	18 – 24	26
		Biología	BI	17 – 24	26
		Matemática	MI	18 – 27	31
	Subtotal estudiantes ingresantes				83
	Avanzados	Ed. Física	EFA	23 -27	21
		Biología	BA	21 – 26	16
		Matemática	MA	22 – 30	20
	Subtotal estudiantes avanzados				57
Total estudiantes universitarios					140
Población total				15 – 30	307

[24] Fueron descartados al azar la mitad de los ingresantes a Ed. Física, debido a que eran aproximadamente el doble de los ingresantes a las otras carreras.

Capítulo 5

Metodología de análisis de la información

El cuestionario descripto en el Capítulo 4, resultó adecuado para la edad y nivel de estudio de los y las participantes, ya que las preguntas fueron respondidas por una amplia mayoría de estudiantes y con respuestas diversas, mostrando que las tareas no resultaron ni muy difíciles ni demasiado sencillas y permiten evidenciar una gama de concepciones.

Para el análisis de la información aportada por las respuestas a cada tarea continuamos con su organización en cuatro Grupos Temáticos (N, D, I y R), según el aspecto del número real que se pone en juego en la tarea. Recordemos que estos grupos están referidos principalmente a: *concepción de número y de número irracional*; *la densidad de los reales (en relación con el orden y el supremo de un intervalo)*; *algunos aspectos del infinito implicados en los números reales y la representación de los reales en la recta,* respectivamente (Tabla 4.1).

Estas tareas presentan, no sólo distintas dimensiones del conocimiento, sino diferentes demandas al resolutor/a. Algunas tareas son de respuesta de elección de opciones (dicotómicas o con más opciones) y otras son abiertas (verbales o gráficas), en general las tareas tienen varios ítems que combinan alguna de estas modalidades.

5.1. Sistematización de la información

Base de datos. Las respuestas de los cuestionarios fueron escaneados y archivados en forma electrónica en su totalidad. Se confeccionó una base de datos en donde se consignaron las respuestas originales a las tareas del cuestionario de todos los y las participantes. Consistente en una tabla constituida por una fila por cada estudiante y 40 columnas: 3 informan el curso/carrera-nivel de estudio, edad y género del o la participante y 37 dan cuenta de sus respuestas originales a cada ítem de cada tarea.

Esta base se encuentra accesible en DRIVE
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vGDQSIDMY9CzuWLiFERTp4jWvMt2DJRP/edit?usp=share_link&ouid=109111056225806739692&rtpof=true&sd=true

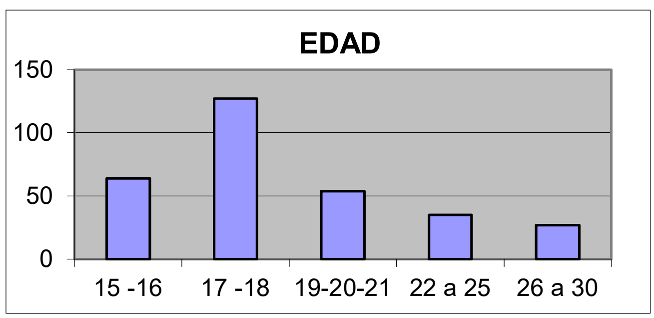
Variables de caracterización. Sobre el conjunto de participantes se definieron dos variables de caracterización: *Nivel de estudio en Matemática* (NEM) y *Edad*.

La variable Nivel de estudio en Matemática (NEM) se corresponde con el curso de secundaria o la carrera/nivel para universitarios. Esta variable toma nueve valores: 3ro, 4to, 5to, EFI, BI, MI, EFA, BA y MA correspondientes a 3ro, 4to y 5to de secundaria, ingresante a Educación Física, a Biología y a Matemática, avanzado/a de Educación Física, de Biología y de Matemática respectivamente. Puede verse la distribución de la población en los NEM en la Tabla 4.3.

El rango de la variable *Edad* en esta población es desde 15 a 30 años. La moda de la distribución es 17 años, el 64% de los y las estudiantes tiene entre 16 y 19 años y el 85% entre 15 y 22 años. La variable Edad fue discretizada en cinco intervalos: E1: 15-16 años, característica de nivel de colegio secundario, E2: 17-18 años, compartida entre el colegio secundario y la universidad; jóvenes universitarios correspondiente a E3:19-20-21; adultos universitarios correspondiente a E4: 22 a 25 y por último E5: mayores de 26. Puede observarse la distribución de la población en los rangos de edad en el Gráfico 5.1.

Como es de esperar la moda es 17-18 años ya que este estudio se centra fundamentalmente en estudiantes que terminan el secundario e ingresantes a la universidad. Cabe destacar que en el análisis no se ha considerado en forma preferente la variable edad, ya que las edades de la población están correlacionadas directamente con el nivel de estudio.

Gráfico 5.1. Distribución de edad de la población objeto de estudio.



Si bien en un principio se consultó sobre el género de los y las participantes, la variable Género no tuvo una representatividad significativa en ninguno de los análisis realizados por lo que no se la informa en los resultados.

Variables de respuesta a las tareas o a los ítems de una tarea. Para el análisis de las respuestas al cuestionario las organizamos por tareas, denominadas: Tarea N1, Tarea N2, Tarea D1, Tarea D2, Tarea I1, Tarea I2, Tarea I3, Tarea R1, Tarea R2 y Tarea R3, según el orden en el grupo temático correspondiente. Estas tareas contienen: una, dos, seis, dos, dos, diez, dos, dos, tres y siete ítems respectivamente (es decir 37 ítems en total). Las respuestas a estos ítems pueden aportar distintos tipos de información (verbal, numérica, gráfica o categórica) produciendo cada uno diferente tipo de variable a analizar.

En la Tabla 5.1 sintetizamos el nombre que dimos a cada tarea por grupos temáticos (entre paréntesis el orden de aparición en el cuestionario) y a cada ítem de cada tarea. Una descripción breve de la tarea y el tipo de variable que produjo.

Tabla 5.1**.** Nombre que recibió cada tarea y cada ítem de cada tarea. Descripción breve de la tarea y el tipo de variable que produjo su resolución.

NOM-BRE	TAREAS	Tipo de variable
TAREA N1 (T1)		
N1	Mencionar los tipos de números que conoces. Dar ejemplos de cada uno.	Variable textual. Listado de “tipos de números- con ejemplos”
TAREA N2 (T2). Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracionales.		
N2a	¿Cómo explicarías con tus palabras en que consiste esa condición de ser irracionales?	Variable textual. Respuesta verbal a la pregunta.
N2b	¿Conoces otros números irracionales? ¿Cuáles?	Variable combinada dicotómica + textual. Respuesta combinada entre una respuesta dicotómica (sí o no) y una verbal (ejemplos)
TAREA D1 (T3). Cuando decimos “un número entre 0 y 2”, nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2**.**		
D1ai **D1aii** **D1aiii**	¿Podrías nombrar un número entre 0 y 2? ¿Podrías nombrar un número entre 1/5 y ¼? ¿Podrías nombrar un número entre 3,14 y π?	Variables categóricas. Respuesta cerrada con opciones: sí (¿cuál?), no hay o no sé.
D1bi **D1bii** **D1biii**	¿Cuántos números hay entre 0 y 2? ¿Cuántos números hay entre 1/5 y ¼? ¿Cuántos números hay entre 3,14 y π?	Variables categóricas. Respuesta cerrada con cinco opciones: Ninguno, Unos pocos, Muchísimos, Infinitos o No sé.
TAREA D2 (T9). En matemática solemos considerar el intervalo (1,2) como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo. Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus estudiantes sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2.		
D2a	¿Se puede identificar el número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenezca al intervalo?	Variable categórica. Respuesta de elección entre tres opciones: Sí es posible, No es posible o No sé.
D2b	¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?	Variable textual. Justificación para la opción elegida con formato de respuesta abierta.
TAREA I1 (T4). Probablemente sepas que en matemática solemos escribir al número con infinitas cifras decimales iguales a 3 como: $0,\hat{3} = 0,33333\ldots$ El número con infinitas cifras decimales que se repiten, iguales a 32 se escribe: $0,\widehat{32} = 0,3232323232\ldots$ De modo que por ejemplo $0,2\hat{9} = 0,29999\ldots$ posee infinitas cifras decimales 9 a partir de los centésimos.		
I1a	Comparando $0,\hat{3} = 0,33333\ldots$ y $0,\widehat{32} = 0,3232323232\ldots$ ¿en cuál número hay más cifras 3?	Variable categórica. Respuesta cerrada con cinco opciones: hay más en $0,\hat{3}\ldots$; hay más en $0,\widehat{32}$ hay igual cantidad; no se pueden comparar y no sé.
I1b	¿Podrías explicar por qué elegiste esa opción?	Variable textual. Respuesta verbal a modo de justificación de la opción elegida.
TAREA I2 (T5). A continuación, aparecen parejas de conjuntos numéricos.		
I2xi. Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números?		
I2ai **I2bi** **I2ci** **I2di** **I2ei**	Capicúas- No capicúas Primos – Pares Naturales- Enteros Enteros -Racionales Racionales – Irracionales	Variables categóricas. Respuesta cerrada con cinco opciones: el primero es más abundante; el segundo es más abundante; son igualmente abundantes; son incomparables y no sé.
I2xii. ¿Por favor, explicarías por qué pensás así en cada caso?		
I2aii **I2bii** **I2cii** **I2dii** **I2eiii**	¿Por qué?	Variables textuales. Respuesta verbal a modo de justificación de la opción elegida en I3ai

TAREA I3 (T10)		
I3a	Comparando el número $0,\hat{9} = 0,9999\ldots$ con 1. *Es menor; es igual; son incomparables; no sé.*	Variable categórica. Respuesta de elección entre cuatro opciones: $0,\hat{9}$ es menor a 1; $0,\hat{9}$ es igual a 1; son incomparables y no sé.
I3b	¿Por qué pensás que esto es así?	Variable textual. Respuesta abierta a modo de justificación de la elección anterior.
TAREA R1 (T6). Durante muchos siglos una cuestión que intranquilizó a muchos matemáticos fue la representación y distribución de los números en la recta numérica. Más abajo te ofrecemos una recta numérica		
R1a	¿podrías representar los siguientes números en ella? 0,2; 2; -2; $\sqrt{2}$; ½ ; 2,2 ; $2,2\hat{9}$	Variable gráfica. Respuesta gráfica la recta dada donde figuraban los números que el/la estudiante pudo ubicar en la recta numérica
R1b	Justificación para cada número que no se pudo representar.	Variable textual. Respuesta verbal a modo de justificación para cada número que no pudo representar.
TAREA R2 (T7)		
R2a. Si fuera posible marcar sobre la recta TODAS las fracciones (números racionales),		
R2ai	La recta, ¿se llenaría, se completaría?	Variable dicotómica. Respuesta de elección de opciones: sí o no
R2aii	¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?	Variable textual. Respuesta abierta a modo de justificación de la elección anterior.
R2b. Si además de los racionales, marcáramos todas sus raíces (cuadradas, cúbicas, etc)		
R2bi	¿Se completaría la recta?	Variable categórica. Respuesta de elección entre tres opciones: sí, no o no sé.
R2bii	¿Quedaría lugar para más números?	Variable categórica. Respuesta de elección entre tres opciones: sí, no o no sé.
R2biii	¿Para cuántos?	Variable categórica. Respuesta de elección entre cuatro opciones: no sé, algunos, muchos o infinitos
R2biv	¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?	Variable textual. Respuesta verbal a modo de justificación de la combinación de respuestas de opciones elegidas en las tres anteriores
R2c. Si de la recta numérica quitásemos todas las fracciones (números racionales)		
R2c	¿qué pensás que quedaría?	Variable Textual. Respuesta verbal abierta a la pregunta.
TAREA R3 (T8) Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica.		
R3a	Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.	Variable textual. Respuesta verbal abierta descriptiva.
R3b	¿Podés dibujar lo que ves?	Respuesta gráfica (dibujo)
R3c	¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?	Variable textual. Respuesta verbal abierta descriptiva.

5.2. Métodos aplicados para el análisis de la información

La principal fuente de información con que contamos son las respuestas a las diez tareas del cuestionario, cada una con varios ítems. Como dijimos las respuestas a estos ítems pueden ser textuales, gráficas o categóricas, con lo cual fue necesario recurrir a distintos métodos de análisis, según fuera el tipo de variables a analizar (Tabla 5.1).

Daremos un panorama general de los métodos (cualitativos y estadísticos multivariados) utilizados en varias instancias del análisis de la información aportada por cada tarea, como así también para el análisis integral de las respuestas a las diez tareas. Luego en la sección de Resultados (Capítulos 6, 7, 8, 9 y 10) se detallará específicamente su aplicación en cada una de estas instancias.

5.2.1. Categorización cualitativa y control inter-juez

Métodos cualitativos de categorización de producciones

Para algunos ítems de algunas tareas que requerían respuestas verbales muy cortas, producciones gráficas o dibujos, se realizó una categorización cualitativa, observando en forma directa las producciones, teniendo en cuenta los elementos emergentes y buscando regularidades de sentido respuesta por respuesta en búsqueda de obtener clases disjuntas de producciones, que se agruparan según compartieran significado para esta investigación.

Control inter-juez

En varios ítems de distintas tareas, en que la categorización de respuestas se hizo en forma cualitativa y cuando se asoció a cada estudiante una categoría de respuesta para una determinada tarea, se aplicó un procedimiento de control inter-juez sobre la totalidad de tales asignaciones.

Se solicitó a dos juezas que verificaran, una por una, si las respuestas de cada estudiante se correspondían con la caracterización de la categoría que se le había asignado. Las juezas fueron dos docentes universitarias de matemática. El umbral impuesto fue obtener una coincidencia con la categorización realizada por la autora mayor del 96%, el cual fue obtenido en todas las instancias en que se realizó este control. En los pocos casos que no se coincidió, la discrepancia se resolvió en un intercambio posterior alcanzando un consenso de la categoría a asigna en la instancia en cuestión.

5.2.2. Métodos estadísticos multivariados

Hemos aplicado en este estudio el Análisis Factorial que hace posible el estudio de la asociación entre las distintas categorías (o modalidades) de dos o más variables cualitativas o categóricas. Se denomina Análisis Factorial de Correspondencias (AFC) cuando trata sólo dos variables categóricas y se denomina Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple (AFCM), cuando son más de dos las variables categóricas a estudiar. También hemos recurrido varias veces a la técnica de Clasificación Jerárquica Ascendente (CJA) posterior a un AFC o un AFCM y hemos utilizado el AFC para el tratamiento de variables textuales a través de la su aplicación a una Tabla Léxica, realizando un Análisis Lexicometríco (AL)

A continuación, explicamos cada uno de estos métodos sucintamente. En el Anexo II, puede seguirse con detalle la aplicación de estos métodos multivariados y puede encontrarse la fundamentación teórica y de aplicación de estos. En los apartados del Anexo II: AII.1, AII.2, AII.3 y AII.4), damos una descripción del AFC, del AFCM, de la CJA y del AL, respectivamente. Una mayor profundización se puede encontrar en: Baccalá y Montoro (2008; 2013); Benzécri (1973); Crivisqui (1993); Escofier y Pages (1990); Fine (1996); Lébart et al. (2000); Ward (1963).

Análisis Factorial de Correspondencias (AFC)

El AFC se aplica, fundamentalmente, a una tabla de contingencia (o de frecuencias absolutas). En nuestro caso la tabla de contingencia cruza los NEM en las filas y los modos de respuesta (de una tarea o integralmente a las diez tareas) en las columnas. Es decir que una celda de esta tabla de contingencia de dimensiones *9*x*q* (donde q son los modos de respuesta correspondientes), figura el número de participantes que siendo del NEM de la fila correspondiente, tiene asignada la modalidad de respuesta de la columna correspondiente.

Un perfil fila, en nuestro caso *perfil de distribución de cada NEM* en las modalidades de respuesta, es la distribución de frecuencias de los *modos de respuesta* (a un ítem, a una tarea o al conjunto de tareas, según corresponda) condicionada a una modalidad de la *variable NEM.* Cada NEM tendrá su perfil de distribución en las modalidades de respuesta. Se define como *perfil fila medio*, a la distribución de frecuencia de la población en las modalidades de respuesta. Mientras que un perfil columna, en nuestro caso *perfil de distribución de cada modalidad de respuesta* en las modalidades de NEM, es la distribución de frecuencias de los *NEM* condicionada a una modalidad de la variable *modos de respuesta.*

Este método nos permitirá hallar una tipología de perfiles de respuesta según NEM. Diremos que dos perfiles de NEM se consideran semejante si se asocian del mismo modo al conjunto de perfiles columnas, es decir si se asocian demasiado o demasiado poco (con respecto a la situación de independencia) a los mismos perfiles de distribución las modalidades de respuesta en las modalidades de NEM.

El AFC proporciona representaciones planas aproximadas de la nube de perfiles centrada en el perfil medio de la población. Que nos permitirá observar perfiles similares, cercanos entre sí en los planos, u opuestos muy alejados entre sí. Perfiles característicos estarán alejados del perfil medio de la población (origen del plano), mientras que los cercanos a este serán perfiles similares a este perfil medio.

Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple (AFCM)

El AFCM permite describir las relaciones entre más de dos variables categóricas y está particularmente adaptado al procesamiento de datos surgidos de encuestas. Es decir, permite estudiar una población de n individuos descriptos por k variables cualitativas. En las encuestas, generalmente se tiene *n* individuos que responden *k* preguntas (variables) las cuales presentan opciones de respuestas (las modalidades de cada variable) y los individuos eligen (o tienen asignada) una y sólo una de estas modalidades para cada variable. El AFCM es un AFC aplicado a una tabla en particular, por lo dicho en cuanto a los planos y ejes factoriales también aplica aquí. Un aspecto importante del AFCM es el de que permite establecer *variables sintéticas* que resuman el conjunto de variables y estén relacionadas lo más posible con las variables iniciales, estas son los *factores del AFCM*, que son las variables numéricas más relacionadas con el conjunto de variables cuantitativas. Los factores definen *ejes factoriales* y estos dos a dos definen *planos factoriales*.

En el AFCM se efectúan tres tipos de estudio: (i) *estudio de los individuos estadísticos (en nuestro caso estudiantes):* este análisis nos da una tipología de los individuos basada en que dos individuos se parecen más cuanto compartan mayor cantidad de modalidades, es decir más cerca estén en un plano factorial; (ii) *estudio de las variables*, se pueden estudiar desde dos puntos de vista: uno desde el balance de la relación entre las variables categóricas estudiadas y el otro consiste en encontrar un pequeño número de variables numéricas (factores) que resuman el conjunto de variables y (iii) *estudio de las modalidades (modos de respuesta)*, también se pueden estudiar desde dos puntos de vista: uno respecto a los individuos, donde dos modalidades se parecen tanto más, cuanto mayor es su presencia o ausencia simultánea en un gran número de individuos y otro, respecto a la asociación con otras modalidades.

Luego de obtenidos los planos factoriales es posible proyectar sobre ellos modalidades suplementarias (o ilustrativas), que no intervienen en la formación de los ejes y observar la relación de estas con los factores y con las modalidades activas en el análisis. Tomando como activas las modalidades de respuesta tendremos una apreciación de cómo se distribuye la población observada en función de sus modos de respuestas, al proyectar las modalidades de NEM como suplementarias se podrá ilustrar que nivel de estudio poseen los individuos que se distribuyen de esa manera.

Clasificación de individuos posterior a un análisis factorial

El objetivo de esta técnica es realizar una clasificación de los individuos a partir de cuan similares (en el sentido que toman los mismos valores globalmente para las modalidades de respuesta) u opuestos son dos a dos. El método utilizado consiste en realizar una partición en el conjunto de individuos basada en las distancias entre sus proyecciones de los puntos sobre un determinado número de ejes factoriales, de manera que en cada clase queden agrupados los individuos más cercanos. Recordemos que estos ejes constituyen las variables numéricas más correlacionadas con las variables cualitativas originales.

El método que se utilizó en esta tesis es de *Clasificación Jerárquica Ascendente* (CJA). Este método empieza desde la partición de todos los individuos por separados y agrupa en cada paso a los dos más próximos. En particular se trató del método de agregación de Ward (1963), que consiste en comenzar con una partición del conjunto individuos (representados por puntos) de manera que cada uno de ellos sea el único elemento de cada una de las clases, el siguiente paso agrupa en una nueva clase los dos individuos más cercanos en un nuevo punto que es el centro de gravedad de estos, asignándole un peso igual a la suma los individuos que se agrupó. Luego en cada etapa reúne los grupos más próximos en su centro de gravedad y le asigna la suma de los pesos, así siguiendo hasta obtener una sola clase constituida por todos los puntos. Corresponde al investigador/a decidir donde considera se debe cortar el proceso de modo que el número de clase y ellas mismas tengan sentido para el estudio.

Estadística textual o análisis lexicométrico

La lexicometría trata de analizar los datos textuales después de diversas codificaciones a fin de obtener información sobre frecuencia de palabras, contexto en el que se hallan, frecuencia de dichos contextos, riqueza del vocabulario, etc. Estas frecuencias son analizadas utilizando técnicas estadísticas cualitativas multivariadas que son de mucha utilidad para el análisis estadístico del texto.

Se define *vocabulario* de un corpus como el conjunto de palabras distintas que lo conforman, estas pueden listarse en orden de frecuencia, obteniendo así un *glosario o repertorio* de las palabras del corpus ordenado según la frecuencia.

La aplicación de métodos del análisis multivariado, aplicados a datos textuales brindan panoramas globales de representación de la información, permitiendo describir estructuras de comportamiento. Estos métodos permiten describir una realidad compleja (la realidad multivariada), dado que su objetivo es visualizar las proximidades entre las filas y las columnas de una matriz de datos, representándolas en un subespacio de dimensión menor (generalmente un plano) con la menor pérdida de información.

El corpus se lo particiona en formas graficas o palabras y es posible conformar la *Tabla Léxica,* que tiene tantas filas como individuos y tantas columnas como formas. Por lo tanto, es una tabla de contingencia de *individuos x formas,* luego se puede aplicar un AFC a esta tabla léxica. El *AFC de una Tabla Léxica* permitirá responder a: ¿qué individuos estadísticos utilizan un vocabulario similar y emplean palabras distintas con frecuencias parecidas? ¿ qué grupos de individuos presentan un perfil léxico similar? ¿qué palabras caracterizan a estos grupos o individuos, por su presencia o ausencia?

En los planos factoriales, la proximidad entre dos palabras será mayor cuanto más frecuente sean dichas por los mismos individuos. La proximidad entre dos individuos será mayor en cuanto tengan en común mayor cantidad de palabras. Los individuos se ubican en el baricentro de las palabras que emplean. En muchas situaciones resulta útil proyectar, en el subespacio generado por el AFC, los textos (o centro de gravedad del léxico de un grupo de individuos) como ilustrativos, con el fin validar el agrupamiento de las respuestas. En nuestro caso sería los textos de cada NEM.

5.3. Fases de análisis de la información

El análisis de la información aportada por las respuestas al cuestionario se realizó en dos fases. En la Fase 1, se analizaron las respuestas aportadas por cada tarea en particular, principalmente tendiendo a obtener una clasificación estas. Los resultados de la Fase 1 fueron los insumos para la Fase 2, consistente en el análisis de la información aportada por los modos de respuesta a las diez tareas del cuestionario integralmente.

En una primera instancia de la Fase 1, realizamos una categorización exhaustiva de las respuestas de cada tarea según los grupos temáticos (N, D, I y R) descriptos anteriormente, para luego asociar a cada estudiante y para cada tarea la categoría de respuesta que más se ajustara a su respuesta original, pudiendo de esta manera describir perfiles de respuesta de los distintos NEM y buscar asociaciones entre estos.

En la Fase 2 realizamos el análisis de la información aportada integralmente por los modos de respuesta a las diez tareas, interrelacionando los modos de comprender los distintos aspectos indagados y posibles asociaciones de estos con el NEM de los y las estudiantes. Realizamos una clasificación de los y las estudiantes según tuvieran asociadas los mismos modos de respuesta globalmente a todas las tareas y se estudiamos los perfiles de distribución de estas clases de respuesta integral a todo el cuestionario, según el NEM.

A continuación, podemos observar un esquema de la metodología de análisis de la información aportada por las respuestas al cuestionario, en dos fases (Cuadro 5.1).

Fase 1 **Análisis de la información aportada por cada tarea**	base para	**Fase 2** **Análisis de la información aportada integralmente por las respuestas a las diez tareas del cuestiona-rio**
Categorización de las res-puestas a cada tarea		Asociaciones entre los mo-dos de respuesta a las dis-tintas tareas
Asociación a cada estudiante de la categoría de respuesta que le correspondió en cada tarea y control inter-juez		Clasificación de los y las estudiantes según tuvieran asociadas los misma modos de respuesta globalmente
Estudio de los perfiles de respuesta según los NEM		Estudio de perfiles de res-puesta integral a todo el cuestionario según NEM

Cuadro 5.1: Esquema de la metodología de análisis de la Información.

5.4. Fase 1. Análisis de la información aportada por cada tarea.

En esta fase y con el objetivo de conocer las comprensiones que estos y estas estudiantes han construido sobre: número y número irracional; la densidad de los reales con relación al orden y al supremo de un intervalo; el infinito en relación con el número real y la recta numérica como representación de los números reales, hemos realizado, en primera instancia una categorización de las respuestas de cada tarea, según los grupos temáticos descriptos anteriormente.

Luego en una segunda instancia se asoció a cada estudiante y para cada tarea la categoría de respuesta que más se ajustara a su respuesta original, aplicándose a tal asignación un procedimiento de control inter-juez.

Como tercera instancia de esta fase y con el fin de observar la asociación de las concepciones de los y las estudiantes (evidenciadas en la categorización de respuestas para cada tarea) con su nivel de estudio se calculó la distribución de las clases de respuestas en los distintos NEM y se analizaron asociaciones entre estos perfiles de respuesta de los grupos de NEM.

5.4.1. Categorización de las respuestas a cada tarea

Buscamos obtener, una cantidad relativamente pequeña de modos de respuesta que abarquen todo el espectro de estas obtenido en una tarea, asociando en una misma clase aquellas respuestas que compartieran significado en cuanto a la profundidad de comprensión de un determinado aspecto del número real y de modo que las categorías fueran mutuamente excluyentes.

En vías de realizar esta categorización de respuestas de cada tarea, que como vimos aportan distintos tipos de variables a analizar, debimos recurrir a diferentes procedimientos de análisis. La siguiente tabla (Tabla 5.2) resume los tipos de información aportada según las demandas cognitivas de resolución, o combinación de ellos, por las respuestas a las tareas del cuestionario y en qué tarea encontramos este tipo de información.

Tabla 5.2. Tipos de respuesta a las tareas del cuestionario o combinación de ellos, según las demandas cognitivas de resolución.

Tipo de Información aportada por cada tarea	Tareas
Respuestas a preguntas abiertas (variable textual)	N1
Respuesta combinada de una elección de opciones - puede ser dicotómica o de más opciones- y justificación verbal de la misma (variable categórica + variable textual)	N2, D2, I1, I2, R2
Respuesta combinada de varios ítems de respuesta de elección de opciones (varias variables categóricas)	D1
Respuesta combinada de varios ítems de elección de opciones (variables categóricas) y de justificación verbal de la opción elegida (variable textual).	I2
Respuesta Gráfica (dibujo o representación en la recta numérica) combinada con respuestas verbales a preguntas abiertas. (variable gráfica combinada con variable textual)	R1 y R3

A continuación, describiremos las técnicas de análisis utilizadas en general para cada uno de estos cinco tipos de variables o combinación de ellas, que se produjeran en alguna tarea o algún ítem de esta (Tabla 5.2).

Respuestas a preguntas abiertas (variables textuales)

Respuestas verbales largas. Cuando las respuestas eran relativamente largas se categorizaron las respuestas mediante *análisis lexicométrico de la tabla léxica* que cruza a los y las estudiantes (en las filas) con las palabras que usan en sus respuestas (en las columnas). Particularmente realizamos un AFC de la tabla léxica descripta, para posteriormente realizar una clasificación de las respuestas de los y las estudiantes según hayan utilizado, integralmente, las mismas palabras, buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases. Se utilizó para ello el método de clasificación jerárquica ascendente posterior al AFC.

Respuestas verbales cortas. Para algunos ítems de algunas tareas que requerían respuestas verbales muy cortas se realizó una categorización cualitativa, buscando regularidades de sentido, respuesta por respuesta, obteniéndose clases disjuntas. Debido al carácter netamente cualitativo de esta caracterización de tipos de respuestas, se aplicó un procedimiento de control Inter-juez descripto en 5.2.1.

Respuesta combinada de una elección de opciones (puede ser dicotómica o de más opciones) y justificación verbal de la misma (variable categórica + variable textual)

Se calculó la distribución de frecuencias de las clases de respuesta de elección de opciones. Respecto a las justificaciones, brindadas por los y las estudiantes, se realizó una categorización del modo descripto más arriba como análisis de *respuestas a preguntas abiertas (variables textuales)*, al interior de cada opción de respuesta cerrada.

Respuesta combinada de varios ítems de respuesta de elección de opciones (variables categóricas)

Se calculó la distribución de frecuencias de las clases de respuesta de elección de opciones para cada ítem. Con el objetivo de observar asociaciones entre respuestas (de elección de opciones) a los distintos ítems de la tarea en un mismo/a estudiante y encontrar grupos de estudiantes que responda en forma similar a todos los ítems, realizamos un AFCM de los y las estudiantes descriptos por las opciones de respuestas que eligen en cada ítem de la tarea y su NEM. Posteriormente a este AFCM, realizamos una Clasificación Jerárquica Ascendente de los y las estudiantes según respondieran, integralmente, de manera similar todos los ítems de la tarea, buscando, además asociaciones de las clases con las modalidades de NEM.

Respuesta combinada de varios ítems de elección de opciones (variables categóricas) y de justificación verbal de la opción elegida (variable textual)

Se calculó la distribución de frecuencias de las clases de respuesta de elección de opciones para cada ítem y respecto a las justificaciones se realizó una categorización del modo descripto en análisis de *respuestas a preguntas abiertas (variables textuales)*, también para cada ítem. Finalmente se realizó un AFCM que permitió observar asociaciones entre las respuestas de opción y justificaciones a todos los ítems de la tarea, en una o un mismo estudiante y encontrar grupos de estudiantes que respondieron en forma similar todas las demandas. Posteriormente a este AFCM, realizamos una Clasificación Jerárquica Ascendente de los y las estudiantes según respondieran, integralmente, de manera similar todos los ítems de la tarea, buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases.

Respuesta gráfica (dibujo o representación en la recta numérica) combinada con respuestas verbales a preguntas abiertas

Observando en forma directa las producciones gráficas (una por una), realizamos una primera clasificación, teniendo en cuenta los elementos emergentes que figuraban en los dibujos o gráficos (puntos, números, marcas, segmentos, escalas u otros objetos). Las respuestas se clasificaron en forma independiente por tres investigadoras del grupo de investigación y luego se consensuaron las categorías resultantes. Se aplicó el procedimiento de control Inter-juez antes descripto.

Respecto a las respuestas verbales abiertas se realizó una categorización del modo descripto en análisis de *Respuestas a preguntas abiertas (variables textuales)*. Finalmente, para llegar a una clasificación de las respuestas a la tarea, mediante asociaciones de modos de respuesta a todos los ítems, se realizó un AFCM, con posterior Clasificación Jerárquica ascendente, que nos permitió observar asociaciones entre las respuestas gráficas y categorías de respuestas abiertas en una o un mismo estudiante y encontrar grupos de estudiantes que respondieron en forma similar a las distintas demandas.

5.4.2. Asociación a cada estudiante de una categoría de respuesta

En esta segunda instancia del análisis de la información por tareas, se asoció a cada estudiante una categoría de respuesta. Cualquiera hubiese sido el método para obtener estas categorías, se aplicó el procedimiento de control inter-juez descripto en 5.2, sobre la totalidad de las respuestas, es decir se volvió a los datos originales, esto para cada tarea por separado.

5.4.3. Estudio de los perfiles de respuesta según cada NEM

En esta tercera instancia de esta fase, se realizó un estudio de los perfiles de respuesta según NEM. Se calculó la distribución de las clases de respuestas en los distintos NEM, con el fin de observar la asociación de las concepciones de los y las estudiantes, evidenciadas en la categorización de respuestas con su nivel de estudios.

Posteriormente y considerando a los y las estudiantes agrupados/as según su NEM, realizamos, para cada tarea por separado, un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas de la respectiva tarea, respecto de las modalidades de NEM, a fin de observar si existen perfiles de distribución de modos de respuesta similares u opuestos entre los grupos de NEM, buscando evidenciar la influencia del nivel de estudio en Matemática en la profundidad de las comprensiones de estos aspectos estudiados.

5.4.4. Síntesis de los análisis realizados a la información para cada tarea

A continuación, en la Tabla 5.3, podemos observar en forma sintética el tipo de variable que aportó cada ítem de cada tarea y los tipos de análisis realizados con el fin de obtener una categorización de los modos de respuesta para cada tarea. Los resultados de la categorización de respuestas para cada tarea y del estudio de perfiles de respuesta por NEM, pueden verse en la sección *Resultados* (Capítulos 6, 7, 8 y 9) para los Grupos temáticos N, D, I y R respectivamente. También pueden encontrarse, en forma sintética y resumida en tablas, los modos de respuesta encontrados para cada tarea en el Anexo IV.

Tabla 5.3.: Tipo de variable que aportó cada ítem de cada tarea y tipos de análisis realizados con el fin de obtener una categorización de los modos de respuesta para cada tarea.

Tarea	**Ítem de la Tarea**	**Tipo de variable**	**Procedimiento de análisis de la información aportada por las respuestas de cada tarea**
GRUPO N			
TAREA N1: ¿Por favor podrías mencionar los tipos de números que conoces? Y dar ejemplos de cada uno.			
N1		*Variable textual.* Listado de “tipos de números- con ejemplos.	- Construcción de repertorio de *tipos de números* citados por la población, frecuencias con que fueron nombrados y categorización según ciertas características emergentes. Control Inter-juez[25] - Análisis Lexicometrico[26]: Análisis Factorial de Correspondencia (AFC)[27] de la tabla léxica que asocia, a cada uno/una de los y las estudiantes las palabras de sus respuestas. - Clasificación Jerárquica Ascendente (CJA)[28] posterior al AFC de los y las estudiantes según hayan nombrado, integralmente, los mismos tipos de números, buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases.
TAREA N2. Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracionales. N2a. ¿Cómo explicarías con tus palabras en que consiste esa condición de ser irracionales? N2b. ¿Conoces otros números irracionales? ¿Cuáles?			
N2	**N2a**	*Variable textual.* Respuesta verbal a pregunta abierta.	- Análisis Lexicometrico: AFC de la tabla léxica que asocia, a cada uno/una de los y las estudiantes las palabras de sus descripciones de los irracionales. - CJA posterior al AFC de los y las estudiantes según hayan utilizado, integralmente, las mismas palabras, buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases.
	N2b	*Variable textual.* Respuesta verbal con un listado de ejemplos o frases descriptivas muy cortas.	- Categorización cualitativa, buscando regularidades respuesta por respuesta, obteniéndose clases disjuntas. La unidad de análisis será la totalidad de ejemplos brindados por cada estudiante. Control Inter-Juez.
	- Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM)[29] de los y las estudiantes descriptos/as por sus tipos de respuesta para N1a y en N1b. - CJA de los y las estudiantes según se parezcan integralmente sus respuestas en ambos Ítems. Asociaciones con las modalidades de NEM		

25 Ver apartado 5.2.
26 Ver Anexo II- AII.4 o Baccalá y Montoro (2013); Bécue-Bertaut (1991); Lébart et al. (2000); Lébart y Salem (1994).
27 Ver Anexo II- AII.1 o Baccalá y Montoro (2008); Benzécri (1973); Crivisqui (1993).
28 Ver Anexo II- AII.3 o Baccalá y Montoro (2008); Ward (1963).
29 Ver Anexo II- AII.2 o Baccalá y Montoro (2008); Benzécri (1973); Crivisqui (1993); Lébart et al. (2000).

GRUPO D			
TAREA D1. Cuando decimos "un número entre 0 y 2", nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2**. D1ai.** ¿Podrías nombrar un número entre 0 y 2? **D1aii.** ¿Podrías nombrar un número entre 1/5 y 1/4? **D1aiii.** ¿Podrías nombrar un número entre 3,14 y π. **D1bi**. ¿Cuántos números hay entre 0 y 2? **D1bii.** ¿Cuántos números hay entre 1/5 y 1/4? **D1biii.** ¿Cuántos números hay entre 3,14 y π?			
D1	**D1ai** **D1aii** **D1aiii**	*Variables categóricas.* Respuestas cerradas con cuatro opciones: *sí (ejemplo correcto), sí (ejemplo no correcto), no hay o no sé***.**	- Cálculo de las frecuencias de elección de cada opción
	D1bi **D1bii** **D1biii**	*Variables categóricas*. Respuestas cerradas con cinco opciones: *ninguno, unos pocos, muchísimos, infinitos o no sé.*	
	- AFCM de los y las estudiantes descriptos por las opciones de respuestas que eligen en los seis ítems y su NEM. - CJA de los y las estudiantes según respondieran, integralmente, de manera similar los seis ítems de la Tarea. Buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases		
TAREA D2. En matemática solemos considerar el intervalo (1,2) como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo. Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus estudiantes sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2. **D2a**. **¿**Es posible identificar el número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenezca al intervalo? **D2b**. ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?			
D2	**D2a**	*Variable categórica.* Respuesta de elección entre tres opciones: *sí es posible, no es posible o no sé.*	- Cálculo de frecuencias de las clases de respuesta de elección de opciones de respuesta cerrada.
	D2b	*Variable textual.* Respuesta verbal a modo de justificación de la opción elegida.	- Categorizaciones de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada opción de respuesta cerrada buscando regularidades respuesta por respuesta. Control inter- juez
	- Categorización de las respuestas mediante las combinaciones de respuestas de elección con los tipos de justificaciones hallados.		
GRUPO I			
TAREA I1. Probablemente sepas que en matemática solemos escribir al número con infinitas cifras decimales iguales a 3 como: $0,\hat{3} = 0{,}33333\ldots$ El número con infinitas cifras decimales que se repiten, iguales a 32 se escribe: $0,\widehat{32} = 0{,}3232323232\ldots$ De modo que por ejemplo $0,2\hat{9} = 0{,}29999\ldots$ posee infinitas cifras decimales 9 a partir de los centésimos. Comparando $0,\hat{3} = 0{,}33333\ldots$ y $0,\widehat{32} = 0{,}3232323232\ldots$ **I1a.** ¿en cuál número hay más cifras 3? **I1b.** ¿Podrías explicar por qué elegiste esa opción?			
I1	**I1a**	*Variable categórica.* Respuesta cerrada con cinco opciones: *hay más en 0,33333…; hay más en 0,3232323232…; hay igual cantidad; no se pueden comparar y no sé.*	- Cálculo de frecuencias de las clases de respuesta de elección de opciones de respuesta cerrada.
	I1b	*Variable textual.* Respuesta verbal a modo de justificación de la opción elegida.	- Categorizaciones de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada opción de respuesta cerrada buscando regularidades respuesta por respuesta. Control inter- juez
	- Categorización de las respuestas mediante las combinaciones de respuestas de elección con los tipos de justificaciones hallados.		
TAREA I2. A continuación, aparecen parejas de conjuntos numéricos. **I3a.** Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números? **I3ai**. Capicúas- No capicúas. **I3bi**. Primos – Pares. **I3ci.** Naturales- Enteros. **I3di**. Enteros -Racionales. **I3ei**. Racionales – Irracionales. **I3b.** ¿Por favor, explicarías por qué pensás así en cada caso?. I3bi. Capicúas- No capicúas. I3bii. Primos – Pares. I3cii. Naturales- Enteros. I3dii. Enteros -Racionales. I3eii. Racionales – Irracionales			
	I2ai **I2bi**	*Variables categóricas:* Respuestas cerradas con	

I2	**I2ci** **I2di** **I2ei**	cinco opciones: *el primero es más abundante; el segundo es más abundante; son igualmente abundantes; son incomparables y no sé.*	- Cálculo de la distribución de frecuencias de las clases de respuesta de elección de opciones de respuesta cerrada
	I2aii **I2bii** **I2cii** **I2dii** **I2eii**	*Variables textuales.* Respuestas verbales a modo de justificación de la opción elegida.	- Categorizaciones de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada opción de respuesta cerrada buscando regularidades respuesta por respuesta. La unidad de análisis fue la justificación brindada por cada estudiante para cada ítem. Las categorías fueros excluyentes. Control inter- juez
	- AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus clases de respuestas de opción y de justificación, y su NEM. Buscando asociaciones de modos de respuesta a las 10 demandas entre sí y con los NEM. - CJA de los y las estudiantes según respondieran, integralmente, de manera similar los diez ítems de la Tarea. Buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases.		
TAREA I3. Comparando el número $0,\hat{9} = 0,9999\ldots$ con 1: **I2a.** $0,\hat{9}$ es menor a 1; $0,\hat{9}$ es igual a 1; son incomparables o no sé. **I2b**. ¿Por qué pensás que esto es así?			
I3	**I3a**	*Variable categórica*. Respuesta de elección entre cuatro opciones: $0,\hat{9}$ *es menor a 1;* $0,\hat{9}$ *es igual a 1; son incomparables y no sé.*	- Cálculo de la distribución de frecuencias de las clases de respuesta de elección de opciones de respuesta cerrada.
	I3b	V*ariable textual.* Respuesta abierta a modo de justificación de la elección anterior.	**-** Categorizaciones de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada opción de respuesta cerrada buscando regularidades respuesta por respuesta. Control inter- juez
	- Categorización de las respuestas mediante las combinaciones de respuestas de elección con los tipos de justificaciones hallados.		
GRUPO R			
TAREA R1. Durante muchos siglos una cuestión que intranquilizó a muchos matemáticos fue la representación y distribución de los números en la recta numérica. Más abajo te ofrecemos una recta numérica. Por favor, **R1a.** ¿podrías representar los siguientes números en ella? 0,2; 2; -2 ; $\sqrt{2}$; ½ ; 2,2 ; $2,2\hat{9}$. Podrías justificar si no pudiste representar alguna de las expresiones.			
R1	**R1a.**	*Variable gráfica.* Respuesta gráfica, donde figuran los números que él o la estudiante pudo ubicar en la recta numérica.	- Categorización de las respuestas gráficas (una por una) según los números que los y las estudiantes habían ubicado en la recta. Las clases se extienden desde una primera, constituida por respuestas en las que no se ubicó ningún número en la recta, hasta la última constituida por aquellas respuestas en que figuraban correctamente ubicados todos los números solicitados.
	R1b.	*Variable textual*. Respuesta verbal a modo de justificación para cada número que no se pudo representar.	- Categorización cualitativa, buscando regularidades respuesta por respuesta, se trataba de pocas y cortas justificaciones, obteniéndose clases disjuntas. Control Inter- Juez.
	- Categorización de la totalidad de respuestas tomando como unidad de análisis el conjunto de respuestas dadas por cada estudiante a la tarea completa (respuesta gráfica y eventualmente, las justificaciones realizadas)		
TAREA R2. **R2a.** Si fuera posible marcar sobre la recta TODAS las fracciones (números racionales): **R2ai** ¿la recta, se llenaría, se completaría? **R2aii** ¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario? **R2b.** Si además de los racionales, marcáramos todas sus raíces (cuadradas, cúbicas, etc)**: R2bi** ¿Se completaría la recta? **R2bii** ¿Quedaría lugar para más números? **R2biii** Para cuántos? **R2biv** ¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario? **R2c.** Si de la recta numérica quitásemos todas las fracciones (números racionales) ¿qué pensás que quedaría?			
	R2ai	*Variable categórica.* Respuesta de elección entre tres opciones: *sí se completa; no se completa*	- Cálculo de la distribución de frecuencias de las clases de respuesta de elección de la primera situación.

		o no sé.	
	R2aii	*Variable textual.* Respuesta verbal a modo de justificación de la opción elegida	- Categorizaciones de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada opción de respuesta (*sí se completa; no se completa o no sé)* buscando regularidades respuesta por respuesta. Las categorías fueros excluyentes. Control inter- juez
	R2bi	*Variable categórica.* Respuesta de elección entre tres opciones: *sí se completa, no se completa o no sé.*	- Cálculo de la distribución de frecuencias de las respuestas de elección de la segunda situación. Las respuestas de las preguntas de respuestas cortas se consideraron en forma conjunta, de modo que se dieron cuatro opciones: *se completa; no se completa-no sé para cuantos números hay lugar; no se completa-hay lugar para algunos/muchos números* y *no se completa-hay lugar para infinitos números.*
	R2bii	*Variable categórica.* Respuesta de elección entre tres opciones: *sí hay más lugar, no hay más lugar o no sé.*	
R2	**R2biii**	*Variable categórica.* Respuesta de elección entre cuatro opciones: *algunos, muchos, infinitos o no sé*	
	R2biv	*Variable textual.* Respuesta verbal a modo de justificación de la combinación de respuestas de opciones elegidas en las tres anteriores	- Categorizaciones de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada opción de respuesta (*se completa*; *no se completa-no sé para cuantos números hay lugar*; *no se completa-hay lugar para algunos/muchos números* y *no se completa-hay lugar para infinitos números.)* buscando regularidades respuesta por respuesta. Las categorías fueros excluyentes. Control inter- juez
	R2c	*Variable Textual.* Respuesta verbal abierta a una pregunta.	- Categorización cualitativa, buscando regularidades respuesta por respuesta, obteniéndose clases disjuntas. Control Inter- Juez.
	- AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus modalidades de respuestas de opción y eventual justificación a cada una de las dos primeras situaciones y las categorías de respuesta a la tercera situación y su NEM. Buscando asociaciones entre tipos de respuestas, tanto de elección como de justificación, a las tres situaciones de la tarea y con el NEM. - CJA de los y las estudiantes según respondieran, integralmente, de manera similar la Tarea. Buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases.		
TAREA R3. Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. **R3a.** Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio. **R3b.** ¿Podés dibujar lo que ves? **R3c.** ¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?			
	R3a	*Variable categórica.* Respuesta verbal abierta descriptiva.	- Categorización cualitativa. Al tratarse de respuestas cortas se buscando regularidades respuesta por respuesta según el sentido de la frase, obteniéndose clases disjuntas. Control Inter- Juez.
R3	**R3b**	Respuesta gráfica (dibujo)	- Categorización de los dibujos, observando en forma directa las producciones gráficas (una por una). Se tuvo en cuenta los elementos que figuraban en ellos (puntos, números, marcas, segmentos, escalas u otros objetos). Control inter-juez.
	R3c	*Variable categórica.* Respuesta verbal abierta descriptiva.	- Categorización cualitativa. Al tratarse de respuestas cortas se buscaron regularidades respuesta por respuesta según el sentido de la frase, obteniéndose clases disjuntas. Control Inter- Juez.
	- AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus clases de respuestas en cada uno de los tres ítems de la tarea como modalidades activas y por su NEM. Buscando asociaciones entre respuestas verbales y gráficas a la tarea, así como con el nivel de estudio en Matemática - CJA de los y las estudiantes según respondieran, integralmente, de manera similar los diez ítems de la Tarea. Buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases.		

En la Tabla 5.4 sintetizamos el tratamiento de la información, también realizado tarea por tarea, pero en forma común a las diez tareas.

Tabla 5.4: Tratamiento de la información realizado en forma similar en las diez tareas.

TAREA	Análisis realizados posteriormente a la categorización de respuestas
	Control inter-juez
Para cada una de las tareas	- Se asoció a cada estudiante una clase de respuesta de la respectiva categorización y se volvió a los datos originales realizándose un control inter-juez que dio una coincidencia mayor al 96% en todos los casos.
	Estudio de los perfiles de respuesta según el NEM:
Para cada una de las tareas	- Se calculó la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio NEM - Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las modalidades de NEM.

5.5. Fase 2. Análisis de la información aportada por todas las tareas integralmente

En esta segunda fase y con el fin de dar cuenta del objetivo de conocer las concepciones y comprensiones que los y las participantes han construido sobre el número real, interrelacionando los aspectos indagados, realizamos el análisis de la información aportada integralmente por los modos de respuesta a las diez tareas. Se estudiaron las asociaciones entre los modos de respuesta a las distintas tareas por una parte y relaciones con las modalidades de NEM por otra.

Posteriormente realizamos una clasificación de los y las estudiantes según tuvieran asociadas los misma modos de respuesta globalmente a todas las tareas. Las clases obtenidas fueron interpretadas en términos de concepciones o comprensiones de los números reales por parte de las y los participantes.

Por último, se estudiaron los perfiles de distribución de modos de respuesta integrales a todo el cuestionario, según el NEM, con el fin de buscar indicios de la influencia del nivel de estudio en Matemática en la profundidad de la comprensión del número real.

Los resultados sobre el análisis de las respuestas a las diez tareas del cuestionario (Fase 2) pueden verse en la sección *Resultados* – Capitulo 10.

5.5.1. Asociaciones de modos de respuesta a todas las tareas y con los NEM

Para dar cuenta del objetivo de conocer las comprensiones de los y las participantes sobre el número real, interrelacionando los aspectos indagados, se definieron sobre el conjunto de estudiantes once variables categóricas, diez de ellas denominadas variables de *categorización de respuestas* (una por cada tarea) y cuyas modalidades fueron los modos de respuesta determinados para cada tarea en la en la Fase 1 y una variable más, NEM, con sus nueve modalidades (3ro, 4to, 5to, EFI, BI, MI, EFA, BA y MA).

Con el fin de estudiar asociaciones entre los modos de respuesta a las distintas tareas y relaciones con las modalidades de NEM, se optó por la aplicación de un AFCM. Este AFCM tomó como variables activas para la formación de los ejes factoriales las modalidades de las variables de categorización de respuestas. Las modalidades de NEM se proyectaron sobre los planos factoriales como modalidades ilustrativas.

Este método posibilitó observar los principales factores de variabilidad de los modos de respuesta (integralmente) a las diez tareas, así como visualizar la relación de éstos con cada modalidad de NEM. De un modo muy sintético, podríamos decir que con este estudio pudimos evidenciar: qué asociaciones existen entre las modalidades de respuesta a las distintas tareas, qué estudiantes responden qué y qué modalidades de NEM está asociada a cada una de estas asociaciones.

5.5.2. Clasificación del conjunto de participantes según sus modos de respuesta

Realizamos una clasificación de los y las estudiantes según tuvieran asociados los mismos modos de respuesta a todas las tareas integralmente, buscando asociaciones de las modalidades de NEM con las clases. Se utilizó para ello el método de CJA posterior al AFCM, considerando a los y las participantes descriptos por sus coordenadas en los ejes del AFCM realizado en el paso anterior.

Resultaron clases de modos de respuestas a las que se dio una denominación (etiqueta de la clase) según las características emergentes, que fueron interpretadas en términos de concepciones o comprensiones integrales de los y las estudiantes sobre del número real. Como resultado de esa CJA se asoció a cada estudiante la clase de respuesta integral a todo el cuestionario que le correspondió.

5.5.3. Estudio de los perfiles de respuesta integrales según NEM

Con el fin de observar la asociación de las comprensiones integradas de los y las estudiantes sobre el número real con su nivel de estudio en Matemática, se calculó la distribución de las clases de respuestas a todo el cuestionario en los distintos NEM.

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas como modo de respuestas integrales respecto de las modalidades de NEM, a fin de observar si existen perfiles de distribución característicos para algún NEM, si hubiere perfiles de respuestas similares u opuestos entre los grupos de NEM, buscando evidenciar la influencia del nivel de estudio en Matemática en la profundidad de las comprensiones del número real.

RESULTADOS

Capítulo 6

Concepciones de número y número irracional y su relación con el nivel de estudio en Matemática

En este capítulo se presentan los resultados de la Fase 1 del análisis de la información, descripta en 5.2 del Capítulo 5. En esta oportunidad se realiza el análisis de las respuestas a las tareas del cuestionario correspondientes al Grupo Temático N, conformado por dos tareas (N1 y N2), que indagan las concepciones de estos/as estudiantes sobre número en general y número irracional en particular respectivamente.

Para cada tarea se exhibe el objetivo por el cual fue considerada y la consigna tal cual se la presentó en el cuestionario original. Luego se da cuenta, de forma pormenorizada, de los resultados de la serie de análisis de grano fino realizada y se brinda un apartado con la síntesis de resultados de cada tarea. Finalmente se integran los resultados del análisis de este grupo temático. De modo que pueden realizarse dos formas de lectura, una completa, que informa detalladamente la secuencia de decisiones y resultados, otra que permite alcanzar más directamente los hallazgos generales pasando directamente a la lectura de los apartados de síntesis e integración 6.1.3, 6.2.3 y 6.3.

Ambas tareas solicitan respuestas verbales a una pregunta y luego ejemplos, de tipos de número en la N1 y de números irracionales en la N2, por lo que para cada tarea se obtuvo respuestas abiertas a una pregunta y un listado de ejemplos.

Para la Tarea N1 se efectuaron dos formas de análisis. Primero, se identificó un repertorio de tipos de números citados por la población de estudiantes en general, con sus respectivas frecuencias. Luego se realizó una categorización al interior de este repertorio según ciertas características emergentes. Esto se puede ver en el apartado 6.1.1. Luego, para ambas tareas y dado que contábamos con respuestas verbales abiertas, se categorizaron estas respuestas mediante análisis lexicométrico, y se clasificaron los y las estudiantes según usaran las mismas palabras en sus respuestas. Luego, asociando a esta clasificación el tipo de ejemplo dado se obtuvo una tipología de respuestas para cada tarea. En los apartados 6.1.2 y 6.2.1 describiremos estas tipologías de respuestas que hemos detectado en la población en estudio, dando ejemplos literales de cada tipo de respuestas e informando el porcentaje de la población que representa.

Presentaremos, también la distribución de las clases de respuestas en los distintos NEM para cada tarea y buscaremos asociaciones entre los perfiles de respuesta de cada NEM. Los resultados correspondientes se informan en los apartados 6.1.3 y 6.2.2.

En los apartados 6.1.4 y 6.2.3 sintetizaremos las tipologías de respuestas obtenidas en cada tarea, mostraremos un arco de amplitud de las concepciones numéricas y daremos cuenta de las relaciones entre estas tipologías y los NEM. En 6.3 se integran los resultados obtenidos en el análisis en ambas tareas del grupo temático.

En el Capítulo 5 hemos descripto los métodos cualitativos, control inter-juez y métodos de estadística multivariada utilizados en esta fase de análisis de la información y en el Anexo II damos una justificación teórica y de aplicación de la estadística multivariada. Para más detalles ver también Baccalá y Montoro, 2008; 2013; Benzécri, 1973; Crivisqui, 1993; Escofier y Pages, 1990; Fine, 1996 o Lébart et al., 1995.

6.1. Tarea N1. Concepción de número según una tipología de números propuesta por los y las participantes

Con esta tarea pretendimos conocer qué es para estos/as estudiantes "un número" y si reconocen distintos tipos de números, particularmente si nombran a los racionales, irracionales y reales como números. El Cuadro 6.1 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada.

Por favor, menciona los tipos de números que conoces. ¿Podrías darnos un ejemplo de cada uno?

Cuadro 6.1. La consigna utilizada para la Tarea N1 en el cuestionario.

Esta tarea aportó como información, para cada estudiante, un listado de "tipos de números" y ejemplos asociados a cada uno de ellos. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado 4.1.3 del Capítulo 4.

6.1.1. Repertorio de tipos de números citados por la población de estudiantes

En un primer acercamiento a los tipos de números que esta población de estudiantes conoce, efectuamos un listado de los tipos de números que nombraron con su correspondiente frecuencia. Realizamos una categorización del repertorio de citas, teniendo en cuenta si se trataba de conjuntos numéricos matemáticamente definidos o cuál era la característica emergente que pudiera agruparlos. Resultaron cinco categorías de citas que describimos en el apartado más abajo.

En primera instancia de registro de la variedad de tipos de números citados por los y las estudiantes, mantuvimos la denominación C, R, Q, Z o N (para el conjunto de números complejos, de números reales, de números racionales, de números enteros o de números naturales, respectivamente) como así también las palabras: *complejos, reales, racionales, enteros o naturales* por considerar que con los símbolos C, R, Q, Z o N se designa a los conjuntos numéricos y con las palabras *complejos, reales, racionales, enteros o naturales*, a los elementos de dicho conjunto. Sin embargo, posteriormente, para cada conjunto numérico, unimos ambas denominaciones, ya que aquí sólo nos interesó si los y las estudiantes tenían presente el conjunto (o los números) en cuestión. Por otra parte, mantuvimos diferenciadas las palabras *racionales* y *fracciones*, ya que al volver a las respuestas originales comprobamos que con frecuencia se citaban en una misma respuesta ambos términos. Unimos las citas de *número de oro, de la belleza, áureo, e, π* y *de Avogadro* en una categoría que denominamos: *ejemplos de irracionales*.

A continuación, en la Tabla 6.1 mostramos el repertorio de tipos de números nombrados por la población de estudiantes, la frecuencia de cada tipo de número y porcentaje de la población que los nombra.

Tabla 6.1. Frecuencias y porcentaje de los tipos de números nombrados en la Tarea N1.

Palabra/ tipo de número	Frecuencia	Porcentaje de la población
Naturales o N	**178+53=231**	**74,0%**
Enteros o Z	**179+51=230**	**73,7%**
Racionales o Q	**164+50=214**	**68,6%**
Irracionales o I	**161+36=197**	**63,1%**
Reales	**142+55=142**	**45,5%**
Decimales	95	30,4%
Fraccionarios	61	19,6%
Complejos o C	28+15=43	13,8%
Negativos	39	12,5%
Primos	31	9,9%
Imaginarios	28	9,0%
Pares	27	8,7%
Ejemplos irracionales	20	6,4%
Romanos	19	6,1%
Impares	19	6,1%
Periódicos	18	5,8%
Positivos	12	3,8%
Infinitos	7	2,2%
Truncados	6	1,9%
Radicales	5	1,6%
no-periódicos	5	1,6%
Irreales	5	1,6%
Porcentajes	3	1,0%
Capicúas	3	1,0%
Griegos	2	0,6%
Exactos	2	0,6%
Compuestos	2	0,6%
con-coma	2	0,6%

Los siguientes tipos de números son citados por un/una solo/a estudiante: ordinales, múltiplos, grandes, enteros p-ádicos, divisores, cuaterniones, cardinales, algebraicos y trascendentes.

Cabe destacar que 301 estudiantes (98% de la población) nombran alguno de los conjuntos numéricos estudiados en la escuela primaria o secundaria: *naturales* o *N, enteros* o *Z, racionales* o *Q, irracionales* o *I* y *reales o R*. Seis estudiantes, todos/as de secundaria, no nombran ninguno de estos conjuntos numéricos y se limitan a nombrar: *negativos, primos* o *pares*, etc.

Categorización del repertorio de citas de tipos de números

Pudimos establecer para la tarea N1 cinco categorías de citas:

- *conjuntos numéricos escolares; s*on los conjuntos numéricos estudiados en la escolaridad primaria y secundaria, todos ellos son subconjuntos de los reales: *naturales o* N*, enteros o* Z*, racionales o* Q*, irracionales o I y reales o* R, los más citados son *naturales* y *enteros,* por casi el 74% de la población, luego sigue *racion-ales* o *irracionales* con más del 63% de la población y por último *reales* con 45,5% de la población;

- conjuntos numéricos definidos matemáticamente como números, pero no incluidos en los reales: estos son los complejos, imaginarios, enteros p-ádicos, cuaterniones, ordinales y cardinales, la mayoría no suelen ser estudiados en la escuela secundaria, los números complejos o C son nombrados por casi el 14% de la población, imaginarios por el 9% de la población y el resto por un sólo participante.

- *números por su notación:* en estos casos se identifica el número con su representación externa: decimales, fraccionarios, romanos, periódicos, infinitos, truncados, radicales, no-periódicos, porcentajes, capicúas, exactos y con-coma; principalmente decimales que es citado por más del 30% de la población también los fraccionarios, casi por el 20% (con frecuencia citados además de racionales), romanos y periódicos, citados por un 6% de la población, el resto presenta una muy baja frecuencia.

- *números definidos por alguna propiedad notable:* encontramos de dos clases, unos son subconjuntos de los enteros (*primos/compuestos* y *pares/impares*) y otros subconjuntos de los reales (*negativos/positivos* y *algebraicos/trascendentes*), los números negativos son nombrados por más del 12% de la población, también es notable la cita de los primos con el 10% de la población.

- *otros tipos de números:* no son conjuntos numéricos, sino ejemplares concretos de números irracionales (ej.: π; e, *número de oro*, etc.) que denominamos *ejemplos de irracionales;* descripciones que no hacen referencia a un tipo de número definido matemáticamente (*grandes, griegos, irreales*) o que hacen referencia a una relación entre números (ej. *divisores, múltiplos*), siendo los más comunes (7%) los *ejemplos de irracionales.*

Frecuencias de las citas de número racional, número irracional o número real

Nos interesó particularmente, por el interés de este trabajo, conocer si a la hora de establecer una tipología de números los y las estudiantes utilizaban los términos: (número) *racional, irracional* o *real.*

Calculamos la frecuencia y el porcentaje de la población que, en la Tarea N1, nombra (*número) real (*R*), racional (*Q*) o irracional,* también nos interesó, si a la hora de nombrar los *irracionales o reales* daban o no un ejemplo irracional, volcando esta información en la siguiente tabla (Tabla 6.2).

Tabla 6.2. Frecuencia y porcentajes de estudiantes según nombren *reales, racionales* o *irracionales*. En negrita los y las estudiantes que pueden estar confundiendo a los *reales* con los *racionales*

Tipo de números que nombran		Frecuencias	Porcentajes	
No nombran irracionales	ni nombran *racionales*, ni *reales*	37	12%	12%
	nombran *racionales*.	22	7%	
	nombran a *reales* (dan ejemplo racional)	51	**17%**	24%
Nombran irracionales	**dan un ejemplo racional**	13	**4%**	
	sin dar ejemplos	74	24%	
	dan ejemplo irracional	110	36%	64%

Los resultados revelan que una amplia mayoría, 270 estudiantes (88% de la población) nombra al menos una de las palabras: *racionales* o Q*, irracionales* o I o *reales* o R. Encontramos que el 64% de la población nombra (número) *irracional*, sin embargo, sólo el 36% da, además, un ejemplo *irracional*. Mientras que el 28%, pueden estar confundiendo a los *reales* con los *racionales,* se trata de quienes nombrando a los *reales* dan un ejemplo racional (17%), nombrando a los *reales* dando un ejemplo racional (4%) o nombran sólo racionales (7%). Los y las estudiantes que no nombran *reales,* ni *racionales* ni *irracionales* son 37 (12%), la mayoría de Educación Física.

En la Tabla AIII.1 (Anexo III) podemos observar el porcentaje de cada NEM que nombra cada tipo de número entre los citados al menos por el 9% de la población para la Tarea N1. En negrita aparecen los *racionales, irracionales* y *reales* por su relevancia para este estudio.

6.1.2. Categorización de las respuestas a la Tarea N1

En esta tarea, como dijimos, se contó para cada estudiante, con un listado de "tipos de números" y ejemplos asociados a cada uno de ellos. La población inicial de 307 estudiantes quedó particionada, con el fin del análisis de sus respuestas, entre 270 estudiantes que nombraron al menos una de las palabras: *racionales* o Q, *irracionales* o I y *reales* o R, por una parte, y 37 que no lo hicieron, por otra.

Asociación de citas de tipos de números

Realizamos un AFC[30] de la tabla léxica que asocia, a cada uno/a de los y las 270 estudiantes que nombraron al menos una de las palabras: *racionales* o Q*,* *irracionales* o *I* y *reales* o R, los tipos de números que nombraron.

Las palabras activas fueron 14 tipos de números que tenían una frecuencia mayor a 11 citas: naturales, enteros, decimales, fraccionarios, complejos, negativos, primos, imaginarios, pares, *ejemplos de irracionales*, romanos, impares, periódicos y positivos y como ilustrativas se proyectaron las palabras: racionales, irracionales y reales (por ser comunes a casi todos/as los/las) y las modalidades de NEM.

Tomamos los tres primeros ejes que concentran casi el 40% de la inercia que permiten observar asociaciones con casi todos los NEM. En la Tabla 6.3 pueden verse las palabras contributivas a cada factor y modalidades de NEM asociados a cada factor y a continuación, los dos primeros planos factoriales, donde sólo hemos proyectado las modalidades bien representadas. (Gráfico 6.1 y Gráfico 6.2).

Tabla 6. 3. Palabras contributivas a cada factor del AFC de la tabla léxica de la Tarea N1. Modalidades de NEM asociados a cada factor.

Factor	Modalidades contributivas	NEM asociado
F1	(+) complejos, enteros y naturales (-) impares, pares, primos, ej. irracionales, positivos y negativos	(+) MA y MI (-) EFI y EFA
F2	(+) impares, pares, primos y ej. irracionales (-) positivos y negativos	
F3	(+) impares, pares y primos (-) periódicos, decimales, ej. irracionales, imaginarios, positivos, negativos y romanos	(+) 4to y MI (-) 3ro, BA, EFI y EFA

[30] Para detalles de este método y de la clasificación ver Capitulo 5 y Anexo II.

Gráfico 6.1. Primer plano factorial del AFC de la tabla léxica de estudiantes por tipo de números que nombran en la Tarea N1

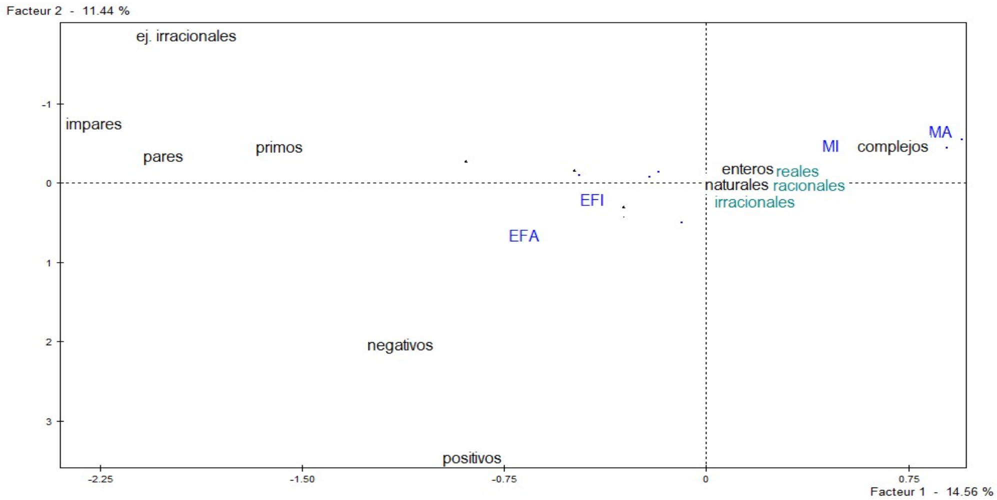
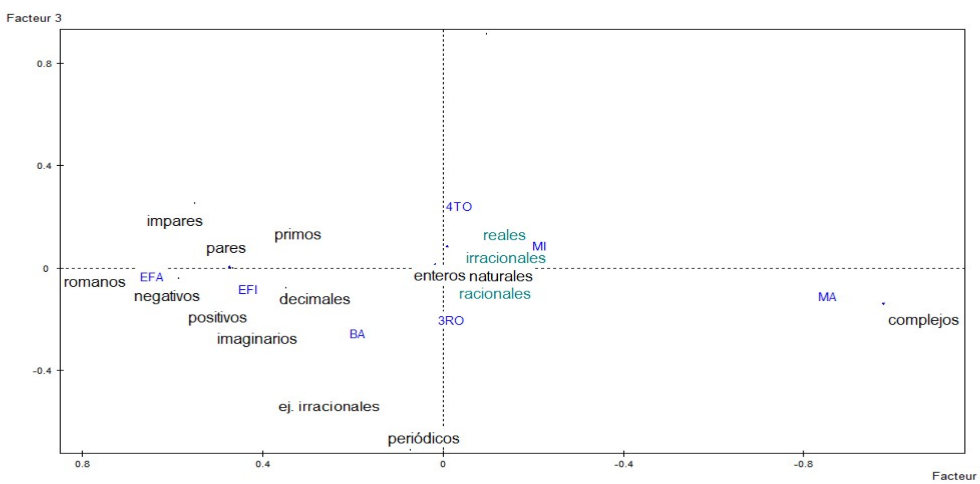


Gráfico 6.2. Segundo plano factorial del AFC de la tabla léxica de estudiantes por tipo de



números nombrados en la Tarea N1.

Posteriormente a este AFC, realizamos una clasificación de las respuestas de los y las estudiantes según hayan nombrado, globalmente, los mismos tipos de números, buscando asociaciones de las modalidades de NEM con estas clases

Clasificación de estudiantes según nombren los mismos tipos de números

Se realizó una clasificación de las respuestas de los y las 270 estudiantes que nombraron reales, racionales o irracionales, según se parezcan globalmente en cuanto a los tipos de números que en ellas se nombran (además de *reales, racionales* o *irracionales*). Obtuvimos cuatro clases bien diferenciadas.

Reincorporando al análisis a los y las 37 estudiantes que no nombran a *reales*, ni *racionales* ni *irracionales* observamos que todos/as ellos/as sí nombran a naturales, enteros o un subconjunto de los enteros, por lo que hemos establecido una nueva clase que denominamos *sólo los enteros son números*.

A continuación, presentamos las clases obtenidas en la clasificación posterior al AFC, ordenadas según reflejen una comprensión más amplia de los conjuntos numéricos. Informaremos la cantidad de estudiantes y porcentaje de la población que representa, una caracterización según los tipos de números que citan los y las estudiantes, modalidades de NEM asociadas a cada clase y ejemplos literales de individuos representativos/as de la clase.

No nombran reales, ni racionales, ni irracionales

Clase N1.1. *Sólo los enteros son números.* N= 37 (12%).

No nombran *reales,* ni *racionales,* ni *irracionales.* Nombran a los *naturales,* los *enteros* o algún subconjunto notable de los enteros (ej. *positivos, negativos, primos*). La mayoría son de Educación Física (EFA y EFI).

Respuestas de un/a estudiante de EFI: *positivos (8), enteros, negativos (-8)*

Nombran reales, racionales o irracionales

Clase N1.2. *Los enteros como modelo de número.* N= 25 (8%).

Nombran a los *reales, racionales o irracionales* y además algún subconjunto notable de los enteros (*pares, impares, primos)*. Asociado a EFI (39% de EFI está en esta clase). No hay ningún MA.

Respuestas de un o una estudiante de 5to: *números reales R=…, números irracionales (* $\sqrt{5}$*), números enteros (1; -3), números primos (3), números pares (2) y números racionales (1,5)*.

Clase N1.3. *Identificación del número con su representación (notación)***.** N= 106 (35%). Nombran *reales, racionales o irracionales* y además algún tipo de número por su notación (*decimales, fraccionarios, periódicos, negativos, imaginarios*). Principalmente *decimales* y *periódicos*. En esta clase están también las respuestas, sin ser muy numerosas, en las que se dan *ejemplos de irracionales* y en las que se dicen *romanos*. En ocasiones decimales, fracciones y racionales como tipo de números distintos. Es notable la presencia de estudiantes de 5to y BA y la ausencia de estudiantes de MA.

Respuestas de un o una estudiante de 5to*: Enteros (1; 2; 3), decimales (1,2), racionales (5; 7), fraccionarios (1/2).*

Clase N1.4. *Conjuntos numéricos escolares.* N= 111 (36%).

Nombran *reales, racionales o irracionales* y además dicen *naturales y enteros*. No dicen *complejos*. Estos estudiantes nombran solamente los conjuntos numéricos que se estudian en la escuela, todos subconjuntos de los números reales. Se encuentra particularmente asociada a estudiantes de 3ro, BI y MI.

Respuestas de un o una estudiante de MI: *Reales (1/5) … abarca todo, naturales, enteros (1; 2; 3; 4), irracionales (√5, √2) y racionales (1/2; 1/5; 6/5).*

Clase N1.5. *Conjuntos convencionales con estructura*. N= 28 (11%).

Además de *reales, racionales o irracionales* dicen *naturales, enteros y complejos*. La respuesta clásica consta sólo de estos seis conjuntos numéricos y en el siguiente orden: *naturales, enteros, racionales, reales y complejos*. Muchos/as nombran también los irracionales. Asociada a MA, no hay estudiantes de 3ro, EFI ni EFA.

Respuestas de un o una estudiante de MA: *Naturales (1), enteros (-3), racionales (3/4), irracionales (√2), reales (5), complejos (3+2i).*

Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea N1

En síntesis, obtuvimos cinco clases de respuestas que presentan un arco de concepciones numéricas, que en un extremo abarca dos tipos de respuestas centradas en los números enteros, tanto en aquellas donde no se nombran a los (números) reales, ni racionales o irracionales, que hemos presentado como *sólo los enteros son números*, como aquellas en que, aunque se nombre a los reales, racionales o irracionales se nombran principalmente subconjuntos notable de los enteros (*pares, impares, primos)* pareciendo que se considera a *los enteros como modelo.* Esta visión anclada en los números enteros reúne el 20% del estudiantado participante.

Entre las respuestas de los y las estudiantes, también encontramos una clase de respuestas centradas en la notación que denominamos *identificación del número con su representación*, debido a que, si bien nombran *reales, racionales o irracionales*, además nombran *decimales, fraccionarios, periódicos, negativos, imaginarios, etc.*

Luego, tenemos las respuestas en las que se manifiesta una visión del número como un elemento de un conjunto, en dos formas: una como *números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares,* en las cuales nombran solamente los conjuntos numéricos que se estudian en la escuela, todos subconjuntos de los números reales y otra forma que llamamos *conjuntos convencionales con estructura.* Nombran sólo *naturales, enteros, racionales, reales y complejos* y en ese orden.

En la Tabla 6.4 encontramos una síntesis de las clases de respuestas según los tipos de números que nombran los y las estudiantes y porcentaje de la población que presenta la clase de respuesta (en negrita los mayores %).

Tabla 6.4. Tipos de respuestas de los y las estudiantes según los tipos de números que nombran y porcentaje de la población en cada clase.

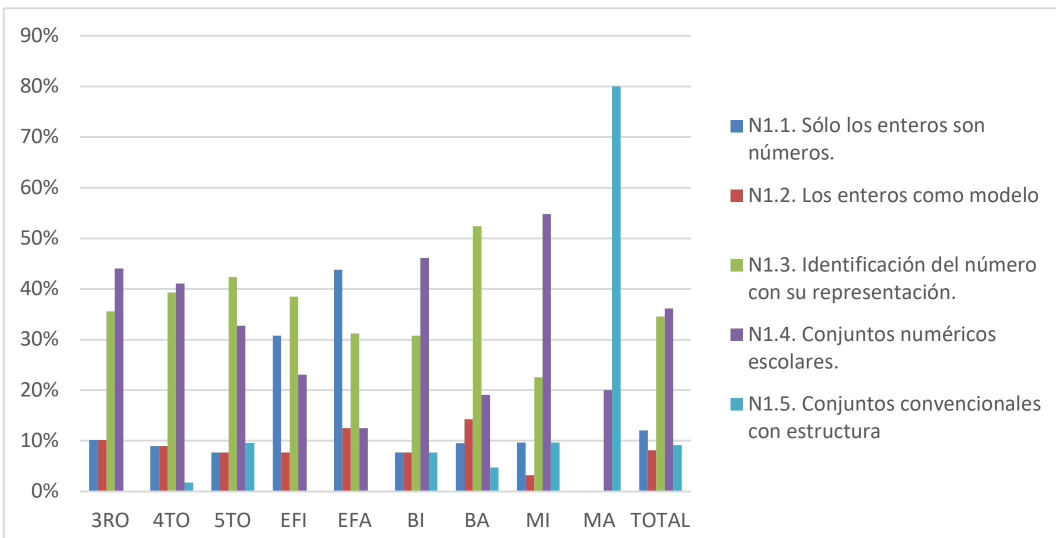
Clases de respuesta		% de la población
No nombran *reales,* ni *racionales,* ni *irracionales.*	N1.1. Sólo los enteros son números.	12%
Nombran *reales, racionales o irracionales*	N1.2. Los enteros como modelo de número.	8%
	N1.3. Identificación del número con su representación.	**35%**
	N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares.	**36%**
	N1.5. Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura.	11%

6.1.3. Perfiles de respuestas a la Tarea N1 según el nivel de estudio

Distribución de los tipos de respuestas a la Tarea N1 en los NEM

En el Gráfico 6.3 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada tipo de respuestas en cada nivel de estudio y en la población general.

Gráfico 6.3. Distribución de las clases de respuestas a la Tarea N1, al interior de las modalidades de NEM.



Si bien algunas concepciones se presentan como características de algún NEM, como *sólo los enteros son números* para EFI y EFA o *conjuntos convencionales con estructura* para MA, en cada nivel de estudios en matemática (salvo MA) se manifiestan las cuatro primeras clases, es decir se observa una diversidad de clases de respuestas en cada NEM.

Observamos que los perfiles de secundaria (3ro, 4to y 5to) son muy similares creciendo (en orden 3ro, 4to, 5to) la clase de respuesta *identificación del número con su representación* y decreciendo en ese orden la clase de respuesta *conjuntos numéricos escolares*. Los perfiles de ingresantes a las carreras científicas (BI y MI) también son similares entre si predominando la clase de respuesta *conjuntos numéricos escolares.*

Los perfiles 3ro, 4to, 5to, BI y MI se presentan similares al perfil medio de la población, aunque cada uno con su característica mientras que EFA, EFI, BA y MA son característicos y muy distintos entre sí.

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea N1 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados/as según su NEM, realizamos un AFC[31] de la tabla de contingencia de los tipos de respuestas determinados respecto del NEM de los y las estudiantes a fin de observar si existen perfiles de distribución característicos, similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AIII.2, en el Anexo III.

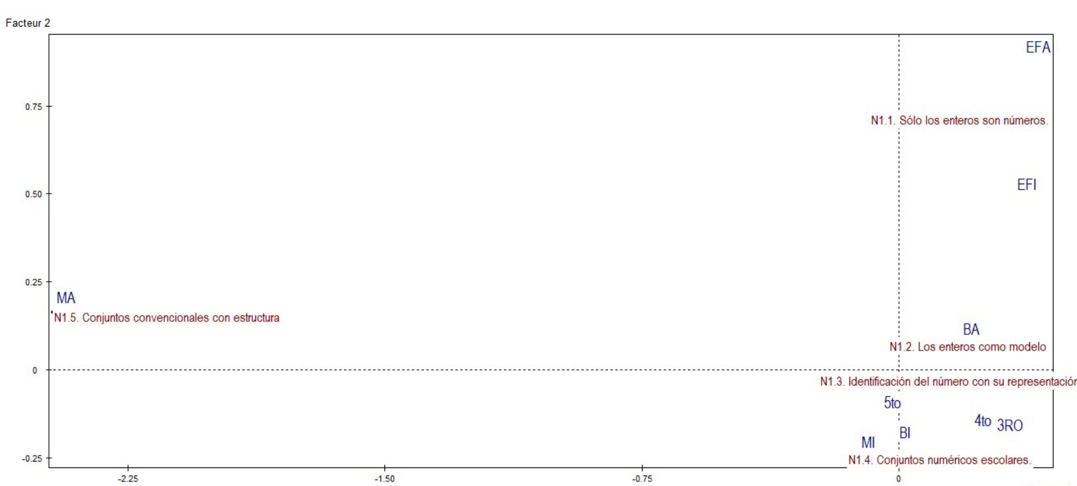
A continuación, presentamos los dos primeros planos factoriales de este AFC realizado sobre los perfiles de distribución de las cinco clases de respuestas al interior de los nueve niveles de estudio (Gráficos 6.4 y 6.5).

El principal factor de variabilidad corresponde a la clase *números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura* asociada a MA, oponiéndose al resto de clases de respuestas y NEM.

El segundo factor discrimina entre la clase *sólo los enteros son números* por una parte y *números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares* por otra. EFI y EFA se asocian a la primera, mientras que 3ro, BI y MI, a la última.

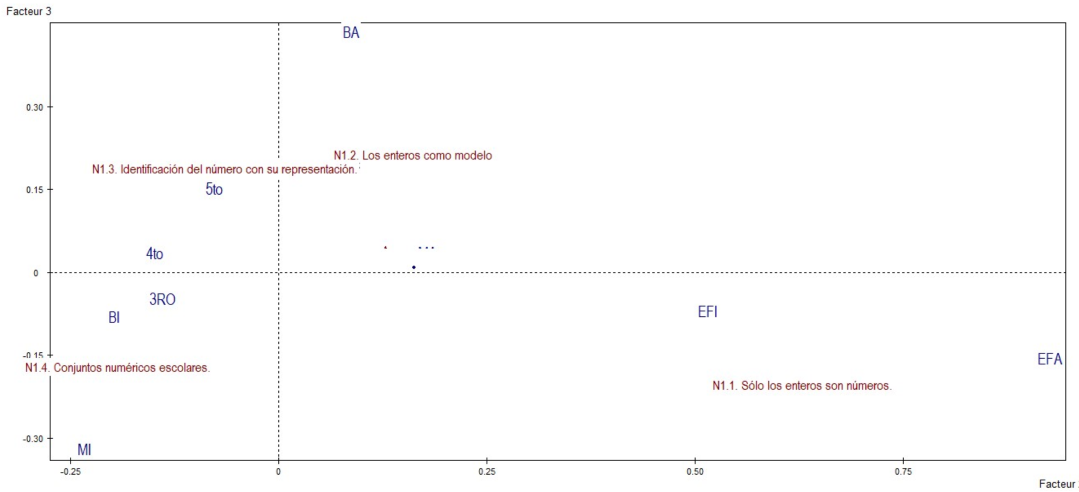
El tercer factor aporta nuevas asociaciones como identificación del número con su representación, asociada a 5to y BA, y números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares, asociada a BI y MI.

Gráfico 6.4. Primer plano factorial del AFC de los tipos de respuestas a la Tarea 1 y los NEM.



[31] Ver detalles de este método en Capitulo 5 y Anexo II.

Gráfico 6.5. Segundo plano factorial del AFC de los tipos de respuestas a la Tarea 1 y los N.



La Tabla 6.5 sintetiza las asociaciones de los perfiles de las clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, encontradas mediante este AFC.

Tabla 6.5. Asociaciones entre clases de respuestas y modalidades de NEM en el AFC de la Tarea N1

Clases de respuesta	NEM
Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura	MA
Identificación del número con su representación (notación) Los enteros como modelo de número	BA
Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares Identificación del número con su representación (notación)	MI 3ro, 4to, 5to y BI
Sólo los enteros son números.	EFI, EFA

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC (Gráficos 6.4 y 6.5) y que pueden ilustrarse con el Gráfico 6.3 de la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de Matemática, encontramos que los perfiles de los NEM: 3ro, 4to, 5to y BI poseen un perfil de distribución similar entre sí, en los que predominan la *identificación del número con su representación* y *números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares*.

Las modalidades de NEM EFA y EFI poseen un perfil característico donde predomina *sólo los enteros son números* y *los enteros como modelo de número,* es decir una fuerte identificación de número con los números enteros.

Mientras que MI, BA y MA poseen perfiles característicos y distintos entre sí. En el perfil de MI predominando *números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares*; el de BA asociado principalmente a *identificación del número con su representación (notación)* y cierta preponderancia de visualizar a *los enteros como* *modelo de los números,* mientras que en MA predomina *números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura.*

6.1.4. Síntesis e interpretación de resultados de la Tarea N1

Con esta tarea, pretendíamos conocer qué es para estos/as estudiantes un número y si reconocen a los *racionales, irracionales* y *reales* como números.

Los resultados revelan que una amplia mayoría (88%) nombra, como tipo de números al menos uno de los siguientes: *racionales, irracionales* o *reales*, mientras 12% de la población, la mayoría estudiantes de Educación Física, no lo hace.

Si bien el 64% de la población nombra, como tipo de número a los (números) *irracionales*, sólo el 36% da un ejemplo *irracional,* mientras que el 28% restante, nombran a los *irracionales* y dan un ejemplo racional, nombran a los *reales* y dan un ejemplo racional o nombran sólo a los racionales, es decir puede estar confundiendo a los *reales* con los *racionales*. Esto muestra un alto el porcentaje de estudiantes que no reconocen satisfactoriamente los números irracionales.

Encontramos cinco categorías de citas de tipos de números, emergidas del repertorio de citas en la población en general, ordenadas según su frecuencia:

(i) *conjuntos numéricos escolares:* naturales o N, enteros o Z, racionales o Q, irracionales o I y reales o R; (ii) *conjuntos numéricos definidos matemáticamente como números, pero no incluidos en los reales:* complejos, imaginarios, enteros p-ádicos, cuaterniones, ordinales y cardinales; (iii) *números por su notación:* decimales, fraccionarios, romanos, periódicos, infinitos, truncados, radicales, no-periódicos, porcentajes, capicúas, exactos y con coma, es notable como los números decimales, fraccionarios y racionales suelen ser nombrados, como distintos tipos de números; (iv) *números definidos por alguna propiedad notable:* subconjuntos de los enteros (primos/compuestos y pares/impares) y subconjuntos de los reales (negativos/positivos o algebraicos/trascendentes) y (v) *otros tipos de números:* ejemplares de irracionales (ej.: π; e, *número de oro*, etc.) descripciones que no hacen referencia a un tipo de número definido matemáticamente (grandes, griegos, irreales) o que hacen referencia a una relación entre números (ej. divisores, múltiplos).

Los análisis subsiguientes nos permitieron estudiar la asociación entre los diferentes tipos de números citados, entre sí y también con el NEM de los y las estudiantes.

Para las clases de respuestas a esta tarea, pudimos observar un arco de amplitud en la concepción numérica según incorporaran más conjuntos numéricos en sus citas, desde la más restringida que denominamos *sólo los enteros son números* y la clase de respuesta que hemos denominado *los enteros como modelo de número* en la cual los y las estudiantes, aun cuando nombran a los reales, racionales o irracionales, nombran, en todos los casos, subconjuntos de los enteros tales como primos o pares. Ambas concepciones citadas aparecen centradas en los números enteros, los naturales y sus subconjuntos notables y están fuertemente asociadas a estudiantes de Educación Física, pero además encontramos en estas clases a estudiantes de 3ro, 4to y BA.

En un sector central, de este arco de amplitud en la concepción numérica, tenemos dos concepciones (las más populares en esta población) y que expresan principalmente estudiantes de secundaria y de Biología. En ambas nombran a los *números reales, racionales o irracionales*, en una de ellas, que denominamos *identificación del número con su representación* nombran, además: decimales, fracciones o periódicos (diferenciándolos entre sí y de los racionales) y en la otra denominada *números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares* nombran, además (sólo) a los naturales y los enteros.

Los y las estudiantes de la clase que denominamos *identificación del número con su representación,* pareciese que conocen a las fracciones y los decimales tomándolos como conjuntos distintos y muchas veces los diferencian de los racionales. Es notable, en nuestra población los *decimales* son citado por más del 30% de los y las estudiantes, tomándolos como un tipo de números distinto de los racionales, es decir identificando al número con su notación decimal.

Respecto a la clase *número son los elementos de los conjuntos numéricos escolares* (36% de la población), notamos que muchos estudiantes de 3ro y 4to de secundaria se asocia esta clase de respuesta, lo que nos da una idea de respuestas dadas por la cercanía del contenido escolar que están estudiando en el momento de realizado el cuestionario. Algo similar ocurre con los y las estudiantes MI y BI, que parecieran haber naturalizado, en la reciente finalización de sus estudios secundarios, la idea de número, como un elemento de los *naturales, enteros, racionales o reales*.

Por último, la concepción más elaborada desde el punto de vista matemático, denominada, *números son los elementos de los conjuntos con estructura*, se asocia casi exclusivamente con estudiantes avanzados/as de Matemática.

Esto nos da un primer acercamiento a la idea de que las concepciones numéricas evolucionan hacia una mayor amplitud cuando media un estudio de los conjuntos numéricos y sus estructuras.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.1, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

6.2. Tarea N2. Concepción de número irracional. Ejemplos de irracionales

El objetivo de la Tarea N2 fue explorar si los y las estudiantes conocen los números irracionales, si los describen con condiciones necesarias y suficientes (si los reconocen *como los reales que no son cociente de enteros* o como *los que poseen infinitos decimales no-periódicos* y si pueden diferenciarlos de los racionales. Nos interesa explorar una posible identificación de los reales con los racionales y/o de los irracionales con las raíces o con ciertos números muy especiales.

El Cuadro 6.2 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracionales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser "irracionales"?

____

____

¿Conoces otros números irracionales? …… ¿Cuáles?

____

Cuadro 6.2. La consigna utilizada para la Tarea N2 en el cuestionario.

Esta tarea aporto como información, para cada estudiante, una respuesta verbal a la primera pregunta que podríamos sintetizar como *¿en qué consiste la condición de ser irracional?* y una respuesta dicotómica (sí o no) a la segunda pregunta y en el caso de haber respondido sí, ejemplos de números irracionales. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado 4.1.3 del Capítulo 4.

6.2.1. Categorización de las respuestas a la Tarea N2

Categorización de las descripciones de número irracional

Encontramos que 49 estudiantes no contestaron y 21 estudiantes contestaron *no sé, ni idea, no sé cómo explicarlo*, etc., cuando se les solicita que expliciten "qué es un número irracional". Por lo que el 23% de la población (70 estudiantes) se ubica en la categoría *no sabe – no contesta*. Este alto porcentaje podemos relacionarlo con los resultados de la tarea anterior, en la que casi el 50% de la población pareciera identificar a los números con los enteros o los racionales. En la Tabla AIII.3 del Anexo III puede verse la distribución de los y las estudiantes que no respondieron o respondieron *no sé* en las modalidades de NEM.

Categorización de las respuestas significativas a la primera pregunta

Los y las estudiantes que dieron una respuesta significativa a la primera pregunta de la Tarea N2, fueron 237 (77%). A partir de asociar a cada estudiante las palabras que constaban en su respuesta, realizamos un análisis lexicométrico de las mismas, a fin de sacar a la luz una tipología de respuestas, además de observar si en las mismas encontrábamos elementos esenciales de diferenciación de los números irracionales.

Se consideraron activas las palabras (significativas) con frecuencia mayor o igual a 10 y como ilustrativas, por ser comunes a la mayoría de los y las estudiantes, las palabras: *número* e *irracionales*, también algunas palabras y segmentos con frecuencias bajas, que nos parecieron interesantes (ej.: *indeterminados, medir, precisión).*

Se realizó, entonces un AFC de la tabla léxica[32] de 237 estudiantes, con 20 palabras activas y 20 palabras o segmentos, además de las modalidades de NEM como ilustrativas. En la Tabla 6.6 pueden observarse cuáles fueron esas 20 palabras activas y cuáles las palabras o segmentos ilustrativos con sus respectivas frecuencias.

Tabla 6.6. Palabras activas, palabras y segmentos ilustrativos y sus frecuencias, en el AFC de la tabla léxica de la primera pregunta en la Tarea N2.

Palabras activas	Frec.	Palabras y segmentos ilustrativos	Frec
infinitos	68	Ejemplo	12
decimales	54	Raíz-de-dos	11
fracción	47	Π (pi)	12
coma	46	Fin	9
enteros	41	Razón	9
exacto	34	Reales	9
resultado	34	Resolver	9
escribir	33	Representar	6
expresar	23	pueden escribir como fracción	17
racional	23	no pueden escribir como	17
no-periódicos	21	tienen infinitos cifras	11
da	20	decimales no-periódicos	11
solución	19	no tienen solución	9
después	16	pueden expresar como fracción	9
cifras	14	sirven para medir	7
dividir	13	infinitos cifras decimales	7
cociente	12	decimales infinitos	5
periódicos	12	escribir como cociente	5
nunca	10	solución exacta	5
poseen	10	tienen infinitos número	5

Tomamos los dos primeros ejes que concentran casi el 30% de la inercia, lo cual para lexicometría es usual. En la Tabla 6.7 pueden verse las palabras contributivas y modalidades de NEM asociados a cada factor y a continuación, el

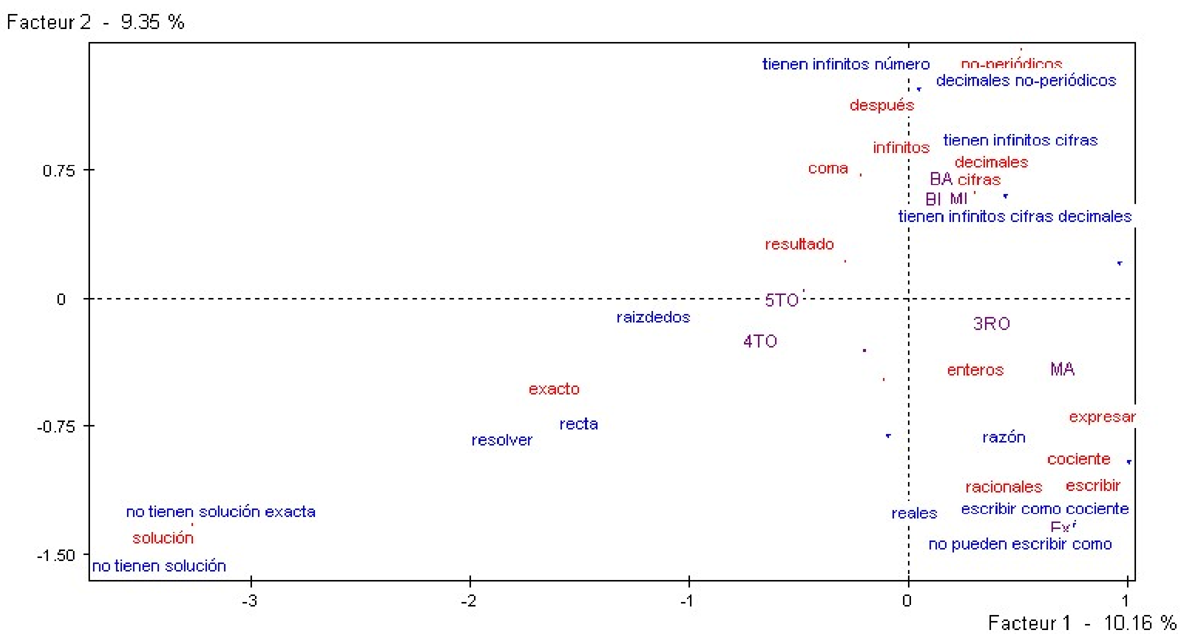
[32] Ver detalles del método utilizado en Capitulo 5 o Anexo II.

primer plano factorial, donde sólo hemos dejado las modalidades bien representadas (Gráfico 6.6).

Tabla 6.7. Palabras contributivas, frecuencias y modalidades ilustrativas asociados a cada factor del AFC de la tabla léxica de la primera pregunta en la Tarea N2.

Factor	Modalidades contributivas	Frecuencias Ilustrativas	NEM asociados
F1	(+) escribir - fracción (-) exacto - solución	(+) no pueden escribir como (-) no tienen solución - solución exacta	(+) MA (-) 4to – 5to
F2	(+) coma –decimales – después – infinitos – no-periódicos (-) escribir – exacto – fracción – racionales - solución	(+) tienen infinitos números - decimales no-periódicos (-) no puede escribirse como	(-) MA (+) BI - MI –BA

Gráfico 6.6. Primer plano factorial en el AFC de la tabla léxica de la primera pregunta en la Tarea N2. Como ilustrativas las modalidades de NEM. En rojo las palabras activas, en azul fragmentos ilustrativos.



Clasificación de los y las estudiantes según las palabras en sus descripciones

Se realizó una clasificación posterior al AFC, de los 237 estudiantes, que dieron una respuesta significativa a esta pregunta. Obtuvimos seis clases de estudiantes, según las palabras que dicen en su descripción de los irracionales, es decir según se parezcan globalmente sus respuestas en cuanto a las características de los números irracionales que menciona. Las resumimos en la siguiente tabla (Tabla 6.8)

Tabla 6.8. Caracterización de las clases de estudiantes según las palabras presentes en sus respuestas, de la primera pregunta en la Tarea N2. NEM asociados y frecuencia de cada clase.

Caracterización	Palabras características	Asociación de NEM	F
Aspecto irrelevante	sin - razón	EFA, EFI y 3ro	24
No tienen solución/resultado (exacta/o).	solución - exacto - da – resultado– dividir – nunca - no tienen solución - (no tienen) solución exacta	4to, 5to.	51
Son los decimales, números con coma.	decimales - cifras – poseen – periódicos - número - sirven - medir – precisión	BI, MI, 4to, 5to y 3ro	56
Infinitos decimales después de la coma.	infinitos – decimales – después – coma - tienen infinitos cifras - tienen infinitos	BA, BI, MI,	45
No se pueden escribir como fracción.	fracción – escribir – expresar - (no) pueden escribir como fracción - (no) pueden expresar como fracción	3ro	28
Infinitos decimales no-periódicos.	no-periódicos –infinito - decimales no-periódicos	3ro y MI	21
Los reales que no son cociente de enteros.	racionales – enteros – cociente – reales – escribir como cociente	MA	14

En esta etapa del análisis reincorporamos a los 70 estudiantes que no contestaron o manifestaron no saber qué es un número irracional. Dado que una de las clases resultantes estaba constituida por los y las estudiantes que dieron una respuesta según algún *aspecto irrelevante*, decidimos agrupar en esta misma clase a los y las estudiantes que no respondieron (o respondieron *no sé*) a la consulta realizada. Estos 91 estudiantes constituyeron una clase denominada *no conocen los irracionales.*

Respuestas características para cada grupo de NEM

A modo de ilustrar la descripción que los y las estudiantes hagan de los números irracionales, se buscaron respuestas originales características de cada NEM según el criterio distancia chi-cuadrado de la lexicometría[33], lo que nos permite acercarnos sin intermediaciones analíticas a las formulaciones originales de los y las estudiantes que mejor reflejan la respuesta media del grupo en cada una de las modalidades de NEM. Las mismas se pueden ver en la Tabla AIII.4 del Anexo III.

Categorización de los ejemplos de irracionales

La segunda pregunta de la Tareas N2 requería, en el caso de expresar conocer los números irracionales, dar ejemplos distintos de π y $\sqrt{2}$.

Ciento veinte estudiantes (40%), frente a la consulta de *si conocen otros irracionales además de √2 y π*, no contestaron o contestaron que no sabían (*no sé, ni idea, no sé cómo explicarlo*, etc.). En la Tabla AIII.5 del Anexo III puede verse la

[33] Para justificación del método ver Anexo II.

distribución de los y las estudiantes que no respondieron o respondieron *no sé*, en las modalidades de NEM.

Se realizó una categorización cualitativa de los ejemplos de irracionales brindados por los y las estudiantes, buscando regularidades respuesta por respuesta, obteniéndose clases disjuntas. La unidad de análisis fue la totalidad de ejemplos brindados por cada estudiante. El procedimiento de control inter-juez aplicado a la totalidad de las respuestas arrojó una coincidencia de 98%. A continuación (Tabla 6.9) describimos las clases de respuestas resultantes.

Tabla 6.9: Caracterización de los *ejemplos de irracionales distintos de* π y $\sqrt{2}$. Ejemplos literales de respuestas, indicando el NEM del o de la participante.

Caracterización	**Respuesta de un/una estudiante de…**
No dan ejemplos: N = 122 (40%) No contestan o contestan que no saben.	3ro: *Ni idea, no sé* EFA: *No recuerdo.*
Ejemplos complejos (imaginarios): N= 6 (2%) Expresan que son raíces de negativos, o muestran una raíz de un numero negativo o dicen *son los imaginarios.*	5to: $\sqrt{-7}$ 4to: *los imaginarios*
Ejemplos racionales o generalización de racionales: N= 49 (16%). Dan ejemplares racionales o expresan que son *fracciones, decimales o periódicos*.	4to: 1/2, 6/7. 3ro: *Los números irracionales son números periódicos.*
Ejemplares irracionales: N= 116 (38%). Dan una o varias raíces cuadradas de números primos (3, 5, 7, 11 o 13) y/o de números no cuadrados o ejemplos de irracionales notables.	4to: $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{5})/2$ BI: V3, V5, V7 BA: 2π, π /2
Generalización correcta: N=14 (4%) Dan una generalización correcta expresando *los decimales no-periódicos* o *las raíces de un número p (primo positivo)*.	5to: *decimales no periódicos* MA: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ *y* $\sqrt{p}$ *con p primo positivo*

Categorización de tipos de respuesta, mediante la combinación de las respuestas literales y los ejemplos dados

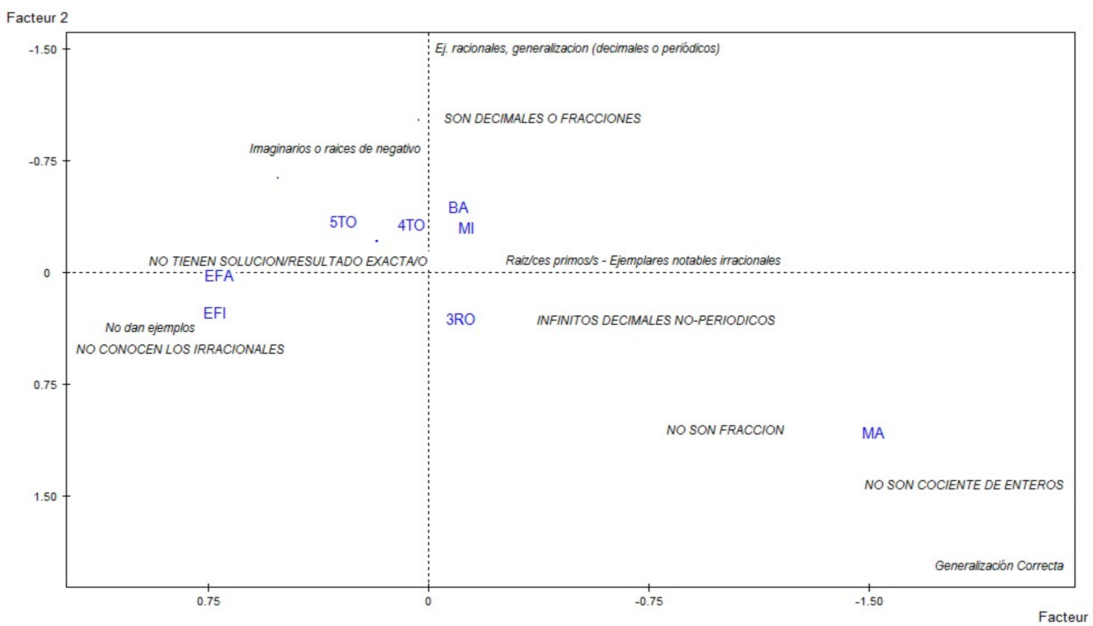
Asociaciones de tipos de respuestas a los dos ítems de la Tarea N2.

Con el fin de asociar a cada tipo de respuestas según la descripción de los números irracionales, los tipos de ejemplos que los y las estudiantes proponen, realizamos un AFCM de los y las estudiantes descriptos/as por sus tipos de respuestas a la pregunta y el tipo de ejemplos dados de esta tarea y proyectamos como ilustrativas las modalidades de NEM.

En este AFC encontramos que el principal factor de variabilidad corresponde a respuestas que expresan *no conocen los irracionales* y *no dan ejemplos,* asociadas a EFI y EFA, oponiéndose a respuestas que indican que conocen los irracionales (*no se escriben como fracción, infinitos decimales no-periódicos* o *no se expresan como cociente de enteros* y dan como ejemplo *raíces de primos- ejemplos de irracionales* o una *generalización correcta* asociadas principalmente a MA. El segundo factor discrimina entre las clases en que se establece que se identifican los irracionales con los racionales (*son las fracciones o los decimales* y dan como ejemplos *ejemplares de* *racionales/generalización no correcta*), asociadas a BA, del resto de tipos de respuestas.

A continuación (Gráfico 6.7) presentaremos el primer plano factorial del AFCM realizado sobre los y las estudiantes descriptos/as por sus descripciones de *los irracionales* y por los *ejemplos de números irracionales* (distintos de $\sqrt{2}$ y π).

Gráfico 6.7: Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus respuestas a los dos ítems. de la Tarea N2



Clasificación de estudiantes según sus modos de respuesta a la Tarea N2.

A continuación, presentamos las siete clases obtenidas en la clasificación[34] jerárquica ascendente, posterior al AFCM antes descripto. Informaremos una caracterización según la descripción de la condición de irracionalidad de un número y el tipo de ejemplos que tienen mayoritariamente asociado, así como la cantidad de respuestas que la constituyen, el porcentaje de la población que representan, las modalidades de NEM asociadas y algunos ejemplos literales de respuestas representativas de la clase.

Clase N2.1*. Ajenidad - inseguridad. Desconocen los irracionales.* N= 92 (30%). No contestan, manifiestan no saber o mencionan algún aspecto irrelevante. Generalmente no dan ejemplos. Asociada a EFA, EFI y 3ro.

Respuesta literal de un/una estudiante de 3ro año: *no-sé* – Ejemplos: No da ejemplo

Respuesta literal de un/una estudiante de 4to: *fuera de la razón* – Ejemplo: *No recuerdo*.

[34] Ver detalles del método utilizado en Capitulo 5 o Anexo II.

Clase N2.2. *No tienen solución/resultado (exacta/o).* N= 51 (17%). Palabras características: *solución, exacto, da, resultado, dividir, nunca, no tienen solución* y *(no tienen) solución exacta.* Generalmente no dan ejemplos, algunos dan ejemplos complejos *(raíces de negativos*). Consideran que los irracionales son los números que no tienen (al dividir o al calcular una raíz) un resultado exacto (o entero). Asociada a 4to y 5to. No hay estudiantes de MA.

Respuesta literal de un/una estudiante de 5to: *significa que al dividir su resultado no da un número exacto.* Ejemplo: *No se pueden dividir*.

Respuesta literal de un/una estudiante de 4to: *los números irracionales son los números que no tienen una solución exacta.* Ejemplo: *√5, √-7, √10, √-6 …*

Clase N2.3*. Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, o los números con coma.* N= 56 (18%).

Palabras características: *decimales, cifras, poseen, periódicos, coma, sirven, medir, precisión.* Dan como ejemplos *ejemplares racionales* o *una generalización de racionales*. Manifiestan que los irracionales son *números decimales o con coma* o también que *son las fracciones o tienen infinitos decimales periódicos,* es decir los confunden con los racionales, lo cual se ve reforzado por que brindan como ejemplos números racionales. Hay un subgrupo que considera que son *los que sirven para medir con precisión* (en el sentido de más o menos decimales). Generalmente dan ejemplos racionales. Asociada a: 3ro, 4to, 5to BI, MI**.**

Respuesta literal de un/una estudiante de 3ro*: los irracionales son los que sirven para medir con precisión*. Ejemplos: *los decimales*

Respuesta literal de un/una estudiante de BI: *son números con "coma" o que luego de la coma tiene números periódicos*. Ejemplos*: Los números periódicos, las fracciones*

Clase N2.4. *Infinitos decimales después de la coma.* N=45 (15%). Palabras características: *decimales, cifras, infinitos, tienen infinitos cifras* y *tienen infinitos*. Dan ejemplares irracionales, generalmente raíces de primos. Consideran que los irracionales tienen *infinitas cifras decimales* o *son infinitos*. Suelen dar como ejemplos a ejemplares irracionales, pero también a ejemplos racionales. Asociada a: BI, MI y BA.

Respuesta literal de un/una estudiante de MI: *los irracionales consisten en tener infinitos números después de la coma.* Ejemplo: *e; √5, etc.*

Respuesta literal de un/una estudiante de BA: *son números con infinidad de decimales.* Ejemplo: *√13*

Clase N2.5. *Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.* N=21 (7%). Palabras características: *no-periódicos, infinito* y *decimales no-periódicos.* Centrada en la definición notacional de los irracionales. Manifiestan que son los *decimales no-periódicos*. Dan como ejemplo: ejemplares irracionales (raíces de primos- notables) o también una generalización correcta. Asociada a 3ro.

Respuesta literal de un/una estudiante de 3ro: *los irracionales son los decimales no periódicos*. Ejemplo: *los decimales no periódicos*

Respuesta literal de un/una estudiante de 3ro: *son infinitos y no son periódicos.* Ejemplo: no de ejemplos

Clase N2.6*. No se pueden escribir como fracción.* N=28 (8%).

Palabras características: *fracción, escribir, expresar, (no) pueden escribir como fracción* y *(no) pueden expresar como fracción.* Dan como ejemplos ejemplares de irracionales, generalmente raíces de primos o una generalización. Expresan la frase textual: *no se pueden escribir como fracción*, sin más detalles; sólo esa frase sin especificar “de enteros” o “con denominador distinto de cero”, tampoco nombran que son reales. Dan la idea de una definición literal sin mucha comprensión. Como ejemplo suelen dar *una generalización correcta.* Asociada a 3ro. Notable la presencia de estudiantes de MI y MA.

Respuesta literal de un/una estudiante de 3ro: *son números que no se pueden escribir como fracción.* Ejemplos: *√5, √7.*

Clase N2.7. *Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros.* N=14 (5%).

Palabras características: *racionales, enteros, cociente, reales* y *escribir como cociente.* Es la respuesta experta. Dan una definición correcta de irracionales, como: *los* (números reales) *que no se pueden expresar como cociente de enteros con denominador distinto de cero.* Como ejemplo *raíces de números primos positivos* o *alguna generalización correcta.* Asociada a MA.

Respuesta literal de un/una estudiante de MA: *No pueden ser escritos como un cociente de dos números enteros. Por ejemplo, el 0,5 es racional, porque equivale a ½.*

Respuesta literal de un/una estudiante de MA: *Son los reales no racionales, es decir no cociente de enteros con denominador distinto de cero*. Ejemplos: *√5; √3; cualquier raíz de un número primo.*

Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea N2

En síntesis, obtuvimos siete clases de respuestas que presentan un arco de concepciones sobre el número irracional, que en un extremo abarca las respuestas que dan cuenta de un *desconocimiento de los números irracionales* y aquellas en las que se los asocia a la resolución de una operación (*no tienen solución/resultado (exacta/o),* principalmente a raíces de números negativos. Juntas representan 46% de la población que, interpretamos, no conoce los números irracionales.

En una posición intermedia encontramos otras dos clases de respuesta: una en que *confunden irracionales con racionales* (son los decimales, números con coma; las fracciones, etc.) y otra *centrada en una notación infinita* (*infinitos decimales*). En ambas se asocia, en forma explícita o por la notación decimal infinita, los reales con los racionales (principalmente en notación decimal). Estas dos clases representan el 33% de la población.

En el otro extremo del arco encontramos tres clases de respuestas que parecieran dar cuenta de algún aspecto descriptivo del número irracional (juntas representan el 21% de la población). Desde una *descripción literal: no se pueden escribir como fracción* (pareciera sin mucha profundidad en la comprensión) pasando por la *definición notacional (infinitos decimales no-periódicos*) y por último el tipo de respuestas que da una *definición experta (los reales que no son cociente de enteros)* en estas dos últimas se considera a los números irracionales como números reales, complemento de los racionales.

En la Tabla 6.10 encontramos una síntesis de las clases de respuestas para la Tarea N2 y el porcentaje de la población que presenta cada clase.

Tabla 6.10. Tipos de respuestas de los y las estudiantes a la Tarea N2 y porcentaje de la población en cada clase, en negrita el mayor porcentaje.

Clases de respuestas	% de la población
N2.1. Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales.	**29%**
N2.2. No tienen solución/resultado (exacta/o).	17%
N2.3. Confunden irracionales con racionales. Decimales, números con coma.	17%
N2.4. Infinitos decimales después de la coma.	15%
N2.5. Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.	7%
N2.6. No se pueden escribir como fracción.	9%
N2.7. Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros.	5%

6.2.2. Perfiles de respuestas de la Tarea N2 según el nivel de estudio

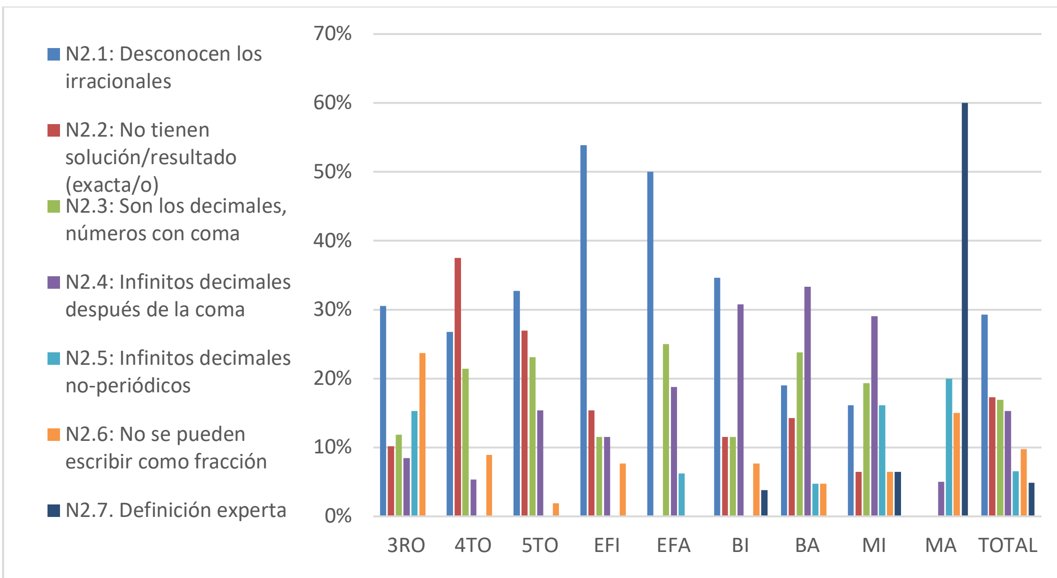
Distribución de los tipos de respuestas a la Tarea N2 en los NEM

En la Gráfico 6.8 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada tipo de respuestas a la Tarea N2 en cada nivel de estudio y en la población general.

Algunos tipos de respuestas se presentan como características de algunos NEM, como *desconocen los irracionales* para EFI o EFA; *no tienen solución (resultado) exacta (exacto)* para 4to; *infinitos decimales después de la coma* para BA y MI o *los reales que no son cociente de enteros* para MA. Sin embargo, en cada nivel de estudios en matemática se manifiestan una diversidad de clases (al menos 5 clases de respuestas para cada NEM).

Observamos que los perfiles de secundaria (3ro, 4to y 5to), en esta tarea, y a diferencia de la anterior, son muy distintos entre sí. Aun cuando en los tres perfiles hay una fuerte presencia de *no conocen a los irracionales.* En 4to y 5to es característica la clase de respuesta *no tienen solución/resultado exacto/exacta.* Los perfiles BA y MI también son similares entre si predominando la clase de respuesta *infinitos decimales después de la coma.* Es notable como casi todos los perfiles difieren bastante del perfil medio de la población, esto nos habla de una tarea que depende fuertemente del nivel de estudio en Matemática.

Gráfico 6.8. Distribución de las clases según modos de respuesta dentro de cada NEM.



Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea N2 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las modalidades de NEM de los y las estudiantes, con el fin de observar si existen perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AIII.6 en el Anexo III.

A continuación, presentamos los dos los primeros planos factoriales del este AFC realizado sobre los perfiles de distribución de las siete clases de respuestas al interior de los nueve niveles de estudio (Gráficos 6.9 y 6.10).

Gráfico 6.9. Primer plano factorial del AFC de los tipos de respuestas en los NEM en la Tarea N2

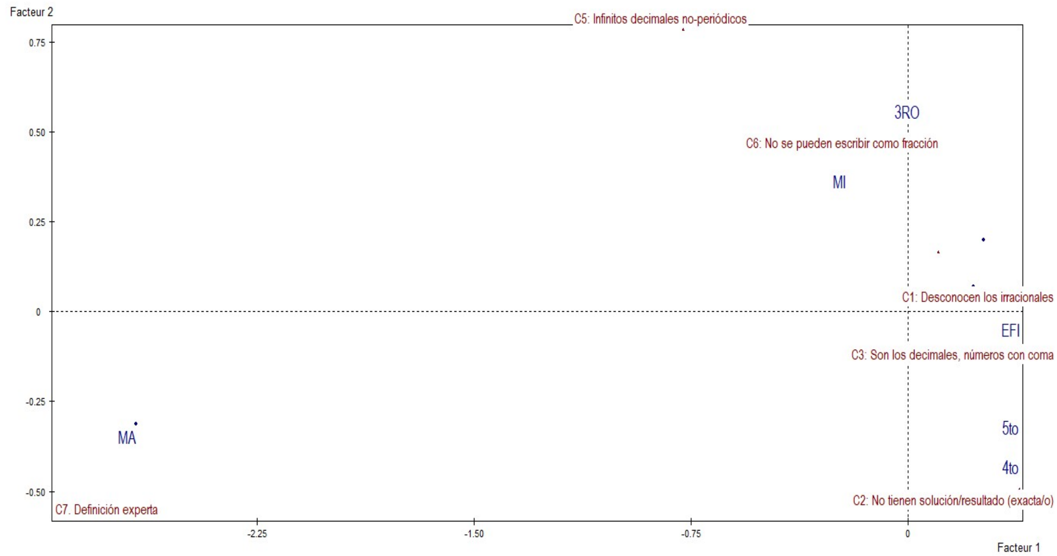
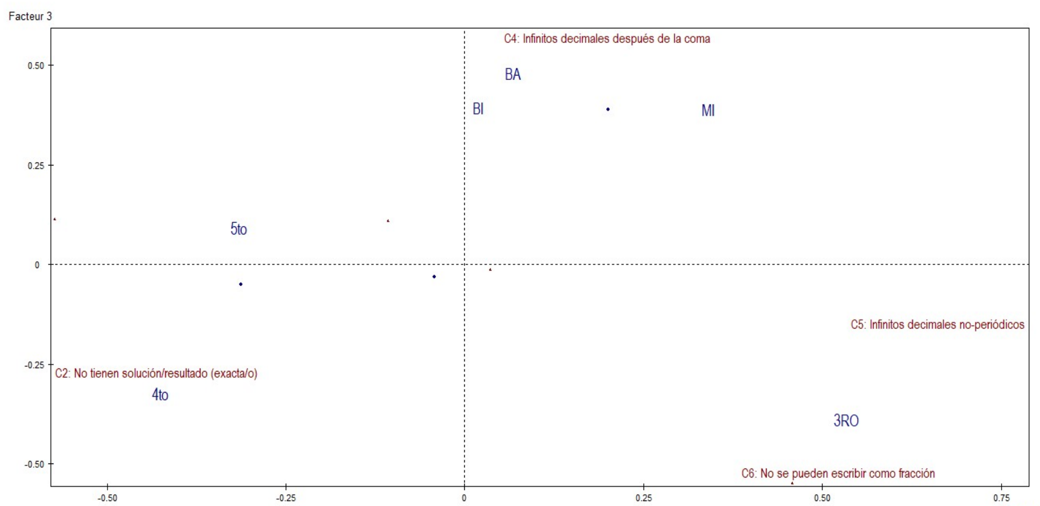


Gráfico 6.10. Segundo plano factorial del AFC de los tipos de respuestas en los NEM en la Tarea



N2.

El principal factor de variabilidad corresponde a la clase *definición experta* asociada a MA oponiéndose al resto de clases de respuestas y clases de nivel de estudio.

El segundo factor discrimina al interior del resto de clases diferenciando principalmente entre *infinitos decimales no-periódicos* por un lado e *infinitos decimales después de la coma* y *son los decimales, los números con coma.* Asociando a 3ro y MI a la primera y 4to y 5to a las segundas.

Por la gran dispersión de perfiles hemos considerado también el tercer factor, que discrimina entre clases diferenciando principalmente entre *infinitos decimales* *después de la coma* (asociada a BI, BA y MI) por un lado, *no tienen solución-resultado exacta/o* (asociada a 4to y 5to) y *no se pueden escribir cómo fracción* (asociada a 3ro) por otro.

La Tabla 6.11 sintetiza las asociaciones de los perfiles de distribución de las clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, encontradas mediante este AFC.

Tabla 6.11. Asociaciones entre clases de respuestas y modalidades de NEM de la Tarea N2.

Clases de respuesta	NEM asociados
N2.7. Definición experta. *Los reales que no son cociente de enteros.*	MA
N2.6. *No se pueden escribir como fracción.* N2.5. Definición notacional. *Infinitos decimales no-periódicos*	3ro y MI
N2.4. *Infinitos decimales después de la coma.* N2.3. Confunden irracionales con racionales. *Decimales, números con coma.*	BI, BA y MI
N2.2. *No tienen solución/resultado (exacta/o).*	4to y 5to
N2.1. Ajenidad - Inseguridad. *Desconocen los irracionales.*	EFI, EFA

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC (Tabla 6.11) y que pueden ilustrarse en el Gráfico 6.8 de la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática, encontramos que los perfiles de NEM difieren bastante entre sí y respecto al perfil medio de la población.

En los perfiles de secundaria (3ro, 4to y 5to) predominan la clase *desconocen los irracionales* y a su vez presentan como clases características: *no se pueden escribir como fracción* para 3ro y *no tienen solución-resultado exacto* para 4to y 5to.

Las modalidades de NEM: EFA y EFI poseen un perfil característico donde predomina *desconocen los irracionales*. También son similares los perfiles BA, MI y BI predominando *son los decimales, los números con coma* e *infinitos decimales después de la coma.* MI comparte la asociación con 3ro en cuanto a una descripción incompleta: *no se pueden escribir como fracción* y a la *definición notacional*. MA posee un perfil característico en el que predomina la *definición experta,* sin embargo, también una *definición notacional.*

6.2.3 Síntesis de resultados de la Tarea N2.

Con la Tarea N2 pretendíamos conocer si los y las estudiantes conocen los números irracionales, si los describen con condiciones necesarias y suficientes y si pueden reconocerlos como reales diferenciándolos de los racionales.

Para la descripción de los números irracionales ofrecida por los y las estudiantes pudimos diferenciar siete clases de respuesta, que daremos según un gradiente en la profundidad de la comprensión del número irracional.

Dos de ellas alejadas de una comprensión de los números irracionales. En una de estas directamente no se los describe o se da una descripción irrelevante de los mismos, que denominamos *desconocen a los irracionales* y en la otra se da una descripción operacional de los números irracionales (asociada a los números enteros) como aquellos que *no tienen solución exacta o resultado entero*. En ambas, generalmente, no se dan ejemplos o en algunos casos se dan ejemplos complejos (raíces de negativos). Juntas conforman el 46% de la población y se asocian a estudiantes de secundaria, Educación Física y algunos/as estudiantes ingresantes a Biología.

También encontramos dos clases de descripciones en las que los números irracionales aparecen confundidos con los racionales (o decimales, o números con coma), una en la que se los describe como *los decimales o números con coma* y la otra, en la cual está presente la idea de infinito, que los describe como aquellos números *con infinitos decimales después de la coma.* En ambas, generalmente se dan ejemplos racionales (fracciones o decimales finitos) o ejemplares irracionales (dando la idea que los irracionales son unos pocos números). Estas clases de respuestas nos llevan a pensar que estos/as estudiantes identifican a los reales con los racionales, particularmente en notación decimal. Conforman, juntas, el 32% de la población y están asociadas a estudiantes de secundaria, ingresantes a Biología o Matemática y avanzados/as de Biología.

Tres tipos de respuestas, centradas en una definición, entre las que son notables el tipo de respuestas que denominamos *definición literal: no se escriben como fracción*, que representa sólo el 9% de la población, estos/as estudiantes expresan la frase textual: *no se pueden escribir como fracción*, sin más detalles ni precisiones. Este grupo de estudiantes parece estar retomando una definición literal (incompleta) que no comprende en profundidad. De hecho, se trata principalmente de estudiantes de 3ro de secundaria, por lo que inferimos han estudiado recientemente esta definición.

Luego, diferenciamos dos descripciones cercanas a una definición matemática de los irracionales, una centrada en la definición notacional, que los describe como *con infinitos decimales no-periódicos* y por último una definición completa: *los reales, que no son cociente de enteros* (complemento de los racionales en los reales). Los y las estudiantes que brindan estas clases de respuesta, en general ejemplifican con ejemplares irracionales (raíces de primos - notables) o una generalización correcta. Son el 12% de la población, la primera asociada a ingresantes de Matemática y la segunda a avanzados/as de Matemática.

Es notable la diversidad de ideas con las que pueden operar los y las estudiantes de un mismo grupo educativo, aún frente a una misma consigna de trabajo que pudiera darse en una misma clase y con el/la mismo/a Profesor/a de Matemática. Las respuestas nos dan indicios que la noción de número real (racional o irracional) está lejos de ser una noción que se adquiere por el solo hecho de estar frente a una definición dada en clase, sino que implican un trabajo sobre la misma.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.2, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

6.3. Integración e interpretación de los resultados del Grupo Temático N

Los resultados de la Tarea N1 nos dieron indicios de qué es para estos y estas estudiantes un "número"; particularmente sobre si reconocen a los racionales, irracionales y reales como números. Mientras que con la Tarea N2 pudimos inferir si conocen los números irracionales, si los describen con condiciones necesarias y suficientes y si pueden reconocerlos como reales diferenciándolos de los racionales.

Si bien el 88% de la población nombra en la Tarea N1 al menos uno de los (números) *racionales, irracionales* o *reales*, sólo el 36% nombra (número) *irracional* y da un ejemplo *irracional*. En cuanto la Tarea N2, en tres de las siete clases de respuesta, que representan el 63% de la población, los y las estudiantes desconocen los irracionales o los identifican con los decimales o con los racionales. En otras dos de estas clases, aun cuando nombran y describen a los irracionales, esta descripción es incompleta y representa el 24% de la población. Solo un 13% de la población los describe con condiciones necesarias y suficientes.

Por lo tanto, hemos detectado que una amplia mayoría (más de un 60%) de nuestra población, estudiantes de secundaria y de universidad, mayormente sin estudios de matemática superior, no conocen los irracionales o manifestaron problemas para diferenciar los números como racionales o irracionales.

Considerando ahora ambas tareas analizadas integradamente, encontramos un gradiente en las concepciones de los reales como números que comienzan desde lo que podemos denominar una visión *centrada en los enteros,* para luego encontrar una *visión centrada en los racionales (principalmente como decimales)*. Por último, una visión centrada en una definición que puede ser una *definición incompleta* o una *definición matemática.*

Visión centrada en los enteros. Para la Tarea N1 serían las clases de respuestas *sólo los enteros son números* o *los enteros como modelo de número* mientras que para la Tarea N2 se ubicarían en las respuestas que denominamos *desconocen los irracionales*. Representan casi un 20% de la población y son mayoritariamente estudiantes de secundaria y de Educación Física.

Visión centrada en los racionales. Esta es una idea muy difundida en esta población, se ubica la concepción *identificación del número con su representación* (principalmente decimal) para la Tarea N1 y *no tienen solución exacta (o entera)* y confunden a los *irracionales con los racionales (decimales)* para la Tarea N2. Esta visión la encontramos distribuida entre estudiantes de secundaria, ingresantes a las carreras científicas y estudiantes avanzados/as de Biología. En nuestra población los (números) decimales son citado por más del 30% de los y las estudiantes, tomándolos como un tipo de números distinto de los racionales, es decir identificando al número con su notación.

Visión centrada en una descripción incompleta de los irracionales. Ubicamos aquí para la Tarea N1, la *clase número son elementos de los conjuntos numéricos escolares* y para la Tarea N2, los irracionales son los que *no se pueden escribir como fracción* o los *números con infinitos decimales.*

Nos resultó notable un grupo de estudiantes (9% de la población) principalmente de tercer año de secundaria que expresan como descripción de los números irracionales una definición incompleta, enunciando la frase *que no se pueden escribir como fracción*, sin más aclaración y sin precisiones en cuanto a qué es una fracción, ni el par de números enteros (uno de ellos distinto de cero) al que se estaría refiriendo ese cociente o fracción; tampoco los ubican como números reales. Denominamos esta concepción como *centrada en la definición literal.* Interpretamos que la cercanía con el estudio específico de los irracionales (por primera vez, según nuestro conocimiento, mediante una definición) en la que se encuentran estos/as estudiantes, los lleva a describir mediante la memorización de una definición a estos números, lo cual se ve ratificado por que coinciden con la clase *conjuntos numéricos escolares* cuando nombran tipos de números.

La descripción incompleta de los irracionales como *números infinitos o con infinitos decimales*, asociada a ingresantes a las carreras científicas y a BA (25% de la población) nos remite a una identificación del número con su notación decimal. Los reales identificados con los números en su notacional decimal confundiendo racionales con irracionales.

Visión centrada en una descripción completa de los irracionales. Por último, hallamos dos descripciones cercanas a una definición matemática, asociadas a estudiantes de Matemática y que representan el 13% de la población. Asociadas generalmente a la clase números es un elemento de un *conjunto numérico con estructura*. En una de ellas se toma a los números irracionales como aquellos que poseen *infinitos decimales no-periódicos* y por último una definición experta, que describe a los irracionales como *los reales, que no son cociente de enteros*, es decir el complemento de los racionales en los reales.

Respecto del 7% de la población que describe a los números irracionales como aquellos que poseen *infinitos decimales no-periódicos*, asociada a 3ro e ingresantes a Matemática, pareciera que, si bien se reconoce a los irracionales, se los asocia con su definición notacional, que daría menor profundización a la comprensión de las características matemáticas de los reales. Finalmente, sólo unos pocos estudiantes (6%), todos/as estudiantes avanzados/as de Matemática, brindan una descripción de los irracionales con características necesarias y suficientes, describiéndolos *como números reales que no son cocientes de enteros con denominador distinto de cero.*

A modo de recapitulación y síntesis de los resultados de las Tareas N1 y N2, destacamos que hemos identificado cinco niveles en las concepciones numéricas. Estos son: (i) *centrada en los enteros,* (ii) *centrada en conjuntos numéricos escolares y definición literal*, (iii) *centrada en conjuntos numéricos escolares y descripción como infinitos* (iv) *identificación de los irracionales con los racionales o con los decimales* y (v) dos formas de reconocimiento de los irracionales que son*:* (v-i) *definición notacional y* (v-ii) *definición experta.* Este gradiente de concepciones se asoció con los distintos niveles de estudio en Matemática ubicándolos en el siguiente orden*:* (1) estudiantes ingresantes y avanzados/as de Educación Física, tercer año, cuarto año y quinto año de secundaria (2) estudiantes de tercero de secundaria e ingresantes de Matemática, (3) estudiantes ingresantes y avanzados/as de Biología e ingresantes de Matemática (4) estudiantes de secundaria; estudiantes ingresantes y avanzados/as de Biología e ingresantes de Matemática (5) estudiantes de tercero de secundaria e ingresantes a Matemática y (6) estudiantes avanzados/as de Matemática.

En la siguiente Tabla 6.12 sintetizamos este arco de concepciones numéricas detectadas asociadas a los distintos niveles de estudio en Matemática.

Tabla 6.12: Arco de concepciones numéricas y los NEM asociados.

Concepción numérica			NEM asociados
Centrada en los enteros		Se considera sólo los enteros como números o bien como modelo de los números. Desconocen los irracionales Representan casi un 20% de la población. Han naturalizado al número como número entero.	EFI y EFA
Centrada en los racionales. Identificación de los irracionales con los decimales (o con los racionales)		Identifican el número con su representación, principalmente decimal. Igualan (explícitamente) a los irracionales con los racionales principalmente con los decimales, o a números con coma, suelen considerar que son aquello que no tienen solución/resultado exacta/o o entera/o. Es la clase más popular, casi un 30% de la población ha naturalizado el concepto de número real identificándolo con el de racional, casi siempre en notación decimal y para ellos/as los irracionales (cuando los conocen) son algunos (pocos) números especiales	4to, 5to, MI, BI y BA
Centrada en los conjuntos numéricos escolares	*Descripción incompleta de los irracionales como no-fracción*	Consideran a los números como elementos de los conjuntos escolares. Expresan como descripción de los números irracionales *que no se pueden escribir como fracción,* sin más aclaración y sin precisiones. Representan el 9% de la población.	3ro y MI
	Descripción incompleta de los irracionales como infinitos	Consideran a los números como elementos de los conjuntos escolares. Expresan que los irracionales son números infinitos o tienen infinitos decimales después de la coma. Generalmente dan como tipos de números *conjuntos numéricos escolares* (15% de la población)	BI, MI y BA
Centrada los conjuntos numéricos con estructura	Definición notacional	Describen a los números irracionales como aquellos que poseen *Infinitos decimales no-periódicos*, si bien reconocen a los irracionales los asocian con su representación. Representan el 7% de la población.	3ro y MI
	Definición experta	Concepción de número como un elemento de un conjunto numérico correctamente diferenciado. Conocen características necesarias y suficientes para irracionalidad de un número. Los describen como números reales que no se pueden expresar como cociente de enteros con denominador distinto de cero. Representan sólo el 5% de a población.	MA

Capítulo 7

Concepciones sobre el orden y la densidad de los números reales y su relación con el nivel de estudio en Matemática

Este capítulo presenta los resultados de la Fase 1 del análisis de la información, realizado a las respuestas a las tareas del cuestionario correspondientes al Grupo Temático D, conformado por dos tareas (D1 y D2), que indagan la comprensión que han construido estos/as estudiantes sobre *la densidad en correspondencia con el orden de los números reales* y *la densidad de los números reales en relación con el supremo de un intervalo,* respectivamente.

En forma similar al capítulo anterior, para cada tarea, presentamos al comienzo, el objetivo por el cual fue considerada y la consigna tal cual se la presentó en el cuestionario original. Luego se da cuenta, de forma pormenorizada, de los resultados de la serie de análisis de grano fino realizada y se brinda un apartado con la síntesis de resultados de cada tarea. Finalmente se integran los resultados del análisis de este grupo temático. De modo que pueden realizarse dos formas de lectura, una completa, que informa detalladamente la secuencia de decisiones y resultados, otra que permite alcanzar más directamente los hallazgos generales pasando directamente a la lectura de las secciones de síntesis e integración 7.1.4, 7.2.3 y 7.3.

En cuanto a la demanda de estas dos tareas, la Tarea D1 presenta varios ítems de opciones de respuesta cerradas y la Tarea D2 combina una pregunta de respuesta simple (sí, no o no sé) con un pedido de justificación de ésta.

La Tarea D1 consta de dos preguntas con tres ítems de elección de respuesta cerrada cada uno, de modo que contamos para el análisis y por cada estudiante con seis respuestas de opción, tres para cada pregunta. Observamos asociaciones entre las respuestas a los seis ítems de la tarea en un mismo o misma estudiante e identificamos grupos de estudiantes que respondan en forma similar a los seis ítems. Esto nos permitió alcanzar categorías de respuestas para esta tarea que tuvieran en cuenta integralmente las respuestas a los seis ítems.

Para la Tarea D2 realizamos una descripción de las frecuencias de elección de las opciones frente a la pregunta realizada y una categorización cualitativa de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada una de las opciones de respuesta. Cada una de estas justificaciones se asignó a una única categoría. En un segundo paso se combinó para cada estudiante su respuesta de opción y la categoría de justificación a fin de obtener una tipología de respuestas.

En los apartados 7.1.2 y 7.2.1 describiremos las tipologías de respuestas que hemos detectado dando ejemplos literales de cada tipo de respuestas e informando el porcentaje de la población que representa. Con el fin de relacionar estas clases de respuestas con el nivel de estudio en Matemática (NEM) de los y las estudiantes, presentaremos la distribución de estas en los distintos NEM para cada tarea y buscaremos asociaciones entre los perfiles de respuesta de cada NEM, de modo de analizar la incidencia del estudio de Matemática en estas ideas indagadas. Los resultados correspondientes se informan en los apartados 7.1.3 y 7.2.2.

En los apartados 7.1.4 y 7.2.3 sintetizaremos los modos de respuesta obtenidas en cada tarea, los ordenaremos en un gradiente de profundidad en la comprensión de la densidad y daremos cuenta de las relaciones entre estos y los NEM. En 7.3 se integran los resultados obtenidos en el análisis en ambas tareas del grupo temático.

Como dijimos en el Capítulo 5 hemos descripto los métodos de análisis utilizados en esta fase y en el Anexo II damos una justificación de la estadística multivariada.

7.1. Tarea D1: El orden y la densidad de los números reales en el contexto de buscar números entre dos números dados

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos y estas estudiantes, la densidad en relación con el orden de los números reales con sus especiales características e inferir posibles concepciones sobre el infinito que operasen en correspondencia con la cantidad de números y la densidad.

El Cuadro 7.1 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

Cuando decimos “un número entre 0 y 2”, nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2.

¿Podrías nombrar un número entre…..

0 y 2?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
3,14 y π?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé

¿Cuántos números hay entre:

0 y 2?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
3,14 y π?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé

Cuadro 7.1. La consigna utilizada para la Tarea D1 en el cuestionario.

Esta tarea aporta como información, por cada estudiante seis respuestas de opción, tres para cada pregunta. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado 4.1.3 del Capítulo 4.

7.1.1. Categorización de las respuestas a la Tarea D

Como dijimos, la tarea consta de dos preguntas con tres ítems cada una. La primera pregunta consistió en indagar *si existe un número entre dos dados* y la segunda en *cuántos números hay entre dos dados.* Para cada uno de los tres ítems de la primera pregunta, cada estudiante, puede elegir entre tres opciones (*sí*, *no hay o no sé*). La primera de estas opciones (*sí*) está acompañada de una pregunta de respuesta corta *¿cuál?*; que fueron categorizadas en forma conjuntas. Las respuestas a la pregunta *¿cuál?* consistían en la mayoría de los casos en un número, escrito como fracción o como un decimal. Se separaron los casos en que el número dado era correcto de los que no lo era. Teniendo en cuenta que la no respuesta fue escasa y considerando que la modalidad *no sé* no aporta más información que la no respuesta se analizó en forma conjunta la no respuesta y la modalidad *no sé*.

Los tres ítems de la segunda pregunta aportaron, para cada estudiante, una respuesta de elección cerrada, cada uno entre las opciones *ninguno, unos pocos, muchísimos, infinitos* o *no sé.* Aquí también fue necesario incorporar la opción *no contesta*, que más tarde se unió a las respuestas *no sé.*

En definitiva, contamos para el análisis y por cada estudiante con seis ítems de opción cerrada.

Distribución de frecuencias de las modalidades de respuesta de elección

Sólo cuatro estudiantes no contestaron al menos cuatro ítems de la tarea, es decir que 303 estudiantes (99%) contestaron al menos dos tercios de la tarea. Por lo que consideramos que se trata de una tarea que resultó fácilmente abordable para estos/as estudiantes.

Frecuencias de las opciones de respuesta a la primera pregunta de la Tarea D1

Refiere a la pregunta ¿Podrías nombrar un número entre dos dados?

Para la primera pareja de números (0 y 2) las cinco modalidades de respuesta fueron: (i) *no sé o no contesta*; (ii) *sí, no da ejemplo*; (iii) sí, *da como ejemplo* 1; (iv) *sí, nombran unos pocos números (hasta tres)* y (v) *sí, nombran varios ejemplos correctos y ponen puntos suspensivos, dicen infinito* o *etc.*

Tanto para la segunda pareja de números como para la tercera (1/5 y 1/4) y (3,14 y π), las modalidades de respuesta fueron: (i) *no sé o no contesta*; (ii) *no hay* (iii) *sí, no sé y no da ejemplo*; (iv) sí, *ejemplo no correcto* y (iv) *sí, ejemplo correcto.*

En la Tabla 7.1 presentamos las opciones de respuesta de elección para la primera pregunta de la Tarea D1 y el correspondiente porcentaje de la población que la eligió. También el porcentaje de la población que respondió (correctamente) que *hay un número entre los dos dados* para cada pareja de números.

Tabla 7.1. Opciones de respuesta para los tres ítems de la pregunta ¿hay algún número entre dos dados? Porcentaje de la población que las eligió y que respondió afirmativamente.

OPCIONES	**%**	**Responden *SÍ***
A1: ¿Hay un número entre 0 y 2?		
A1. No sé - no contesta	1%	
A1. Sí. No da ejemplo	3%	
A1. Sí. 1	5%	
A1. Sí. Nombran unos pocos	16%	
A1. Sí. Nombran varios con puntos suspensivos, dicen *infinitos* o *etc*	75%	99%
A2: ¿Hay un número entre 1/5 y 1/4?		
A2. No sé - no contesta	33%	
A2. No hay	14%	
A2. SÍ. No sé - No dan ejemplo	7%	
A2. Sí. Ejemplo no correcto (decimal o fracción)	15%	
A2. Sí. Ejemplo correcto (decimal o fracción o dicen *infinitos*)	31%	53%
A3: ¿Hay un número entre 3,14 y π?		
A3. No sé - no contesta	23%	
A3. No hay	41%	
A3. SÍ. No sé - No dan ejemplo	4%	
A3. Sí. Ejemplo no correcto (decimal o fracción)	4%	
A3. Sí. Ejemplo correcto (decimal o fracción o dicen *infinitos*)	28%	36%

Mientras que frente a la pregunta ¿hay un numero entre dos enteros no consecutivos? las respuestas son mayoritariamente correctas, entre las fracciones disminuyen a casi la mitad, para ser solo un poco más que un tercio cuando se trata de 3,14 y π. También es notable cómo si bien ningún o ninguna estudiante responde *que no hay un número entre 0 y 2*, este porcentaje aumenta al expresar que *no lo hay entre las fracciones* (14%), lo que nos hace pensar en una visión discreta de los racionales. La respuesta negativa crece más aun entre 3,14 y π, llegando al 41%, aunque aquí además de la discretitud puede estar operando una identificación de π con 3,14.

Frecuencias de las opciones de respuesta a la segunda pregunta de la Tarea D1

Refiere a la pregunta ¿Cuántos números hay entre dos dados?

En la Tabla 7.2 presentamos las opciones de respuesta de elección para la segunda pregunta de la Tarea D1 y el correspondiente porcentaje de la población que la elige, en particular en negrita el porcentaje de la población que respondió (correctamente) que *hay infinitos*.

Tabla 7.2. Opciones de respuesta para los tres ítems de la pregunta ¿Cuántos números hay entre dos dados? Porcentaje de la población que la eligió. En negrita la correcta “infinitos”.

OPCIONES	%
B1. ¿Cuántos números hay entre 0 y 2?	
B1. No sé - no contesta	4%
B1. Ninguno	0%
B1. Unos pocos	25%
B1. Muchísimos	24%
B1. Infinitos	**47%**
B2. ¿Cuántos números hay entre 1/5 y 1/4?	
B2. No sé - no contesta	23%
B2. Ninguno	9%
B2. Unos pocos	24%
B2. Muchísimos	11%
B2. Infinitos	**32%**
B2. ¿Cuántos números hay entre 3,14 y π?	
B3. No sé - no contesta	15%
B3. Ninguno	36%
B3. Unos pocos	7%
B3. Muchísimos	9%
B3. Infinitos	**33%**

El porcentaje de respuestas correctas (*hay infinitos*) es bajo para las tres parejas (aunque mayor para la pareja de enteros). Es notable la no respuesta o la respuesta *unos pocos* para las fracciones, sugiriendo una visión de discretitud que podría estar operando en cuanto a las fracciones (falsamente consecutivas). Sólo el 32% manifestó una visión de densidad para éstas. Entre 3,14 y π el alto porcentaje (36%) que expresa *ninguno* nos hace pensar en la identificación de π con 3,14. Solo el 33% responde en acuerdo con una visión de densidad entre dos reales.

7.1.2. Clases de respuestas completas a la Tarea D1

Asociaciones entre las respuestas a los seis ítems de la tarea

Con el objetivo de observar asociaciones entre las respuestas a los seis ítems de la tarea en un mismo o misma estudiante y encontrar grupos de estudiantes que respondan en forma similar a los seis ítems, de manera de poder detectar formas de pensar la densidad y el orden de los reales, realizamos un AFCM de los y las estudiantes descriptos por las opciones de respuestas que eligen a lo largo de la Tarea D1 y su NEM.

Las variables activas en el AFCM fueron seis, dos para cada una de las tres parejas de números: A1: ¿Hay un número entre 0 y 2?; A2: ¿Hay un número entre 1/5 y 1/4?; A3: ¿Hay un número entre 3,14 y Π?; B1: ¿Cuántos números hay entre 0 y 2?; B2: ¿Cuántos números hay entre 1/5 y 1/4? y B3: ¿Cuántos números hay entre 3,14 y π? (Tabla 7.3). Como variable ilustrativa se proyectó el NEM de los y las estudiantes con sus nueve modalidades (3ro, 4to, 5to, EFI, EFA, BI, BA, MI y MA).

Tabla 7.3. Variables y modalidades activas del AFCM de estudiantes descriptos por las opciones de respuesta que eligen en cada ítem en la Tarea D1.

	VARIABLES		
	A1: ¿Hay números entre 0 y 2?	**A2: ¿Hay números entre 1/5 y 1/4?**	**A3: ¿Hay números entre 3,14 y π?**
MODALIDADES	A1. No sé - no contesta A1. Sí. No da ejemplo A1. Sí. 1 A1. Sí. Nombran unos pocos A1. Sí. Nombran varios con puntos suspensivos, dicen infinito o etc	A2. No sé - no contesta A2. No Hay A2. SÍ. No sé - No dan ejemplo A2. Sí. Ejemplo no correcto A2. Sí. Ejemplo correcto	A3. No sé - no contesta A3. No Hay A3. SÍ. No sé - No dan ejemplo A3. Sí. Ejemplo No correcto A3. Sí. Ejemplo correcto
	B1: ¿Cuántos entre 0 y 2?	**B2: ¿Cuántos entre 1/5 y 1/4?**	**B3: ¿Cuántos entre 3,14 y π?**
MODALIDADES	B1. No sé - no contesta B1. Unos pocos B1. Muchísimos B1. Infinitos	B2. No sé - no contesta B2. Ninguno B2. Unos pocos B2. Muchísimos B2. Infinitos	B3. No sé - no contesta B3. Ninguno B3. Unos pocos B3. Muchísimos B3. Infinitos

El principal factor de variabilidad corresponde a las opciones que dicen que para cada par de números: *hay un número entre ellos, dan un ejemplo correcto* y *manifiestan que hay infinitos* (asociadas fuertemente a MA y en menor medida a BA), oponiéndose al resto de las modalidades de respuestas y NEM. En este factor los NEM se ordenan: (-) MA, BA, BI, MI --- 3ro, 4to, 5to, EFA (+). La modalidad de NEM de EFI no se encuentra bien representado en este plano.

El segundo factor discrimina entre las modalidades en que se expresa que: *no hay ningún* número entre las fracciones, ni entre 3,14 y Π (asociadas a EFA), de aquellas que plantean que *hay algunos pocos o muchísimos* o que *no saben* si hay algún número entre estos pares de números.

El tercer factor separa las modalidades que plantean que: *hay algunos pocos* o *muchísimos* (números) entre las fracciones y entre 3,14 y Π y dan un ejemplo que no es correcto, de aquellas en que plantean que *no saben* o que *no hay ninguno número* entre estas parejas de números

A continuación, presentamos los dos primeros planos factoriales (Gráfico 7.1 y 7.2) de este AFCM. Se consideraron los tres primeros factores de modo de conservar más del 60% de la inercia, como es habitual en estos casos.

Gráfico 7.1. Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus respuestas a los seis ítems de la Tarea D1.

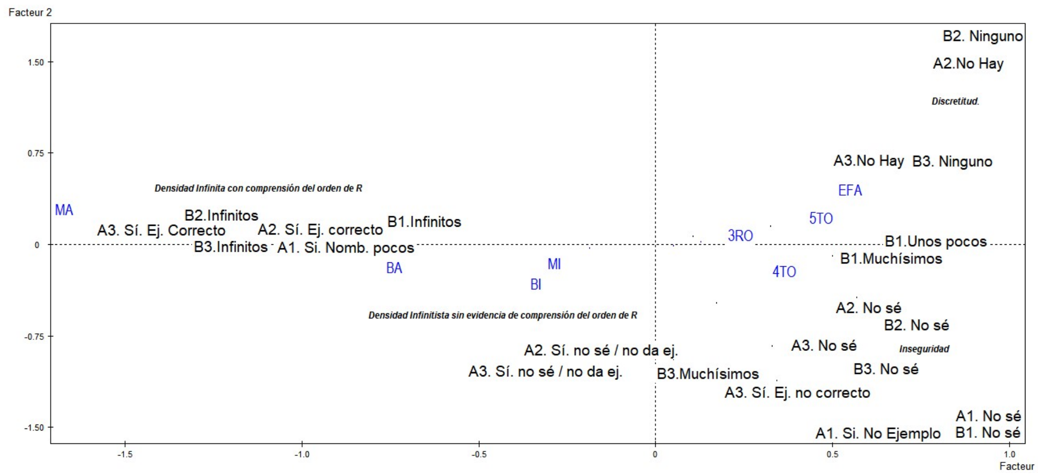
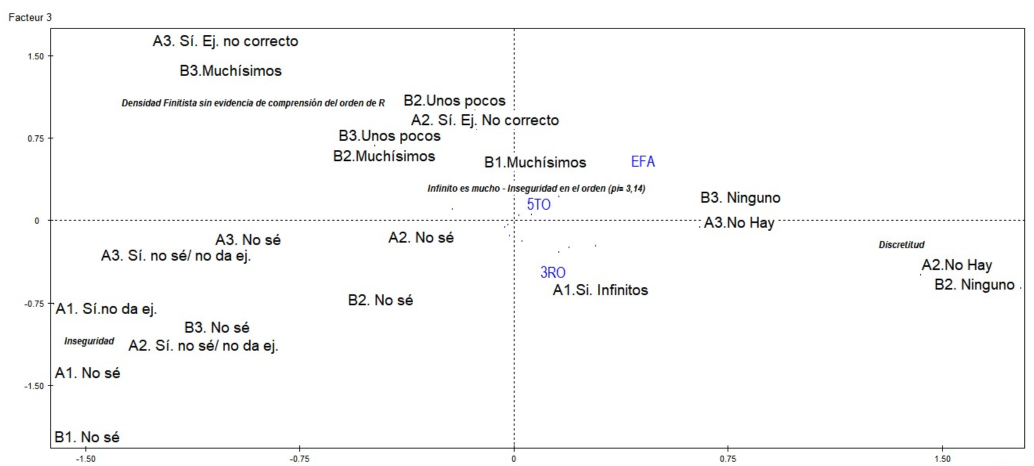


Gráfico 7.2. Segundo plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus respuestas a los seis ítems de la Tarea D1.



En el primer plano factorial pueden visualizarse cuatro grupos de asociaciones entre respuestas a los seis ítems de la Tarea D1, que hemos denominado: *densidad infinitista con comprensión del orden* (asociado a MA); *densidad infinitista sin evidencia de comprensión del orden* (asociado a BA, BI y MI); *discretitud* (asociada a EFA) e *inseguridad* (Gráfico 7.1).

En el segundo plano factorial visualizamos otros dos grupos de asociaciones: *infinito es mucho, inseguridad en la densidad de Q y π = 3,14* (asociado a 5to) y *densidad finitista sin evidencia de comprensión del orden* (Gráfico 7.2).

Podemos entonces, considerando los tres factores, determinar seis grupos de asociaciones de modalidades de respuesta, corroborados por la clasificación jerárquica realizada que describimos a continuación.

Clasificación de estudiantes según las respuestas que eligen en la Tarea D1

A continuación, presentamos las clases obtenidas en la clasificación[35] jerárquico ascendente posterior al AFCM antes descripto. Informaremos la cantidad de estudiantes de cada clase y el porcentaje de la población que representa, las opciones de respuesta elegidas para los seis ítems asociadas y modalidades de NEM relacionadas particularmente. Haremos también una caracterización de las clases según las ideas relacionadas con los modos de respuesta asociados a cada una de ellas y, por último, ilustraremos cada clase con las respuestas literales de alguna o alguna estudiante característico de la clase. En los Gráficos 7.1 y 7.2 pueden observarse las asociaciones de respuesta de cada clase en los planos factoriales.

Clase D1.1. *Inseguridad frente a la densidad y el orden.* N=31 (10%).
Modalidades asociadas: A1: Sí. 1; B1: Unos Pocos o No sé; A2: Sí. No sé-No da ejemplo; B2: No sé; A3: No sé y B3: No sé. Sólo presentan seguridad cuando se trata de enteros. Consideran que entre 0 y 2 hay algún número o unos pocos, pero no dan ejemplos y para los demás ítems expresan no saber. Son estudiantes de secundaria o de Educación Física.

Respuestas de un/a estudiante de 3ro: Entre 0 y 2: *Sí. 1 - Unos pocos*
Entre 1/5 y 1/4: *No sé - No sé*
Entre 3,14 y π: *No contesta - No sé*

Clase D1.2. *Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal***.** N=101 (33%).
Modalidades asociadas: A1: Sí. 1; B1: Muchísimos; A2: No hay / No sé; B2: No sé / unos pocos; A3: No hay y B3: Ninguno. Presentan seguridad cuando se trata de enteros; manifestando que hay muchos números entre 0 y 2. Pero consideran que entre las fracciones con denominador consecutivo no hay ningún o unos pocos números. Identifican a π con su aproximación racional 3,14. Esta clase está asociada a 5to (46% de los y las estudiantes de 5to están en esta clase).

Respuestas de un/a estudiante de 5to: Entre 0 y 2: *Si. 1 – Muchos*.
Entre 1/5 y 1/4: *Ho hay – no sé.*
Entre 3,14 y π: *No hay (π es el mismo valor) – no contesta*.

[35] Para detalles de este método y de la clasificación ver Capitulo 5 y Anexo II.

Clase D1.3. *Densidad finitista, sin evidencia de comprensión del orden***.** N= 81 (26%).

Modalidades asociadas: A1. Sí. 1; B1: Unos pocos; A2: Sí. Un decimal no correcto; B2: Unos pocos / Muchísimos; A3: Sí. Un decimal no correcto / No sé y B3: Unos pocos / Muchísimos. Consideran que entre dos números hay pocos (a lo sumo muchos o muchísimos) números, pero no infinitos. No evidencian comprender el orden ya que dan un número errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π. No tiene NEM asociado particularmente.

Respuestas de un/a estudiante de 4to: Entre 0 y 2: *Si. 1, 1,15, 1,7, etc.- Muchísimos*
Entre 1/5 y 1/4: *Si. 0,05 – Unos pocos*
Entre 3,14 y π: *Si. 0,005 – Unos pocos*

Clase D1.4. *Densidad Infinitista sin evidencia de comprensión del orden.* N=44 (14%).

Modalidades asociadas: A1: Si. 1; B1: Infinitos; A2: Sí. No sé- no da ejemplo; B2: Infinitos; A3: Sí. No sé- no dan ejemplo/ No hay y B3: Infinito / Ninguno. Para las tres parejas de números consideran que hay un número entre ellos, pero no dan ejemplos o dan ejemplos no correctos. Consideran siempre que entre dos números hay infinitos. Algunos consideran π = 3,14. Consideran una densidad infinita y dan un numero errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π. Son mayormente estudiantes de universidad.

Respuestas de un/a estudiante de BI: Entre 0 y 2: *Si. 1 – Infinitos*.
Entre 1/5 y 1/4: *Sí. No sé - Infinitos*
Entre 3,14 y π: *Sí. No sé - Infinitos*

Clase D1.5. *Densidad Infinita con comprensión del orden.* N= 50 (16%).

Modalidades asociadas: A1: Si. Nombran uno pocos números / Si. 1; B1: Infinitos; A2: Sí. Ejemplo correcto; B2: Infinitos; A3: Si. Un decimal correcto y B3: Infinitos. Para las tres parejas de números consideran que hay un número entre ellos dando ejemplos correctos en forma de fracción o decimal (siempre racionales). Consideran que entre dos números distintos siempre hay infinitos números. Asociada fuertemente a MA y en menor medida a BA. (El 90% de los MA y el 29% de los BA están en esta clase)

Respuestas de un/a estudiante de MA: Entre 0 y 2: *Si. 0,5 – Infinitos.*
Entre 1/5 y 1/4: *Si. 0,21– Infinitos.*
Entre 3,14 y π: *Si, 3,1413 – Infinitos*

Caracterización de las clases de respuesta a la Tarea D1

En síntesis, las cinco clases de respuestas obtenidas presentan un arco de concepciones sobre la densidad y el orden que en un extremo ubica la *inseguridad* frente a estas propiedades, para pasar a una visión *discreta* de los números, similar a los enteros, para luego manifestar una concepción de *densidad* (con tres modalidades). En las primeras de estas cuatro clases no hay evidencia que los y las estudiantes comprendan el orden de los números.

Entre las respuestas de los y las estudiantes encontramos tres tipos de formas de pensar la *densidad*:

(i) *densidad finitista (Infinito es mucho) sin evidencia de comprensión del orden,* este tipo de respuestas que parecieran paradójicas, ya que a pesar de comprender que entre dos números (siempre) hay un número, se piensa que entre dos números puede haber muchos otros, pero no se llega a pensar en infinitos;

(ii) *densidad infinitista sin evidencia de comprensión del orden*, en este tipo de respuestas, si bien se considera que entre dos números reales hay *infinitos* números, fallan en el orden de dichos números dando respuestas no correctas. Por último, encontramos

(iii) *densidad Infinita con comprensión del orden,* que son respuestas que evidencian que los y las estudiantes comprenden la densidad como infinita y además pueden operar en forma correcta con el orden.

En la Tabla 7.4 encontramos una síntesis de las clases de respuestas sobre la densidad en relación con el orden de los números reales y el porcentaje de la población que representa la clase de respuesta.

Tabla 7.4. Clases de respuestas a la Tarea D1 y porcentaje de la población en cada clase

Caracterización de las clases de respuesta	Porc.
D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	10%
D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.	33%
D1.3. Densidad finitista (*Infinito es mucho)* sin evidencia de comprensión del orden de R.	26%
D1.4. Densidad infinitista sin evidencia de comprensión del orden de R.	14%
D1.5. Comprensión de la densidad y el orden.	16%

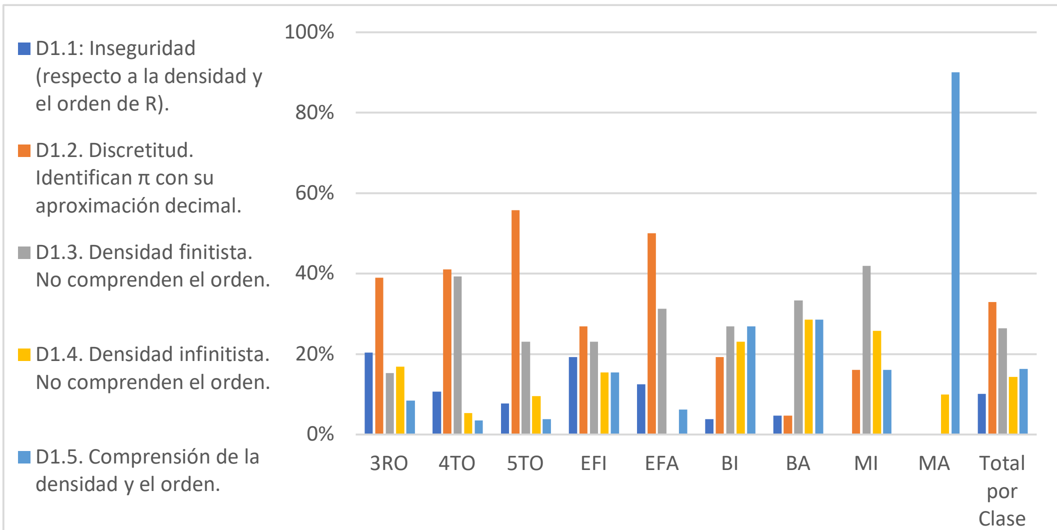
Encontramos un bajo porcentaje de inseguridad, es decir que las cuestiones relativas tanto a la densidad (o discretitud) como al orden de R no resultan completamente ajenas a esta población. Sin embargo, tampoco manifiestan una comprensión de estas, siendo la clase más popular la *discretitud*, al estilo de los enteros, seguida por la idea que hemos dado en llamar *densidad finitista*, ya que consideran que entre dos números dados hay otros números, pero hay a lo sumo muchos o identifican infinito con mucho. Por otra parte, encontramos la visión de *densidad infinita*, sin embargo, muchos estudiantes dan ejemplos incorrectos en cuanto al orden. Solo las respuestas del 16% evidencian una *clara visión sobre la densidad y el orden de R.*

7.1.3. Perfiles de respuesta a la Tarea D1, según el nivel de estudio

Distribución de las clases de respuestas en los NEM

En el Gráfico 7.3 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada clase de respuestas a la tarea D1 en cada nivel de estudio y en la población en general.

Gráfico 7.3. Distribución de las clases de respuestas a la Tarea D1 dentro de cada NEM.



Vemos que la clase *comprensión de la densidad y el orden* se presenta como característica para MA. Salvo en MA, se manifiestan una diversidad de clases de respuesta en cada NEM. La clase *discretitud* se encuentra principalmente en los perfiles EFI, EFA, 3ro, 4to y 5to. Observamos que los perfiles de secundaria (3ro, 4to y 5to) se caracterizan por las clases *discretitud* y en 4to también se advierte *densidad finitista.* Los perfiles de BA, BI y MI son similares entre sí predominando la clase de respuesta: *densidad finitista e infinitista, sin comprensión del orden.* El perfil de EFI se presenta similar al perfil medio de la población, en tanto como vimos todos los demás presentan rasgos característicos.

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea D1 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC[36] de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas (Tabla 7.4) respecto de las modalidades de NEM a fin de observar si

[36] Para detalles de este método y de la clasificación ver Capitulo 5 y Anexo II.

existen perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.7, en el Anexo II.

El principal factor de variabilidad opone las clases en que se consideran que entre dos números *hay infinitos números*, asociadas a MA, BA, BI y MI del resto de las clases y NEM.

El segundo factor discrimina por un lado las clases *inseguridad* y *discretitud* (*se considera π = 3,14*) de la *densidad finitista*, por otro lado, y al interior de aquellas en que se consideran una *densidad infinitista*, distinguiendo la que evidencia una comprensión *del orden* de la que *no lo evidencia*.

El tercer factor separa estos pares de modalidades, es decir discrimina entre *inseguridad* y *discretitud* por un lado *y* por otro distingue la *densidad infinitista* de la *densidad finitista* en las cuales *no hay evidencia de que se comprende el orden*.

A continuación, presentamos los dos primeros planos factoriales del AFC realizado sobre las modalidades de respuesta a la Tarea D1, respecto a las modalidades de NEM (Gráfico 7.4 y Gráfico 7.5).

Gráfico 7.4. Primer plano factorial del AFC de los perfiles de las modalidades de respuesta en los NEM para la Tarea D1.

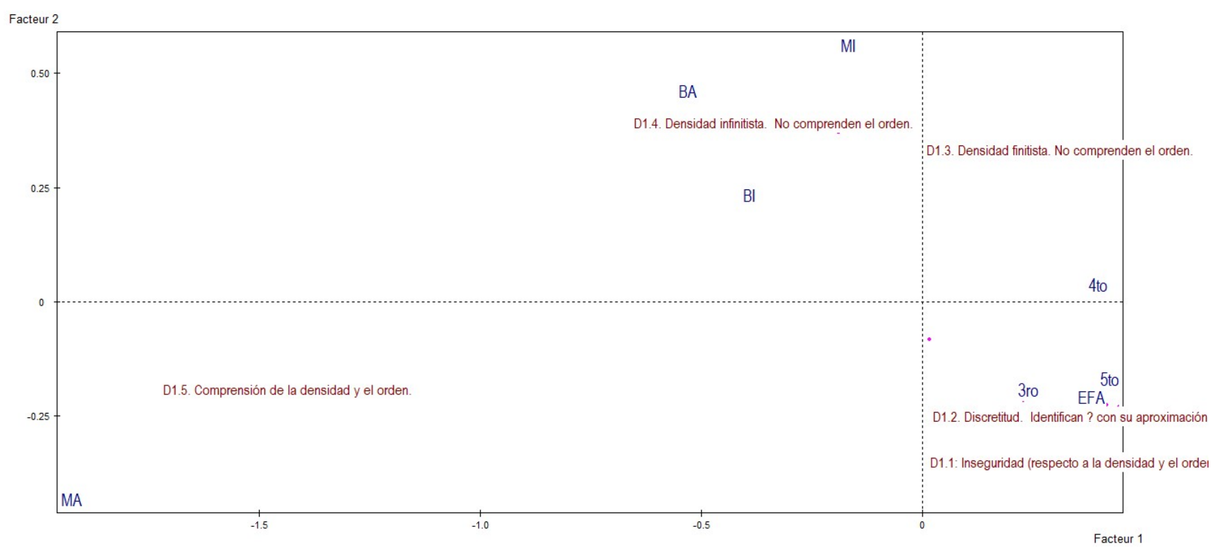
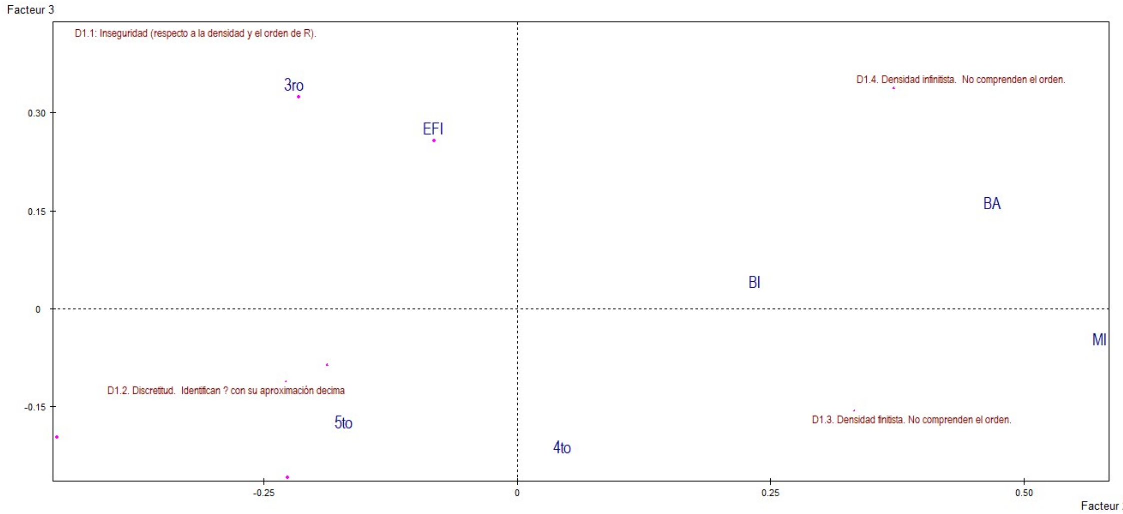


Gráfico 7.5: Segundo plano factorial del AFC de los perfiles de las modalidades de respuesta en los NEM para la Tarea D1.



La Tabla 7.5 sintetiza las asociaciones de los perfiles de clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, encontrados mediante este AFC.

Tabla 7.5. Grupos de asociaciones entre clases de respuestas y modalidades de NEM en el AFC

Clases de concepción	NEM asociados
Comprensión de la densidad y el orden de R	MA
Densidad infinitista sin evidencia de comprensión el orden.	MI, BI y BA
Densidad finitista (*Infinito es mucho)* sin evidencia de comprensión el orden.	MI, BI y 4to
Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.	3ro, 4to, 5to y EFA
Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	EFI, EFA y 3ro

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuesta en los distintos niveles de estudio de matemática (Gráfico 7.3), encontramos que los grupos de NEM 3ro; 4to, 5to y EFA poseen perfiles similares entre sí en los que predomina la *discretitud, identificando π con su aproximación decimal*. Se presentan como características las clases *inseguridad* para 3ro y la *densidad finitista* para 4to*.*

EFI posee un perfil de distribución muy similar al perfil medio de la población, predominando la *inseguridad*. Son similares entre sí los perfiles BA, MI y BI, predominando la *densidad infinitista sin evidencia de la comprensión del orden.* El perfil de MA es muy característico, predominando la *comprensión de la densidad y el orden.*

En cuanto al orden de los reales, es notable cómo en secundaria y Educación Física predomina la *no comprensión del orden*. Dicha comprensión se evidencia en los y las estudiantes universitarios/as de carreras científicas universidad, en menor medida en BI, BA y MI y principalmente en MA.

7.1.4. Síntesis de resultados de la Tarea D1

Con la Tarea D1 pretendíamos conocer cómo conciben estos y estas estudiantes la densidad de los reales en relación con el orden e inferir concepciones sobre infinito, en cuanto a la cantidad de números entre dos números dados.

La tarea fue resulta por el 99% de los y las participantes, es decir que resultó amigable para esta población. En efecto, la tarea de comparar números es habitual en la escuela y si bien, no parece ser una tarea que les resulte ajena, evidencian tener dificultades principalmente en la comprensión del orden de los números reales, específicamente en brindar un número (correcto) entre dos dados.

Para esta tarea identificamos cinco clases de respuestas, presentando un gradiente de profundidad en la comprensión de la densidad en relación con el orden en los reales, desde la *inseguridad* frente al problema, pasando por una visión de los números como *discretos*, luego una visión intermedia que denominamos *densidad finitista* y por último una visión de la *densidad* de los números, con dos modalidades según den muestras de comprender o no el orden.

La clase más restringida en cuanto a la comprensión del orden y la densidad la hemos denominamos *inseguridad,* debido a que los y las estudiantes que agrupa responden con seguridad sólo cuando se trata de un número entre enteros (0 y 2), la gran mayoría dice que *entre el 0 y el 2 está el 1* y para las otras dos parejas de números expresan *no saber* si hay un número entre ellos o *no saber* cuál *ni* cuantos.

Luego encontramos una clase de respuesta que manifiestan una visión del orden de los números como *discreto*, similar al de los enteros. Los y las estudiantes aquí agrupados presentan seguridad frente al orden de los enteros, manifestando que hay *pocos* o *muchos números entre 0 y 2* y suelen considerar que entre las fracciones con denominador consecutivo *no hay* ningún o *unos pocos números* e *identifican a π con su aproximación decimal 3,14*.

Estas dos clases de respuestas (*inseguridad* y *discretitud*), que concentran el 43% de la población, aparecen como centradas en los números enteros y son dadas principalmente por estudiantes de Educación Física y estudiantes de secundaria (3ro, 4to y 5to). Son estudiantes que, centrados en el orden discreto de los enteros, aun cuando parecieran reconocer otros números, los tratan como discretos, lo cual les dificulta interactuar con la propiedad que distingue a los números racionales de los números enteros como es la *densidad*.

En cuanto a la comprensión de la propiedad de *densidad*, encontramos un tipo de respuestas que aparece como de transición, que hemos denominamos *densidad finitista* (se corresponde con el 26% de la población). Decimos que la visión de *densidad finitista* es de transición debido a que estos/as estudiantes a pesar de asegurar que entre dos números (siempre) hay otro, expresan (paradójicamente) que hay *muchos*, evidenciando su pensamiento finitista. Principalmente son estudiantes de secundaria y algunos/as de Biología. Esta concepción podría estar mediada por la concepción de *infinito es mucho* o muy grande.

Los y las estudiantes que dan los dos tipos de respuesta restantes parecieran comprender la propiedad de *densidad*, al expresar que (siempre) entre dos números reales hay *infinitos* números, lo que hemos considerado como *densidad infinitista.* Dentro de esta visión, nos encontramos con que un grupo (12%) considera que entre dos números hay infinitos, dando un numero errado entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π. Por último, un grupo conformado por el 11% de la población, que da respuestas que evidencian comprender la *densidad como infinita* y además poseer la habilidad para *operar en forma correcta con el orden*. Esta última clase de respuesta se asocia casi exclusivamente con estudiantes avanzados/as de Matemática.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.3, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

7.2. Tarea D2. El orden y la densidad en relación con el supremo de un intervalo de números reales

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos y estas estudiantes el orden denso de los números reales con sus especiales características en relación con la noción de supremo de un intervalo de números reales.

El Cuadro 7.2 reproduce la consigna utilizada para esta en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

En matemática solemos considerar el intervalo (1,2) como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo.
Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus alumnos sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2.

¿Qué pensás al respecto? ¿Se puede identificar el número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenezca al intervalo? ______________________________

____

¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Cuadro 7.2: La consigna utilizada para la Tarea D2 en el cuestionario.

Esta tarea aporta como información, para cada estudiante, una respuesta de elección con tres opciones (*sí es posible, no es posible* o *no sé (si es posible)* encontrar tal número) y una justificación para la afirmación elegida con formato de pregunta abierta. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado 4.1.3 del Capítulo 4

7.2.1. Categorización de las respuestas a la Tarea D2

Como adelantamos, la tarea consiste en dos preguntas. La primera interroga sobre si es posible encontrar el número "más cercano" al supremo de un intervalo abierto y que pertenezca al intervalo. Mientras que en la segunda invita a argumentar al respecto, es decir de algún modo a justificar esta respuesta. Por lo que, con esta tarea se contó, para cada estudiante, con una respuesta de elección de opción con tres opciones y una justificación para la opción elegida.

Distribución de frecuencias de las opciones de respuesta a la primera pregunta

Encontramos que 51 estudiantes no contestaron esta tarea y otros 32 expresaron *no sé* y no justificaron esta expresión (o expresaron no poder explicarla). Pensamos que la opción *no sé* no brinda más información que la falta de respuesta, por lo que las consideramos conjuntamente. Tenemos, entonces ochenta y tres estudiantes (27%) que no contestan o eligen *no sé* y no justifican.

Si bien, para esta primera pregunta se esperaban las respuestas *sí es posible, no es posible* o *no sé* y algún tipo de justificación de ésta, en ningún caso hubo justificaciones por lo cual a los efectos del análisis se transformó en una pregunta con tres opciones (*sí, no* y *no sabe/no contesta*)

La siguiente tabla (Tabla 7.6) muestra la frecuencia de elección de cada opción de respuesta a esta tarea y el porcentaje de la población que representa.

Tabla 7.6. Frecuencia y porcentajes de elección de opciones del primer ítem de la Tarea D2. La elección correcta aparece subrayada

Opción cerrada	Frecuencia	Porcentaje
Sí se puede	146	48%
<u>No se puede</u>	<u>78</u>	<u>25%</u>
No sabe – No contesta	83	27%

Un 27% de la población no realizó la tarea (o respondió *no sé*), esto nos dice que se trata de una tarea que puede aparecer como como no accesible o ajena a los intereses del 27% de los y las estudiantes. Asimismo, esto sugiere que necesita de cierto recorrido intelectual en esta área, ya que interactúa con temas de matemáticas avanzadas como es el supremo de un intervalo.

Un 25% de la población optó por la respuesta correcta (*no se puede)* y la mayoría *(*48%) prefiere *sí se puede* (no correcta desde un punto de vista matemático) y que se presenta como la más intuitiva, dando una idea de discretitud de los números. Sin embargo, estas afirmaciones no son cada una en sí mismas concluyentes por lo que para acceder de forma más completa a las concepciones de los y las estudiantes tuvimos en cuenta también sus argumentaciones.

Categorización de las justificaciones al interior de cada opción de respuesta

Se realizó una categorización de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes, al interior de cada una de las opciones de respuesta a la primera pregunta, buscando regularidades respuesta por respuesta. Posteriormente se realizó el control inter -juez[37] que dio una coincidencia mayor al 95%.

Los y las estudiantes que optaron por *no sé* tampoco argumentaron su respuesta, por lo que las agrupamos en la misma categoría que la falta de respuesta, incorporándose la categoría *no contesta/no sabe – no justifica,* esta categoría, como ya dijimos, alcanza al 27% de la población.

Entre los y las estudiantes que eligieron la opción *sí se puede,* algunos y algunas no argumentaron o manifestaron que les resultaba evidente. Otros u otras estudiantes dieron justificaciones que nombran el posible número anterior" a 2, algunos brindaron un racional finito (en todos los casos fue 1,9 o 1,99) y otros u otras un racional infinito periódico (en todos los casos es 1,999… (periódico)). Por último, algunas justificaciones expresan que *por ser infinitos números "debe" haber uno anterior al 2*, evidenciando un razonamiento del estilo si son infinitos, deben estas *todos* los posibles.

Entre los y las participantes que optaron por *no se puede,* algunos o algunas no justificaron su elección, otros justificaron basándose en la densidad de los racionales, en un sentido potencial, es decir un razonamiento del tipo: *como los números son infinitos, nunca llegaríamos al 2* y, por último, algunos ofrecieron una justificación correcta, expresando que *no existe* (en el sentido de ser un número real) *un número anterior al dos, debido a la densidad (infinita-actual) de los números* y/o *la propiedad del supremo de los reales*.

Encontramos dos tipos de respuestas centradas en la noción de infinito, contrarias entre sí, en el sentido de que: *sí se puede* encontrar tal número *porque son infinitos* (y al ser infinitos deben estar *todos* los números, aun el anterior al supremo) y en la otra *no se puede* encontrar tal número *porque son infinitos* (siempre habrá uno

---

[37] Detalles del control inter-juez en Capitulo 5.

más cercano al 2). La respuesta *sí se puede* (porque son infinitos) la podemos interpretar como basada en una identificación del infinito con todo (Montoro, 2005), la respuesta contraria, *no se puede porque los números son infinitos*, estaría basada en una concepción de infinito como proceso sin fin, es decir mediada por una visión potencial del infinito (Fischbein et al., 1979). Esto nos daría evidencias de la naturaleza contradictoria de las concepciones sobre infinito**.**

La Tabla 7.7 resume la caracterización de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes para cada opción de respuesta y muestra ejemplos de cada una de ellas.

Tabla 7.7. Caracterización de las justificaciones para cada opción de respuesta. Ejemplos, para los que se indica el NEM del o de la participante.

Opción	Caracterización justificación	Respuesta de un/una estudiante de..
No sé - no contesta	No justifican.	3ro: *No sé – No lo entiendo*
Sí, se puede encontrar en el intervalo el número anterior a 2	*Infinito identificado con todo* Manifiestan que debe existir tal número porque al ser infinitos deben estar todos los números.	BI: *Creo que sí, porque dentro de estos dos Nº hay infinitos números con coma - Le explicaría que dentro del 1 y el 2 hay infinitos números, como ejemplo le daría el 3/2 que equivale a 1,5 que es un número y como este hay más.*
	Discretitud no justificada Manifiestan que es posible encontrar un número anterior a 2, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante.	EFI: *Si - Es el número más cerca de 2, no es 2, por lo que pertenece al intervalo. El 2 no pertenece al intervalo.*
	Discretitud finitista (redondeo) Manifiestan que tal número es un decimal finito (ej.1,9 ;1,99) o que *se puede estimar o que depende de la escala.*	4to: *Pienso que, sí se puede identificar, me parece que seria 1,9* BI: *Se puede estimar. Antes de llegar al 2, el n° 1 puede tener muchísimos decimales.*
	Discretitud infinitista Manifiestan que el número anterior al 2 es 1,99… (periódico) o que existe un número infinito justo antes del 2.	BA: *que es posible ya que el número* 1,99… (periódico) *es menor que 2 y pertenece al intervalo - basándome en el número como un decimal. Todo número menor a 2 por más cercano que sea pertenecerá al intervalo.*
No se puede encontrar en el intervalo el número anterior a 2	*Densidad no justificada* Manifiestan que no es posible encontrar un número anterior a 2, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante.	5to: *creo que no se puede – no sé cómo explicarlo*
	Densidad potencialmente infinita Manifiestan que no se puede encontrar tal número, porque hay infinitos números y nunca se llegaría; o porque tienen infinitas cifras y sería una tarea interminable	3ro: *No se puede encontrar ese número porque hay infinitos números entre 1 y 2* *MI: 7.o creo que no se puede sería una tarea interminable - Sería como encontrar 1,9 e ir agregando decimales (1,99… etc.)*
	Densidad actual de los reales No se puede, porque no existe al "anterior" a 2, por la densidad de los reales	MA: *No, siempre existe uno más cercano a 2 debido a la densidad de Q, es decir, entre dos reales siempre existe un racional - Cada vez que me voy acercando a 2 siempre va a existir uno mayor a dicho n°.*

Caracterización de las clases de respuesta a la Tarea D2

Caracterizaremos las clases de respuesta a la Tarea D2, mediante las combinaciones de respuestas de elección con las justificaciones dadas y las relacionamos con las concepciones sobre discretitud y densidad.

Considerando que en la no respuesta y en las pocas en que se manifiesta *no sé*, los y las estudiantes no justifican su elección, ambas se agruparon en una categoría, que denominamos *ajenidad*, interpretando que al no contestar (o minoritariamente contestar *no sé* y no justificar), al estudiante el problema planteado le resulta ajeno.

Entre los y las estudiantes que eligen *sí se puede*, encontramos tres tipos de respuestas en las que se pone de manifiesto un pensamiento de los números reales como discretos en el sentido de considerar que *puede existir un número anterior a uno dado*. Aquellas donde no se explica esta elección, parafrasean la pregunta o expresan algún aspecto no relevante, tipo de respuestas que denominamos *discretitud no justificada.* Agrupamos en otro tipo, que denominamos *discretitud finitista* a aquellas respuestas que manifiestan que un decimal finito (ej.1,9 ;1,99) es el numero “anterior” a 2, junto a aquellas en que se considera que se puede estimar o que depende de la escala (considerando una finitud explicita). Mediante *discretitud infinitista* identificamos algunas respuestas centradas en la notación decimal infinita como aquellas en que manifiestan qué el número anterior al 2 es 1,99… (periódico) o que existe un número infinito justo antes del 2.

Luego, tenemos aquellas respuestas donde se evidencia una visión de densidad de los reales, que se corresponde con la opción *no se puede* (obtener un número anterior a 2). Tenemos tres tipos de respuestas: aquellas que manifiestan que *no es posible* encontrar un número anterior a 2, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante, que denominamos *densidad no justificada.* Luego las que manifiestan que *no se puede* encontrar tal número, porque hay infinitos números y nunca se llegaría o porque tienen infinitas cifras y anotarlo sería una tarea interminable, a las que llamamos *densidad potencialmente infinita.* Por último, el tipo de respuestas considerado el más cercano a una visión matemática: *no se puede*, porque no existe al anterior (en el sentido de ser un número real), por la densidad de los reales, que denominamos *densidad infinito-actual (supremo).*

Encontramos ocho clases (excluyentes) de respuestas para la Tarea D2, obtenidas en base a la combinación de las opciones de elección y del tipo de justificación y relacionándolas con la concepción sobre la densidad o discretitud que opera en cada una. Éstas son: *ajenidad; discretitud (no explicada, finitista (redondeo),* *mediada por una notación infinita* o *mediada por infinito es todo)* y por último *densidad (potencialmente infinita, no explicada, densidad actual-supremo).*

En la Tabla 7.8 encontramos sintetizada la caracterización de éstas clases de respuesta, respuestas literales y el porcentaje de la población que presenta cada clase de respuestas. Alguna de ellas las hemos caracterizado como mediadas por la concepción de infinito (D2.4, D2.5 y D2.6), por lo expuesto anteriormente.

Tabla 7.8: Clases de respuestas según concepción de densidad y supremo de un intervalo.

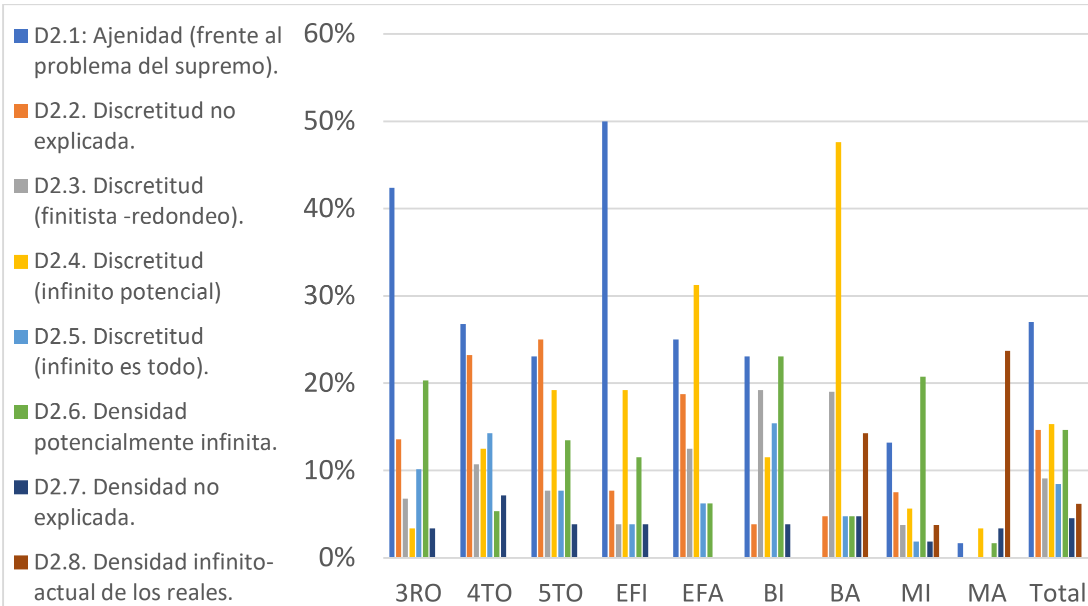
	Caracterización de la modalidad de respuesta	**Respuestas de un/a estudiante de..**	**%**
Ajenidad N=83 (27%)	D2.1: *Ajenidad (frente al contexto del supremo de un intervalo).* No responden o manifiestan no saber o no entender el planteo. Asociada a EFI y 3ro.	3ro: *No sé - No lo entiendo*	**27%**
Discretitud N=144 (47%)	D2.2. *Discretitud no explicada*. Manifiestan que es posible encontrar un número anterior a uno dado, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante. Asociada a 4to. 5to y EFA.	EFI: *Sí se puede - Es el número más cerca de 2, que no es 2.*	15%
	D2.3. *Discretitud finitista (redondeo).* Consideran que es posible encontrar un número "anterior" a uno dado y éste es un decimal finito o que se puede estimar, redondear o que depende de la escala.	4to: *pienso que, sí se puede identificar, me parece que seria 1,9.*	9%
	D2.4. *Discretitud mediada por una notación infinita.* Consideran que es posible encontrare un número "anterior" y este es un número con infinitos decimales. Asociada a BA.	BA: *es posible ya que el número 1,999…(infinitos nueves) es menor que 2 y pertenece al intervalo - basándome en el número como un decimal. Todo número menor a 2 por más cercano que sea pertenecerá al intervalo.*	15%
	D2.5. *Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo. Consideran* que debe existir tal número porque al ser infinitos deben estar *todos* los posibles.	BI: *Creo que sí, hay uno anterior, porque dentro de estos dos Nº hay infinitos números con coma - Le explicaría que dentro del 1 y el 2 hay infinitos números, como ejemplo le daría el 3/2 que equivale a 1,5 que es un número y como este hay más, hay infinitos.*	8%
Densidad N=80 (26%)	D2.6. *Densidad potencialmente infinita.* Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", porque hay infinitos números y nunca se llegaría o siempre se podría agregar un decimal. Asociada a Bi y MI.	MI: *7.o creo que no se puede, sería una tarea interminable - Sería como encontrar 1,9 e ir agregando decimales (1,99… etc.)*	15%
	D2.7. *Densidad no explicada.* Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", sin explicar su pensamiento.	5to: creo que no se puede – no sé cómo explicarlo.	5%
	D2.8. *Densidad actual de los números reales (supremo).* Consideran que no existe un número "anterior", justificando por la densidad de los reales. Asociada a MA.	MA: *No, porque siempre existe uno más cercano a 2 debido a la densidad de Q, es decir, entre dos reales siempre existe un racional - Cada vez que me voy acercando a 2 siempre va a existir uno mayor a dicho n°.*	6%

7.2.2. Perfiles de respuestas de la Tarea D2 según el nivel de estudio

Distribución de las clases de respuestas en la Tarea D2 en los NEM

En el Gráfico 7.6 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada tipo de respuestas en cada nivel de estudio y en la población general.

Gráfico 7.6. Distribución de las clases de respuesta al interior de cada EM para la Tarea D2.



Si bien algunas concepciones se presentan como características de algún NEM, tales como *ajenidad* en 3ro y EFI, *discretitud mediada por el infinito potencial* para BA o *densidad por infinito actual* para MA, en cada NEM se manifiestan una diversidad de clases de respuesta que a su vez dan cuenta de concepciones también distintas. La clase más popular, la *ajenidad,* se manifiesta en todos los NEM, al igual que *discretitud mediada por el infinito potencial.*

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea D2 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las modalidades de NEM (Tabla 7.8), a fin de observar si existen perfiles de distribución característicos, similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.8, en el Anexo II.

A continuación, presentamos los dos primeros planos factoriales de este AFC realizado sobre los perfiles de distribución de las ocho clases de respuesta al interior de los nueve niveles de estudio (Gráfico 7.7 y 7.8).

Gráfico 7.7: Primer plano factorial del AFC de las clases de respuestas a la Tarea D2, en los NEM.

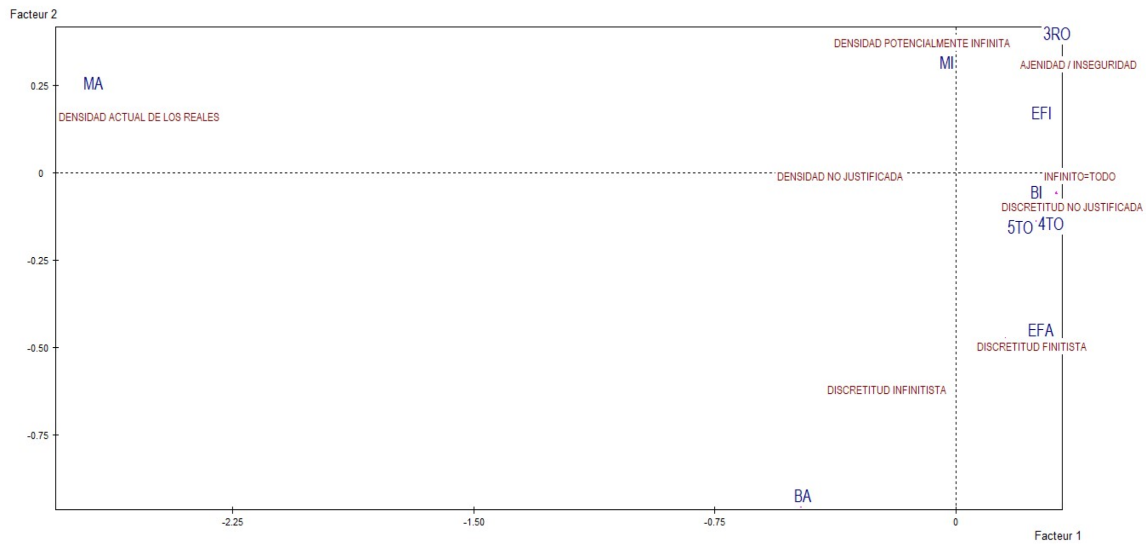
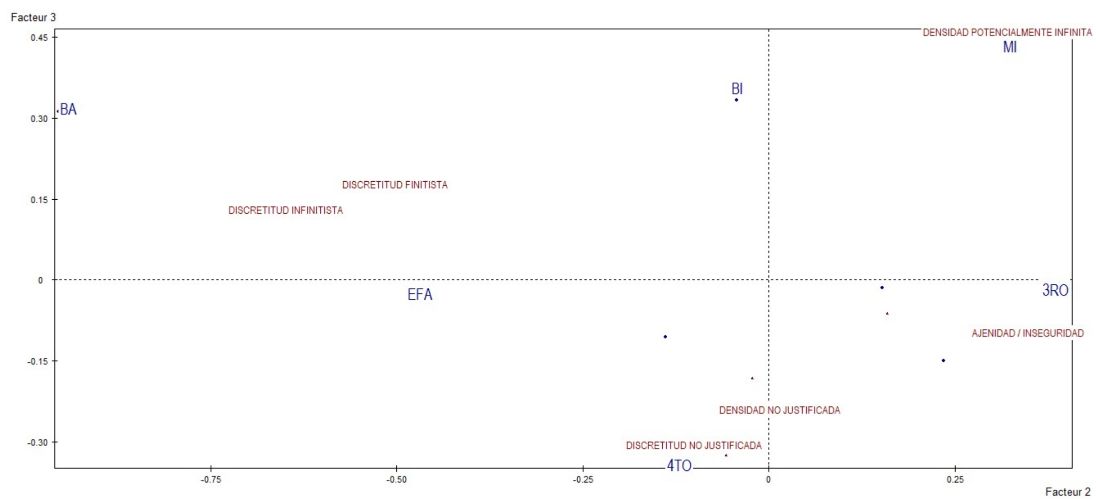


Gráfico 7.8: Segundo plano factorial del AFC de las clases de respuestas a la Tarea D2, en los NEM.



El principal factor de variabilidad opone la clase *densidad actual de los reales* (asociada a MA y en menor medida a BA) al resto de las clases de respuesta y modalidades de NEM.

El segundo factor discrimina entre *ajenidad* y *densidad potencialmente infinita* por un lado y, por otro, entre *discretitud finitista* y *discretitud infinitista.*

El tercer factor separa estos pares de modalidades, es decir *ajenidad* de *densidad potencialmente infinita* y *discretitud (finitista o infinitista)*, de *discretitud no justificada.*

La Tabla 7.9 sintetiza las asociaciones de los perfiles de clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, encontrados mediante este AFC.

Tabla 7.9: Grupos de asociaciones entre clases de respuestas y modalidades de NEM en el AFC

Clases de concepción	NEM asociados
D2.8. Densidad actual	MA
D2.4. Discretitud mediada por infinito	BA
D2.6. Densidad potencialmente infinita.	BI y MI
D2.2. Discretitud no explicada.	EFA, 5to y 4to
D2.1. Ajenidad	3ro y EFI

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática (Gráfico 7.6) encontramos que los perfiles de los NEM 4to y 5to poseen perfiles similares al perfil medio de la población, sin la clase *densidad actual* y con el predominio de la *discretitud* (particularmente la no explicada). MI y BI también poseen un perfil de distribución similar y en ambas predomina *densidad potencialmente infinita.* En 3ro y EFI predomina la *ajenidad.*

Los perfiles de distribución de EFA, BA y MA son característicos y distintos entre sí. En EFA predomina *la discretitud* (particularmente *mediada por infinito potencial,* pero también la *no explicada)* y la *ajenidad,* en BA predomina también la *discretitud mediada por el infinito potencial,* pero se diferencia de EFA en cuanto no tiene representatividad la *ajenidad,* ni la *discretitud no explicada* y en MA predomina la *densidad actual de los reales*.

7.2.3. Síntesis de resultados de la Tarea D2

Mediante la Tarea D2, pretendíamos conocer cómo conciben los y las estudiantes la densidad en relación con el orden y el supremo de un intervalo de números reales.

Para esta tarea identificamos ocho clases de respuesta, presentando un arco desde la *ajenidad* frente al problema, pasando por una visión de los números como *discretos* (con cuatro modalidades) y por último una visión de la *densidad* de los números (con tres modalidades). Particularmente encontramos tres clases de respuestas mediadas por alguna concepción en particular sobre el infinito, una de discretitud y dos de densidad.

Como adelantamos, en nuestros resultados la profundidad de comprensión sobre la densidad de los números va desde una clase de *ajenidad* frente al problema (27%), es decir, estudiantes que no responden o manifiestan *no saber* o *no entender* el planteo, asociada particularmente estudiantes de 3ro de secundaria y Educación Física. Este alto porcentaje de estudiantes a los que se les presenta como ajena la tarea puede deberse a que ella implica temas de considerable abstracción de matemática avanzada como el orden, la densidad, la noción de supremo de un intervalo de números reales y la correspondiente noción de infinito actual.

Cuatro de las clases de respuesta determinadas para esta tarea se corresponden con una visión de *discretitud* de los números reales (sostienen que se puede encontrar un número anterior a uno dado, como si fueran los enteros), una en forma *no explicada*, es decir se presenta como evidente (asociada a 4to, 5to y EFA); una de *discretitud finitista o por redondeo*; otra de *discretitud infinitista*: *el número 1, 999…(periódico), es el anterior al 2* (estas dos últimas asociadas a estudiantes de Biología) y por último una de *discretitud mediada por infinito es todo*, en la cual se considera: *si hay infinitos números, deben estar todos* (aun el anterior a 2). Estas cuatro clases conforman el 47% de la población (9%, 15%, 15% y 8% respectivamente). Es decir que en esta zona intermedia y como la idea más difundida en la población, se ubica la concepción en la que se considera a los números como discretos en relación con el supremo de un intervalo**,** idea que encontramos principalmente entre los y las estudiantes de secundaria, los ingresantes a las carreras científicas y en estudiantes avanzados/as de Biología.

Luego, encontramos tres visiones de *densidad* de los números, una *no explicada*, nuevamente aparece aquí como "evidente" pero en este caso la densidad (asociada a estudiantes de Biología), otra visión que describe la *densidad* como *potencialmente infinita* (asociada a BI y MI), y por último una *densidad actualmente infinita* asociada a MA. Son el 26% de la población (15%, 5% y 6% respectivamente).

Vemos en esta tarea como la concepción de infinito media en la comprensión del orden denso y completo de los números reales.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.4, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

7.3. Integración de los resultados del Grupo Temático D

Con la Tarea D1 pudimos conocer cómo conciben estos y estas estudiantes la densidad de los números reales en relación con el orden e inferimos concepciones sobre infinito, en correspondencia con la cantidad de números entre dos números dados. En cuanto a la Tarea D2, pudimos conocer cómo conciben estos y estas estudiantes la densidad en relación con el orden y el supremo de un intervalo de números reales.

Considerando integradamente ambas tareas del Grupo temático D, encontramos que a pesar de estar ambas relacionadas con el orden denso de los reales, las plantean diferentes desafíos al resolutor/a. Mientras que en la Tarea D1 se presenta la posibilidad de decir si, entre dos números enteros, primero, racionales después y por último entre un racional y un irracional, (siempre) se puede encontrar otro número, lo que sería el primer paso para comprender la densidad. También se da la posibilidad de decidir cuál sería ese número, lo que implica comprender el orden de los reales, para finalmente preguntar cuántos números hay entre esos dos dados, con la posibilidad de (lógicamente) concluir que son infinitos. Sin embargo, en este pensar una cantidad infinita no sería necesario diferenciar entre un pensamiento finitista (un número muy grande), de infinito potencial o infinito actual. Simplemente, aun cuando expresen que hay infinitos números entre dos dados, puede tratarse a infinito como un adjetivo.

En cambio, la Tarea D2 presenta un desafío relacionado con el supremo de un intervalo, que además de implicar la densidad y el orden, implica la completitud-continuidad de los reales, como así también la comprensión del infinito en forma actual.

Son estos, conceptos de matemática avanzada que, epistemológicamente fueron establecidos en forma axiomática y debido a la formalización matemática de los conjuntos *actualmente* infinitos, por lo que presentan una complejidad cognitiva mayor.

Esta diferencia en el requerimiento cognitivo en las tareas se vio reflejada en los resultados. Si bien en ambas pueden diferenciarse tres grandes campos en la comprensión de la densidad estos presentan matices diferenciados en cuanto a la profundidad de la comprensión según sea la tarea en que se presenta.

En un extremo encontramos *inseguridad* para la Tarea D1 y *ajenidad* para la Tarea D2, en una zona intermedia se ubica el concebir los números reales como *discretos* (al modo de los enteros, con un siguiente y un antecesor) y en el otro extremo localizamos la concepción de los números como *densos* (y en algunos casos comprender la noción *de supremo*), como dijimos estos tres estadios se dan en forma diferenciada en cada tarea.

Inseguridad y ajenidad. La *inseguridad* se presenta en muy pocos estudiantes en cuanto a decidir si (siempre) hay un numero entre dos dados y cuántos son, en cambio la *ajenidad* frente al problema del supremo se evidencia en casi el 30% de la población. Ambas actitudes las encontramos principalmente en estudiantes con menor estudio de matemática y son coherentes con una visión de los números centrada en los enteros y su correspondiente discretitud. Presentándose el orden denso de los números reales como un conflicto insuperable.

Es notable cómo los y las estudiantes de Educación Física y de secundaria dan muestras de seguridad sólo cuando se trata de comparar números enteros, parecieran disponer de concepciones de número asociada fuertemente a los números enteros. La noción de orden aparece como menos intuitiva que la de densidad.

Discretitud de los números. En la zona intermedia y como la idea más difundida en la población estudiada se ubica la concepción de *discretitud de los números.* Para la tarea de encontrar un número entre dos dados es la más popular y se trata del 33% de la población y que encontramos principalmente entre estudiantes de secundaria. Podríamos decir que gran parte de los y las participantes manifiestan que hay pocos o muchos números entre 0 y 2, pero consideran que entre las fracciones con denominador consecutivo no hay ninguno o unos pocos números e identifican a π con su aproximación racional 3,14. En la tarea que trata con el supremo de un intervalo, la visión de *discretitud de los números* estaría en pensar que hay un numero “anterior” al supremo del intervalo y es aún más numerosa que en la anterior (47% de la población.

En nuestro estudio hemos detectado cuatro maneras de pensar a los números como *discretos, en relación con el problema del supremo de un intervalo*:

(i) la forma más básica, que *no explicada*, en la que se manifiesta que es posible encontrar un número anterior a uno dado, sin justificar. Es decir, pareciera que la discretitud (el orden de los naturales) fuera obvia, los números son “como” los enteros y por lo tanto discretos.

(ii) una forma de respuesta que denominamos *discretitud finitista o por redondeo*, en la que se considera que es posible encontrar un número “anterior” a uno dado y éste es un decimal finito o que se puede estimar, redondear, o que depende de la escala. Expresando, por ejemplo, que “se toman tantos decimales como hagan falta”, asociada a estudiantes de Biología, que sería “intencionalmente finitista”.

(iii) otra forma que denominamos *discretitud mediada por la notación infinita*. En la que se considera que es posible encontrar un número “anterior” y éste es un número con infinitos decimales. Es decir, el número 1, 999… (periódico) es considerado “el anterior” al 2, en la cual los infinitos decimales posibilitarían la situación.

(iv) por último la *discretitud mediada por la concepción de infinito es todo.* En la cual se considera que debe existir tal número porque: *si hay infinitos números, deben estar todos* (aun el anterior a 2), mediada por la concepción de *infinito como todo*.

Densidad de los números. Retomando nuestro arco de profundidad en las comprensiones de este tema, vemos que éste se completa con la comprensión de la *densidad de los números*, asociada a estudiantes universitarios.

Para la Tarea D1 encontramos un tipo de respuestas que decimos que es de transición entre el orden discreto y el orden denso, que denominamos *densidad finitista.* Si bien en ella se expresa que entre dos números (siempre) hay otro número, este razonamiento no lleva a pensar que entonces, necesariamente, hay infinitos números entre los dos dados. Pareciera un tipo de respuestas paradójico en el que se piensa que entre dos números puede haber muchos otros, pero no se llega a pensar en infinitos. Quienes expresan esta idea son principalmente estudiantes de secundaria.

También en la Tarea D1, encontramos un grupo de estudiantes que parecieran comprender la propiedad de *densidad*, al expresar que (siempre) entre dos números reales hay infinitos números, sin embargo, en dos maneras distintas:

(i) la que hemos considerado como una visión de la *densidad infinitista sin comprensión del orden*, en estudiantes que consideran que entre dos números hay infinitos, pero no comprenden el orden dando un número errado.

(ii) la segunda, presente en un grupo de estudiantes que dan respuestas que evidencian que comprenden la *densidad como infinita y además pueden operar en forma correcta con el orden,* que se corresponde con el 16% de la población, exclusivamente formada por universitarios de las carreras científicas. Como dijimos en este punto no puede diferenciarse cuál es la concepción de infinito que está operando, ya que bastaría concebirlo como un adjetivo, es decir "son infinitos".

Para la Tarea D2, en el contexto del supremo de un intervalo la visión de *densidad* de los números se corresponde con el 26% de la población, de acuerdo con tres maneras:

(i) como una visión de *densidad no explicada,* en la que los y las estudiantes consideran que no se puede encontrar un número "anterior" a uno dado, sin explicar su pensamiento.

(ii) la que hemos considerado, como *densidad potencialmente infinita.* Dentro de esta visión, nos encontramos con estudiantes que consideran que no se puede encontrar un número "anterior" a uno dado, porque hay infinitos números y nunca se llegaría o siempre se podría agregar un decimal. Este grupo está formado casi exclusivamente por ingresantes universitarios de Biología y Matemática. Vemos aquí como la visión de infinito potencia puede llevar a una respuesta correcta, pero con una justificación alejada de la visión conceptual.

(iii) por último, un grupo reducido de la población dan respuestas que evidencian que comprenden la *densidad como infinita* lo que los lleva a comprender el supremo de un intervalo. Esta última, la concepción más elaborada desde el punto de vista matemático se asocia con el 6% de la población que consiste exclusivamente en estudiantes avanzados/as de Matemática.

Los y las estudiantes con menor estudio en matemática suelen presentar inseguridad o discretitud explicita cuando buscan un numero entre dos dados y ajenidad frente al problema del supremo. Observamos que estudiantes de secundaria parecieran comprender que, en el conjunto de los números enteros, entre dos enteros consecutivos no hay un numero (entero) y entre dos números enteros no consecutivos habrá un numero finito de números enteros, por lo que decimos que los enteros son comprendidos como discretos. De forma similar parecieran comprender que en el orden discreto de los enteros se verifica que cualquier número entero tendrá un entero anterior y un entero posterior. Esta propiedad puede ser transferida (erróneamente) a los racionales, pensando que entre dos fracciones puede no haber otro número, es decir "una sea la siguiente de la otra" y algo similar podría pasar entre los decimales hasta los décimos o los centésimos.

Podemos considerar que la comprensión de la densidad tiene un primer paso en reconocer que entre dos números reales (siempre) hay otro número real, para luego inferir que, si hay uno, entonces hay infinitos. Esta propiedad nos llevaría al orden denso de los números reales, en el cual cualquier número real no tienen un anterior ni un posterior. Sin embargo, algunos estudiantes pueden pensar que entre dos números (siempre) habrá otro y (paradójicamente) que entre ellos puede haber *muchos* (quizás pensando en infinitos como una cantidad enorme). Por otra parte, la visión de la densidad infinita podría ser pensada en forma potencial, es decir siempre se puede encontrar otro y otro y otro….número entre dos dados.

En la tarea del supremo de un intervalo puede pensarse también en forma potencial, es decir no hay un anterior al supremo porque siempre puedo encontrar otro, un número que pertenezca al intervalo y se acerque lo más posible al supremo, sin embargo, para la propiedad del supremo, es decir que todo intervalo de números reales tiene un supremo (real) es necesario pensar el infinito en forma actual, ya que esto se da sin que ese supremo tenga un numero anterior en el intervalo, debe pensarse necesariamente este como continuo.

A modo de recapitulación de los resultados de las dos tareas (D1 y D2), destacamos que hemos identificado tres niveles principales en la comprensión de la densidad de los números reales, *inseguridad/ajenidad, discretitud* y *densidad*.

Estos niveles muestran un gradiente de profundidad en esta comprensión según sea el contexto de la tarea en el siguiente orden: *inseguridad frente al orden y la densidad y ajenidad frente al supremo de un intervalo;* (ii) *discretitud explícita frente al orden o no explicada respecto del supremo de un intervalo;* (iii) *densidad finitista como un paso intermedio hacia la densidad y el orden;* (iv) *discretitud mediada por la concepción de infinito para el supremo de un intervalo;* (v) *densidad no explicada; densidad infinitista sin comprensión del orden o densidad no explicada para el supremo de un intervalo;* (vi) *densidad infinita sin comprensión del orden y densidad* *potencialmente infinita* y (vii) *densidad actualmente infinita con comprensión del orden y del supremo de un intervalo*.

Este gradiente de profundidad en la comprensión de la densidad se vio reflejado en los distintos niveles de estudio en Matemática ubicándolos en el siguiente orden: (1) estudiantes ingresantes y avanzados/as de Educación Física y de tercer año; (2) de cuarto año y quinto año de secundaria; (3) ingresantes a Biología, ingresantes a Matemática y estudiantes avanzados/as de Biología y (4) estudiantes avanzados/as de Matemática

Para una mejor visualización de cómo se asocia este gradiente de niveles de comprensión presentamos en la siguiente tabla (Tabla 7.2) una síntesis de este, especificando a que NEM se encuentra asociado cada concepción.

Tabla 7.10. Gradiente de profundidad en las comprensiones sobre la densidad y los NEM asociados.

Concepción		NEM asociados
Inseguridad	Presentan inseguridad respecto a la densidad y el orden de R, salvo para los enteros.	EFI - EFA - 3ro
Ajenidad	Ajenidad en contexto del supremo de un intervalo. No se apropia del problema, no contestando o expresando que no sabe.	
Discretitud	Discretitud explícita frente al orden. Discretitud *no explicada* en el contexto del supremo de un intervalo.	3ro -4to – 5to
Densidad finitista. *Infinito es mucho*, como un paso intermedio hacia la densidad y el orden		4to – MI - BI
Discretitud mediada por la concepción de infinito para el problema del supremo	Discretitud finitista (redondeo) Discretitud mediada por una notación infinita. Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo	MI - BI - BA
Densidad	Densidad infinitista sin comprensión del orden Densidad no explicada para el problema del supremo.	
	Densidad potencialmente infinita.	
	Densidad actualmente infinita con comprensión del orden y del supremo de un intervalo	MA

Capítulo 8

Concepciones de infinito en el contexto del número real y su relación con el nivel de estudio en Matemática

Este capítulo presenta los resultados de la Fase 1 del análisis de la información, realizado a las respuestas a las tareas del cuestionario correspondientes al Grupo Temático I, conformado por tres tareas (I1, I2 e I3), que indagan la comprensión por parte de los y las estudiantes de: *la comparación de colecciones infinitas ordenadas en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número racional*; *el infinito cardinal en el contexto de la comparación de conjuntos infinitos de números* y *de la representación decimal infinito-periódica de un número en relación al orden,* respectivamente.

En forma similar a los capítulos anteriores, para cada tarea exhibimos el objetivo por el cual fue considerada y la consigna tal cual se la presentó en el cuestionario original. Luego se da cuenta, de forma pormenorizada, de los resultados de la serie de análisis de grano fino realizada y se brinda un apartado con la síntesis de resultados de cada tarea. Finalmente se integran los resultados del análisis de este grupo temático. De modo que pueden realizarse dos formas de lectura, una completa, que informa detalladamente la secuencia de decisiones y resultados, otra que permite alcanzar más directamente los hallazgos generales pasando directamente a la lectura de los apartados de síntesis e integración 8.1.3, 8.2.3, 8.3.3 y 8.4.

Las tres tareas presentan opciones de respuesta cerradas y solicitan justificaciones para la opción elegida, por lo que realizamos una descripción de las frecuencias de elección de las opciones y una categorización cualitativa de las justificaciones brindadas por los y las estudiantes al interior de cada una de las opciones de respuesta cerrada. Esta categorización se realizó buscando regularidades respuesta por respuesta, considerando como unidad de análisis la justificación completa brindada por cada estudiante. Cada justificación se asignó a una única categoría. Tanto en el proceso de construcción de estas categorías como en la asignación de justificaciones originales a dichas categorías participaron la autora y dos docentes universitarias de matemática. Una vez acordadas las categorías para cada tarea, asignaron la correspondiente a cada respuesta de justificación independientemente, con niveles de acuerdo que según la tarea alcanzaron o superaron el 95%. Las discrepancias fueron discutidas hasta alcanzar un acuerdo.

Por lo argumentado oportunamente en la lógica de estas tareas (Capítulo 4), consideramos que las respuestas de elección de opciones no son en sí mismas concluyentes, por lo que para acceder de forma más completa a las comprensiones de los y las estudiantes fue necesario, además, considerarlas en forma conjunta con sus justificaciones, por lo que en un segundo paso se combinó para cada estudiante su respuesta de elección y la categoría de justificación a fin de obtener una "tipología de respuestas" a la tarea completa.

En los apartados 8.1.1, 8.2.1 y 8.3.1 describiremos estas tipologías de respuestas que hemos detectado en la población en estudio, dando ejemplos literales de cada clase de respuestas e informando el porcentaje de la población que representa. Luego, se interpretan las clases de respuestas en términos de concepciones de infinito que ponen de manifiesto.

Presentamos la distribución de las clases de respuestas en los distintos NEM para cada tarea y buscamos asociaciones entre los perfiles de respuesta de cada NEM, de modo de analizar la incidencia del estudio de Matemática en la profundidad de las comprensiones sobre aspectos del infinito en el contexto del número real. Los resultados correspondientes se informan en los apartados 8.1.2, 8.2.2 y 8.3.2.

En los apartados 8.1.3, 8.2.3 y 8.3.3 sintetizaremos la tipología de respuestas obtenida para cada tarea, mostraremos un arco de profundidad en la concepción sobre infinito en este contexto y daremos cuenta de las relaciones entre los modos de respuesta y los NEM. En 8.4 se integran los resultados obtenidos en el análisis de las tres tareas del grupo temático.

En el Capítulo 5 hemos descripto los métodos de análisis utilizados en esta fase y en el Anexo II damos una justificación de la estadística multivariada.

8.1. Tarea I1: El infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número

El objetivo de la Tarea I1 es estudiar cómo comprenden los y las estudiantes el infinito cardinal en la comparación de colecciones numerables ordenadas (las infinitas cifras decimales) en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número racional.

El Cuadro 8.1 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

Probablemente sepas que en matemática solemos escribir al número con infinitas cifras decimales iguales a 3 como: $0,\hat{3} = 0,33333..$

El número con infinitas cifras decimales que se repiten, iguales a 32 se escribe: $0,\overline{32} = 0,323232....$

De modo que por ejemplo $2,2\hat{9} = 2,299999\ldots$ posee infinitas cifras decimales 9 a partir de los centésimos

¿En cuál de los siguientes números hay más cantidad de cifras 3?

Comparando $0,\hat{3} = 0,33333\ldots$ y $0,\overline{32} = 0,3232323232....$

□ Hay más en $0,\hat{3} = 0,33333...$
□ Hay más en $0,\overline{32} = 0,3232323232....$
□ Hay igual cantidad
□ No se pueden comparar
□ No sé

¿Podés explicar por qué elegiste esa opción?

____

____

Cuadro 8.1. La consigna utilizada para la Tarea I1 en el cuestionario. La respuesta *hay igual cantidad* es la correcta desde un punto de vista cardinal

Esta tarea aporta como información, para cada estudiante, una respuesta de elección entre varias opciones y una justificación para la afirmación elegida con formato de pregunta abierta. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado. 4.1.3 del Capítulo 4.

8.1.1. Categorización de las respuestas a la Tarea I1

Como adelantamos, en esta tarea se contó, para cada estudiante, con una respuesta de elección de una entre cinco opciones (*hay más en 0,33333…*; *hay más en 0,3232323232…*; *hay igual cantidad*; *no se pueden comparar* y *no sé*) y una justificación para la afirmación elegida.

Distribución de frecuencias de las modalidades de respuesta de elección

El 95% de los y las estudiantes realizaron la Tarea I1, sólo seis estudiantes no contestaron y otros doce eligieron la opción *no sé*. Entre quienes eligieron la opción *no sé* ninguno/a justificó esta elección, por lo que pensamos que esta opción no brinda más información que la falta de respuesta, de modo que se las consideró conjuntamente. La indecisión y la falta de respuesta fue sólo del 5% de la población, lo que nos habla de una tarea que se presentó como “amigable” para el conjunto de estudiantes.

La siguiente Tabla 8.1 muestra la frecuencia de elección de cada opción de respuesta cerrada y el correspondiente porcentaje de la población que representa.

Tabla 8.1: Frecuencia y porcentajes de elección de opciones para la Tarea I1. La elección correcta aparece subrayada.

Opción	Frecuencia	Porcentaje
Hay más en 0,333…	70	23%
Hay más en 0, 3232…	9	3%
Hay igual cantidad	113	37%
No se pueden comparar	98	32%
No sabe o no contesta	17	5%

La opción más elegida es la correcta desde un punto de vista cardinal, *hay igual cantidad; mientras que* la siguiente elección más numerosa (32%) plantea que *no se pueden comparar.* Sin embargo, como notamos al reflexionar sobre las implicancias en la elección de cada opción, debemos analizar las justificaciones que acompañan estas opciones para comprender las concepciones que están operando al elegirlas.

Categorización de las justificaciones al interior de cada opción de respuesta

Con el fin de acceder de forma más completa a las comprensiones de los y las estudiantes hemos considerado en forma conjunta las respuestas de elección de opciones y sus justificaciones.

Para la opción: *hay más en 0,333…,* considerada en sí misma finitista, encontramos dos tipos de justificaciones: una en la que *no se explica* la elección y la segunda, *explícitamente finitista*, en la que se hace alusión a que se tuvo en cuenta lo que ocurre si se toma una cantidad finita de cifras decimales.

La opción *hay más en 0,3232…* es elegida sólo por nueve estudiantes, quienes en sus justificaciones evidencian que no han considerado que las colecciones de “3” y “32” son infinitas.

Para la opción correcta desde el punto de vista cardinal (*hay igual cantidad*) se encontraron distintos tipos de justificaciones. Dos de ellos se consideraron conjuntamente, ya que indican que no se interpretan las colecciones como infinitas; se trata de no dar ningún tipo de justificación, o contar los “3” que literalmente había en la hoja (cinco cifras “3” en cada caso). Otro tipo de justificación para el caso *hay igual cantidad* considera que *ambos son infinitos,* sugiriendo que se entiende que existe una *única cantidad infinita.* Por último, encontramos justificaciones que hacen alusión a la relación uno a uno que puede establecerse entre las cifras “3” de ambos números, es decir se compara por cardinalidad (esta última es muy escasa).

Para la opción: *no se pueden comparar,* la segunda con frecuencia más numerosa, encontramos un solo tipo de justificación que hace referencia a que no se pueden comparar *porque son infinitos* y, por lo tanto, entendemos que estos/as estudiantes piensan que con infinito no se puede operar, comparar, etc., es decir consideran el infinito como *indefinido*.

Por último, como ya comentamos, los y las estudiantes que eligieron la opción *no sé*, no justificaron esta elección, por lo que consideramos que esta opción no brinda más información que la falta de respuesta, motivo por el cual se las analizó juntamente con la no-respuesta.

La Tabla 8.2 resume la caracterización de las justificaciones utilizadas por los y las estudiantes para cada opción de respuesta y muestra ejemplos de cada una de ellas.

Tabla 8.2: Caracterización de las justificaciones para cada opción de respuesta en la Tarea I1. Ejemplos, para los que se indica el NEM del o de la participante

Opción	Caracterización de la justificación	Respuesta de un/a estudiante de…
Hay más en 0,33333… (23%)	*Finitista no justificada.* No justifican, manifiestan no saber el porqué de su elección o aluden a algún aspecto irrelevante.	5to: *Porque hay más 3.* 4to*: no sé cómo explicarlo*
	Finitista explícita. Consideran que hay el doble de 3 que en 0,3232…. observan lo que ocurre con finitos decimales	4to*: Porque en el 0,32… se repetía además del 3, el 2, por lo tanto, es posible que se repita la mitad de las veces que en el 0,3.* EFA: *porque a la misma cantidad de decimales hacia atrás por ejemplo 4, 0,3333 y 0,3232 existe mayor cantidad de 3 en 0,3333*
Hay más en 0, 3232323232… (3%)	*No consideran que los números sean periódicos.* No comprendieron la notación para números con infinitos decimales periódicos. Algunos comparan 3 con 32	3ro*: porque 0,32 tiene después de la coma 2 decimales (números).* 4to*: porque el 32 es más grande que el 3 entonces va a haber más cantidad.*
Hay igual cantidad (37%)	*No consideran que los números sean periódicos*. Contaron las cifras "3" en el ejemplo textual. No comprendieron la notación para números con infinitos decimales periódicos	3ro*: porque en los 2 hay 5 cifras 3* 3ro: *Porque conté la cantidad de cifras 3 y en cada uno hay 5*
	Único infinito. Justifican expresando que en ambos casos los 3 se repiten infinitas veces o expresan que ambos son periódicos.	5to*: Porque en ambos casos el 3 aparece infinitamente* *MA: Hay infinitos en los dos casos*
	Cardinalidad. Justifican por relación uno a uno entre los 3 de ambas colecciones.	MA: *Porque uno tiene infinitos 3 y otro infinito 32, y como por cada 32 hay un 3, infinitamente.* *MA: El conjunto de cifras 3 para estos números están en biyección: tienen igual cardinalidad*
No se pueden comparar. (32%)	*Infinito como indefinido* (con infinito no se puede). Justifican diciendo que al ser infinitos no se pueden comparar.	3ro: *Porque son infinitos y no se sabe la cantidad* MA: *Porque si los decimales periódicos tienen infinitas cifras decimales, no las podría contar para compararlas*
No sabe o no contesta. (5%)	*No justifican.* No justifican o manifiestan no saber el porqué de su elección	3ro*: No sé – Ni idea* 4to*: la verdad no tengo idea*

Podemos notar que la categoría de justificación *no considera que los números sean periódicos* fue brindada para dos opciones de elección. En cambio, las demás categorías de justificación se vinculan a única opción de respuesta.

Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea I1,

Interpretamos que un conjunto de combinaciones de opción de respuesta y justificación indican una actitud común que llamaremos *ajenidad*. Estas son: *no sabe y no justifica*, las respuestas *hay más en 0,3232… y no considera el infinito en la justificación; igual cantidad y no consideran el infinito en sus justificaciones* y se pueden agrupar en el sentido de que en las tres, el concepto de infinito resulta ajeno a la o el participante.

Esa agrupación de respuestas se complementa con las respuestas *finitistas* (justificadas o no), las respuestas de *infinito como indefinido* en las que se considera que con infinito no se puede comparar y las *infinitistas* en dos formas, una en la que se considera una *única cantidad infinita* y otra la *comparación por cardinalidad*.

En suma, encontramos seis tipos (mutuamente excluyentes) de respuestas para la Tarea I1, obtenidas de la combinación de las opciones de elección y del tipo de justificación y relacionándolas con la concepción de infinito que opera en cada una. Estas son: *ajenidad, finitista no justificada, finitista explícita, infinito como indefinido, único infinito* e *infinito cardinal***.** A su vez, estas seis clases de respuestas permiten identificar cuatro concepciones principales acerca del infinito a partir de esta tarea*: ajenidad, finitista, indefinición* e *infinitista.*

En la Tabla 8.3, sintetiza las principales concepciones sobre infinito identificadas en las respuestas de los y las estudiantes, la caracterización de las seis clases de respuestas obtenidas para la Tarea I1, ejemplos literales de respuestas de algún/a estudiante y porcentaje de la población que presenta la clase de respuesta.

Tabla 8.3: Concepciones sobre infinito identificadas y caracterización de las clases de respuestas a la Tarea I1. Ejemplos indicando el NEM del/la participante y porcentaje de la población en cada clase.

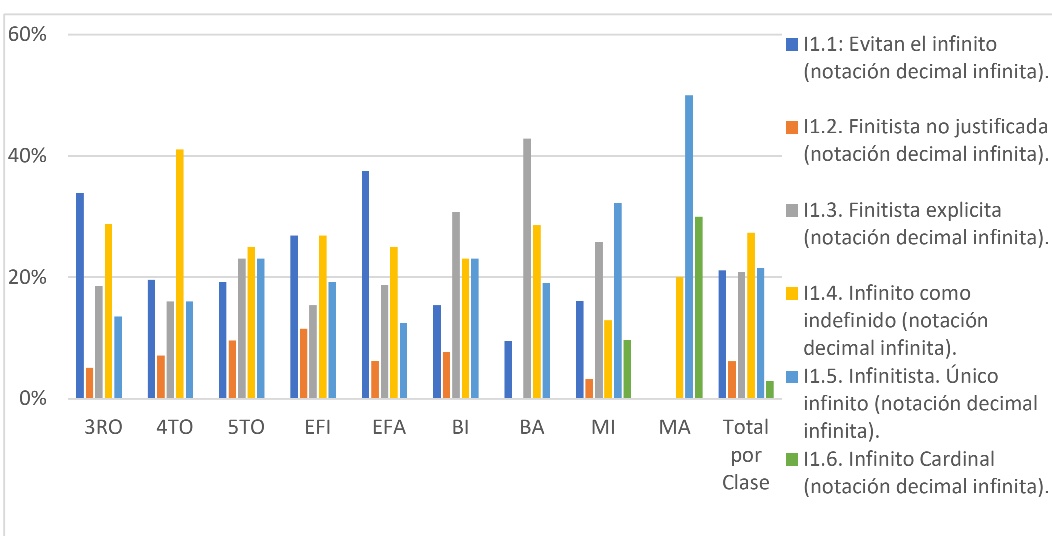
Concepción	Caracterización de la clase de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de..	%
Ajenidad N=65 (21%)	I1.1: *Ajenidad. No sabe o no contesta; hay más en 0,3232…-no justificada e igual cantidad- no justificada.* No comprendieron la notación para números con infinitos decimales periódicos o manifiestan no saber y no justifican.	3ro: *Hay más en 0,32… porque el 32 es más grande que el 3 entonces va a haber más cantidad*	21%
Finitista N=83 (27%)	I1.2. *Finitista no justificada. Hay más en 0,33333… - No justifican* Al comparar eligen lo que ocurriría con colecciones finitas (finitos decimales) sin embargo no justifican su pensamiento.	5to: *Hay más en 0,333… no sé cómo explicarlo*	6%
	I1.3. *Finitista explícita. Hay más en 0,33333…-Finitista explícita.* Al comparar lo hacen (explícitamente) considerando lo que ocurre con finitos decimales.	BA: *Hay más en 0,333… Porque en el 0,32… se repetía además del 3, el 2, por lo tanto, es posible que se repita la mitad de las veces que en el 0,3….*	21%
Infinito como indefinido N=84 (27%)	I1.4. *Infinito como indefinido. No se pueden comparar por ser infinitos.* Evidencian una idea de que con infinito no se puede operar, comparar, etc.	4to: *Son incomparables. Porque si los decimales periódicos tienen infinitas cifras decimales, no las podría contar para compararlas*	27%
Infinitista N=75 (24%)	I1.5. Único infinito. *Hay igual cantidad – Único infinito* Consideran que existe una *única cantidad infinita*, por la tanto hay la misma cantidad (infinitos) en ambas colecciones.	MI: *Iguales. Hay infinitos en los dos casos*	21%
	I1.6. *Infinito cardinal. Hay igual cantidad- Cardinalidad* Consideran que ambas colecciones coordinables (en el sentido cantoriano), comparando por relación uno a uno entre ambas colecciones.	MA: *El conjunto de cifras 3 para estos números están en biyección: tienen igual cardinalidad*	3%

8.1.2. Perfiles de respuestas a la Tarea I1 según el nivel de estudio

Distribución de las clases de respuestas en los NEM

En el Gráfico 8.1 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada clase de respuestas determinadas en cada nivel de estudio y en la población general.

Gráfico 8.1: Distribución de las clases de respuestas a la Tarea I1 al interior de cada NEM.



Si bien algunas clases de respuestas y las concepciones que indican se presentan como características de algún NEM como *único infinito* para MA, *finitista explícita* para BA o *infinito como indefinido* para 4to, en cada nivel de estudios en matemática se manifiestan una diversidad de concepciones.

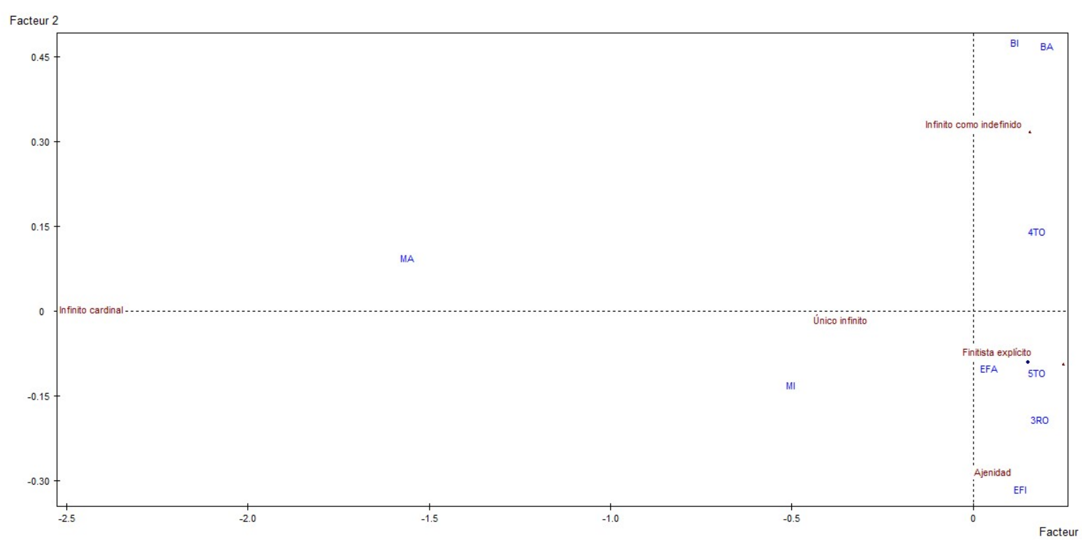
La clase más popular, *infinito como indefinido (por ser infinitos no se pueden contar*) se manifiesta en todos los NEM, siendo, como dijimos característica de 4to año. La segunda más popular, *finitista explícita*, está presente en casi todos los NEM (salvo en MA) y es característica de BA y BI. Los NEM 3ro y EFA tienen como característica la *ajenidad.* La clase *infinito cardinal* sólo la encontramos en MI y MA.

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea I1 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las modalidades de NEM de los y las estudiantes, a fin de observar si existen perfiles de distribución característicos, similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.9, en el Anexo II.

A continuación, presentamos el primer plano factorial este AFC realizado sobre los perfiles de distribución de las seis clases de respuestas al interior de los nueve niveles de estudio (Gráfico 8.2).

Gráfico 8.2: Primer plano factorial del AFC de los perfiles de modalidades de respuesta en los NEM para la Tarea I1.



Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática (Gráfico 8.1), puede observarse que en los perfiles de secundaria y de Educación Física predominan la *ajenidad*, el pensamiento *finitista* (no justificado) y pensar el *infinito como indefinido*. La Tabla 8.4 sintetiza las asociaciones de perfiles de clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, encontradas mediante este AFC (ver Gráfico 8.2).

Tabla 8.4: Grupos de asociaciones entre clases de respuestas y modalidades de NEM en el AFC en la Tarea I1

Asociaciones de clases de concepción		NEM
Infinitista	Infinito cardinal	MA
	Único Infinito	MA y MI
Infinito como indefinido		3ro, 4to y BA. Presente en todas
Finitista	Finitista explícita	MI, BI y BA
	Finitista no justificada	EFI y 5to
Ajenidad		3ro, EFA y EFI

Mientras que entre los y las estudiantes de Biología, sea iniciales o avanzados/as en la carrera, predomina el pensamiento *finitista explícito*. La concepción *único infinito* la expresan en todos los NEM, sin embargo, se incrementa en estudiantes de Matemática. Por último, la visión de *infinito cardinal* solo la manifiestan estudiantes de Matemática, principalmente en MA.

8.1.3. Síntesis de resultados de la Tarea I1.

Como dijimos, el objetivo de la Tarea I1 fue estudiar qué concepciones de infinito operan en los y las estudiantes cuando comparan colecciones infinitas numerables ordenadas. Esta Tarea propone comparar las (cantidades de) cifras decimales de dos números periódicos. Preguntando ¿dónde hay más "3"? en $0,\hat{3}$= 0,33333…? o en $0,\widehat{32}$= 0,3232323232…?, y luego pide justificar la respuesta.

Una amplia mayoría de estos/as estudiantes (95%) realizaron (de alguna manera) la tarea, por lo que consideramos, en principio, que ésta le resultó muy accesible. Siendo la opción más elegida la correcta desde un punto de vista cardinal: *hay igual cantidad*. Sin embargo, luego de analizar las justificaciones asociadas a esta elección, encontramos tres tipos de argumentaciones: (i) aquellas en que los decimales *no se consideran infinitos*, es decir los y las estudiantes contaron las (cinco) cifras "3" en cada número del ejemplo textual; (ii) aquellas en las que se expresa que en ambos números la cantidad de "3" *es igual por ser infinito*s y (iii) las que justifican por *cardinalidad*, es decir por relación uno a uno entre los "3" de ambas colecciones. Siendo entonces sólo estas últimas las respuestas correctas desde un punto de vista cardinal.

Hemos encontrado que esta tarea muestra la paradoja de que los y las estudiantes pareciesen sentirse cómodos con la tarea e incluso elijen una opción “correcta”, pero al justificar sus respuestas evidencian que las concepciones de infinito que están operando son muy lábiles y puede que contradictorias.

Considerando las respuestas y sus justificaciones y si bien en principio habíamos considerado la tarea como accesible, un alto porcentaje (21%) de la población, principalmente estudiantes con menor estudio de matemática responden que *no saben* o *algún aspecto irrelevante,* lo que hemos interpretado como *ajenidad* frente al inifnito.

Detectamos un primer nivel de profundidad de las concepciones sobre infinito que operan en las respuestas a esta tarea, en el 27% de la población que manifiesta una concepción *finitista*, en el sentido de que, al comparar, consideran en forma no explicada (6%) o explícitamente (21%) lo que ocurriría si se comparan colecciones finitas (considerando finitas cifras decimales) y hemos denominado concepción *finitista no explicada* y *finitista explícita* respectivamente. Esta última asociada a estudiantes ingresantes a Matemática y Biología y a estudiantes avanzados/as de Biología.

La concepción *finitista explícita* en la que los y las estudiantes justifican sus respuestas alegando lo que ocurre en colecciones finitas e imaginan qué ocurriría con un número muy grande (aunque finito) de decimales es congruente con la concepción del infinito como identificado con “un número muy grande”. También encontramos en esta categoría algunas respuestas, en las que media una concepción de utilidad de los números decimales, expresando, por ejemplo, que “se toman tantos decimales como hagan falta”, fundamentalmente asociada a estudiantes de Biología, que estarían denotando una visión utilitaria de los números reales y sería “intencionalmente finitista”.

Luego encontramos una concepción de *infinito como indefinido* que tiene una fuerte presencia en esta tarea (27%). Aquí como en otras ocasiones, dependiendo de la tarea, los y las estudiantes muestran esta concepción que indica la imposibilidad de operar con procesos u objetos infinitos y que podría interpretarse como una aproximación a infinito, es decir ya el problema no le es ajeno y tampoco es tratado como finitista, sino que infinito es interpretado como indefinido (sin límites, sin reglas, sin fin) en un sentido etimológico.

Por último y avanzando en la profundidad de las concepciones, observamos una concepción *infinitista*, en el 25% de la población, la mayoría universitarios. Estos estudiantes dieron repuestas infinitistas en dos formas, en una de ellas consideran que existe una *única cantidad infinita* (21% de la población), es decir hay la misma cantidad de cifras 3 porque ambos son infinitos. Mientras que el otro 4% (solo estudiantes de matemática) considera la posibilidad de comparar colecciones infinitas mediante cardinalidad, que denominamos *infinito cardinal,* justificando que hay la misma cantidad infinita de cifras 3 realizando una correspondencia uno a uno.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.5, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

8.2. Tarea I2[38]: El infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números

El objetivo de la Tarea I2 es estudiar cómo los y las estudiantes comprenden el infinito cardinal en un contexto de la comparación de conjuntos infinitos de números.

El Cuadro 8.2 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

A continuación aparecen parejas de conjuntos numéricos. Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números? ¿Por favor, explicarías por qué pensás así en cada caso?

Capicúas	No capicúas	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Los números primos	Los números pares	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Naturales	Enteros	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Enteros	Racionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Racionales	Irracionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?

Cuadro 8.2. La consigna utilizada para la Tarea I2 en el cuestionario. La respuesta, *son igual de abundantes* es la correcta para las cuatro primeras parejas de conjuntos y *el segundo es más abundante* para la última.

Esta tarea consiste en cinco ítems cada uno con una pareja de conjuntos numéricos a comparar, por lo que aporta como información, para cada estudiante y cada ítem una respuesta de elección con cinco opciones (*el primero es más abundante; el segundo es más abundante; son igualmente abundantes; son*

---

[38] Esta tarea fue analizada en: Montoro, V., Scheuer, N. y Echeverría, M. (2016).

incomparables y *no sé*) y una justificación de la opción elegida. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado 4.1.3 del Capítulo 4.

8.2.1. Categorización de las respuestas a la Tarea I2

Como adelantamos, la tarea demandó a los y las participantes que comparasen cinco parejas de conjuntos infinitos de números indicando cuál es más abundante. Las parejas de conjuntos propuestas fueron: A. capicúas/no-capicúas; B. primos/pares; C. naturales/enteros; D. enteros/racionales y E. racionales/irracionales y luego que justificarán su elección. De modo que la tarea consiste en cinco ítems cada uno con una pareja de conjuntos numéricos a comparar. Cada ítem de la tarea, con la elección de una de cinco opciones y un pedido de justificación de cada la elección. Consideramos que las respuestas de elección no serán por sí mismas concluyente por lo que para acceder de forma más completa a las comprensiones de los y las estudiantes hemos de considerarlas en forma conjunta con sus respectivas justificaciones.

Distribución de frecuencias de las clases de respuestas de elección

Encontramos que 87 estudiantes (principalmente de Educación Física) resolvieron menos de seis de las diez demandas de la tarea, es decir que un 30% de los y las estudiantes de esta población no realizaron esta tarea, lo que la muestra como más difícil que la anterior. La distribución de la no respuesta en los NEM puede observarse en la Tabla AII.10 del Anexo II. Los siguientes resultados se informan relativos a los 220 estudiantes que respondieron mayormente a la tarea (es decir, a seis o más demandas).

Consideramos la opción *no sé* y la falta de respuesta conjuntamente. Esta situación no es muy numerosa pues se retuvieron los y las estudiantes que realizaron, al menos, el 60% de la tarea. La indecisión y la falta de respuesta se mantuvieron en un nivel estable en torno al 10% para las primeras cuatro parejas de conjuntos a comparar, duplicándose para la comparación racionales/ irracionales.

La siguiente Tabla 8.5 muestra el porcentaje de la población que elige cada opción de respuesta cerrada para cada pareja a comparar.

Tabla 8.5: Porcentajes de elección de opciones en cada comparación. La opción correcta aparece subrayada.

	A (cap/no-cap)	B (primo/par)	C (nat/ent)	D (ent/rac)	E (rac/irrac)
El primero es más abundante	3%	5%	13%	10%	24%
El segundo es más abundante	46%	42%	47%	45%	17%
Son igual de abundantes	27%	33%	25%	24%	24%
No se pueden comparar	15%	12%	7.%	10%	16%
No sabe-No contesta	9%	8%	8%	11%	19%

Observamos que las respuestas más populares son las que coinciden con una visión finitista, manteniéndose en un segundo lugar de popularidad las respuestas correctas desde un punto de vista matemático. Sin embargo, debemos analizar las justificaciones que acompañan cada opción para comprender las concepciones que están operando al elegirla.

Categorización de las justificaciones de la Tarea I2

Las justificaciones de la opción elegida, brindadas por los y las estudiantes constaban en todos los casos de una sola frase y en ocasiones de muy pocas palabras (ej.: *son infinitos*) por lo que fue posible realizar una categorización identificando cualitativamente expresiones similares. Presentamos en la Tabla 8.6 una breve descripción de cada una de las seis categorías de justificaciones determinadas y ejemplos de justificaciones literales de los y las estudiantes.

Tabla 8.6. Caracterización de las justificaciones dadas en la Tarea I2. Ejemplos, para los que se indica el NEM del o de la participante

Caracterización de las justificaciones	**Respuesta de un/una estudiante de…**
No saben - Reiteran la opción cerrada. Manifiestan no saber el porqué de su elección, o la reiteran o parafrasean o expresan que su elección es obvia o evidente.	EFI. *No sé cómo explicarlo.* 3ro*: Porque hay más pares* (eligiendo más abundantes pares que primos).
Confunden o no conocen los conjuntos numéricos. Evidencian que no conocen o confunden los conjuntos en cuestión.	EFI: *Porque los naturales son del 1 al 10 y los enteros pueden ser del 11 o más. Porque es uno impar y otro par* (por primos/pares).
Razones finitistas. Evidencian coherencia con pensar en una colección finita o acotada. Dan a entender que los números que cumplen con ciertas condiciones son más difíciles de encontrar.	BI: *Los números pares son más seguidos que los primos.* 5to: *Porque entre 2 enteros consecutivos hay muchos racionales.*
Ambos son infinitos. Hacen referencia a que ambos conjuntos son infinitos.	MI: *Son los dos conjuntos infinitos.*
Inclusión. Hacen referencia a que un conjunto está incluido en el otro o que posee más tipos de números que el otro.	BA: *Porque dentro de los racionales están los enteros.* *MI. En los enteros están positivos y negativos, en naturales solo positivos.*
Cardinalidad. Expresan que ambos conjuntos son numerables (o no-numerables) o que se pueden poner en correspondencia biunívoca o no, y/o que tienen el mismo cardinal.	MA: *Ambos son conjuntos infinitos y sus elementos se pueden aparear con los del otro conjunto.* MA: *Los conjuntos N y 8. son infinitos numerables: tienen cardinal Alef cero.*

En la Tabla 8.7 figuran los porcentajes en que se presentaron las categorías de justificación para cada par de conjuntos a comparar. La inseguridad es mucho más elevada para la petición de justificación que para la de elección, registrándose entre el 29% y 50% de los y las estudiantes, siendo más elevadas para la pareja racionales/irracionales, seguida por primos/pares. Las justificaciones basadas en la cardinalidad son excepcionales para todas las parejas de conjuntos.

Tabla 8.7: Distribución de los modos de justificación en la Tarea I2 (N=220).

	A (cap/no-cap)	B (prim/par)	C (nat/ent)	D (ent/rac)	E (rac/irrac)
No saben - Reiteran la opción cerrada.	29%	40%	27%	35%	50%
Confunden los conjuntos numéricos	17%	7%	17%	4%	10%
Razones finitistas	33%	24%	0%	13%	11%
Ambos infinitos	17%	26%	18%	17%	18%
Inclusión	0%	0%	34%	27%	8%
Cardinalidad	4%	3%	4%	4%	4%

Asociaciones de los modos de respuesta a las diez demandas de la Tarea I2

Realizamos un AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus respuestas de opción y clase de justificación a cada ítem y su NEM. Se consideraron los 220 estudiantes que respondieron mayormente la tarea. Este AFCM nos permitió observar asociaciones entre las respuestas de opción y justificaciones a los cinco ítems de la tarea en un/a mismo/a estudiante y encontrar grupos de estudiantes que respondieron en forma similar a diez demandas, de manera de poder detectar formas de pensar la comparación de conjuntos infinitos de números.

Las variables activas en el AFCM fueron diez: cinco variables *de elección de opciones* (A, B, C, D y E), cada una con cinco modalidades, y cinco justificaciones (JA, JB, JC, JD y JE), cada una con seis modalidades (Tabla 8.8). Como variable ilustrativa se proyectó el NEM con sus nueve modalidades.

Tabla 8.8: Variables y modalidades activas del AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus respuestas de opción y clase de justificación a cada ítem en la Tarea I2.

Comparación	**A: Capicúas/no-capicúas**	**B: Primos/Pares**	**C: Naturales / Enteros**	**D: Enteros / Racionales**	**E: Racionales / Irracionales**
Modalidades de opción	**Variable A**	**Variable A**	**Variable C**	**Variable D**	**Variable E**
	A1. Capicúas es más abundante	B1. Primos es más abundante	C1. Naturales es más abundante	D1. Enteros es más abundante	E1. Racionales es más abundan-te
	A2. No-capicúas es más abundante	B2. Pares es más abundante	C2. Enteros es más abundante	D2. Racionales es más abundante	E2. Irracionales es más abundan-te
	A3. Son igual de abundantes	B3. Son igual de abundantes	C3. Son igual de abundantes	D3. Son igual de abundantes	E3. Son igual de abundantes
	A4. No se pueden comparar	B4. No se pueden comparar	C4. No se pueden comparar	D4. No se pueden comparar	E4. No se pueden comparar
	A5. No sabe / No contesta	B5. No sabe / No contesta	C5. No sabe / No contesta	D5. No sabe / No contesta	E5. No sabe / No contesta

	Variable JA	Variable JB	Variable JC	Variable JD	Variable JE
Modalidades de Justificación	JA1. No saben - Reiteran la opción cerrada.	JB1. No saben - Reiteran la opción cerrada.	JC1. No saben - Reiteran la opción cerrada.	JD1. No saben - Reiteran la opción cerrada.	JE1. No saben - Reiteran la opción cerrada.
	JA2. Confunden los conjuntos numéricos	JB2. Confunden los conjuntos numéricos	JC2. Confunden los conjuntos numéricos	JD2. Confunden los conjuntos numéricos	JE2. Confunden los conjuntos numéricos
	JA3. Razones finitistas	JB3. Razones finitistas	JC3. Razones finitistas	JD3. Razones finitistas	JE3. Razones finitistas
	JA4. Ambos infinitos	JB4. Ambos infinitos	JC4. Ambos infinitos	JD4. Ambos infinitos	JE4. Ambos infinitos
	JA5. Inclusión	JB5. Inclusión	JC5. Inclusión	JD5. Inclusión	JE5. Inclusión
	JA6. Cardinalidad	JB6. Cardinalidad	JC6. Cardinalidad	JD6. Cardinalidad	JE6. Cardinalidad

En los Gráficos 8.6 y 8.7 pueden observarse los dos primeros planos factoriales de este AFCM.

Gráfico 8.6. Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus respuestas a los cinco ítems de esta Tarea I2 y sus NEM.

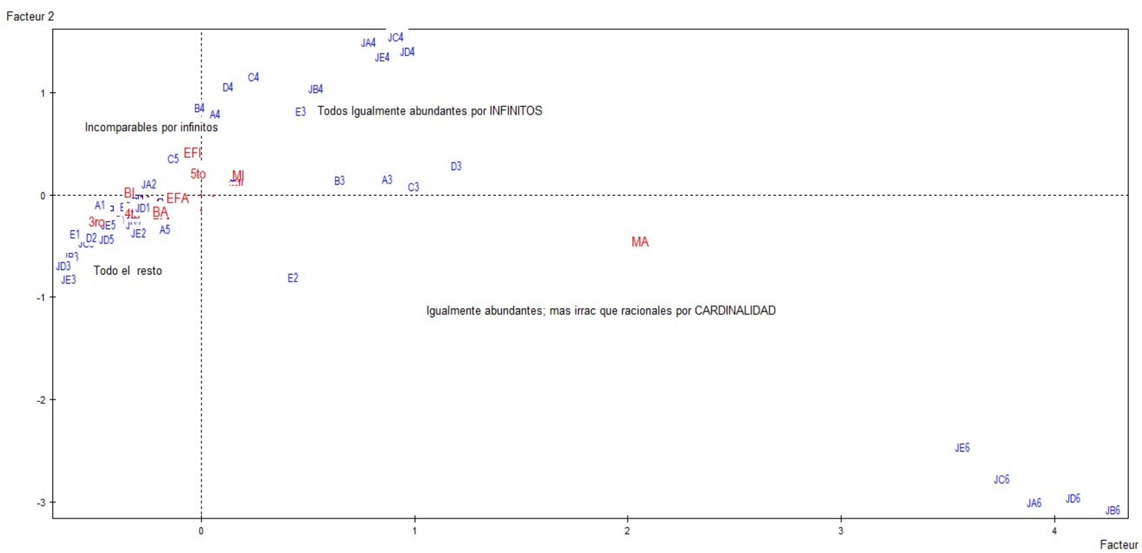
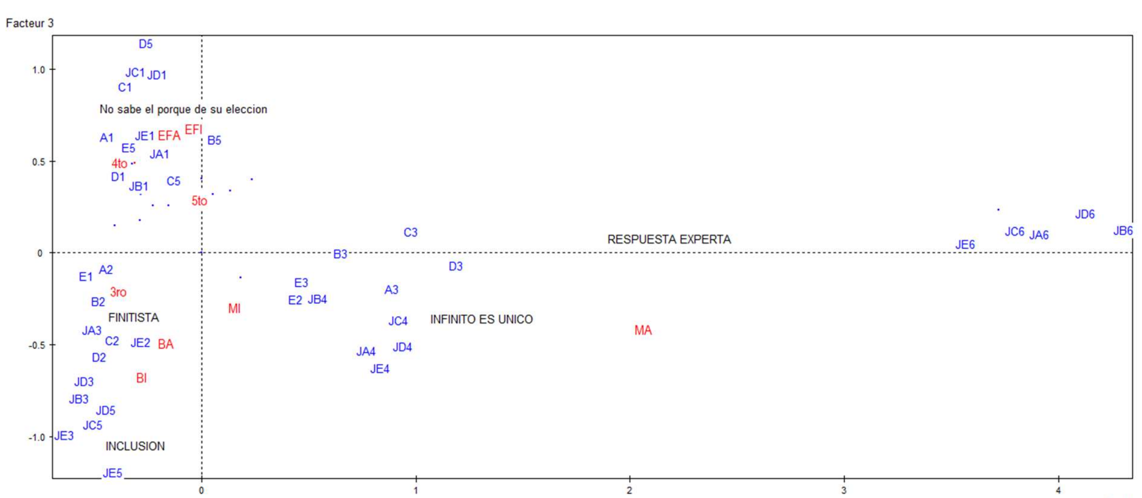


Gráfico 8.7. Segundo plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus respuestas a los cinco ítems de esta Tarea I2 y sus NEM.



En estos planos puede observarse que el principal factor de variabilidad corresponde a respuestas *infinitistas*, asociadas principalmente a MA, oponiéndose al resto de respuestas.

El segundo factor discrimina entre las respuestas *infinitistas,* separando las que están justificadas por *cardinalidad* de aquellas a las que se justifica mediante la consideración de un *único infinito*; mientras que, al interior del resto de tipos de respuestas, separa las modalidades en que se establece que *no es posible comparar* (incomparables) del resto de las modalidades.

El tercer factor discrimina al interior de las modalidades no-infinitistas, ordenándolas desde aquellas en las que *no se justifica la elección*; siguiendo por las que *comparan por inclusión* los conjuntos naturales, enteros y racionales, pero suelen *no justificar o confundirse con irracionales*; hasta las respuestas netamente *finitistas* en las parejas en las que no se puede comparar por inclusión.

Clasificación de estudiantes según sus modos de respuesta a la Tarea I2

A continuación, presentamos las clases obtenidas en la clasificación jerárquica ascendente, posterior al AFCM antes descripto. Informaremos, para cada clase, la cantidad de estudiantes y porcentaje de la población que representa, respuestas de elección y categorías de justificación asociadas y modalidades de NEM relacionadas particularmente.

Haremos también una caracterización de las clases según las ideas relacionadas con los modos de respuesta asociados a cada una de ellas y su relación con las concepciones sobre infinito. Por último, ilustraremos cada clase con respuestas y justificaciones literales (*en itálica*). En los Gráficos 8.6 y 8.7 pueden observarse las asociaciones de respuesta de cada clase en los planos factoriales. Reservamos la numeración Clase I2.1 para una clase conformada por quienes mayormente no respondieron a la tarea.

Clase I2.2. *Los enteros como modelo de inclusión.* N=53 (17%). Modalidades asociadas: C2 - D2 - JC5 - JD5 - JE5 - JE2.

Se comparan por inclusión los naturales, enteros y racionales, es decir las parejas donde figuran los enteros. Mientras que en las otras tres parejas las respuestas están muy repartidas. Algunos estudiantes de esta clase parecen no conocer los capicúas ni los irracionales y algunos tienden a no justificar su elección finitista para capicúas/no-capicúas, primos/pares y racionales/irracionales. No hay modalidad de NEM específica asociada.

Respuestas literales de un o una estudiante de 3ro año.

Más no-capicúas que capicúa / *porque son más los números no capicúas*.

Más pares que primos / *no sé.*

Más enteros que naturales / *porque los naturales están dentro de los enteros.*

Más racionales que enteros / *porque los racionales abarcan a los enteros.*

Más racionales que irracionales / *porque abarcan más números y más conjuntos numéricos.*

Clase I2.3. *Finitista no justificada*. N=84 (28%). Modalidades asociadas: JD1 – JC1 – JE1 – JB1 – D5 – C1 – D1 – JC2 – JD1.

Eligen respuestas finitistas y justifican manifestando no saber el porqué de la elección o reiteran la opción cerrada (por ejemplo, eligen: son los enteros más abundantes que los naturales justificando porque son los enteros son más abundantes) y es común que no respondan cuando intervienen los racionales. Están los pocos que eligen más naturales que enteros y más enteros que racionales. El 70% de la clase son alumnos de secundaria, en particular el 30% provienen de 4to año.

Respuestas de un o una estudiante de 4to año.

Más no-capicúas que capicúas / *porque hay más números no capicúas que capicúas.*

Igualmente abundante pares que primos / *porque son la misma cantidad*.

Enteros y naturales son incomparables / *porque las dos clases de números son infinitos.*

Enteros/racionales no contesta ni justifica.

Más irracionales que racionales / *porque creo que hay más cantidad.*

Clase I2.4. *Finitista explícita*. N=41 (14%). Modalidades asociadas: D2 – B2 – E1 - D2 – JE3 - JD3– JB3 – JD3 - JC5.

Se eligen más no-capicúas que capicúas; más pares que primos y, en menor medida, más racionales que irracionales, posiblemente porque consideren que estos últimos son "más raros". Se dan justificaciones por razones finitistas, salvo en el caso de naturales/enteros, que se justifica por inclusión. Manifiestan un tipo de comprensión finitista, apelando a lo que ocurre en un intervalo finito o acotado de números. Esta clase no presenta modalidades de NEM asociadas.

Respuestas literales de un o una estudiante de BI.

Más no-capicúas que capicúa / *ya que cada una cierta cantidad de no capicúas hay uno capicúa por lo tanto la cantidad de no capicúas es mayor.*

Más pares que primos / *porque por cada número par no hay un primo, sino que cada algún par aparece uno primo por lo tanto los pares son más abundantes.*

Más enteros que naturales / *porque no solo posee infinitos números positivos, sino que también los posee en negativos*.

Más racionales que enteros / *porque entre dos números enteros hay infinitos racionales entre ellos. Por lo tanto, los fraccionales (por fracciones) son más abundantes.*

Más irracionales que racionales / *porque por cada número racional hay infinitos irracionales por lo tanto estos son más abundantes.*

Clase I2.5. *Infinito como indefinido*. N=10 (4%). Modalidades asociadas: D4 - B4 - C4 - D4 - E4 – JD4 – JB4 – JE4 – JD4 –JC4.

Se elige la opción incomparable y se justifica porque son infinitos. Evidencian una idea de que lo infinito es equivalente a lo sin límite, sin reglas, indefinido. Participan de esta clase el 30% de 5to y el 60% de los universitarios distribuidos en las tres carreras.

Respuestas literales de un o una estudiante de 5to año.

Responde en las cinco comparaciones que no se pueden comparar / *porque la cantidad de números es infinita así que no se podría saber exactamente cuál es más abundante.*

Clase I2.6. *Único infinito* N=24 (8%). Modalidades asociadas: D3 - B3 - C3 - D3 - E3 – JD4 – JC4 JD4 – JE4 – JB4.

Eligen igualmente abundantes y justifican su elección por ser ambos conjuntos infinitos en la mayoría de las comparaciones. El 35% de MI está en esta clase y es menor, pero notable, la presencia de MI.

Respuestas literales de un o una estudiante de MI.

Igualmente, abundantes para las cinco comparaciones. Justificando en todos los casos con la frase: *ambos son infinitos, aunque sean conjuntos densos o discretos.*

Clase I2.7. *Infinito cardinal*. N=8 (3%). Modalidades asociadas: JD6 – JC6 – JB6 – JD6 – JE6- D3 - C3 - E2 - D3 - B3.

Eligen, de forma correcta matemáticamente que todos los conjuntos son igualmente abundantes en los conjuntos infinitos numerables y que hay más irracionales que racionales. Sus justificaciones son también por cardinalidad. Todos son estudiantes de Matemáticas, mayoritariamente de MA.

Respuestas literales de un o una estudiante de MA.

Igualmente, abundantes para capicúas/no-capicúas; primos / pares; naturales / enteros y enteros/racionales. Justificando en todos estos casos con la frase: *son numerables.*

Más irracionales que racionales / *porque tienen distinta cardinalidad (Alef0).*

Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea I2

En esta etapa del análisis reincorporamos a los 87 estudiantes que respondieron a menos de 60% de la tarea, constituyendo la **Clase I2.1**, a la que denominamos *ajenidad,* interpretando que estos/as estudiantes no se apropian del problema planteado. Teniendo en cuenta que en el resto del cuestionario estos estudiantes habían realizado la mayoría de las tareas, interpretamos el hecho de no contestar esta tarea específicamente, como un comportamiento particular al encontrarse frente a un tema desconocido (o conflictivo) como es el de la comparación de conjuntos infinitos

En síntesis, las siete clases presentan un gradiente de concepciones que en un extremo abarca la *ajenidad* y la concepción de *infinito como indefinido* (co se pueden comparar por infinitos). Luego, como un nivel intermedio, encontramos tres tipos de pensamiento *finitista* (en el sentido de estar eligiendo las opciones que manifiestan lo que ocurre en conjuntos finitos o intervalos acotados de números): aquellas donde mayormente se compara por inclusión (considerando lo que ocurriría en conjuntos finitos) y se toma a los *enteros como modelo de inclusión;* aquellas en que se elige opciones finitistas, pero no se justifica dicha elección (*finitista no justificada*) y por último, aquellas en que se apela explícitamente a lo que ocurre en un intervalo finito o acotado de números (*finitista explícita).* Por último, en el otro extremo de este gradiente, tenemos las respuestas *infinitistas*, aquellas en las que se considera un *único infinito*, es decir todos los conjuntos son igualmente infinitos y en las que se compara por cardinalidad (*infinito cardinal*).

En la Tabla 8.9 encontramos una síntesis de las clases de concepciones sobre la cardinalidad en el contexto de comparación de conjuntos infinitos de números y porcentaje de la población que representa la clase de respuesta.

Tabla 8.9. Concepciones sobre infinito identificadas y etiquetas de las clases de respuestas a la Tarea I2 y porcentaje de la población en cada clase.

Concepción	Clases de respuesta	%
Ajenidad (28%)	I2.1: Ajenidad	28%
Finitista (58%)	I2.2. Los enteros como modelo de inclusión.	17%
	I2.3. Finitista no justificada.	28%
	I2.4. Finitista explícita.	13%
Infinito como indefinio (3%)	I2.5. Infinito como indefinido.	3%
Infinitista (11%)	I2.6. Único infinito.	8%
	I2.7. Infinito cardinal.	3%

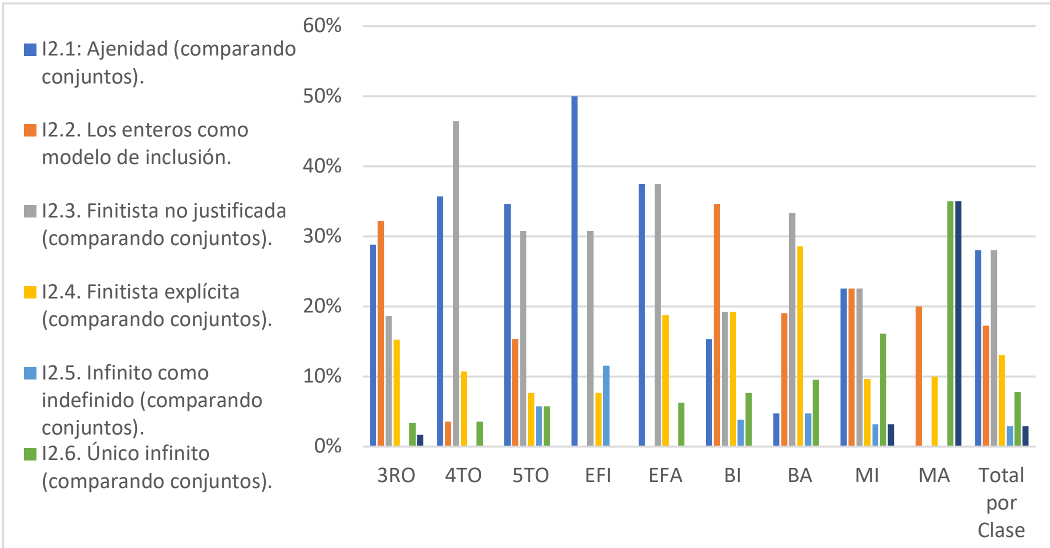
8.2.2. Perfiles de respuestas a la Tarea I2 según el nivel de estudio

Distribución de las clases de respuestas en los distintos NEM

En la Gráfico 8.8 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada clase de respuestas en cada nivel de estudio y en la población en general para la Tarea I2.

Observamos la *ajenidad* como característica de EFI y *finitista no justificada* de 4to. En cada perfil se observa una diversidad de clases de respuesta. Vemos que en los perfiles de secundaria predominan las primeras clases y en MA las dos últimas (*único infinito* e *infinito cardinal*).

Gráfico 8.8: Distribución de los modos de respuesta dentro de cada NEM en la Tarea I2.

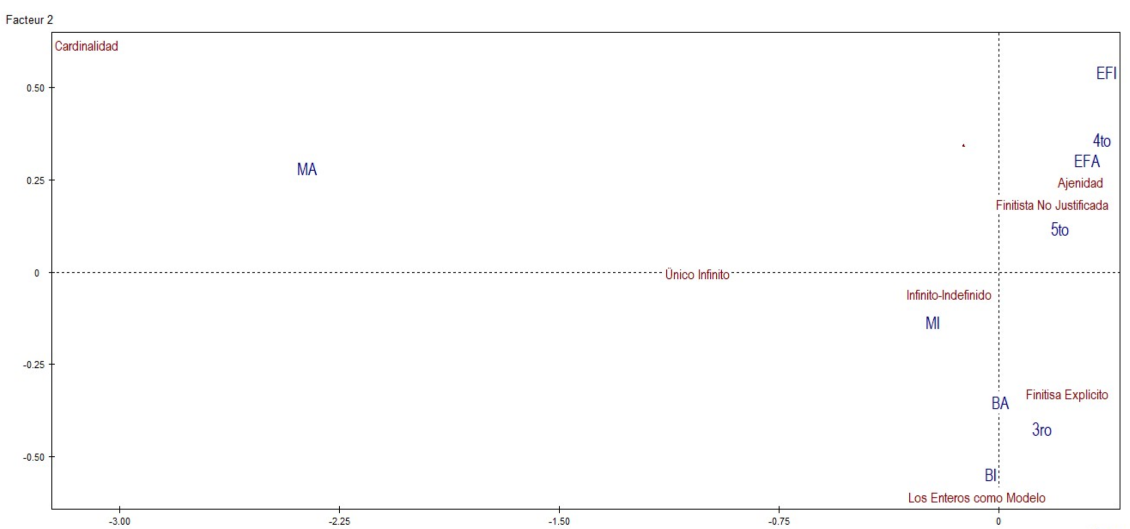


Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea I2 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases de respuestas obtenidas (Tabla 8.9) respecto de las modalidades de NEM a fin de observar si existen perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.11, en el Anexo II.

A continuación, presentamos el primer plano factorial del AFC realizado sobre los perfiles de respuestas a la Tarea I2 al interior de los nueve niveles de estudio (Gráficos 8.8).

Gráfico 8.9: Primer plano factorial del AFC de los perfiles de modalidades de respuesta en los NEM para la Tarea I2.



La Tabla 8.10 sintetiza las asociaciones de los perfiles de clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados detectadas en el AFC.

Tabla 8.10: Asociaciones entre clases de respuestas y modalidades de NEM en el AFC.

Asociaciones de clases de concepción		NEM
	Infinito cardinal	MA
Infinitista	Único infinito	MA y MI
Infinito como indefinido		EFI, 5to, BI, BA y MI
	Los enteros como modelo de Inclusión	BI y 3ro
Finitista	Finitista explícita	
	Finitista no justificada	5to, MI, BA y BI.
Ajenidad		EFA, EFI, 3ro, 4to y 5to

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática (Gráfico 8.8), encontramos que los grupos de NEM, 5to y MI son los NEM que poseen perfiles más similares al perfil medio de la población. Observamos que los perfiles 3ro, 4to, 5to, EFI y EFA se caracterizan por la *ajenidad.*

Los NEM de secundaria están bastante distribuidos fundamentalmente entre las concepciones *finitista no justificada* o *infinito como indefinido* y particularmente 3ro *con enteros como modelo de inclusión*. Luego tenemos los perfiles 5to; BI, BA y MI que podríamos decir son *finitistas* y consideran a los *enteros como modelo de inclusión.* Por último, los perfiles MI y MA podrían decirse *infinitistas.* Para MA se encuentra la especial asociación con comparación por *cardinalidad.*

8.2.3. Síntesis de los resultados de la Tarea I2.

Como vimos, el objetivo de la Tarea I2 fue estudiar cómo comprenden los y las estudiantes la comparación de conjuntos infinitos de números (no presentados explícitamente como infinitos). Recordemos que las parejas de conjuntos a comparar fueron: A.capicúas/no-capicúas; B.primos/pares; C.naturales/enteros; D.enteros /racionales y E.racionales/irracionales.

Un primer acercamiento global a la distribución de respuestas informa que el 28% de los participantes no completaron esta tarea, en su mayor parte alumnos/as de escuela secundaria o de la carrera de Educación Física. Todos los y las estudiantes avanzados de Matemática la resolvieron completamente. Parece, por tanto, que en esta tarea el conocimiento matemático ha influido en la disposición a responder.

La distribución de las respuestas *no sabe/no contesta* se produjo de forma desigual entre las parejas de conjuntos a comparar. La mayor parte (19%) se ubicó en la pareja racionales/irracionales, que a su vez presentó un mayor número de elecciones incorrectas y de falta de justificaciones, todo lo cual indica que fue la de mayor dificultad. Esto puede deberse a que los irracionales, como vimos en los capítulos anteriores no son muy conocidos por buena parte de nuestra población, se enseñan más tarde en la escuela y presentan una notable dificultad epistemológica.

Si consideramos las cuatro primeras parejas de conjuntos (todas menos racionales/irracionales), la mayoría de los y las estudiantes (entre 42 – 47% según la pareja) eligieron la opción *finitista*. Para la pareja racionales/irracionales este porcentaje se reparte entre la elección *más racionales que irracionales* y *más irracionales que racionales*. Podemos interpretar la respuesta: *más racionales que irracionales* como finitista, dado que se podría estar considerando a los irracionales como uno pocos números “raros”.

La mayor parte de los y las estudiantes no explicitó el porqué de su elección, o se limitó a reiterarla, parafrasearla o expresar que su elección es obvia o evidente. Esta opción de justificación fue tomada por el 50% de los y las estudiantes en el caso de la pareja racionales/irracionales, siendo el menor porcentaje (27%) para los naturales/enteros. En todas las parejas de conjuntos, la petición de justificar se presentó como más difícil que comparar.

En el caso de las justificaciones *por inclusión* de los naturales, enteros y racionales, la mayoría de los y las estudiantes hicieron referencia a que *un conjunto está incluido en el otro* o *que abarca más tipos de números que el otro,* lo cual es consistente con un punto de vista finitista ya que respeta el principio *el todo es más que la parte*, válido para conjuntos finitos. Siendo particularmente notable el porcentaje de justificaciones por inclusión para naturales/enteros. Sin embargo, en las parejas de conjuntos a comparar que no se relacionan a través de la inclusión las justificaciones se repartieron principalmente entre *argumentos finitistas* y del tipo *único infinito*. Las justificaciones por *cardinalidad* fueron minoritarias, tan solo 3%.

Al analizar mediante la clasificación los modos en que los y las estudiantes respondieron (tanto al elegir como al justificar) en todas las parejas de conjuntos, encontramos, también en esta tarea un gradiente de comprensiones que tienen que ver en primer lugar con una *ajenidad* frente a la tarea o cierta resistencia a operar con infinito, en un nivel intermedio comprensiones *finitistas* y por último una visión *infinitista.*

Ordenando las clases de respuestas de esta tarea según este gradiente de profundidad, tendremos en primer lugar la *ajenidad* frente a la tarea (estudiantes que no contestan o manifiestan no saber o que no se pueden comparar sin más justificación (28%), asociada principalmente a estudiantes de escuela secundaria y de Educación Física. También en esta tarea algunos/as estudiantes consideraron que con infinito no es posible comparar es decir piensan el *infinito como indefinido*, sin embargo, en esta tarea fueron muy pocos/as (3%), y en general no justificaron su respuesta. Por esa razón, no la hemos asociado a un acercamiento a una visión infinitista (potencial), sino más bien a la ajenidad.

En la visión *finitista*, encontramos tres clases: La clase más numerosa (28%), asociada a estudiantes de secundaria y Educación Física, está constituida por estudiantes que eligen una opción *finitista sin explicación*. En las otras dos clases finitistas se compara (y justifica) por inclusión la pareja natural/enteros. Una de estas clases, los *enteros como modelo de inclusión* (17% de los estudiantes), se caracteriza por comparar (y justificar) por inclusión los conjuntos numéricos naturales, enteros y racionales mientras que suelen confundir o no conocer los primos y los irracionales. Esta última clase está asociada a 3er año de la secundaria, curso en el que se estudia principalmente los enteros y racionales como conjuntos numéricos, notemos que este modo de pensar es compatible con la visión escolar en la cual los enteros son los naturales a los que se les agrega el cero y los negativos. La tercera clase finitista (14%) evidencia una concepción *finitista explícita*, donde, salvo para los naturales/enteros (en las que se da una justificación de inclusión), se dieron respuestas coherentes con lo que ocurriría en un conjunto finito de números. Está asociada a los y las estudiantes de Biología (BA y BI). En todas estas versiones *finitistas* el principio del *todo es mayor que la parte* parece estar muy arraigado e indica un modo de operar con los conjuntos infinitos como si fueran finitos. En este sentido la mayoría de los participantes de este estudio podrían ser considerados *finitistas*.

Por último, dos clases, poco numerosas, se corresponden con visiones *infinitistas,* en las cuales se piensa a la cardinalidad de los conjuntos infinitos de dos maneras: como una *única cantidad infinita* o asociada al *infinito cardinal*. La clase *único infinito* (8%) se caracteriza por afirmar que todos los conjuntos son igualmente abundantes por ser infinitos y está asociada con estudiantes de MA, con notable presencia de estudiantes de MI y muy pocos estudiantes de secundaria. Solo el 3% de la población comparó por *cardinalidad* (infinito cardinal), siendo ésta la respuesta experta. Esta clase está asociada únicamente con estudiantes de MA.

El bajo porcentaje de estudiantes infinitistas de este estudio se debe posiblemente a que en esta tarea de comparar conjuntos infinitos de números está planteada en un contexto de conjuntos numéricos que debido al estudio escolar de los mismos puede llevar a comparar por inclusión, no por cardinalidad, lo que da lugar a que el grupo de estudiantes infinitistas sea sensiblemente menor que en otros contextos.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.6, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

8.3. Tarea I3[39]: Representación decimal infinito-periódico de un número

El objetivo de la Tarea I3 es estudiar cómo comprenden los y las estudiantes la representación decimal infinito-periódica de un número y qué concepciones sobre infinito operan en la interpretación de esta representación. Así mismo la relación de esta con el orden de los reales. El Cuadro 8.3 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

Comparando el número $0,\widehat{9} = 0,9999...$ con 1:

- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es mayor que 1
- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es menor que 1
- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es igual a 1
- □ son incomparables:
- □ otra posibilidad:
- □ no sé

¿Por qué pensás que esto es así?

Cuadro 8.3. La consigna utilizada para la Tarea I3 en el cuestionario. La respuesta $0,\hat{9}$ *es igual a 1* es la correcta desde el punto de vista matemático usual

Esta tarea aporta como información, para cada estudiante, una respuesta de elección, entre varias opciones y una justificación para la afirmación elegida con formato de pregunta abierta. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado. 4.1.3 del Capítulo 4.

8.3.1. Categorización de las respuestas a la Tarea I3

Como dijimos, en esta tarea se contó, para cada estudiante, con la elección de una de cuatro opciones ($0,\hat{9}$ *es menor a 1*; $0,\hat{9}$ *es igual a 1*; *son incomparables* y *no sé*) y la respuesta a una pregunta abierta a modo de justificación de la opción elegida.

Distribución de frecuencias de las clases de respuestas de elección

El 98% de los y las estudiantes realizaron la Tarea I3. Quienes eligieron la opción *no sé* no justificaron esta elección, por lo que consideramos que esta opción no brinda más información que la falta de respuesta, de modo que las consideramos

[39] Varios/as autores/as han usado la misma tarea en sus estudios (Cornu, 1991; Katz y Katz 2010; Tall, 1991, 2009). En todos estos trabajos $0,\hat{9}$ *es menor a 1* se presenta como la respuesta más intuitiva.

conjuntamente. Tenemos entonces que 24 estudiantes (8%) no contestan o eligen *no sé* y no justifican.

La siguiente tabla (Tabla 8.11) muestra la frecuencia de elección de cada opción de respuesta cerrada y el correspondiente porcentaje de la población que representa.

Tabla 8.11: Frecuencia y porcentajes de elección de opciones de la Tarea I3. La elección correcta aparece subrayada.

Opción	Frecuencia	Porcentaje
$0,\hat{9}$ es menor a 1	257	81%
<u>$0,\hat{9}$ es igual a 1</u>	<u>21</u>	<u>9%</u>
Son incomparables	5	2%
No sabe o no contesta	24	8%

Como en la Tarea I1, el bajo porcentaje de no respuesta (o *no sé*) nos habla de una tarea que se presentó como "amigable" en el contexto del cuestionario. Sin embargo, pocos/as estudiantes, sólo 21 (9%) eligieron la opción correcta ($0,\hat{9}$ *es igual a 1*) y son en su mayoría estudiantes de matemática. Una amplia mayoría de los y las estudiantes (81%) optaron por la opción $0,\hat{9}$ *es menor a 1.* Los muy pocos estudiantes (2%) que contestaron *son incomparables* no justificaron su elección.

La opción más elegida (no correcta desde un punto de vista cardinal) es $0,\hat{9}$ *es menor a 1,* se presenta como la más intuitiva. Sin embargo, como notamos al reflexionar sobre las implicancias en la elección de cada opción, debemos analizar las justificaciones que acompañan esa opción para comprender las concepciones que están operando al elegirla e interfiriendo en la construcción de una concepción más cercana a la acepción usual de los números reales.

Categorización de las justificaciones al interior de cada opción de respuesta

Con el fin de acceder de forma más completa a las comprensiones de los y las estudiantes hemos considerado en forma conjunta las respuestas de elección de opciones y sus justificaciones.

Para la opción $0,\hat{9}$ *es menor a 1* hemos encontrado una variedad de justificaciones, las correspondiente a la categoría *no explicada* donde la justificación consiste en parafrasear la opción cerrada o manifestar qué es "lo evidente". Luego, hemos reunido las justificaciones basadas en la posibilidad de encontrar un número anterior a 1, las que plantean que al número $0,\hat{9}$ le falta algo "pequeño" / "poco" para ser 1, y las que evidencian que se "redondea" el $0,\hat{9}$ a 1, todas ellas en la categoría denominada *discretitud por redondeo*. También encontramos justificaciones centradas en las reglas de notación o la representación geométrica de la recta, denominadas *centradas en la representación externa.* Por último, justificaciones basadas en el infinito como proceso, que puede continuar siempre, expresada en términos de “no llega” o a un proceso “sin fin”, que denominamos *infinito potencial*.

Entre quienes optaron por $0,\hat{9}$ *es igual a 1*, algunos/as no justificaron su elección, otro grupo justificó utilizando correctamente el concepto de *densidad* y por último otros/as realizaron una *prueba*. Como ya mencionamos, los muy pocos estudiantes (9%) que contestaron *son incomparables* o *no sé* no justificaron su elección.

La Tabla 8.12 resume la caracterización de las justificaciones brindadas para cada opción de respuesta y muestra ejemplos de cada una de ellas.

Tabla 8.12: Caracterización de las justificaciones utilizadas para cada opción de respuesta de la Tarea I3. Ejemplos, para los que se indica el NEM del o la participante

Opción	Caracterización de la justificación	Respuesta de un/una estudiante de..
No sabe -no contesta. (8%)	No justifican.	
Son incomparables. (2%)	No explicada. No justifican o manifiestan no saber el porqué de su elección	4to: Incomparables, no sé
$0,\hat{9}$ es menor a 1. (81%)	No explicada. Manifiestan no saber el porqué de su elección, dicen que es evidente, reiteran la opción elegida o bien no justifican	MI: $0,\hat{9}$ es menor a 1, porque es obvio 4to. $0,\hat{9}$ es menor a 1, por intuición
	Discretitud o redondeo. Justifican su elección brindando principalmente razones que hacen pensar en un salto discreto entre los dos números. Del tipo: es el número anterior a 1. El número 0,9…. Siempre va a ser menor a 1 pero se lo puede aproximar. Le falta algo pequeño.	BI: $0,\hat{9}$ es menor a 1, porque es el anterior en su correlatividad antes de llegar al 1. BA: $0,\hat{9}$ es menor a 1, depende del grado de precisión del trabajo estrictamente es menor que 1, pero según sea el objeto del estudio, puede ser igual 3ro: $0,\hat{9}$ es menor a 1, porque falta una centésima aun para llegar al 1.
	Centrada en la representación externa. Manifiestan que un decimal que comienza con 0 es menor que uno o un decimal es menor que un entero o una representación geométrica basada en: está antes en la recta.	BI: $0,\hat{9}$ es menor a 1. Porque es un decimal que empieza con "0" y 0 es menor que 1. 3ro: $0,\hat{9}$ es menor a 1. Porque si lo ubican en una recta 0,9 estaría antes que 1
	Como proceso sin fin. Justifican aludiendo al infinito como proceso sin fin, Se acerca tanto como se quiere, pero no es 1, no llega a completar el entero, el 0,9…. todavía no llega al 1.	MI: $0,\hat{9}$ es menor a 1, porque no llegaría nunca a ser 1 3ro: $0,\hat{9}$ es menor a 1, porque nunca llega al número entero (1). 5to: $0,\hat{9}$ es menor a 1, porque se va a acercar siempre pero nunca va a ser 1 por el famoso “infinitos decimales”
$0,\hat{9}$ es igual a 1. (9%)	Mediante prueba. Justificación mediante una “prueba” o por la densidad de los números reales.	MA: $0,\hat{9}$ es igual a 1 porque: $x = 0,\hat{9}$ $10x = 9,\hat{9}$ $10x - x = 9,\hat{9} - 0,\hat{9}$ $9x = 9$ $x = 1 \Rightarrow$ Por lo que $0,\hat{9} = 1$
	Mediante densidad. Justifican mediante la densidad de los reales, al no encontrar un número entre estos dos, deben ser el mismo número.	MI: $0,\hat{9}$ es igual a 1. Porque entre estos dos números no hay otro. Por tanto son el mismo.

Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea I3

Considerando que en la no respuesta y las respuestas *no sé* y *son incomparables* los y las estudiantes no justifican su elección, todas ellas fueron agrupadas en una categoría denominada *ajenidad*, interpretando que al brindar cualquiera de ellas la o el resolutor no se involucra con el problema planteado o manifiestan resistencia a interactuar con la noción de infinito.

Entre los y las estudiantes que eligen $0,\hat{9}$ *es menor a 1* encontramos tres tipos de respuestas en las que se pone de manifiesto un pensamiento *finitista* en el sentido de considerar una finita (aunque muy grande) cantidad de "9". Aquellas donde no se explica esta elección (*no explicada*), otras en las que se dan razones que hacen pensar en los números reales como discretos por redondeo (*intencionalmente finitista*) y algunas centradas en la notación decimal finita o la representación en la recta numérica (*centrada en la representación*). Luego, tenemos aquellas respuestas donde se evidencia el *infinito potencial* en forma explícita.

Por último, tenemos las respuestas $0,\hat{9}$ *es igual a 1* que interpretamos como que se está considerando los *infinitos* "9" en forma *actua*l. Sin embargo, hicimos una diferenciación entre aquellas donde este hecho no se explícita (*infinitista no explicada*) y aquellas en las que se lo justifica mediante una prueba o considerando la densidad de los reales (*infinito actual*).

De modo que encontramos siete clases (excluyentes) de respuestas para la Tarea I3, obtenidas de la combinación de las opciones de elección y de tipo de justificación y relacionándolas con la concepción de infinito que opera en cada una. Estas son: *ajenidad (no sabe, no contesta, incomparable y no justifica), finitista no justificada, finitista centrada en la representación externa, intencionalmente finitista o redondeo, infinitista potencial, infinitista no explicada* e *infinitista actual***.**

En la Tabla 8.13, encontramos sintetizadas las principales concepciones sobre infinito identificadas en las respuestas, la caracterización de las siete clases de respuestas identificadas, ejemplos literales de respuestas de algún/a estudiante y porcentaje de la población que presenta la clase de respuestas.

Tabla 8.13: Concepciones sobre infinito y clases de respuestas a la Tarea I3.

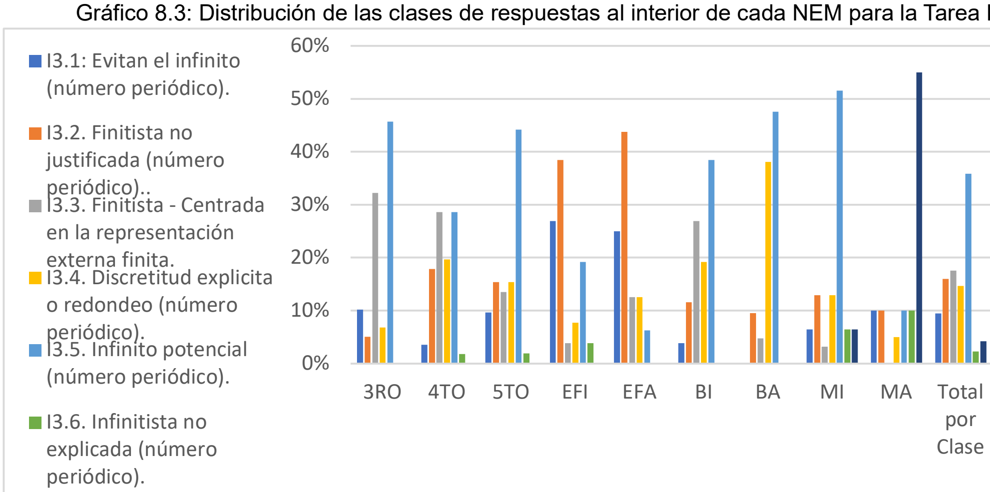
Concep-ción	**Caracterización de la clase de res-puesta**	**Respuestas de un/a estudiante de..**	**%**
Ajenidad (9%)	I3.1: Ajenidad. No sé y son Incomparables. No contestan o manifiestan no saber o que no se pueden comparar sin justificación.	EFA. Incomparables, son incomparables	9%
Finitista (49%)	I3.2. Finitista no justificada. $0,\hat{9}$ es menor a 1– No explicada. Eligen la opción de menor sin explicar su razonamiento.	EFI: $0,\hat{9}$ es menor a 1, por-que es obvio	16%
	I3.3. Finitista. Centrada en la representación exter-na finita. $0,\hat{9}$ es menor a 1– Representación exter-na. Comparan (explícitamente) por razones válidas para notaciones decimales finitas.	3ro: $0,\hat{9}$ es menor a 1, por-que es un decimal que em-pieza con "0" y 0 es menor que 1.	18%
	I3.4. Intencionalmente finitista o redondeo. $0,\hat{9}$ es menor a 1 – discretitud o redondeo Comparan explicitando que se piensa en un salto discreto entre los dos números o por la posibilidad de redondeo.	BI: $0,\hat{9}$ es menor a 1, porque es el anterior en su correlati-vidad antes de llegar al 1.	15%
Infinitista (42%)	I3.5. Infinito potencial. $0,\hat{9}$ es menor a 1- proceso sin fin. Aluden a las infinitas cifras decimales, como un proceso sinfín; como un proceso que no termi-na.	5to: $0,\hat{9}$ es menor a 1, por-que se va a acercar siempre pero nunca va a ser 1 por el famoso “infinitos decimales”	**36%**
	I3.6. Infinitista no explicada. $0,\hat{9}$ es menor a 1- no explicada. Al comparar eligen la opción correcta si se consideran las (actualmente) infinitas cifras sin embargo no justifican su pensamiento.	MI: Iguales, no sé.	2%
	I3.7. Infinito actual. $0,\hat{9}$ es igual a - Prueba /Densidad. Consideran las infinitas cifras decimales como actualmente infinitas ya sea justificación mediante una “prueba” o por la densidad de los números reales.	MA: Igual, porque entre es-tos dos números no hay otro. Por lo tanto, son el mismo.	4%

8.3.2. Perfiles de respuesta de la Tarea I3 según el nivel de estudio

Distribución de las clases de respuestas en la Tarea I3 en los NEM

En el Gráfico 8.3 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada tipo de respuestas a la Tarea I3 en cada nivel de estudio y en la población general.

Gráfico 8.3: Distribución de las clases de respuestas al interior de cada NEM para la Tarea I3.



Algunas concepciones se presentan como características de algún NEM, tales como *finitista no justificada* para EFI y EFA o *infinito actual* para MA, sin embargo, en cada nivel de estudios en matemática se manifiestan una diversidad de clases de respuestas que a su vez dan cuenta de concepciones también distintas. La clase más popular, *infinito potencial*, se manifiesta en todos los NEM.

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea I3 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las clases de NEM de los y las estudiantes a fin de observar si existen perfiles de distribución característicos, similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.12, en el Anexo II.

Presentamos los dos primeros planos factoriales del AFC realizado sobre los siete perfiles de clases de respuestas al interior de los nueve niveles de estudio (Gráficos 8.4 y 8.5).

En estos gráficos de puede observar que el principal factor de variabilidad corresponde a las clases *infinitista actual* e *infinitista no explicada* asociada a MA la primera y a MA y MI la segunda, oponiéndose al resto de clases y NEM.

El segundo factor discrimina entre las clases no-infinitistas, separando: *ajenidad* y *finitista no explicada,* por una parte, e *infinito potencial*, *intencionalmente finitista o redondeo* y *centrada en la representación*, por otro. Asocia EFI y EFA a las primeras y 3ro, 4to, 5to BI, BA y MI a las últimas.

El tercer factor discrimina al interior de este último grupo descripto asociando *intencionalmente finitista o redondeo* principalmente a BA y MI e *infinito potencial* a 5to, MI y BI; oponiéndose a *centrada en la representación* asociada a 3ro y 4to.

Gráfico 8.4: Primer plano factorial del AFC de las clases de respuestas a la Tarea I3 en los NEM.

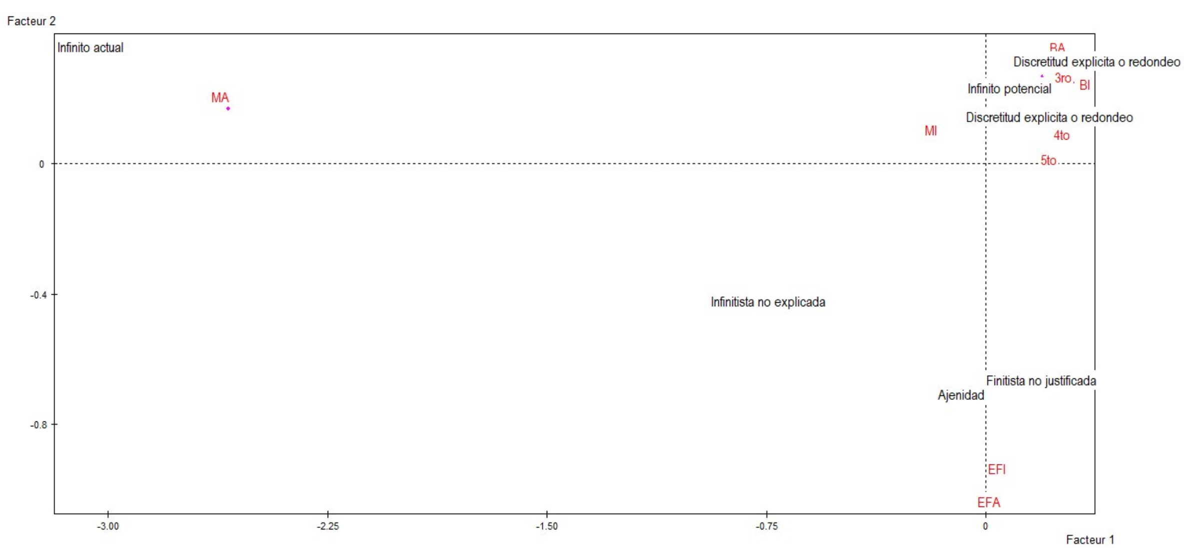
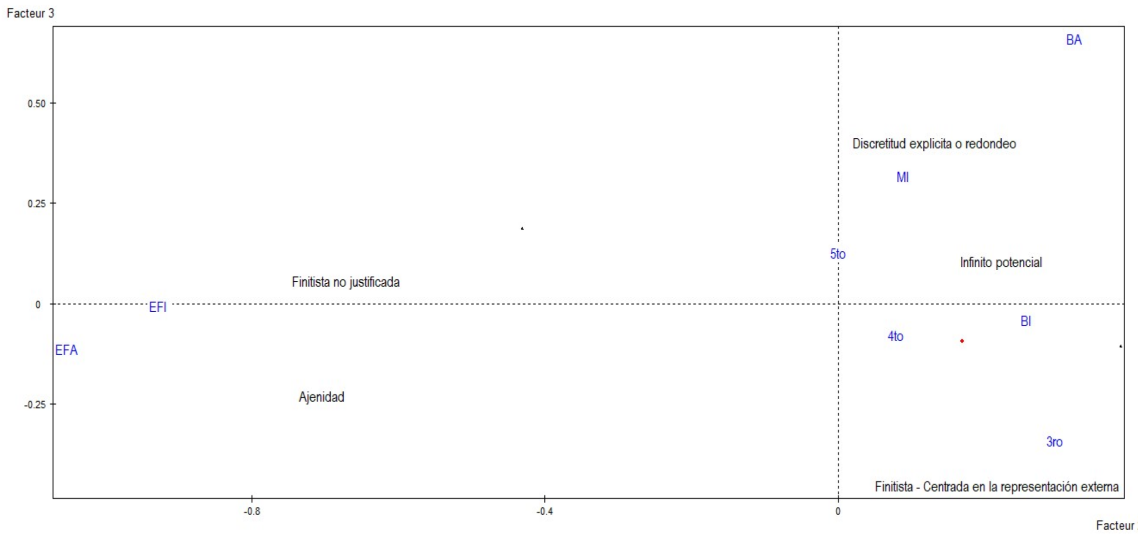


Gráfico 8.5: Segundo factorial del AFC de las clases de respuestas a la Tarea I3 en los NEM.



La Tabla 8.14 sintetiza las asociaciones de los perfiles de respuestas a la Tarea I3, con los niveles de estudio relacionados, encontradas mediante este AFC.

Tabla 8.14: Grupos de asociaciones entre clases de respuestas de la Tarea I3 y modalidades de NEM

Asociaciones de clases de concepción		**NEM**
Infinitista	Infinito actual	MA
	Infinitista no explicada	MA y MI
	Infinito potencial	BA, BI y MI
Finitista	Intencionalmente finitista o redondeo	5to, 4to y 3ro
	Centrada en la representación	
	Finitista no explicada	
Ajenidad		EFI, EFA

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática en el Gráfico 8.4 encontramos que los perfiles de los NEM: 4to, 5to y MI son similares al perfil medio de la población, los dos primeros sin la clase *infinito actual* y en MI se pueden observar todas las clases de respuesta.

Las modalidades de NEM, EFA y EFI poseen un perfil característico donde predomina la *ajenidad* y la visión *finitista no explicada.* En los perfiles de secundaria (3ro, 4to y 5to) como así también en BA, BI y MI, predomina la visión *de infinito potencial*. En los perfiles de secundaria, además, una visión *finitista centrada en la representación externa*, mientras que en los universitarios la visión *finitista por redondeo.* El perfil de MA es muy característico fundamentalmente asociado a *infinito actual*

8.3.3. Síntesis de los resultados de la Tarea I3

El objetivo de la Tarea I3, al plantear si $0,\hat{9} = 0,999 ....$ *es menor, mayor, igual o incomparable con 1*, fue estudiar cómo operan las concepciones de infinito en la comprensión de los y las estudiantes acerca de la representación decimal (infinita) periódica de un número. Como así también como se relaciona esta con el orden.

Esta tarea fue resuelta por una mayoría de estudiantes (92%), solo el 8% de ellos/as no contestaron o contestaron *no sé*, por lo que se presentó, al igual que la Tarea I1, como una tarea, en principio, accesible.

Una amplia mayoría de los y las estudiantes (81%) optaron por la opción $0,\hat{9}$ *es menor a 1*, presentándose esta respuesta incorrecta desde la axiomática usual de los números reales, como la naturalizada por la mayoría en esta población. Los 21 estudiantes (9%) que eligieron la opción correcta desde el punto de vista axiomático usual de los números reales, $0,\hat{9}$ *es igual a 1* son en su mayoría estudiantes de matemática.

En algunas de estas respuestas los y las estudiantes manifiestan no saber el porqué de su elección, dicen que es "evidente", reiteran la opción elegida o bien no justifican. A todas ellas las denominamos *no explicadas* e interpretamos que no se consideraron los "infinitos 9".

Entre los y las estudiantes que respondieron $0,\hat{9}$ *es menor a* 1 y efectivamente justificaron su elección, vimos que ofrecen tres tipos de argumentaciones (i) aquellas en que brindan razones que hacen pensar en un salto discreto entre los dos números, es decir, el número $0,\hat{9}$ *es menor a 1* pero se lo puede aproximar con un 0 seguido de finita cantidad de "9" (o redondear a los décimos o centésimos), que denominamos *discretitud o redondeo*; (ii) aquellas *centradas en la representación externa*, manifestando que un número decimal que comienza con 0 es (siempre) menor que 1 (Cedrón et al., 2021), o esta antes en la recta y (iii) las que manifiestan una visión potencial del infini*to* que denominamos como *proceso sin fin*, es decir *siempre se puede agregar un "9".* Un aspecto novedoso de los resultados aportados por nuestro análisis de esta tarea es que esta respuesta de opción, que se presenta como la más intuitiva ($0,\hat{9}$ *es menor a* 1), dio lugar a justificaciones que implican visiones muy distintas respecto del infinito.

Al igual que la Tarea I1, encontramos un gradiente de comprensiones que tienen que ver en primer lugar con una *ajenidad* frente al problema del infinito, en un nivel intermedio comprensiones consideradas como *finitistas*, una visión *potencial del infinito* y por último una visión de *infinito actual.*

Ordenando las clases de respuestas según este gradiente de profundidad en las concepciones sobre el infinito, tendremos en primer lugar los y las estudiantes, principalmente de Educación Física, que no contestan o manifiestan *no saber* o que *son incomparables sin justificación* que denominamos *ajenidad* (9%). En esta tarea en que se comparan "números" es menor la *ajenidad* frente al infinito que en las que se comparan colecciones infinitas como en la Tarea I1 e I2.

Luego un 47% de la población que podrían decirse *finitistas*, en tres sentidos: (i) uno en el cual eligen la opción en la que no se tiene en cuenta las infinitas cifras decimales sin explicar su razonamiento, que denominamos *finitista no justificada;* (ii) otro en el que al comparar, consideran (explícitamente) razones válidas para notaciones decimales finitas y que hemos denominado *finitista, centrada en la representación externa finita*, asociada a estudiantes de secundaria e ingresantes a Biología y (iii) en otro sentido, en el que se explicita que están pensando en un salto discreto entre los dos números, al considerar un número finito de decimales o por la posibilidad de redondeo y que denominamos *intencionalmente finitista o redondeo*, esta última asociada a estudiantes avanzados de Biología.

Entre las concepciones *infinitistas* diferenciamos una centrada en *infinito potencial* es decir que eligen $0,\hat{9}$ *es menor a 1* aludiendo a las infinitas cifras decimales como un proceso *sin fin* (seguir agregando "9"). Ésta es la respuesta más popular en esta población (37%), y está asociada a estudiantes secundarios e ingresantes a las carreras científicas y avanzados de Biología. Finalmente, identificamos otras visiones *infinitistas* en las que al comparar eligen la opción correcta si se consideran las (actualmente) infinitas cifras, considerando como *infinitista no explicada* (3%) aquellas en que no se justifica y como *actualmente infinitistas* aquellas respuestas en que consideran las infinitas cifras decimales como *actualmente infinitas* (4%) ya sea justificando mediante una "prueba" o por la densidad de los números reales, manifestadas principalmente a estudiantes de Matemática.

Lo contraintuitivo de la respuesta correcta desde un punto de vista estándar

Encontramos, al igual que Cornu (1991), Katz y Katz (2010) y Tall (1991), que han usado la misma tarea en sus estudios, que la respuesta más común e intuitiva en estudiantes sin instrucción matemática específica, es que *0,9999… es menor que 1.* Nuestra población de hecho, salvo los y las estudiantes avanzados/as de Matemática y Biología, no han estudiado formalmente ni los números reales, ni la teoría de límites, antes de que encontrarse con el tema de la notación decimal infinita y dan como respuesta mayoritariamente $0,\hat{9}$ *es menor a 1*.

Nuestros resultados, dejan en evidencia lo contraintuitivo de la respuesta correcta desde un punto de vista estándar, que se establece mediante una prueba basada en la definición formal (axiomática) de los números reales y de límite de una sucesión. En este sentido tendríamos que la mayoría de nuestra población ha naturalizado lo que Tall (1991, 2009) describe como concepción de "limite genérico" en los siguientes términos: si una cantidad se hace repetidamente más y más pequeña sin ser nunca cero, entonces el objeto límite puede ser conceptualizado naturalmente como una cantidad extremadamente pequeña que no es cero.

Lo contraintuitivo de la respuesta estándar $0,\hat{9}$ es igual a 1 saca a la luz el obstáculo epistemológico subyacente ya que depende de las definiciones de número real y de límite establecidas a comienzos del siglo XX por Weierstrass, Dedekind y Cantor. De hecho, la respuesta *0,9999…. es menor que 1 pero se acerca tanto como se quiera* sirvió para establecer el cálculo de Newton y Leibniz durante el siglo XVII y durante el siglo XX dio lugar a una definición no-estándar de los números reales, como son los "hiperreales" de Robinson (1974) en la cual los números reales se ven completados por infinitesimales. En este sentido cobran significado las expresiones de Katz y Katz (2010) cuando señalan que mientras el sistema numérico no se haya especificado explícitamente, la corazonada de los y las estudiantes de 0.999 . . . se queda infinitamente por debajo de 1 puede justificarse de una manera rigurosa, en el marco del análisis no estándar de Robinson. Katz y Katz (2010) afirman, al igual que Lakoff y Nuñez (2000) que las cantidades infinitesimales (Robinson, 1974) son productos naturales de la imaginación humana derivados de la combinación de la repetición potencialmente infinita y el reconocimiento de sus propiedades repetitivas.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.7, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

8.4. Integración de los resultados del Grupo Temático I.

Las tres tareas de este grupo temático solicitan al resolutor/a la actividad de *comparar* en contextos que involucran el infinito, sin embargo, le plantean diferentes desafíos. Mientras que en las Tareas I1 e I2 se trata de colecciones infinitas, que como vimos pueden ser comparadas por inclusión o por cardinalidad, en la Tarea I3 se trata de números reales, que deben compararse mediante la relación de orden usual de los números.

En la Tarea I1 se compara la cantidad de infinitas cifras decimales "3", en los números $0,\hat{3}$ = 0,33333… y $0,\widehat{32}$ = 0,3232323232… Ambas colecciones son presentadas explícitamente como "infinitas" y cada una mediante dos representaciones externas distintas (explicitando mediante el signo = que son el mismo número), la primera que puede ser pensada como actualmente infinita y la segunda puede ser pensada como potencialmente infinita o como indefinida, dada la metáfora que aportan “los puntos suspensivos” (Katz y Katz, 2010).

En la Tarea I2, se comparan conjuntos infinitos de números (también según su cardinalidad), pero en este caso no están explícitamente dados como infinitos, sino que se apela a la idea que cada estudiante tenga de ellos, dando a entender mediante la pregunta sobre la “abundancia” que se solicita comparar por cardinalidad (cantidad).

En cambio, en la Tarea I3 se dan tres representaciones para el mismo número, dos de las cuales hacen referencia a una notación infinita, expresando que denotan el mismo número ($0,\hat{9}$ = 0.999…). Al igual que en la Tarea I1, la primera que puede ser pensada como actualmente infinita y la segunda potencialmente infinita (o como indefinido), por el uso de los puntos suspensivos ya señalado.

Esta diferencia en el requerimiento en las tareas se vio reflejada en los resultados, que son similares para las Tareas I1 e I2 y con ciertas características distintivas para la Tarea I3. Principalmente en la detección de la concepción infinitista de *única cantidad infinita* para I1 e I2 en las cuales se compara colecciones y la concepción de *infinito potencial* para I3, donde la notación puede llevarnos a pensar en que (potencialmente) siempre se puede agregar otro “9”.

Hemos identificado, en los resultados de las tres tareas, niveles de profundidad similares en la comprensión del infinito, en un arco que va desde la *ajenidad* frente al infinito, en respuestas en que se evidencia que el sujeto no se apropia del problema no contestando o expresando que no sabe. Una visión *finitista* (explicita o no) en las cuales se toman decisiones a la que se arribaría si se operase con colecciones finitas. Luego tendríamos una visión de *infinito como indefinido,* en las cuales se expresa que no se puede comparar porque con infinito no se puede operar, podríamos pensarlo como un primer acercamiento al infinito en sentido común. Para encontrar luego una visión *infinitista en un sentido común*, en la que se puede pensar en infinito, pero de maneras que pueden llevar a tomar decisiones correctas o no desde el punto de vista matemático. Por último, *infinitistas en un sentido matemático* (cardinal o actualmente infinitista), que la única visión que llevaría a dar siempre respuestas correctas desde un punto de vista matemático usual.

Observamos que la *ajenidad frente al infinito* se presenta con más frecuencia en las tareas donde se comparan colecciones infinitas (I1 e I2) que en la que se comparan números (I3), aun cuando uno de estos números tenga una notación que involucra infinitas cifras. La tarea de comparar números pareciera más amigable o conocida por los y las estudiantes lo que los habilita, en primera instancia, a abordarla, más allá de la adecuación de la respuesta alcanzada.

Encontramos luego lo que podemos denominar la concepción *finitista*, para las Tareas I1 e I2 en la que hemos agrupado las respuestas *finitistas tácitas* (sin justificar) y las respuestas *finitistas explícitas*, esto es, que se explicitan razones válidas para comparar colecciones finitas. En la Tarea I3 se presentó mayormente como *intencionalmente finitista* (la cantidad de nueves que se necesite) o *de redondeo.*

Las más populares en esta población son precisamente las respuestas *finitistas*, en el sentido de operar con razones que son válidas en colecciones, notaciones o conjuntos finitos, como pueden ser *el todo es mayor que la parte* o comparar lo que ocurriría con una cantidad finita (aunque grande) de elementos. Sin embargo, el porcentaje de respuestas finitistas fue menor en la Tarea I1, dado que en ésta fue mayor la manifestación de la concepción de *infinito como indefinido* posiblemente inducida por los puntos suspensivos. La mayor cantidad de respuestas *finitistas* está dada en la Tarea I2, que es la tarea en la cual las colecciones no son dadas explícitamente como infinitas. En estas respuestas finitistas el principio el *todo es mayor que la parte* parece estar muy arraigado e indica un modo de operar con los conjuntos infinitos como si fueran finitos.

En cuanto a la noción de *infinito como indefinido* (o con infinito no se puede) tiene una mayor presencia en la Tarea I1, en la que se solicita comparar colecciones ordenadas expresadas en forma gráfica con puntos suspensivos que podrían dar una idea de algo sin fin. Mientras que en la Tarea I2, si bien se pide comparar colecciones infinitas de números, estas están dadas en forma actual, dado que se pregunta cuál *es* más “abundante”, y probablemente esto explique la baja presencia de respuestas que dan cuenta de *infinito como indefinido* (con infinito no se puede comparar) (3 % en promedio a través de los distintos ítems).

En las tareas de comparar cardinalidades se da la visión de *único infinito,* o pensar el infinito como una única cantidad infinita, o como una cualidad, un adjetivo, como en la expresión “la colección es infinita”. Encontramos esta visión tanto en la Tarea I1 como en la Tarea I2, donde se comparan colecciones infinitas, aunque en medida muy dispar, representa el 22% y el 8% de la población respectivamente. En la Tarea I1 (al decir *son iguales por ser infinitos*) se da la paradoja de que se elige una opción correcta aun cuando la razón por la cual se toma la decisión no lo es y en la Tarea I2, la respuesta “iguales por ser infinitos” puede ser correcta o no según el ítem, pero en ningún caso es la justificación adecuada matemáticamente. Está asociada con estudiantes de MA, con notable presencia de estudiantes de MI y muy pocos estudiantes de secundaria

Notemos cómo la representación de las colecciones de “3” en la Tarea I1 (con puntos suspensivos) indujo a pensar al infinito como indefinido, en tanto que $0,\hat{9}$ =

0,999… comparado con 1, en la Tarea I3, condujo a un pensamiento potencial de “siempre puedo agregar un nueve más” incluso en la idea (tomada como finitista) de tantos nueves como necesite. Esta visión potencial del infinito no permite llegar a una respuesta correcta desde el punto de vista axiomático estándar de los números reales.

Nuestros resultados para la Tarea I3 son concordantes con varios/as autores/as, que han usado la misma tarea en sus estudios, en cuanto a que la respuesta más común e intuitiva en los y las jóvenes sin instrucción matemática específica, es que *0,9999…. es menor que 1* (Cornu, 1991; Katz y Katz 2010; Tall, 1991, 2009). En palabras de Tall (2009) "el decimal infinito 0. 999… que está destinado a señalar el límite de la sucesión 0.9; 0.99; 0.999; ... que es 1, en la práctica a menudo se imagina como un proceso hacia el límite que nunca alcanza del todo 1”.

Podemos definir algunos paralelismos entre el gradiente de profundidad en las compresiones de los y las estudiantes de nuestro estudio asociado al nivel de estudio en Matemática (NEM) y un análisis histórico. Encontramos en principio la *ajenidad* frente al problema del infinito, para lo que no sea filosófico o científico, para la humanidad por muchos siglos el infinito no tuvo mucho que ver con la vida de todos los días; en nuestros resultados la ajenidad se asocia con los y las estudiantes que tienen poco estudio de matemática.

El desarrollo de la matemática como un modo de resolver problemas de la vida cotidiana que condice con una visión finitista, en un principio sin demasiada explicación (muy cercano a la ajenidad) y asociado a estudiantes sin mucho interés en la Matemática, hasta asumir explícitamente una visión finitista que condice con el mundo natural. En este último estadio encontramos a la mayoría de nuestra población asociado a los NEM de secundaria, ingresantes a las carreras científicas y a estudiantes avanzados de Biología. Cabe destacar en este nivel que muchos/as estudiantes de avanzados de Biología, que parecieran ser finitistas “por elección”. Expresan que usan tantos decimales como haga falta, proponen el redondeo, en definitiva, se podría decir que piensan qué para hacer “uso” de los números reales solo se necesitan, por ejemplo, un numero finito de decimales.

En un estadio intermedio, encontramos la noción de *infinito como indefinido* (*no se pueden contar; no sabemos dónde acaban; no se pueden medir, no se puede comparar, etc*.) en definitiva, no se puede operar con infinito. Pareciera el resultado de una contraposición de visiones finitistas previas y una primera visualización del infinito potencial. Son pocos/as estudiantes, pero los encontramos en los NEM de secundaria e ingresantes a las carreras científicas y avanzados de Biología

La progresión avanza una visión *infinitista* propia de los y las estudiantes de nivel universitarios, visión *infinitista en un sentido común* que condice con la visión filosófica primero (establecida por Aristóteles) y utilizada por la matemática después, operante hasta fines del SXIX, y que dio lugar a múltiples desarrollos matemáticos y del cálculo como herramienta de la física. El *infinito como indefinido*, el *infinito potencial* junto con los *comparar por inclusión*, *único infinito*, *los enteros como modelo de infinito* son formas de pensar el infinito, recursos e imágenes que pueden ser útiles a la hora de salvar la deficiencia o ausencia de estudios formales al respecto.

Por último, una visión *infinitista en un sentido matemático* (actualmente infinitista), sólo manifestada por estudiantes que han realizado un estudio sistemático de los números reales en forma axiomática (en un sentido estándar), es decir han tenido acceso a un tratamiento formal del infinito. Sin embargo, hay que destacar que en general se trata de estudiantes de avanzados de Matemática y que no todos/as ellos/as han logrado manejarse con el infinito actual.

Hemos observado que estos niveles de comprensión muchas veces no son estables en un mismo estudiante y entran en conflicto bajo determinados contextos lo cual genera contradicciones internas que se expresan mediante respuestas incoherentes. Dicho carácter contradictorio va más allá de la clásica dualidad finitista/ infinitista (Fischbein, 1987), sino también involucra la manifestación de modelos diferentes en cada una de esas ideas. Por ejemplo, hemos encontrado que los y las estudiantes parecen sentirse cómodos con la Tarea I1 e incluso elijen una opción "correcta", pero al justificar sus respuestas evidencian que las concepciones que están operando son muy lábiles y a menudo contradictorias (*hay la misma cantidad de "3" porque los conté en la hoja)*

Otro ejemplo de esto es que en la Tarea I3 la respuesta de opción que se presenta como la más intuitiva ($\mathbf{0},\hat{\mathbf{9}}$ es menor a 1) dio lugar a justificaciones que implican el infinito en toda la gama de los niveles descriptos. También se ha hecho evidente como el infinito potencial que puede ser utilizado como transparente en muchos conceptos matemáticos puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del orden, la densidad y la notación en los números reales usuales, Por ejemplo, el seguir agregando "9" a 0,999… nunca permitirá llegar a 1.

A modo de recapitulación de los resultados de las tres tareas, destacamos que hemos identificado cinco niveles en la comprensión del infinito, en tanto muestran un gradiente de profundidad en esta comprensión en el siguiente orden: (i) *ajenidad*, (ii) *finitista* (no explicada y explícita), (iii) *infinito como indefinido* (con infinito no se puede); (iv) *infinitista en un sentido común* e (v) *infinitista en un sentido matemático* (actualmente *infinitista).* Este gradiente de profundidad en la comprensión de la noción de infinito se vio reflejado en los distintos niveles de estudio en Matemática ubicándolos en el siguiente orden: (1) estudiantes ingresantes y avanzados de

Educación Física; (2) tercer año, (3) cuarto año y quinto año de secundaria, (4) ingresantes a Biología, (5) ingresantes a Matemática, (6) estudiantes avanzados/as de Biología y (7) por último estudiantes avanzados/as de Matemática.

Para una mejor visualización de este gradiente de niveles de comprensión del infinito presentamos en la siguiente tabla (Tabla 8.15) una síntesis de del mismo, especificando a que NEM se encuentra asociado cada concepción.

Tabla 8.15: Recapitulación de los resultados del Grupo Temático I. Gradiente de profundidad en las comprensiones sobre infinito y los NEM asociados

Concepción		NEM asociados
Ajenidad	No se apropia del problema, no contestando o expresando que no sabe	EFI, EFA y 3ro
Finitista. Toman decisiones a la que se arribaría si se operase con colecciones finitas	Finitista no-justificada. Idea tácita de lo infinito como muy grande, o muy numeroso, o muchísimo, sin explicitan estas razones.	EFI y EFA
	Finitista explícita. Si bien su decisión es finitista, fue tomada por razones fundadas, del estilo de lo plausible si voy agrandando la colección, o de lo que ocurre con colecciones muy grandes. También están las razones finitistas intencionales, del estilo "redondeo" o "tantas cifras como necesite".	3ro, 4to y 5to
Infinito como indefinido	No se pueden comparar u operar porque con infinito no se puede... Podríamos pensar un primer acercamiento al infinito en sentido común.	
Infinito en sentido común. Se puede pensar en infinito, pero de diferentes maneras, pueden llevar a tomar decisiones correctas o no desde el punto de vista matemático.	Infinito potencial. Concebir el infinito como un proceso "sin fin" algo que puede (o debe) seguir siendo siempre, Es decir, se concibe un infinito potencial, como un proceso formado por una sucesión (infinita en el tiempo) de hechos finitos	MI, BI y BA
	Único infinito. Pensar el infinito como una única cantidad infinita, o como una cualidad, un adjetivo.	MI - MA
Sentido matemático de infinito. Visión que permite dar siempre respuestas correctas desde un punto de vista matemático.	Infinito cardinal. Se consideran conjuntos actualmente infinitos, es decir a los infinitos elementos o cifras presentes simultáneamente.	MA

Capítulo 9

Comprensiones de la recta como representación de los números reales y su relación con el nivel de estudio en Matemática

Este capítulo presenta los resultados de la Fase 1 del análisis de la información, realizado a las respuestas a las tareas del cuestionario correspondientes al Grupo Temático R que está conformado por tres tareas (R1, R2 y R3) que indagan la comprensión por parte de los y las estudiantes de: *la representación de números reales en una recta numérica con escala decimal*; *la recta numérica como representación de los números reales y la diferenciación entre densidad y completitud-continuidad* y *la naturaleza de la recta numérica, el infinito, la densidad y completitud de los números reales en relación con la continuidad de recta*, respectivamente.

En forma similar a los capítulos anteriores, para cada tarea exhibimos el objetivo por el cual fue considerada y la consigna tal cual se la presentó en el cuestionario original. Luego se da cuenta, de forma pormenorizada, de los resultados de la serie de análisis de grano fino realizada y se brinda un apartado con la síntesis de resultados de cada tarea. Finalmente se integran los resultados del análisis de este grupo temático. De modo que pueden realizarse dos formas de lectura, una completa, que informa detalladamente la secuencia de decisiones y resultados, otra que permite alcanzar más directamente los hallazgos generales pasando directamente a la lectura de los apartados de síntesis e integración 9.1.3, 9.2.4, 9.3.4 y 9.4.

La Tarea R1, solicita una repuesta gráfica (graficar en la recta seis números dados) y una justificación en caso de no poder realizar alguna de las representaciones, mientras que en la Tarea R2 se solicita la respuesta verbal a tres ítems, para los dos primeros una respuesta de elección de opciones y una respuesta abierta a modo de justificación de esta elección y para el tercer ítem, directamente una respuesta abierta a una pregunta. Por último, en la Tarea R3 se solicitaron dos respuestas de tipo verbal abiertas y una respuesta gráfica.

Para las tareas que presentan opciones de respuesta cerradas y solicitan justificaciones verbales para la opción elegida, realizamos una descripción de las frecuencias de elección de las opciones y una categorización cualitativa de las justificaciones al interior de cada una de las opciones de respuesta cerrada, buscando regularidades justificación por justificación completa brindada por cada estudiante.

Para las respuestas gráficas en las Tareas R1 y R3, la categorización se realizó observando en forma directa las producciones gráficas (una por una) y, teniendo en cuenta los elementos emergentes que figuraban en ellas.

Tanto en el proceso de construcción de estas categorías como en la asignación de respuestas originales a dichas categorías participaron la autora y dos docentes universitarias de matemática. Una vez acordadas las categorías para cada tarea, asignaron la correspondiente a cada respuesta independientemente, con niveles de acuerdo que alcanzaron o superaron el 95%. Las discrepancias fueron discutidas hasta alcanzar un acuerdo. En un segundo paso se combinó para cada estudiante su respuesta de elección, la categoría de justificación y la respuesta gráfica (si correspondiere) a fin de obtener una "tipología de respuestas" completa para cada tarea.

En los apartados 9.1.1, 9.2.2 y 9.3.2 describiremos estas tipologías de respuesta que hemos detectado, dando ejemplos literales de cada tipo de respuestas e informando el porcentaje de la población que representa. Luego, se interpretan las clases de respuestas en términos de las concepciones que ponen de manifiesto.

Presentamos la distribución de las clases de respuestas en los distintos NEM para cada tarea y buscamos asociaciones entre los perfiles de respuesta de cada NEM, de modo de analizar la incidencia del estudio de Matemática en la profundidad de las comprensiones sobre la recta como representación de los números reales. Los resultados correspondientes se informan en los apartados 9.1.2, 9.2.3 y 9.3.3.

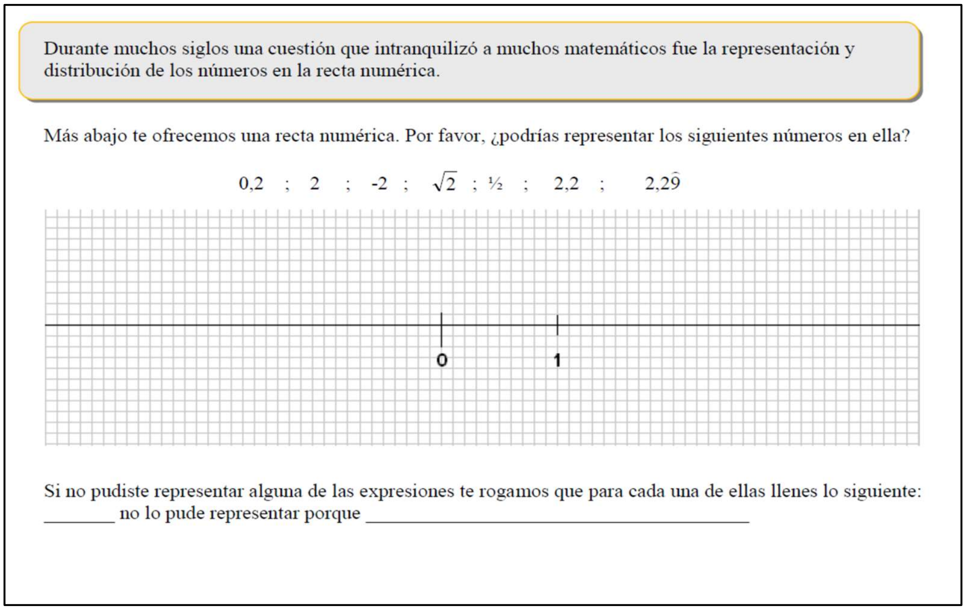
En los apartados 9.1.3, 9.2.4 y 9.3.4 sintetizaremos la tipología de respuestas obtenida para cada tarea, mostraremos un arco de profundidad en la comprensión de la recta como representación de los números reales y daremos cuenta de las relaciones entre los modos de respuesta y los NEM. En 9.4 se integran los resultados obtenidos en el análisis de las tres tareas de este grupo temático.

En el Capítulo 5 hemos descripto los métodos cualitativos, control inter-juez y métodos de estadística multivariada utilizados en esta fase de análisis de la información y en el Anexo II damos una justificación teórica y de aplicación de la estadística multivariada.

9.1. Tarea R1. La representación de números reales en la recta

El objetivo de la Tarea R1 fue conocer cómo estos/as estudiantes conciben la representación de distintos números reales (enteros, racionales e irracionales construibles) en la recta, cuando la recta numérica es dada con una escala decimal.

El Cuadro 9.1 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.



Durante muchos siglos una cuestión que intranquilizó a muchos matemáticos fue la representación y distribución de los números en la recta numérica.

Más abajo te ofrecemos una recta numérica. Por favor, ¿podrías representar los siguientes números en ella?

0,2 ; 2 ; -2 ; $\sqrt{2}$; ½ ; 2,2 ; $2{,}2\overset{\frown}{9}$

Si no pudiste representar alguna de las expresiones te rogamos que para cada una de ellas llenes lo siguiente:
________ no lo pude representar porque ____

Cuadro 9.1: La consigna utilizada para la Tarea R1 en el cuestionario.

Esta tarea aporta como información, para cada estudiante, una respuesta gráfica, con los números ubicados en la recta numérica y una justificación para cada número que no se pudo representar. La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado. 4.1.3 del Capítulo 4.

9.1.1. Categorización de las respuestas a la Tarea R1

Para el análisis de esta tarea se contó, para cada estudiante, con una respuesta gráfica, donde figuraban los números que, de los siete propuestos, pudo ubicar en la recta numérica y una justificación para cada número que no pudo representar.

Distribución de frecuencias de tipos de respuestas gráficas a la Tarea R1

Se categorizaron las respuestas gráficas (una por una) según los números que los y las estudiantes habían ubicado en la recta, resultando nueve clases disjuntas, cuyas características y porcentaje que representa de la población se informa en la Tabla 9.1. Las clases se extienden desde una primera, constituida por aquellas escasas respuestas en las que no se ubicó ningún número en la recta, hasta la última constituida por aquellas en que figuraban correctamente ubicados todos los números solicitados.

El 97% de la población representaron al menos dos números en la recta (los enteros: 2 y -2), lo que nos habla de una tarea que se presentó como “conocida” para estos/as estudiantes, al menos cuando se trata de números enteros.

Tabla 9.1: Frecuencia de tipos de respuestas gráficas a la Tarea R1.

Números graficados			Frec.	Porc.
No ubican ningún número			8	3%
Ubican sólo -2 y 2			10	3%
Ubican bien -2; 2; 0,2 y 2,2.	1/2 entre 1 y 2		29	9%
Ubican bien -2; 2; 0,2; 2,2 y 1/2	No representan $2{,}2\hat{9}$	No representan $\sqrt{2}$	41	13%
		$\sqrt{2}$ aproximado a 1,41	11	4%
	$2{,}2\hat{9}$ muy próximo a 2,3	No representan o representan mal $\sqrt{2}$	94	31%
		$\sqrt{2}$ aproximado a 1,41	71	23%
		$\sqrt{2}$ por método geométrico	34	11%
	$2{,}2\hat{9}$= 2,3	$\sqrt{2}$ por método geométrico	9	3%

Sólo ocho estudiantes no contestaron la tarea y otros diez estudiantes ubican sólo los enteros (2 y -2). En adelante estas dieciocho respuestas se las considerará en una misma clase, que constituye el 6% de la población. Una amplia mayoría de estudiantes (94%) grafica correctamente los enteros y los decimales finitos con décimos (-2; 2; 0,2 y 2,2), cabe destacar que el modelo de recta numérica que se brindó tiene marcas en los décimos.

En la categorización se tuvo en cuenta que los números ½, $2{,}2\hat{9}$ y $\sqrt{2}$ fueron frecuentemente ubicados en forma incorrecta. Algunos/as estudiantes ubicaron la fracción ½ entre el 1 y 2, con la particularidad que ninguno/a de ellos/as pudo graficar $2{,}2\hat{9}$ o $\sqrt{2}$. Sin embargo, cabe destacar que la gran mayoría de estudiantes graficó ½ correctamente en el punto medio entre 0 y 1.

Al número periódico $2{,}2\hat{9}$, la mayoría de los y las estudiantes lo graficaron muy próximo a 2,3 (*aproximado*) y otros/as lo hicieron explicitando que “es igual a 2,3” (*exacto*). El número que más dificultades les ocasionó fue $\sqrt{2}$. Muchos/as estudiantes no lo representaron o lo ubicaron incorrectamente (por ej., entre 0 y 1), otros/as muy próximo a 1,41 (*aproximado*) y algunos/as pocos/as estudiantes lo graficaron mediante el método geométrico (*exacto*).

El 9% de los y las estudiantes ubica la fracción 1/2 entre 1 y 2 (posiblemente confundan la notación ½ interpretando que signifique “entre 1 y 2”). Mientras que el 85% de los y las estudiantes ubican bien, no sólo los enteros y los decimales finitos sino también la fracción ½ (como fracción o como 0,5).

El número $2{,}2\hat{9}$ es representado por menos estudiantes, el 68% de la población lo graficó muy próximo a 2,3, sólo el 3% consideró que es *igual a 2,3*. La mayor dificultad estuvo dada al graficar el irracional $\sqrt{2}$, ya que 61% de la población no lo representó o lo representó mal ubicado, el 27% lo hizo en forma aproximada y sólo un 14% lo grafica por método geométrico.

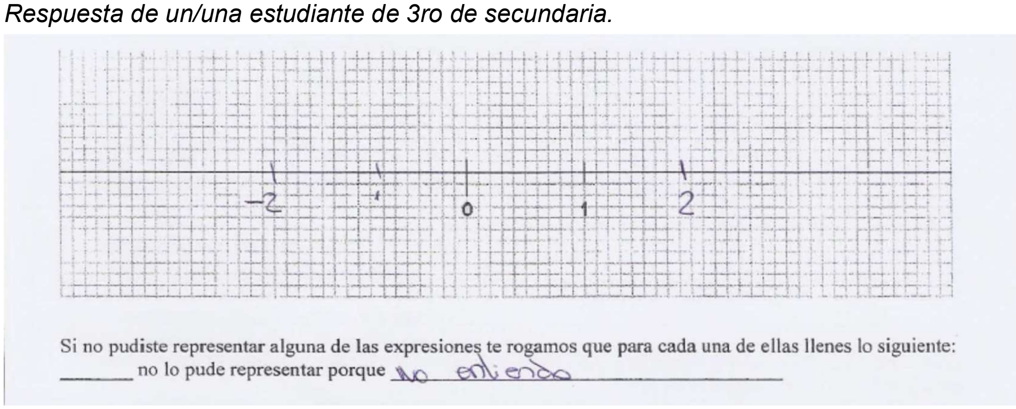
Combinación de respuestas gráficas y justificaciones para la Tarea R1

Basándonos en la categorización de las respuestas gráficas descripta en el apartado anterior, las consideraciones allí hechas y teniendo en cuenta, eventualmente, las justificaciones realizadas en los casos de no haber podido representar algún número, se realizó una categorización de la totalidad de respuestas a la Tarea R1 en ocho clases disjuntas. En este caso la unidad de análisis fue el conjunto de respuestas dadas por cada estudiante a la tarea completa. El procedimiento de control inter-juez aplicado a la totalidad de las respuestas arrojó una coincidencia de un 100%.

Haremos una caracterización de estas modalidades de respuesta e informaremos la cantidad de estudiantes que brindaron cada tipo de respuestas y el porcentaje de la población que representa. Por último, ilustraremos cada modalidad de respuesta con la respuesta original completa de algún/a estudiante representativo/a de la clase. Si es de interés, en la Tabla AII.13 en el Anexo II se puede observar la frecuencia de cada modalidad de respuesta en cada NEM.

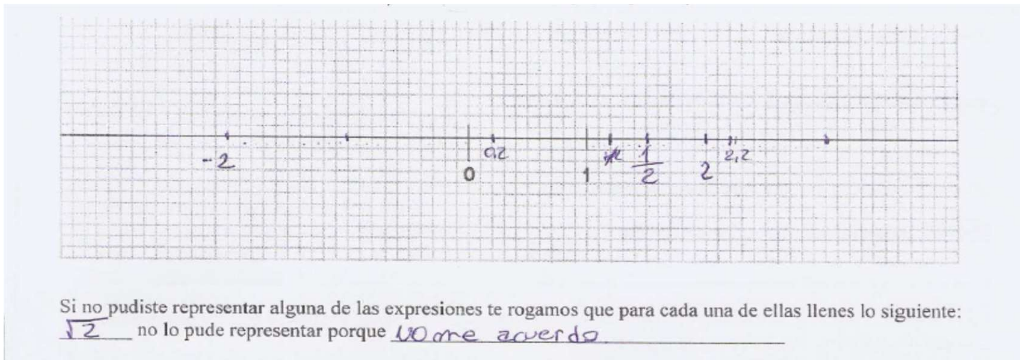
Clase R1.1. *No contestan o grafican sólo los enteros*. N=18 (6%).
No realizan la tarea o ubican sólo 2 y -2. No justifican por qué no representan el resto de los números, o manifiestan que no los grafican porque no saben, no entienden o no recuerdan cómo se hace.

Respuesta de un/una estudiante de 3ro de secundaria.



Clase R1.2. *Grafican sólo decimales finitos (no ½).* N=29 (9%).
Ubican correctamente a -2; 2; 0,2 y 2,2. La fracción 1/2 la ubican entre 1 y 2. No ubican $2{,}2\dot{9}$ ni $\sqrt{2}$, justificando que no lo hacen porque no saben o no se acuerdan o no saben cuánto da $\sqrt{2}$ o sin justificar por qué no lo hacen.

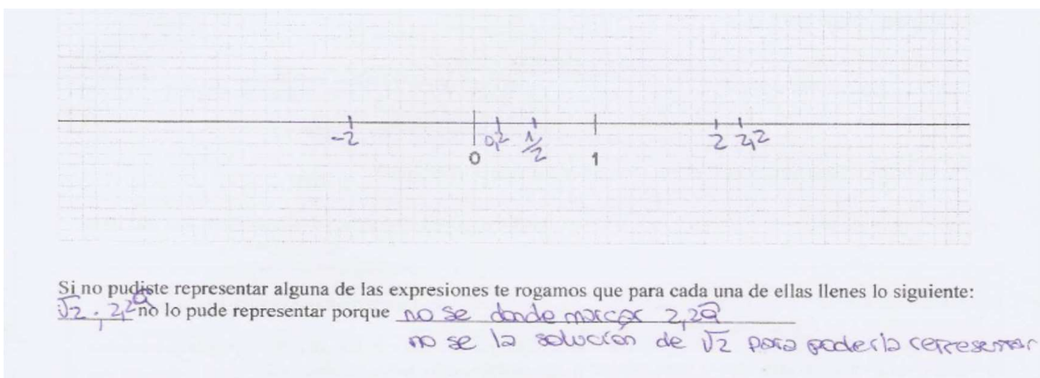
Respuesta de un/una estudiante de 5to año de secundaria.



Clase R1.3. *Grafican sólo racionales finitos (no explicado).* N=26 (8,5%).

Ubican a -2; 2; 0,2; 2,2 y 1/2 bien. No ubican $\sqrt{2}$ ni $2{,}2\hat{9}$ justificando que no lo hacen porque no saben o no se acuerdan o no saben cuánto da $\sqrt{2}$ o sin justificar porque no lo hacen.

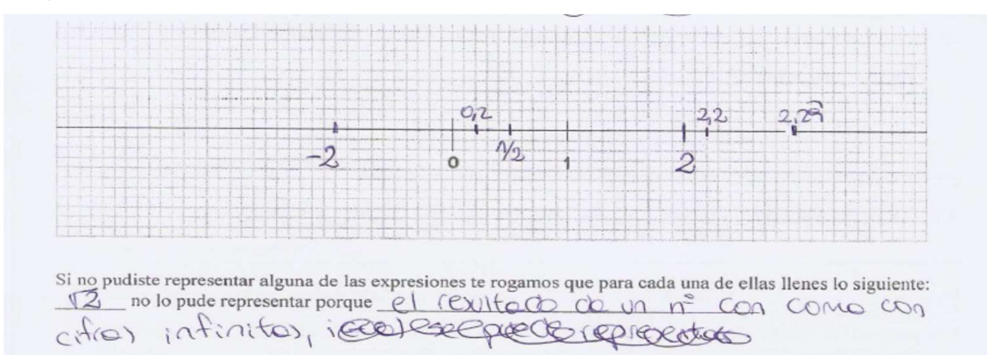
Respuesta de un/una estudiante de 4to año de secundaria.



Clase R1.4. *Grafican racionales finitos. No grafican los demás por ser infinitos*. N=38 (12,5%).

Ubican correctamente a -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. No ubican $\sqrt{2}$ o $2{,}2\hat{9}$ (o ninguno de los dos) justificando que no lo hacen porque no se los pueden representar porque son *infinitos; irracionales; periódicos; tiene infinitas cifras; no tiene lugar en la recta por infinitos*, etc.

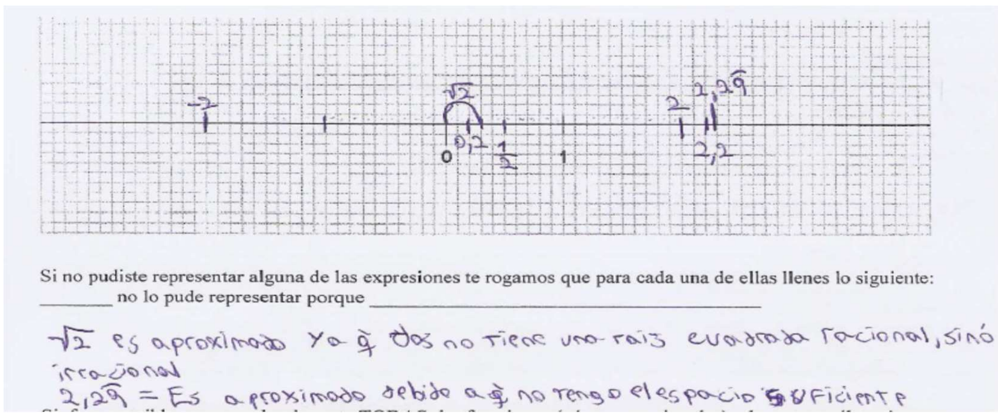
Respuesta de un/una estudiante 5to año de secundaria.



Clase R1.5. *Grafican sólo los racionales (*$2{,}2\hat{9}$ *aproximado).* N= 82 (27%).

Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\hat{9}$ muy próximo a 2,3 y no representan $\sqrt{2}$ sin justificar porque no lo hacen; o justificando que no saben calcular la raíz o no recuerdan cómo se hace. Se han considerado aquí alguno/as estudiantes que grafican $\sqrt{2}$ aproximadamente pero mal ubicado.

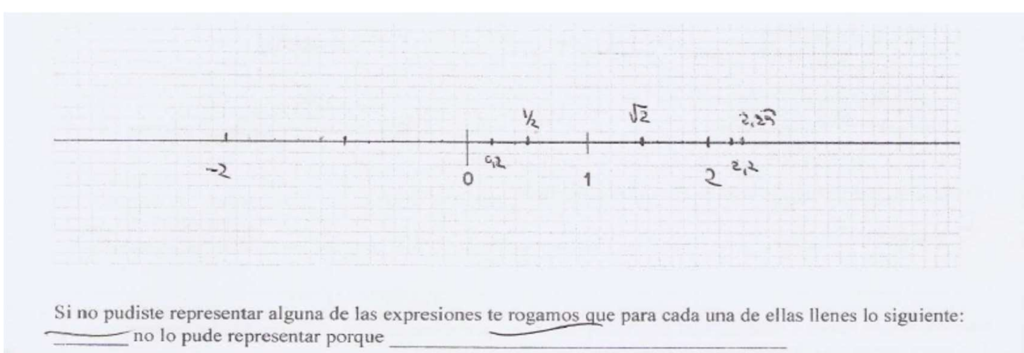
Respuesta de un/una estudiante de 3ro año de secundaria.



Clase R1.6. *Grafican enteros y decimales finitos correctamente.* $2{,}2\hat{9}$ y $\sqrt{2}$ *por aproximación decimal.* N=71 (23%).

Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2; ½. $2{,}2\hat{9}$ próximo a 2,3 y aproximan $\sqrt{2}$ a 1,41. Dado que consideran que graficaron todos los números pedidos la gran mayoría no justifica.

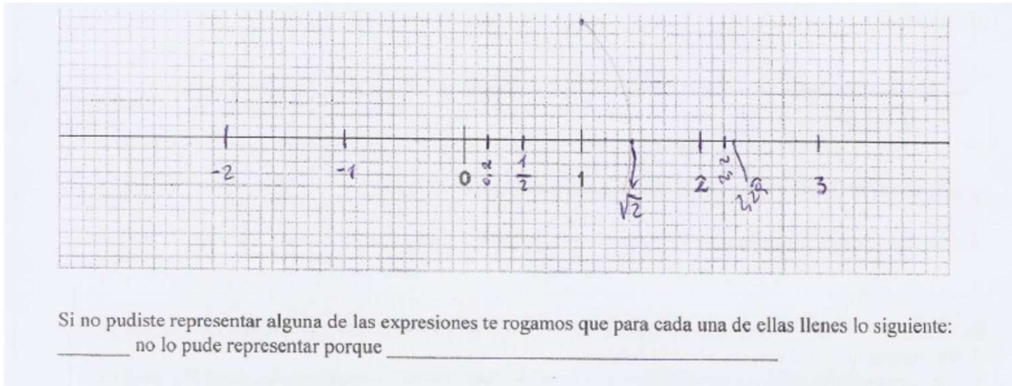
Respuesta de un/una estudiante de MI



Clase R1.7. *Grafican enteros y decimales finitos correctamente.* $2{,}2\hat{9}$ *aproximado y* $\sqrt{2}$ *exacto.* N=34 (11%).

Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\hat{9}$ aproximado a 2,3 y $\sqrt{2}$ por método geométrico o aproximado, pero justificando que hubiesen necesitado el compás para hacerlo exacto.

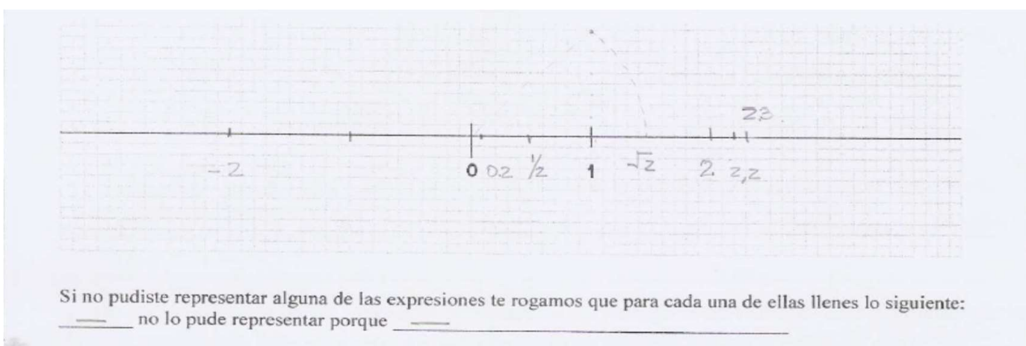
Respuesta de un/una estudiante de 4to año de secundaria.



Clase R1.8. *Grafican todos en forma exacta.* N=9 (3%).

Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. Hacen explícito que $2{,}2\hat{9}$= 2,3 y grafican $\sqrt{2}$ por método geométrico. Principalmente estudiantes de MA.

Respuesta de un/una estudiante de MA.



Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea R1

Encontramos ocho modalidades (excluyentes) de respuestas para la Tarea R1 que hemos relacionado con la concepción de infinito emergente de cada una de ellas. Interpretamos que los y las estudiantes que dieron respuestas correspondientes a las modalidades de respuestas: *no contestan o grafican sólo los enteros; grafican sólo decimales finitos (no ½)* y *grafican sólo racionales finitos (no explicado);* no grafican los dos números "infinitos" ($\sqrt{2}$ y $2{,}2\hat{9}$), indican una concepción común que llamaremos: *finitista*, interpretando que estos/as estudiantes representan solo los números enteros o con expresiones decimales finitas.

Mientras que en las respuestas del tipo *grafican racionales finitos; no grafican los demás por ser infinitos* los y las estudiantes expresan explícitamente que al *"ser infinitos no se pueden graficar",* es decir muestran una concepción de *infinito como indefinido.* En las respuestas del tipo *grafican sólo los racionales (*$2{,}2\hat{9}$ *aproximado); grafican enteros y decimales finitos correctamente (tanto en la forma:* $2{,}2\hat{9}$ *y* $\sqrt{2}$ *por* *aproximación decimal* como en la forma $2{,}2\hat{9}$ *aproximado y* $\sqrt{2}$ *exacto);* se considera al número $2{,}2\hat{9}$ cómo aproximado a 2,3 sin ser igual, podrían estar evidenciando una visión *potencial* del infinito. Por último, en las respuestas del tipo *grafican todos en forma exacta*, se consideran a los "infinitos nueves" como actualmente presentes (*infinito actual)* de modo que $2{,}2\hat{9}$=2,3.

En la Tabla 9.2 encontramos una síntesis de las clases de respuestas a la tarea de representar números reales en una recta numérica con escala decimal y el porcentaje de la población que presenta cada tipo de respuestas y las principales concepciones sobre infinito manifestadas.

Tabla 9.2. Clases de respuestas a la Tarea R1, concepción sobre infinito asociada y porcentaje de la población en cada tipo de respuesta.

Concepción	Clase de respuestas	Porc
Finitistas (23,5%)	R1.1: No contestan o grafican sólo los enteros.	6%
	R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½).	9%
	R1.3. Grafican sólo racionales finitos; no explicado.	8,5%
Infinito como indefinido (12,5%)	R1.4. Grafican racionales finitos; no grafican los demás por ser infinitos.	12,5%
Infinito potencial (61%)	R1.5. Grafican sólo los racionales ($2{,}2\hat{9}$ aproximado).	**27%**
	R1.6. Grafican enteros y decimales finitos correctamente. $2{,}2\hat{9}$ y $\sqrt{2}$ por aproximación.	23%
	R1.7. Grafican enteros y decimales finitos correctamente. $2{,}2\hat{9}$ aproximado - $\sqrt{2}$ exacto.	11%
Infinito actual (3%)	R1.8. Grafican todos en forma exacta.	3%

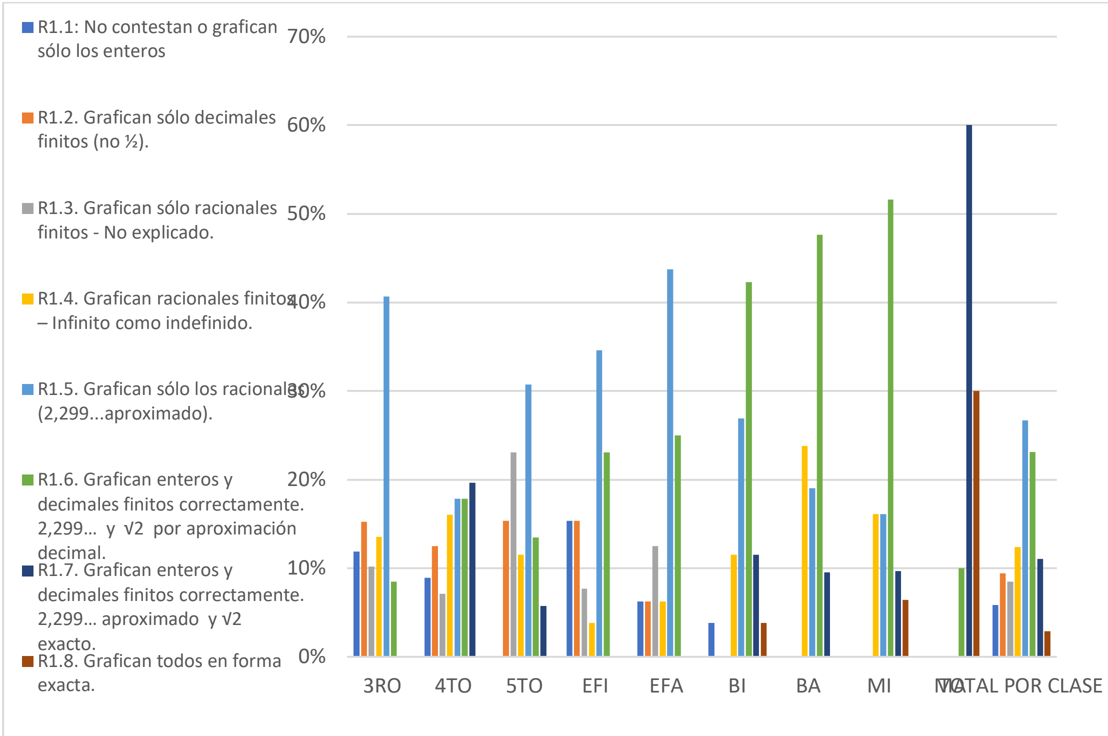
9.1.2. Perfiles de respuestas a la Tarea R1 según el nivel de estudio

Distribución de las clases de respuestas en los NEM

En el Gráfico 9.1 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada tipo de respuestas a la Tarea R1 en cada nivel de estudio y en la población.

Podemos observar que algunas clases de respuestas se presentan como características de algún NEM (como *grafican sólo los racionales* ($2{,}2\hat{9}$ *aproximado)* para 3ro y EFA, *grafican enteros y decimales finitos correctamente;* $2{,}2\hat{9}$ *y* $\sqrt{2}$ *por aproximación decimal* para BI, BA y MI o *grafican enteros y decimales finitos correctamente;* $2{,}2\hat{9}$ *aproximado* - $\sqrt{2}$ *exacto* para MA), en cada nivel de estudios se manifiestan una diversidad de tipos de respuestas y salvo la de *grafican todos en forma exacta* (que se presenta sólo en universitarios de carreras científicas) están presentes casi todas las clases de respuesta. *No responden o grafican solo enteros* y *grafican solo decimales finitos* (no ½) está presentes sólo en los grupos con menor estudio de matemática, mientras las clases donde se grafican todos los números están presentes en los universitarios de las carreras científicas.

Gráfico 9.1: Distribución de las clases de respuestas dentro de cada NEM para la Tarea R1.



Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea R1 según el NEM.

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases de respuestas respecto de las modalidades de NEM a fin de observar si existen perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.14, en el Anexo II. Presentamos los dos primeros planos factoriales de este AFC realizado sobre los perfiles de distribución de las ocho clases de respuestas de la Tarea R1 al interior de los nueve niveles de estudio (Gráficos 9.2 y 9.3).

Gráfico 9.2: Primer plano factorial del AFC de las clases de respuestas de la Tarea R1 en los NEM.

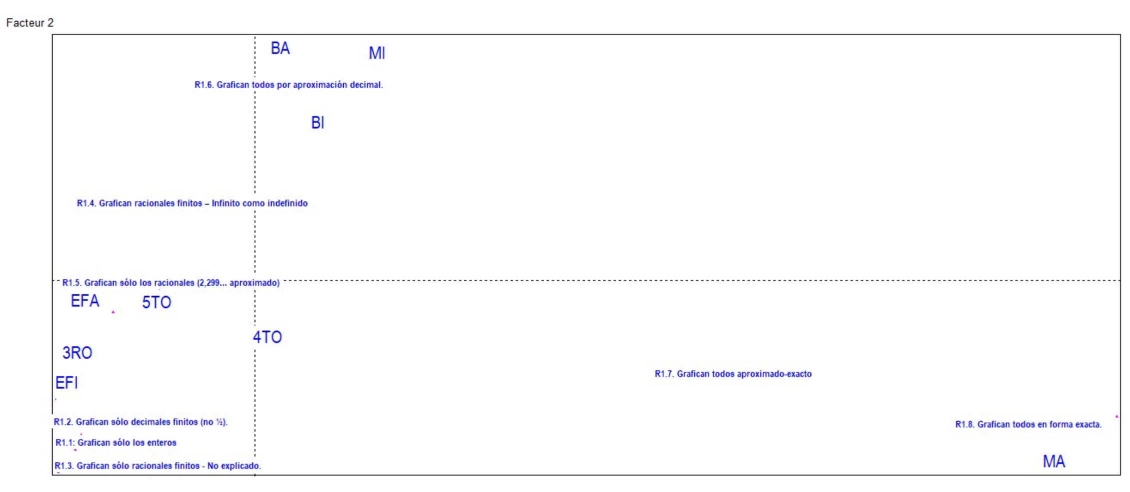
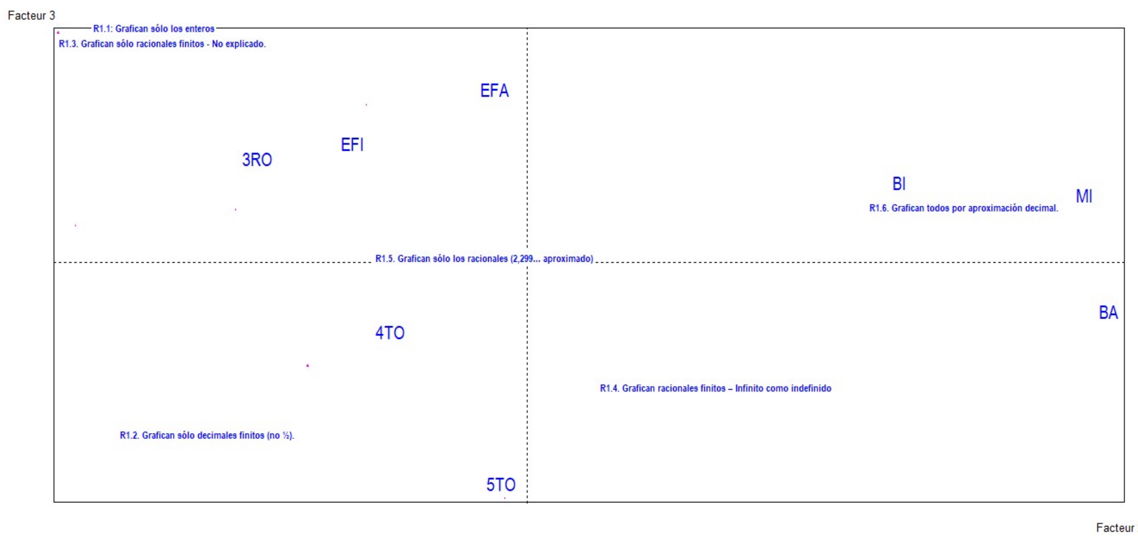


Gráfico 9.3: Segundo plano factorial del AFC de las clases de respuestas de la Tarea R1 en los NEM.



El principal factor de variabilidad corresponde a las clases *grafican todos en forma exacta* y *grafican enteros, decimales finitos correctamente y aproximado-exacto* asociada la primera a MA y la segunda a MA, MI y BI; oponiéndose al resto de clases y NEM. El segundo factor discrimina dentro del resto de clases separando *grafican enteros y decimales finitos correctamente; infinitos aproximados* (asociada a BA, BI y MI) de *grafican sólo racionales* (asociadas a 3ro y 5to). El tercer factor discrimina entre *grafican sólo enteros* y *grafican solo racionales finitos, no explicada* de *grafican solo racionales finitos e infinito como indefinido,* asociando a las primeras clases a EFI, 3ro y EFA y a la última a BA y 5to

La Tabla 9.3 sintetiza los grupos de asociaciones de perfiles de distribución de las clases de respuestas con los niveles de estudio encontradas mediante el AFC

Tabla 9.3: Grupos de asociaciones entre perfiles de respuesta a la Tarea R1 y modalidades de NEM

Asociaciones de clases de concepción	**NEM**
Grafican todos en forma exacta	MA
Grafican enteros y decimales finitos correctamente y en forma aproximada- exacta ($2{,}2\hat{9}$ - $\sqrt{2}$)	MA, MI y 4to
Grafican enteros y decimales finitos correctamente; $2{,}2\hat{9}$ *y* $\sqrt{2}$ por aproximación decimal	MI, BA y BI
Grafican solo racionales finitos-Infinito como indefinido	BA y 5to
Solo racionales finitos / Solo decimales finitos (no ½)	4to y 5to
No contestan o solo enteros / Solo racionales finitos / Solo racionales- aproximado	3ro, EFA y EFI

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática en el Gráfico 9.1, encontramos que en los y las estudiantes de secundaria, EFI y EFA predominan las clases *graficar solo enteros o racionales finitos* y *grafican solo racionales* ($2{,}2\hat{9}$ *aproximado).* La clase *grafican solo racionales finitos-infinito como indefinido* la encontramos asociada principalmente en 5to, BA. Para los universitarios predomina *graficando enteros y decimales finitos correctamente;* $2{,}2\hat{9}$ *y* $\sqrt{2}$ *en forma aproximada*. Es notable en BI, MI y BA la clase *grafican enteros y decimales finitos y (*$2{,}2\hat{9}$ - $\sqrt{2}$*) por aproximación racional*. Solo en el perfil de MA predomina *graficando todos en forma exacta*.

9.1.3. Síntesis de resultados de la Tarea R1.

El objetivo de la Tarea R1 fue conocer cómo estos/as estudiantes conciben la representación de distintos números reales (enteros, racionales e irracionales construibles) en la recta, cuando la recta numérica es dada con una escala decimal.

Una amplia mayoría de estos/as estudiantes (94%) realizaron la tarea, graficando al menos cinco de los siete números solicitados, por lo que consideramos que esta tarea resulto accesible a los y las estudiantes. Los enteros (-2 y 2) fueron graficados en forma correcta por el 97% de la población.

Sólo el 37% graficó $\sqrt{2}$, lo cual lo hace el número menos graficado en esta tarea, menos aún que 2,299… (periódico), que fue graficado en el 62% de los casos en forma aproximada a 2,3. Es notable que $\sqrt{2}$, sea el menos graficado aun cuando 2,299… implique infinitos decimales, en principio creemos que esto puede deberse a que $\sqrt{2}$, se ve como una operación a resolver, más que un número en sí mismo, ya que las justificaciones principalmente expresaban “no sé cuánto da”.

En las clases de respuestas identificadas, pudimos observar cuatro niveles de profundidad en la comprensión de la representación de los números en la recta numérica, desde la más restringida donde ubicamos aquellas respuestas que en la que los y las estudiantes *no contestan o grafican sólo los enteros* y la clase de respuestas en que *ubican correctamente los enteros y los decimales con décimos, mientras que la fracción 1/2 la ubican (en forma incorrecta)* entre 1 y 2. No ubican $2{,}2\hat{9}$ ni $\sqrt{2}$, justificando que no lo hacen porque no saben cuánto da $\sqrt{2}$ o sin justificar. Juntas representan sólo el 15% de la población. Observamos que ambas clases citadas aparecen centradas en los números enteros y los decimales con décimos, que coinciden con las marcas dadas en el modelo de recta.

En una segunda fase de comprensión, encontramos a los y las estudiantes que *grafican sólo los racionales finitos* (ubican correctamente a -2; 2; 0,2; 2,2 y ½) en dos formas. Una *no explicada*, en la cual no ubican $\sqrt{2}$ ni $2{,}2\hat{9}$ sin justificar y la otra donde no ubican $\sqrt{2}$ y/o $2{,}2\hat{9}$ explicitando que *no lo hacen* porque no se los pueden representar *por ser infinitos*, irracionales, periódicos, tiene infinitas cifras, no tiene lugar en la recta por infinitos, etc. Juntas constituyen el 21% de la población. Los y las estudiantes de estas clases muestran también una visión discreta de la recta, no graficando cuando es necesario pensar en números con "infinitos" decimales.

Luego en una tercera fase de esta comprensión tenemos, dos clases de respuestas en las que también los y las estudiantes ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2; ½, pero además alguno de los dos números infinitos, pero en la mayoría de las veces por una aproximación decimal, están aquellos/as estudiantes que *grafican sólo racionales y* que ubican $2{,}2\hat{9}$ muy próximo a 2,3 y no representan $\sqrt{2}$ sin justificar y los y las estudiantes que *grafican todos por aproximación decimal*, que ubican $2{,}2\hat{9}$ próximo a 2,3 y aproximan $\sqrt{2}$ a 1,41. Estas dos clases representan el 50% de la población, podría asociarse a una visión de los números potencialmente densos.

Por último, una cuarta fase, en la que también ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y 1/2, encontramos a los y las estudiantes que *grafican todos los números graficando* $2{,}2\hat{9}$ *aproximado a 2,3 y* $\sqrt{2}$ *por método geométrico* y finalmente aquellos/as que *grafican todos en forma exacta,* hacen explícito que $2{,}2\hat{9}$= 2,3 y grafican $\sqrt{2}$ por método geométrico, estos últimos principalmente estudiantes de MA. Representan juntas sólo el 14% de la población. Como vemos el manejo de la representación de números en la recta se asocia a mayor nivel de estudio en Matemática.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.8, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

Relación con las concepciones sobre infinito

Si interpretamos las ocho clases de respuestas ahora desde la lente de las concepciones de infinito que evidencian, encontramos también un gradiente de profundidad con cuatro niveles. Este gradiente comienza con una *visión finitista* (23,5%), es decir que graficaron sólo los números finitos, sea sólo los enteros, los decimales finitos o solo racionales finitos sin justificación, principalmente estudiantes de Educación Física y de secundaria. Luego una concepción de *infinito como indefinido (con infinito no se puede)* (13%), en la cual se considera que los números $\sqrt{2}$, y 2,2999…, precisamente por tener infinitas cifras decimales, no se pueden graficar, asociada a 5to y BA. Mientras que una mayoría de la población (61%) da una respuesta acorde con una visión *potencial del infinito*, en el sentido de graficar los números con infinitas cifras en forma aproximada. Por último, hemos observado una visión *actual del infinito* en sólo el 3% de la población (estudiantes avanzados de matemática), que grafican $\sqrt{2}$, en forma exacta y aclaran que 2,2999… es igual a 2,3.

9.2. Tarea R2: La recta como representación de los números reales

El objetivo de la Tarea R2 es estudiar cómo los y las estudiantes conciben a la recta numérica como representación de los números reales y a la diferenciación de racionales y reales (densidad y completitud) en relación con la densidad y continuidad de la recta numérica. El Cuadro 9.2 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

Esta tarea presenta tres situaciones, en la primera se pregunta si al marcar en la recta numérica todas las fracciones (racionales) *la recta, ¿se llenaría?, ¿se completaría?*, con las opciones (*sí o no*) y luego se invita a argumentar sobre esta respuesta. En la segunda se realizan tres preguntas con respuestas cortas: con todas las raíces de las fracciones *¿se completa la recta numérica?* (*sí, no* o *no sé*) y *¿hay lugar para más números?* (*sí, no* o *no sé*) *¿para cuantos?* (*no sé, algunos, muchos* o *infinitos*) y luego se solicita una argumentación de las respuestas elegidas. En la tercera situación, recíproca de la primera, se invita a argumentar sobre la siguiente pregunta: *si quitamos todas las fracciones de la recta ¿qué pensás que quedaría?*

Si fuera posible marcar sobre la recta TODAS las fracciones (números racionales), ¿la recta, se llenaría, se completaría? □ Sí □ No.
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

Si además de los racionales, marcáramos todas sus raíces (cuadradas, cúbicas, etc) ¿se completaría la recta? ___________. ¿Quedaría lugar para más números? ___________ ¿Para cuántos? ___________
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

Si de la recta numérica quitásemos todas las fracciones (números racionales) ¿qué pensás que quedaría?

Cuadro 9.2: La consigna utilizada para la Tarea R2 en el cuestionario

La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado. 4.1.3 del Capítulo 4.

9.2.1. Categorización de las respuestas a cada situación de la Tarea R2

Se contó, entonces, para cada estudiante con respuestas a tres ítems (uno para cada situación planteada). En el primero: una respuesta de elección de opciones (*sí o no*) y una respuesta abierta a modo de justificación de esta elección; en el segundo tres preguntas con respuestas cortas (*sí, no* o *no sé*), (*sí, no* o *no sé*) *y* (*no sé, algunos, muchos* o *infinitos*) y luego una argumentación a modo de justificación de la combinación de respuestas de opciones elegidas en esta segunda situación y para el tercer ítem, con respuestas abierta a una pregunta. Las respuestas a cada una de las situaciones brindan ciertas pautas sobre cómo se piensan estas cuestiones, pero no son cada una en sí mismo concluyente. Para acceder de forma más acabada a las concepciones de los y las estudiantes tuvimos en cuenta las tres situaciones globalmente.

Un bajo porcentaje, solamente el 4% de los y las estudiantes no realizaron la tarea en su totalidad, sin embargo 70 estudiantes, es decir un 23% de la población no respondió o respondió *no sé* (*no recuerdo, ni idea, no entiendo*, etc.) en al menos dos de las tres situaciones presentadas, este hecho nos habla de una tarea que se presentó como compleja para éstos/as estudiantes, quizás, no sólo por lo complejo y abstracto del tema sino por el tipo de requerimiento ("imaginar"). En el Anexo II (Tabla AII.15) se puede observar la distribución de frecuencias de no-respuesta (o respuesta del estilo *no sé*) a la Tarea R2 en los NEM.

Categorización de las respuestas a la primera situación de la Tarea R2

En la primera situación de la Tarea R2, para cada estudiante, se contó con una respuesta de elección (*sí* o *no*) a la pregunta: *con todas las fracciones (números racionales) ¿se completa la recta numérica?* Luego a modo de justificación de la opción elegida se invitó a argumentar sobre esta elección con las preguntas: *¿cómo lo pensás vos? ¿cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?* Las respuestas a estas últimas preguntas es lo que llamamos justificación de la primera situación y serán analizadas más adelante.

Distribución de frecuencias de las respuestas de elección de la primera situación

Veintiún estudiantes no contestaron a la pregunta y otros seis expresaron *no saber* y no justificaron esta expresión, teniendo en cuenta que la opción *no sé* no brinda más información que la falta de respuesta, consideramos estas respuestas en forma conjunta incorporándose la categoría *no sabe – no contesta*.

La siguiente tabla (Tabla 9.4) muestra la frecuencia de elección de cada opción para la primera situación de la Tarea R2 y el correspondiente porcentaje de la población que representa.

Tabla 9.4: Frecuencia y porcentajes de elección de opciones de la primera situación de la Tarea R2. La elección correcta aparece subrayada.

Respuesta de opción. Situación 1	**Frecuencia**	**Porcentaje**
No sabe – No contesta	27	9%
Sí. Se completa	134	44%
<u>No. No se completa</u>	146	47%

Casi la mitad de los y las estudiantes (47%) eligieron la respuesta correcta (la recta con las fraccciones) *no se completa* y un 44% prefiere la opción (con las fracciones, la recta) *sí se completa*. En primera instancia, la elección *se completa* podría interpretarse como una identificación de los reales con los racionales, sin embargo, podría estar mediando otros motivos para esta respuesta por lo que para acceder de forma más completa a las concepciones de los y las estudiantes tuvimos en cuenta también sus justificaciones.

Categorización de las argumentaciones brindadas

Se categorizaron por separado las justificaciones de los y las estudiantes que habían optado por (la recta) *se completa,* de las justificaciones de los y las estudiantes que optaron por (la recta) *no se completa,* buscando regularidades, respuesta por respuesta y obteniendo siete categorías disjuntas. El procedimiento de control inter-juez aplicado a esta categorización arrojó una coincidencia de 98%.

Entre los y las estudiantes que eligieron la opción *se completa,* algunos no justificaron o parafrasearon la opción cerrada o manifestaron que es "evidente"; otros dieron justificaciones que evidencian que piensan que las fracciones son todos los números reales y en tercer grupo de estudiantes justificó mediante la idea de que las fracciones *son infinitas* y por lo tanto completan *todos* los lugares de la recta.

Mientras que entre los y las estudiantes que optaron por *no se completa*, algunos no justificaron su elección, otros justificaron expresando que *faltan los enteros*, es decir que no consideran a los enteros como fracciones (o también otros números, por ejemplo "imaginarios"), un grupo justifica basándose en la densidad de los racionales, en un sentido potencial, es decir con un razonamiento del tipo: *como las fracciones son infinitas, nunca terminaríamos de marcarlas* y por último la justificación correcta, expresando que para completar la recta *faltan los números irracionales*. La siguiente Tabla 9.5 resume la caracterización de las justificaciones, para cada opción y muestra ejemplos de cada una de ellas.

Tabla 9.5: Caracterización de las justificaciones para cada opción de respuesta. Ejemplos literales en los que se especifica de que NEM es el/la estudiante que brindó la respuesta.

Opción	**Caracterización justificación**	**Ejemplos literales de un/una estudiante de..**
No sé – NC	*No Justifican.*	3ro: *No sé. No entiendo el tema*
(Con las fracciones la recta) *se completa*	*No explicada.* Manifiestan no saber el porqué de su elección, dicen que es evidente, reiteran la opción elegida, no justifican o expresen un aspecto irrelevante.	BI: *Si. Se llenaría* 5to*: Si. No lo sé*
	Todos los números son fracciones. Justifican expresando que todos los números son racionales, que las fracciones son todos los números o que todos los números se escriben como fracción.	MI: *Si. Porque serían todos los números que faltan y se encuentran entre los números enteros.* 4to*: Si. Para todos los números hay una fracción.*
	Infinitamente densa. Infinito es todo. Expresan que se completa porque las fracciones son infinitas o porque al ser todas las infinitas fracciones deben estar todos los números (o puntos).	3ro: *(pienso) que se llena porque hay infinitas fracciones, tanto positivas como negativas y están todas.* BI: *Se completa, porque hay infinidad de números*
(Con las fracciones la recta) *no se completa*	*No explicada.* Manifiestan no saber el porqué de su elección, dicen que es evidente, reiteran la opción elegida, no justifican o expresan un aspecto irrelevante.	4to*: No. No sé cómo explicarlo* *MA: No. Hay lugar para infinitos.*
	Faltan los enteros (y otros números). Expresan que no se llena porque faltan los enteros o que faltan los enteros y otros números (por ej. Imaginarios, raíces, etc)	MI: *Porque se necesitan los enteros también.* *5to: No, porque te faltaría graficar los números imaginarios y los enteros.*
	Densidad potencial. Proceso infinito potencial. Justifican que no se completa porque las fracciones no terminan. O porque son infinitos números, por lo que siempre se puede encontrar lugar para uno nuevo.	4to*: Para mí la recta nunca va a estar completa ya que existen infinitos números.* MI: *No. Porque la recta numérica no tiene fin y los números son infinitos*
	Faltan los irracionales (u otros irracionales, para el ítem 2). Manifiestan que faltan números como los irracionales o números infinitos.	4to*: No. Porque hay algunos números que no se pueden pasar a fracción.* MA*: No se completa, porque faltan los irracionales, que no se pueden escribir como una fracción.*

Categorización de las respuestas a la segunda situación de la Tarea R2

En la segunda situación se realizan tres preguntas de respuestas cortas: con todas las raíces de las fracciones *¿se completa la recta numérica?* (*sí, no* o *no sé*) y *¿hay lugar para más números?* (*sí, no* o *no sé*) *¿para cuantos?* (*no sé, algunos, muchos* o *infinitos*) y luego se solicita una argumentación de las respuestas elegidas que llamamos respuesta de justificación de la segunda situación.

Distribución de frecuencias de las modalidades de respuesta de elección

Se categorizaron las respuestas de las preguntas de respuestas cortas en forma conjuntas, de modo que se dieron cuatro opciones: *se completa; no se completa-no sé para cuantos números hay lugar; no se completa-hay lugar para algunos/muchos números* y *no se completa-hay lugar para infinitos números.*

Cincuenta y un estudiantes no contestaron y veintiuno manifestaron *no saber* sin justificaron su respuesta. Teniendo en cuenta que esta opción no brinda más información que la falta de respuesta, las consideramos conjuntamente, incorporándose la categoría *no sabe – no contesta*, que en esta situación posee una frecuencia mayor a la de la primera situación, alcanzando al 30% de la población.

La Tabla 9.6 muestra la frecuencia de elección de cada combinación de opciones para la segunda situación de la Tarea R2 y el correspondiente porcentaje de la población que representa.

Tabla 9.6. Frecuencia y porcentajes de elección de combinación de opciones para la segunda situación de la Tarea R2. La elección correcta aparece subrayada.

Opciones segundo situación	Frecuencia	Porcentaje
No sabe – no contesta	92	30%
Se completa,	53	17%
No se completa - Hay lugar para más números, no sabe cuantos	34	11%
No se completa - Hay lugar para algunos o muchos números	48	15%
No se completa - Hay lugar para infinitos números	80	26%

En esta situación es más alto el porcentaje de no respuesta que en la anterior, posiblemente debido a que muchos estudiantes prefirieron, para la primera situación, la respuesta *con las fracciones se completa la recta* y esta tarea los pone ante un conflicto.

La mayoría de los y las estudiantes (52%) elige *no se completa*, la mayor frecuencia (26%) se dio para la respuesta correcta (*no se completa - hay lugar para infinitos números)* y un 17% prefiere *se completa.* Nuevamente consideramos que las respuestas cerradas, pueden estar dando lugar a diversas ideas y no son cada una en sí mismas concluyentes, por lo que tuvimos en cuenta también sus argumentaciones.

Categorización de las argumentaciones brindadas, al interior de cada una de las opciones de respuesta

La segunda situación de esta tarea plantea que, luego de decidir si la recta se completa con las raíces de las fracciones (y en caso de que no se complete, para cuantos números queda lugar), se argumente sobre estas respuestas. Al igual que en la primera situación se categorizaron por separado las argumentaciones de los y las estudiantes que habían optado por (la recta) *se completa* de las de los/as estudiantes que optaron por (la recta) *no se completa*.

Se categorizaron estas justificaciones buscando regularidades respuesta por respuesta, resultando siete categorías disjuntas, muy similares a las obtenidas para la primera situación y descriptas en la Tabla 9.5. Esto es: *no sabe- no contesta y no justifican*; para *se completa*: *no explicada*; *todos los números son fracciones* e *infinitamente densa-infinito es todo*. Finalmente, para *no se completa*: *no explicada; faltan los enteros (y otros números); densidad potencial* y *faltan otros irracionales.* Posteriormente se realizó una prueba inter-juez que dio una coincidencia mayor al 98%. Si bien en ambas situaciones las categorías de respuesta son muy similares, cambian bastante las frecuencias de cada tipo de argumentación, como podremos observar en la próxima sección en la Tabla 9.7.

Clases de respuestas para las dos primeras situaciones de la Tarea R2

Considerando que en las respuestas *no sé* o en no contesta los y las estudiantes no justifican su elección, fueron agrupadas en una categoría denominada *ajenidad*, interpretando que al brindar cualquiera de ellas, él/la estudiante, no se apropia del problema planteado. La *ajenidad* constituye el 9% de las respuestas en la primera situación y el 28% de las respuestas a la segunda situación.

Las respuestas (la recta) *se completa* ya sea *no explicada* o justificada mediante que *todos los números son fracciones*, evidencia que identifican a los reales con los racionales. Del mismo modo la respuesta *no se completa* porque faltan los enteros, se interpreta que no consideran a los enteros como fracciones, sin embargo, (la recta) *se llenaría con las fracciones (no enteras) y los enteros*, por lo tanto, también se está confundiendo a los reales con los racionales. Respecto de la recta numérica, en estos casos, se la está considerando como un modelo de los racionales, es decir como un modelo de densidad, incluso en ocasiones se considera la densidad infinita, por la identificación de infinito y todo, la densidad infinita (en este caso numerable) puede ser confundida con completitud.

Por último, tenemos las respuestas correspondientes a: *no se completa*, en dos formas, una *no explicada* y la otra con una justificación (correcta) expresando que *faltan los irracionales*. Consideramos que estos/as estudiantes comprenden que los reales son la unión de los racionales y los irracionales y que la recta se completa mediante estos últimos, de modo que, si se retiran los racionales, en la recta quedan todos los infinitos no-numerables irracionales, es decir queda "casi" igual.

En la siguiente Tabla 9.7 se resume esta información y se dan las frecuencias y porcentajes de cada clase de respuestas para ambas situaciones.

Tabla 9.7: Clases de respuestas para las dos primeras situaciones de la Tarea R2. Interpretación mediante concepciones. Frecuencias y porcentaje para cada clase.

Concepción	**La recta ….**	**Primera situación**		**Segunda situación**	
Ajenidad	No sabe /No contesta /No Justifica	27	9%	87	28%
Recta densa. Confunden racionales con reales.	Se completa. No explicada	46	15%	27	9%
	Se completa. Todos los números son fracciones.	44	14%	22%	7%
	No se completa. Faltan los enteros	20	7%	18	6%
Recta densa. Centradas en el infinito.	Se completa. Infinito es Todo.	44	14%	18	6%
	No se completa. Infinito Potencial.	41	13%	52	17%
Recta completa	No se completa. No explicada	21	7%	58	19%
	No se completa. Faltan los irracionales	64	21%	25	8%

Categorización de las respuestas a la tercera situación de la Tarea R2

Para la tercera situación planteada en la Tarea R2, se contó con respuestas abierta a la pregunta: *si quitamos todas las fracciones de la recta ¿qué pensás que quedaría?* Se categorizaron las argumentaciones brindadas por los y las estudiantes obteniéndose siete clases de respuestas disjuntas. Posteriormente se realizó una prueba inter-juez que dio una coincidencia del 99%.

Algunos/as estudiantes no contestan esta situación o expresan *no sé* sin mayores argumentaciones, fueron considerados en una misma categoría de respuesta (*no sabe- no justifica*). Las respuestas *no sé* y la no respuesta constituyen juntas el 25% de la población estas conformaron, es forma análoga a lo hecho en las dos primeras situaciones, una categoría denominada *ajenidad.*

En las respuestas a esta pregunta quedó evidenciado que muchos/as estudiantes (40%) no consideran a los enteros como fracciones. De modo que la clase más numerosa es aquella que consideran que al retirar de la recta todas las fracciones, aun quedarían los enteros. Entre las respuestas de los y las estudiantes que no consideran a los enteros como fracciones, encontramos dos tipos, aquellas que expresan que al retirar las fracciones quedaría sólo los enteros, y aquellas en que quedarían los enteros y otros números no-racionales.

Mientras que en aquellas respuestas en las que se consideran a los enteros como fracciones, se pueden diferenciar cuatro clases de respuestas, aquellas que expresan que al retirar las fracciones *no quedaría nada; quedarían unos pocos números no-racionales; quedarían otros números* o *quedarían los irracionales*.

Tanto las respuestas en que no se consideran los enteros como fracciones y se expresa que quedarían sólo los enteros, como aquellas en que sí se consideran los enteros como fracciones y se expresa que no quedaría nada, evidencian que se están confundiendo los reales con los racionales (38%).

Luego encontramos algunas respuestas en donde se considera que si bien existirían números no-racionales estos serían unos pocos (4%). También dos categorías donde se considera que existen *infinitos números no-racionales*, aunque en forma difusa (14%). Por último, las respuestas que evidencian que los y las estudiantes conocen los irracionales como complemento de los racionales en los reales (19%).

La siguiente Tabla 9.8 resume la caracterización de las argumentaciones brindadas por los y las estudiantes para la tercera situación y muestra ejemplos de cada una de ellas.

Tabla 9.8: Clases de respuestas para la tercera situación de la Tarea R2. Ejemplos literales en los que se especifica de que NEM es el/la estudiante que brindó la respuesta.

	Caracterización	Ejemplo de un/una estudiante de …	N	%
No sabe/ NC	No Justifican.	4to: No sé.	78	25%
No consideran a los enteros como fracciones	*Quedarían los enteros*. Confunden los reales con los racionales. Consideran que quedarían los enteros	3ro: *quedarían los números enteros.*	100	33%
	Quedaría los enteros y otros números. Quedarían, además de los enteros otros números *no-racionales* (suelen ser las raíces, o los decimales o números indefinidos)	5to: (quedarían) *los números decimales y enteros*	22	7%
Consideran a los enteros como fracciones	*No quedaría nada.* Confunden los reales con los racionales. Consideran que no quedaría nada o la recta vacía.	EFA: (quedaría) *nada*	15	5%
	Quedarían unos pocos números no-racionales. Si bien existen números no-racionales son unos pocos. Consideran que quedaría grandes vacíos, espacios, puntos aislados, etc.	MA: *Creo que quedarían pedacitos de recta infinitesimales o puntos aislados.*	13	4%
	Quedarían más números, todos los otros números, las raíces. Quedarían números no-racionales. Suelen confundir los irracionales con las raíces o con los decimales o con números indefinidos	BA: (quedarían) *todos los demás tipos de números*	21	7%
	Quedarían los irracionales o casi la misma recta. Conocen los irracionales, los consideran infinitos (no-numerables)	MA: *quedarían todos los otros irracionales. Casi igual*	58	19%

9.2.2. Clases de respuestas completa a la Tarea R2

Asociaciones de los modos de respuesta a las tres situaciones la tarea

Realizamos un AFCM[40] de los y las estudiantes descriptos por sus modalidades de respuesta de opción y eventual justificación a cada una de las dos primeras situaciones y las categorías de respuesta a la tercera situación y su NEM. Este análisis nos permitió observar asociaciones entre las respuestas de opción y justificaciones a las tres situaciones de la tarea en un mismo/a estudiante y encontrar grupos de estudiantes que responda en forma similar en las tres situaciones, de manera de poder detectar formas de pensar la relación entre racionales e irracionales (densidad y completitud) en la recta numérica.

Las variables activas en el AFCM fueron cinco: dos variables *de elección de opciones* (1A y 2A) cada una con tres y cinco modalidades respectivamente y tres variables de justificación (1B, 2B y 3B) cada una con ocho, ocho y siete modalidades respectivamente*, s*egún se detalla en la Tabla 9.9. Como variable ilustrativa se

[40] Para detalles de este método y de la clasificación ver Capitulo 5 y Anexo II.

proyectó el NEM de los y las estudiantes con sus 9 modalidades. A continuación, el Gráfico 9.4, presenta el primer plano factorial de este AFCM

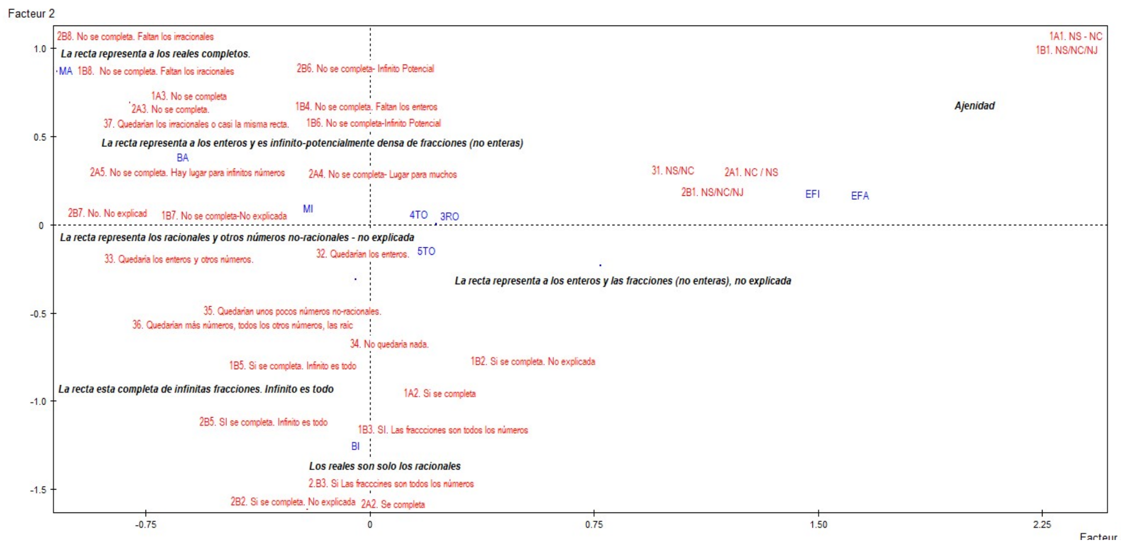
Tabla 9.9: Variables y modalidades activas del AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus modalidades de respuestas de opción y justificación a cada ítem en la Tarea R2

	Ítem 1 ¿Con las fracciones completan la recta?	**Ítem 2.** ¿Con las raíces de las fracciones completan la recta? ¿Queda lugar para cuántos números?	**Ítem 3.** Si retiramos las fracciones ¿qué queda?
Modalidades de opción	**1A**	**2A**	
	1A1. NS - NC 1A2. Se Completa 1A3. No se completa	2A1. No sabe -no contesta 2A2. Se completa 2A3. No se completa. Hay lugar para más números, no sabe cuantos 2A4.No se completa. Hay lugar para algunos o muchos números 2A5. No se completa. Hay lugar para infinitos números	
Modalidades de Justificación	**1B**	**2B**	3
	1B1. NS/NC/NJ 1B2. Se completa. No explicada 1B3. Se completa. Todos los números son fracciones. 1B4. No se completa. Faltan los enteros 1B5. Se completa. Infinitamente densa. Infinito es todo. 1B6. No se completa. Infinito Potencial. 1B7. No se completa. No explicada 1B8. No se completa. Faltan los irracionales	2B1. NS/NC/NJ 2B2. Se completa. No explicada 2B3. Se completa. Todos los números son fracciones. 2B4. No se completa. Faltan los enteros 2B5. Se completa. Infinitamente densa. Infinito es todo. 2B6. No se completa. Infinito Potencial 2B7. No se completa. No explicada 2B8. No se completa. Faltan los irracionales	31. NS/NC 32. Quedarían los enteros. 33. No quedaría nada. 34. Quedaría los enteros y otros números. 35. Quedarían más números, todos los otros números, las raíces 36.Quedarían unos pocos números no-racionales 37. Quedarían los irracionales o casi la misma recta.

A continuación, presentamos el Gráfico 9.4 del primer plano factorial del este AFCM de estudiantes descriptos por sus tipos de respuestas a los tres ítems de la Tarea R"; en el que se puede observar que el principal factor de variabilidad de este AFCM corresponde a las *no-respuestas o inseguridad* oponiéndose al resto de respuestas. Las primeras asociadas principalmente a estudiantes de EFI y EFA. El segundo factor discrimina entre las modalidades en que se establece que *con las fracciones se completa la recta* de las que se considera que *no se completa.* El tercer factor discrimina al interior de las modalidades centradas en infinito, separando aquellas en que se considera el *infinito identificado con todo* de las que se lo considera como *un proceso sin fin (potencial)*.

Considerando los tres principales factores se pueden determinar siete grupos de asociaciones de modalidades de respuesta, corroborados por la clasificación jerárquica realizada y que se describe en el apartado siguiente.

Gráfico 9.4: Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus tipos de respuestas a los tres ítems de la Tarea R2.



Clasificación de los y las estudiantes según su respuesta a la Tarea R2

A continuación, presentamos las clases obtenidas en la clasificación jerárquica ascendente[41] posterior al AFCM descripto en el apartado anterior. Esta clasificación agrupará en una misma clase los y las estudiantes que respondieron en forma similar los tres ítems de la tarea. Informaremos la cantidad de estudiantes y porcentaje de la población que representa, respuestas de elección y categorías de justificación asociadas para las tres situaciones y modalidades de NEM relacionadas particularmente. Haremos también una caracterización de las clases según las ideas relacionadas con los modos de respuesta asociados a cada una de ellas y, por último, ilustraremos cada clase con respuestas y justificaciones literales (*en itálica*). En el Gráfico 9.4 pueden observarse las asociaciones de respuesta de cada clase en el primer plano factorial.

Clase R2.1: *Ajenidad- Inseguridad*. N=70 (23%).

Modalidades asociadas: 1A1-NS/NC, 1B1-NS/NJ, 2A1-NS/NC, 2B1- NS/NJ, 31-NS/NC-NJ**.**

Se corresponde con los y las estudiantes que no contestan (o contestan no sé) al menos en dos de las tres situaciones (ver Tabla AII.16 en Anexo II). Se asocia a EFI y EFA.

Respuestas literales de un/a estudiante de EFI:

1A1. NC / 1B1. NJ / 2A4. Hay lugar para muchísimos números / 2B1.NC / 31.NC.

---

[41] Para detalles de este método y de la clasificación ver Capitulo 5 y Anexo II.

Clase R2.2. *La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada***.** N=41 (13%).

Modalidades asociadas: 1A2- Se completa, 1B1- NS/NC. NJ, 2A1-NS/NC, 2B1-NJ y 32-Los enteros.

Consideran que con las fracciones (racionales) se completa la recta sin embargo no explicitan su pensamiento. Al enfrentar la tarea de ubicar más números (las raíces de las fracciones) en la recta, evitan la tarea. Pareciera que no conocen los irracionales. Muchos/as estudiantes consideran que al retirar las fracciones de la recta quedarían los enteros. No tienen un nivel de NEM asociado especialmente, en esta clase no hay ningún estudiante de MA.

Respuestas literales de un/a estudiante de 3ro:

1A2. Las fracciones sí completan la recta / 1B1. NJ / 2A1.NC / 2B1. NJ / 32. Si quito las fracciones quedarían los enteros supongo.

Clase R2.3. *La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras)***.** N=55 (18%).

Modalidades asociadas: 1A3-<u>No se completa</u>, 1B6- No. Infinito Potencial, 1B4- No. Faltan los enteros, 2A4 -<u>No se completa. Hay lugar para infinitos números</u>, 2A3- No se completa.

Hay lugar para más números, no sabe cuántos, 2B6- No. Infinito Potencial 32-Quedarían los enteros. Consideran que con las fracciones (racionales) no se puede completar la recta, porque al ser infinitas "marcarlas" sería un proceso sin fin. Con las raíces tampoco se completa porque al ser infinitas ocurre lo mismo. Su concepción de infinito, como proceso sin fin, está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales. Muchos/as no consideran a los enteros como racionales. Asociada a BA y MI.

Respuestas literales de un/a estudiante de BA:

1A3. Las fracciones no completan la recta / 1B6. Porque hay infinitos números racionales por lo que la recta nunca se completaría I 2A4. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para infinitos números / 2B6. Porque siempre habría números que agregar a la recta ya que éstos son infinitos / 32. Si quito las fracciones quedarían los enteros.

Clase R2.4. *La recta esta completa de infinitas fracciones. Infinito es todo***.** N=31 (10%).

Modalidades asociadas: 1A2- Se completa, 1B5-Si. Infinito es todo, 2A5-<u>No se completa. Hay lugar para infinitos números</u>, 2B5 Si. Infinito es todo**.**

Consideran que las fracciones (racionales) completan la recta porque son infinitas y deben estar "todas". Las raíces también completan la recta por la misma razón. Su concepción del *infinito como identificado con todo* está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales. No tienen un nivel de NEM asociado especialmente

Respuestas literales de un/a estudiante de MI:

1A2. Las fracciones si completan la recta / 1B5. Si vos tenés 1/2, la mitad va a ser 1/4, la mitad 1/8, la mitad 1/16; infinitamente. Así llenás la recta / 2A5. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para infinitos número / 2B5. Los números son infinitos, te limita pensar en potencias y raíces, pero si tenés ***todos*** *se completa / 35. Si quito las fracciones quedarían todos los demás números (enteros, irracionales, pi, números especiales.*

Clase R2.5. *Los reales son solo los racionales.* N=18 (6%).

Modalidades asociadas: 1A2- Se completa, 1B3- Si. Las fracciones son todos los números, 2A2-Se Completa, 2B3-Si.

Las fracciones son todos los números y 2B2-Si. No explicada. Sus respuestas hacen pensar que identifican a los números reales con los racionales. Tienen asociado a BI.

Respuestas literales de un/a estudiante de BI:

1A2 Las fracciones si completan la recta / 1B3. Porque en ella están representados todos y cada uno de los números / 2A2. Las raíces si completan la recta. No hay lugar para más números / 2B1. NJ / 32. Si quito las fracciones quedan los enteros.

Clase R2.6. *La recta representa los racionales y otros números no-racionales - no explicada.* N=58 (19%).

Modalidades asociadas: 1B7- No. No explicada, 2A4-No se completa. Hay lugar para algunos o muchos números, 2A3- No se completa. Hay lugar para más números, no sabe cuántos, 2B4- No. Faltan los enteros u otros, 2B7-No. No explicada.

Consideran que con las fracciones (racionales) no se puede completar la recta, ya que existen otros números, aun cuando en algunos casos no tengan muy claros cuantos ni cuales, algunos/as estudiantes no consideran a los enteros como racionales. Consideran que con las raíces tampoco se completa porque existen otros números. Tiene asociados a 4to y BA

Respuestas literales de un/a estudiante de 4to:

1A2. Las fracciones no completan la recta / 1B1. no sé cómo explicarlo / 2A4. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para muchos números / 2B7. Hay lugar para más números creo yo, no puedo explicarlo bien porque hay cosas que me falta ver en la materia / 36. Si quito las fracciones quedan números que no son racionales.

Clase R2.7. *La recta representa a los reales completos.* N=34 (11%).
Modalidades asociadas: 1A3-No se completa, 1B8- No. Faltan los Irracionales, 2A5-No se completa. Hay lugar para infinitos números, 2B8- No. Faltan irracionales y 37-Quedan los irracionales o casi lo mismo.
Sus respuestas hacen pensar que comprenden a los reales como la unión de los racionales y de los irracionales, conciben la recta como continua. Tienen asociado al NEM MA. (100% de los de MA están en esta clase)

Respuestas literales de un/a estudiante de MA:
1A2. Las fracciones no completan la recta / 1B8. Faltarían "marcar" todos los números irracionales / 2ª5. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para infinitos número /2B8. Faltarían ¨marcar¨ algunos números irracionales que no pueden escribirse como raíces por ej. e, pi, etc. / 37. Si quito las fracciones quedarían los números Irracionales.

Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea R2

Daremos una caracterización de estas clases de respuestas particularmente en cuanto a su relación con concepciones sobre la diferenciación entre los reales y los racionales. Un 23% de estudiantes no se apropian del problema contestando *no sé* o no contestando al menos dos de los tres ítems de la tarea, esta clase de respuestas las denominamos *ajenidad.*

En las respuestas de los y las estudiantes que hemos denominado *la recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras)-no explicada*; *la recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras*); *la recta esta completa de infinitas fracciones e infinito es todo* y *la recta representa los racionales* se evidencia una identificación de los números (reales) con la unión de enteros y fracciones es decir con los racionales. Mientras que los tipos de respuestas: *la recta representa los racionales y otros números no-racionales (no explicada)* o *la recta representa a los reales* evidencian que los/as estudiantes conciben otros números (reales) no-racionales.

En la Tabla 9.10 encontramos una síntesis de las clases de respuestas en términos de concepciones sobre la diferenciación entre los reales y los racionales. Porcentaje de la población que presenta la clase de respuesta.

Tabla 9.10: Clases de respuestas a la Tarea R2. Concepciones sobre la diferenciación entre los reales y los racionales identificadas. Etiquetas de las clases y porcentaje de la población en cada clase.

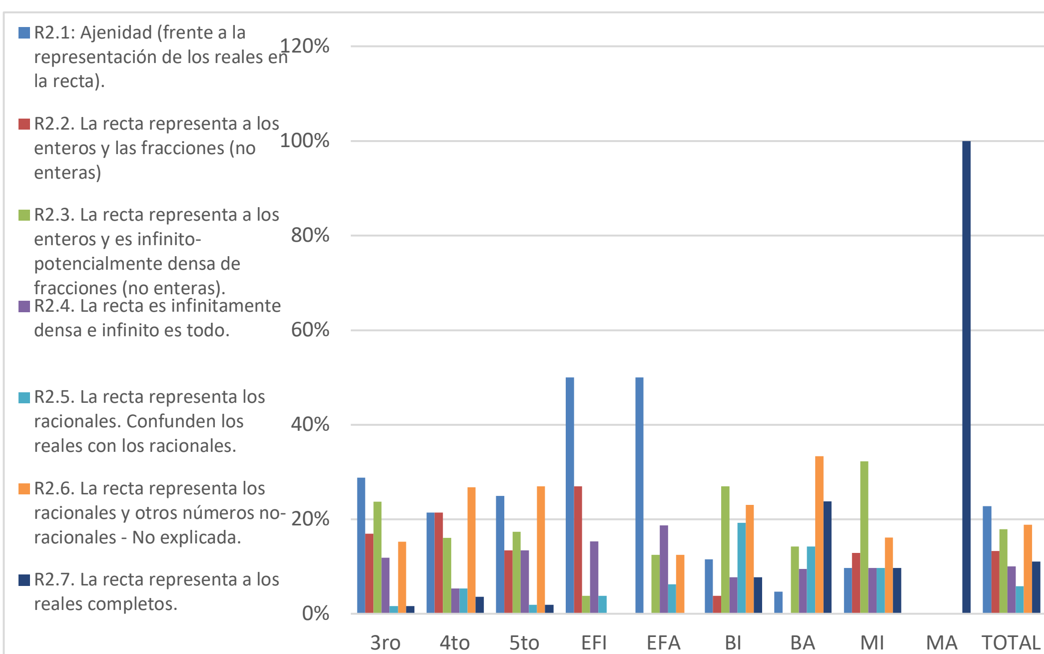
Concepción	**Caracterización del tipo de respuesta**	**%**
Ajenidad.	R2.1: Ajenidad - Inseguridad.	23%
La recta se completa con las fracciones. Se identifican los reales con los racionales	R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada. Se confunde densidad de racionales con completitud.	13%
	R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras). La recta es densa mas no completa (mediante la noción de infinito potencial).	18%
	R2.4. La recta esta completa de infinitas fracciones. infinito es todo. Se confunde densidad de racionales con completitud (mediante la noción de infinito identificado con todo)	10%
	R2.5. La recta representa los racionales. Los reales son sólo los racionales. Explícitamente se confunde densidad de racionales con completitud.	6%
La recta no se completa con las fracciones. Los reales son los racionales unidos a otros números no racionales.	R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada. Densidad es distinto de completitud.	19%
	R2.7. La recta representa a los reales completos. *Se comprende densidad y completitud*	11%

9.2.3. Perfiles de respuestas de la Tarea R2 según el nivel de estudio

Distribución de las clases de respuestas en los NEM

En la Gráfico 9.5 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada clase de concepciones en cada nivel de estudio y en la población en general

Gráfico 9.5. Distribución de las clases de respuestas dentro de cada NEM para la Tarea R2.



Si bien la clase de concepción que denominamos *la recta representa a los reales completos* es muy característica de MA, en el resto de los niveles de estudio se manifiestan casi todas las clases de concepciones. Vemos que la *ajenidad* se presenta como característica para los y las estudiantes de Educación Física y que los y las estudiantes de secundaria poseen un perfil de respuesta similar al perfil medio de la población.

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea R2 según el NEM

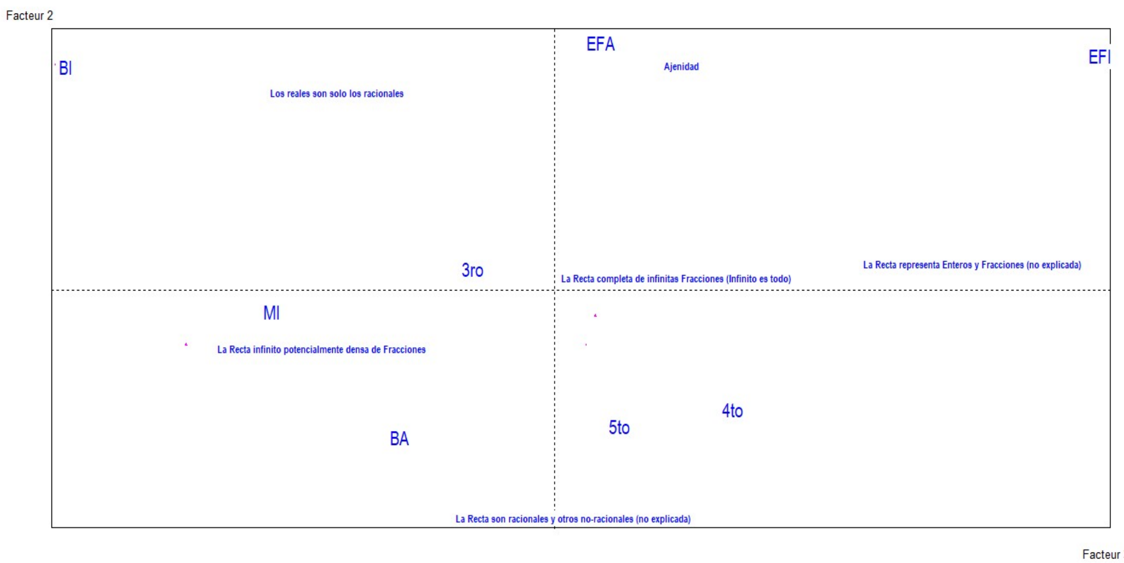
Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC[42]de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las modalidades de NEM a fin de observar si existen perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.17 en el Anexo II.

A continuación, presentamos los dos primeros planos factoriales de esta AFC de los perfiles de repuestas al interior de los nueve niveles de estudio (Gráficos 9.6 y 9.7).

Gráfico 9.6. Primer plano factorial del AFC de los perfiles de distribución de las clases de respuestas en los NEM de la Tarea R2.

[42] Para detalles de este método y de la clasificación ver Capitulo 5 y Anexo II.

Gráfico 9.7. Segundo plano factorial del AFC de los perfiles de distribución de las clases de respuestas en los NEM de la Tarea R2.



La Tabla 9.11 sintetiza las asociaciones de los perfiles de distribución de las clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, encontrados en el AFC.

Tabla 9.11: Grupos de asociaciones entre perfiles de respuesta a la Tarea R2 y las modalidades de NEN.

Asociaciones de clases de concepción		NEM
Ajenidad.	Ajenidad - Inseguridad.	EFA y EFI
La recta se completa con las fracciones. Identifican los reales con los racionales	La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.	3ro, 4to y 5to
	La recta esta completa de infinitas fracciones. infinito es todo.	
	La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras). La recta representa los racionales. Los reales son sólo los racionales.	MI BI
La recta no se completa con las fracciones. Los reales son los racionales unidos a otros números no racionales.	La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada. .	BA
	La recta representa a los reales completos.	MA

Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática (Gráfico 9.5); encontramos que el perfil de MA es muy característico fundamentalmente asociado a *la recta representa los reales completos.* Los perfiles de Educación Física también son muy característicos y opuestos a este último y tienen como clase asociada principalmente a la *ajenidad*. Los grupos de NEM: 3ro, 4to y 5to poseen perfiles similares al perfil medio de la población, predominando la clase *la recta representa los racionales y otros números no-racionales - no explicada*. Mientras en BI, MI y BA predomina una identificación de los reales con los racionales a través de las tres clases: *confunden los reales con los racionales; la recta representa los racionales y otros números no-racionales - no explicada* y *la recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras).*

9.2.4. Síntesis de resultados de la Tarea R2.

El objetivo de la Tarea R2 fue estudiar cómo los y las estudiantes conciben: a la recta numérica como representación de los números reales, la diferenciación entre números racionales y reales, como así también la densidad y completitud de los números reales en relación con la continuidad de la recta.

Un 23% de la población no realizó al menos dos de los tres ítems de la tarea, es decir que esta tarea podría ser considerada como más lejana cognitivamente a estos/as estudiantes que la anterior. La mayoría de la población (47%) parece no diferenciar, representados en la recta, los reales de los racionales y sólo un 30% plantea la existencia de números no-racionales representados en la recta.

En las clases de respuestas identificadas, pudimos observar tres formas generales de concebir a la recta como representación de los números reales: *ajenidad* o *inseguridad* (23%)*; la recta se completa con las fracciones y confunden a los reales con los racionales* (47%) y *la recta no se completa con las fracciones y los reales son los racionales unidos a otros números no racionales* (30%).

La primera de esta forma es la *ajenidad* e *inseguridad* frente al problema, es decir, la tarea no se presenta como un desafío para estos/as estudiantes. Asociada a EFI y EFA, estudiantes sin estudios universitarios en matemática. En esta tarea, la ajenidad aumenta notablemente respecto de la anterior, interpretamos que esto es debido a que la tarea pone al resolutor frente a acciones que implican el infinito al proponer imaginar conjuntos *infinitos* de números (racionales y raíces de los racionales).

La segunda forma es aquella en que los y las estudiantes piensan que *la recta se completa con las fracciones y confunden a los reales con los racionales*, la más popular en esta población. Que se manifiesta de cuatro modos, aquel en el que se considera (sin mayores justificaciones) que *la recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras);* otro modo es aquel en que se considera que *la recta representa a los enteros y a infinitas potencialmente densas fracciones (no enteras)*, luego tenemos aquellas respuestas que consideran que *la recta esta completa de infinitas fracciones, porque si son infinitas deben ocupar todo* y por último aquellas en que se considera que *la recta representa los racionales en forma explícita.*

Es notable como un 21% de la población, piensan el conjunto de los enteros como disjunto del de las fracciones (racionales) y la recta aparece principalmente como sostén de los números enteros. En estas clases de respuestas en que las fracciones y los enteros se conciben como conjuntos disjuntos está asociada en su forma *no explicada* con 3ro, 4to y 5to y en su forma *potencialmente densa de fracciones* a los ingresantes de las carreras científicas y a los de BA. Por otra parte, tenemos también en esta mayoría las clases de respuestas en la que los reales son identificados con los racionales, la clase de respuestas que expresa *la recta esta completa de infinitas fracciones, porque si hay infinitos números, deben estar todos* y por último aquellas en que se considera que *la recta representa los racionales en forma explícita.* Ambas asociadas a los NEM universitarios: MI, BI y BA y representando el 10% y el 6% de la población respectivamente.

La tercera forma de concebir a la recta como representación de los números reales es aquella en que se evidencia que *la recta no se completa con las fracciones y los reales son los racionales unidos a otros números no racionales.* Se da de dos modos: uno en forma *no explicada* y otro en forma *explícita*, en esta última se considera que los reales son la unión de racionales e irracionales (es sólo el 11% de la población y particularmente estudiantes de MA). El 30% de los y las estudiantes puede pensar que *la recta no se completa con las fracciones y los reales son los racionales unidos a otros números no racionales,* lo que podríamos considerar como una idea cercana a la idea matemática, este porcentaje es más alto que en las tareas anteriores. Podríamos decir que la representación de los reales en la recta favorece la comprensión de la densidad y completitud de los reales en estudiantes con mayores estudios en Matemática.

Notemos como en dos de estas clases de respuestas las concepciones sobre infinito median de forma que se concibe la recta como representando sólo los racionales: en la clase *la recta esta completa de infinitas fracciones e infinito es todo* y la clase *la recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones.* En la primera, esta respuesta alternativa puede que surja de identificar infinito con todo en el sentido de que, si las fracciones (y las raíces de la fracción) son infinitas entonces deben ocupar todos los puntos-números. Mientras que en la segunda como dijimos, la recta nunca se completaría (no porque hay números no-racionales) sino porque siempre hay lugar para otra fracción, es acorde con la forma de concebir al infinito como un proceso sin fin, es decir en forma potencial.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.9, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

9.3. Tarea R3[43]. Concepciones sobre la naturaleza de la recta numérica

El objetivo de la Tarea R3 fue conocer cómo estas/os estudiantes conciben a la recta numérica como representación de los números reales, identificando diferentes modos de pensar la naturaleza de la recta numérica e inferir las concepciones sobre el infinito, la densidad y completitud de los números reales en relación con la continuidad de recta.

Esta tarea aporta como información, para cada estudiante, respuestas a tres ítems. En el primero y tercer ítems, respuestas de tipo verbal abiertas y una respuesta gráfica para el segundo ítem de la tarea.

El Cuadro 9.3 reproduce la consigna utilizada para esta tarea en el cuestionario, tal como fue presentada a los y las estudiantes.

Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

____

____

¿Podés dibujar lo que ves?

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

____

____

Cuadro 9.3: La consigna utilizada para la Tarea R3 en el cuestionario.

La discusión de la lógica imperante en esta tarea y el análisis de qué ideas o concepciones evidenciaría cada posible respuesta brindada por los y las estudiantes puede verse en el apartado. 4.1.2 del Capítulo 4.

9.3.1. Categorización de las respuestas a cada ítem de la Tarea R3

Esta tarea solicita imaginar un microscopio (ideal) de gran potencia que enfoca sobre un fragmento de recta numérica y agranda la imagen de un segmento (intervalo) de recta (de reales) que denominaremos primer ítem. Luego se pide que se dibuje lo que se ve durante este proceso de agrandar el aumento, denominado segundo ítem. Por último, se solicita que se describa qué se ve cuando el aumento es “infinito”, que denominaremos tercer ítem[44].

[43] El análisis de esta tarea fue publicado en Montoro et al. (2017).

[44]Tarea similar a la utilizada por Romero (1996) que ya era una modificación de la utilizada por Robinet (1986)

Cabe destacar que en la Tarea R1, previa a ésta en el mismo cuestionario se brindó un modelo de recta numérica sobre un cuadriculado del orden de los décimos. En ella se solicitó ubicar en la recta números enteros, racionales e irracionales. La totalidad de estudiantes ubicaron correctamente los números enteros (aún los negativos) mientras que el 94% de ellos o ellas no tuvieron dificultad en ubicar, además, los racionales con una cifra decimal. Estos resultados nos habilitan a considerar que pensar en la recta numérica no les resultó ajeno al resolver la tarea aquí analizada.

Cuarenta y seis estudiantes que constituyen el 15% de esta población, no respondieron al menos dos de los ítems de la tarea, lo que presenta esta tarea como de dificultad media. Es notable que el 37% de los y las estudiantes no dibujan (tercer ítem), mientras que sólo el 15% no responde alguno de los ítems descriptivos verbales, lo que indica que el requerimiento de una respuesta gráfica se les presentó con un mayor grado de dificultad que la demanda de respuestas verbales. En el Anexo II (Tabla AII.18) se puede observar la distribución de frecuencias de no-respuesta (o respuesta del estilo *no sé*) a la Tarea R3 en los NEM.

Categorización de las respuestas verbales al primer ítem de la Tarea R3

En primer ítem de la Tarea R3, para cada estudiante, se contó con una respuesta verbal a la solicitud de describir lo que se imagina cuando un microscopio (ideal) de gran potencia enfoca un fragmento de recta numérica y agranda la imagen. En todos los casos se trató de respuestas cortas, que se categorizaron una por una, según el sentido de las frases. Resultando siete categorías disjuntas. En el procedimiento de control inter-juez realizado se obtuvo una coincidencia de un 98%.

Presentamos en la Tabla 9.12 una breve descripción de cada una de las categorías determinadas para el primer ítem, correspondientes a respuestas verbales al requerimiento de ir agrandando el segmento de recta. También ejemplos de respuestas literales de los y las estudiantes en itálica.

Tabla 9.12: Caracterización y ejemplos de las categorías de respuestas verbales dadas en el primer ítem de la Tarea R3

Categorías Caracterización	Ejemplos literales de respuesta (*)	%
No contestan/ No saben Manifiesta no saber qué ocurriría	*no sé / ni idea / no se me ocurre*	22%
Recta dibujada o material Aseguran que las etiquetas de los números se amplían, la recta se hace más gruesa. O ven una imagen aumentada en tamaño o que se acerca. El espacio entre marcas se agranda. Aseguran ver los componentes de la recta física, átomos, moléculas o partículas de tinta.	*vería los componentes de la hoja / a medida que voy aumentando el objetivo la imagen se observa más grande / si la recta está escrita con lápiz se nota cada vez más / veo como se agrandan los números*	14%
Densidad numérica potencial Aseguran ver muchos, más números, nuevos números o números con más cifras decimales.	*se ven muchos números en cada segmento / veo números y números y más números / voy viendo cada vez que me acerco más números / veo cada vez números con más decimales.*	33%
Densidad numérica infinita Aseguran ver infinitos números.	*cualquier segmento, de cualquier tamaño contiene infinitos números / seguir viendo infinitos números y más números.*	10%
Recta discreta de puntos Ven uno, muchos o una sucesión de puntos	*veo que el aumento del microscopio es muy potente y acerca la recta y entre los dos extremos veo puntitos que es del objeto que veo: la recta / vas viendo + detalle, cada vez se puede diferenciar más entre dos puntos*	5%
Regla graduada Ven la recta con la escala; una segmentación, divisiones o subdivisiones de la recta. Otros ven la recta con marcas o líneas rayas de la escala. Infinitas marcas o divisiones.	*voy viendo cómo aumenta la escala, pero nunca terminaría / se vería una línea recta con divisiones y a medida que te acercas se prolongan las divisiones / ves la recta dividirse cada vez en más partes*	12%
Continuidad Ven la recta continua o siempre lo mismo.	*se mantiene continua / se ve siempre lo mismo, una línea recta.*	3%

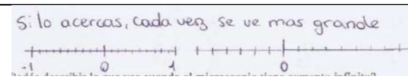
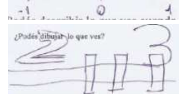
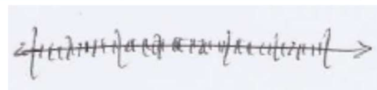
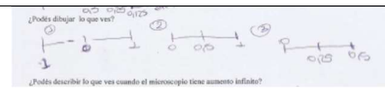
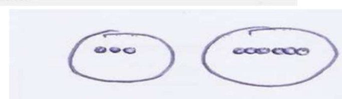
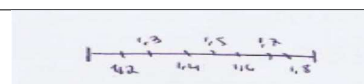
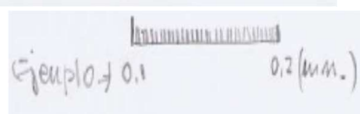
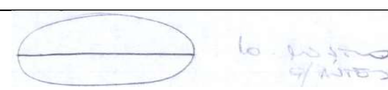
(*) Las barras separan las respuestas de participantes distintos.

Categorización de respuestas gráficas al segundo ítem de la Tarea R3

Observando en forma directa las producciones gráficas (una por una), realizamos una primera clasificación, teniendo en cuenta los elementos que figuraban en los dibujos (puntos, números, marcas, segmentos, escalas u otros objetos). Las respuestas se clasificaron en forma independiente por la autora y dos docentes universitarias de Matemática y luego se consensuaron las categorías resultantes. Posteriormente se aplicó el procedimiento de control inter-juez previsto y se obtuvo una coincidencia del 96%. Para el 4% restante se consensuo entre la autora y las jueces.

Presentamos en la Tabla 9.13 una breve descripción de cada una de las categorías determinadas para los dibujos, correspondientes al requerimiento de dibujar lo que "ve" a medida que se agranda el segmento de recta. También ejemplos de dibujos característicos brindados por estudiantes.

Tabla 9.13: Caracterización y ejemplos de las categorías de los dibujos del ítem 2 de la Tarea R3

Categorías	Caracterización	Ejemplo	%
No dibujan	Solo no dibujaron, es decir, respondieron los ítems verbales, pero no dibujaron.		38%
Recta dibujada o material	Muestran una recta dibujada que se estira, se agrandan los espacios entre marcas del intervalo original, las etiquetas de los números se amplían o la recta se hace más gruesa. Dibujan componentes de la recta física; ya sea átomos, moléculas o tinta.	 	13%
Recta con marcas.	Dibujan un segmento de recta con muchas marcas.	 	13%
Recta densa - segmento fractal	Dibujan en una primera instancia un segmento de recta y en instancias posteriore dibujan segmentos estrictamente incluidc en el anterior. Imagen fractal del segmer to. Sus dibujos expresan que entre los extre mos del intervalo nuevo siempre hay otros números.	 	14%
Recta discreta	Dibujan uno o varios números sin la recta; uno o varios puntos “gordos”. Similar a un collar de perlas.	 	6%
Recta graduada	Dibujan una recta graduada, generalmente, con números decimales. En la mayoría figura una escala. Como una regla graduada decimal.	 	13%
Recta continua	Dibujan un segmento de recta sin marcas ni números.		4%

Categorización de las respuestas verbales al tercer ítem de la Tarea R3

En tercer ítem de la Tarea R3, para cada estudiante, se contó con una respuesta verbal a la solicitud de que se describa qué se ve cuando el aumento del microscopio ideal es “infinito”. Al igual que en el primer ítem, en todos los casos se trató de respuestas cortas, que se categorizaron una por una, según el sentido de las frases. Resultando ocho categorías disjuntas. En el procedimiento de control inter-juez realizado se obtuvo una coincidencia de un 98%.

Presentamos en la Tabla 9.14 una breve descripción de cada una de las categorías determinadas para el primer ítem, correspondientes a respuestas verbales de que se describa qué se ve cuando el aumento del microscopio ideal es “infinito”. También ejemplos de respuestas literales de los y las estudiantes en itálica.

Tabla 9.14: Caracterización y ejemplos de las categorías de respuestas verbales dadas en el tercer ítem de la Tarea R3.

Categorías	Caracterización	Ejemplos literales de respuesta (*)	%
No contesta/ no sabe/ indefinición	Manifiesta no saber qué ocurriría o aseguran que no se puede describir lo que ocurre por tratarse de un aumento infinito	*no sé / es infinito, no se puede representar / en infinito es indescriptible*	43%
Recta dibujada o material	Aseguran que las etiquetas de los números se amplían, la recta se hace más gruesa. O ven una imagen aumentada en tamaño o que se acerca. El espacio entre marcas se agranda. Aseguran ver los componentes de la recta física, átomos, moléculas o partículas de tinta.	*vería los componentes de la hoja / si la recta está escrita con lápiz se nota cada vez más / veo como se agrandan los números*	10%
Densidad numérica potencial	Aseguran ver muchos, más números, nuevos números o números con más cifras decimales.	*se ven muchos números en cada segmento / veo números y números y más números / voy viendo cada vez que me acerco más números / veo cada vez números con más decimales.*	13%
Densidad numérica infinita	Aseguran ver infinitos números o todos los números.	*seguir viendo infinitos números y más números / veo todos los números.*	20%
Recta discreta de puntos	Ven uno, muchos o una sucesión de puntos. Aseguran ver una sucesión de infinitos puntos.	*una sucesión infinita de puntos.*	2%
Recta graduada	Ven la recta con la escala, divisiones o subdivisiones de la recta. Otros ven la recta con marcas o líneas de la escala. Infinitas marcas o divisiones.	*infinitas subdivisiones y marcas*	6%
Continuidad	Ven la recta continua o siempre lo mismo.	*se ve siempre lo mismo, una línea recta.*	5%
Un punto (**)	Afirman que con aumento infinito se sería “un punto”.	*Vería un punto/ simplemente un punto*	1%

(*) Las barras separan las respuestas de participantes distintos.

(**) Tres estudiantes respondieron el tercer ítem diciendo “un punto” respuesta correcta desde el punto de vista *cantoriano*. Estos/as tres estudiantes en el primer ítem respondieron consistentemente con las respuestas catalogadas como *continuidad.*

9.3.2. Clases de respuestas completas a la Tarea R3

Como adelantamos el 15% de la población de estudiantes no respondieron al menos a dos de los ítems de la tarea. La mayor parte de estos/as estudiantes cursaban la escuela secundaria o la carrera de Educación Física. Cabe destacar que la totalidad de estudiantes avanzados/as de Matemática o de Biología la resolvieron.

Los siguientes resultados se informan relativos a los 261 estudiantes que respondieron mayormente la tarea (al menos dos ítems). Entre estos/as estudiantes encontramos que sólo el 7% dicen que *no saben* qué ocurriría al ir aumentando la imagen, en tanto que esta frecuencia aumenta a 27% cuando responden qué ocurriría con un aumento infinito.

Muchos estudiantes (44% en el primer ítem y 33% en el tercer ítem) describen a la recta numérica basándose en la densidad numérica, ya sea una densidad potencial (*más y más números*) o una densidad infinita (*más y más números hasta ver infinitos o todos los números*). Al indagar sobre un aumento infinito aumentan las respuestas donde se evidencia la idea que entre dos números se puede encontrar un sinfín de números, como un proceso *potencialmente infinito*.

La respuesta desde el punto de vista cantoriano, donde un número real será la intersección infinita de un encaje de intervalos un punto o un número, sólo se da en 3 casos, estudiantes de MI, en los tres casos los y las estudiantes manifiestan que al aumentar el intervalo se irá viendo un intervalo idéntico isomorfo al anterior, sin embargo, al imaginar un aumento infinito imaginan que se obtiene “un punto”.

El 40% de los y las estudiantes (63% de los que dibujan) centran sus dibujos en la densidad, representada por marcas sobre la recta, en la que se pueden realizar ‘marcas y más marcas’ (recta con marcas), dibujan un segmento encajado en otro e idéntico al anterior, aunque con distintas etiquetas numéricas (recta densa) o realizan dibujos de una recta con marcas decimales con etiquetas de los números asemejando una regla graduada (recta graduada). Por último, encontramos dos tipos de representaciones minoritarias: el segmento de recta como si fuera un collar de puntos (recta discreta) y un segmento sin etiquetas, ni números ni marcas, dando idea de continuidad.

Asociaciones de modos de respuesta a los tres ítems de la Tarea R3.

Realizamos un AFCM[45], de los y las estudiantes descriptos por sus clases de respuestas en cada uno de los tres ítems de la tarea como modalidades activas y las nueve modalidades de NEM como modalidades ilustrativas. Este AFCM nos permitió observar asociaciones entre las respuestas verbales y gráficas en un mismo/a estudiante o grupo de estudiantes y encontrar grupos de estudiantes que respondan en forma similar en los tres ítems, de manera de poder detectar formas de pensar la naturaleza de la recta numérica.

Las variables activas en el AFCM fueron tres, una para cada ítem de la tarea: Aumento (A), Infinito (I) y Dibujo (D), cada una con siete modalidades respectivamente (ver Tabla 9.15). Como variable ilustrativa se proyectó el NEM de los y las estudiantes con sus nueve modalidades (3ro, 4to, 5to, EFI, EFA, BI, BA, MI y MA).

[45] Para detalles de este método y de la clasificación ver Capitulo 5 y Anexo II.

Tal como adelantamos los presentes resultados se informan relativos a los y las 261 estudiantes que respondieron al menos dos de los ítems de la tarea. A continuación, presentamos los dos primeros planos factoriales (Gráfico 9.8 y 9.9) de este AFCM. Se conservaron los tres primeros factores de modo de conservar más del 60% de la inercia.

Tabla 9.15: Variables y modalidades activas del AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus clases de respuestas a cada ítem en la Tarea R3.

Variable A	**Variable I**	**Variable D**
A.No sé- no se puede	I.No se puede	D.No dibujan
A.Recta dibujada o material	I.Recta dibujada o material	D.Recta dibujada o material
A.Densidad numérica potencial	I.Densidad numérica potencial	D.Recta con marcas
A.Densidad numérica infinita	I.Densidad numérica infinita	D.Recta densa - segmento fractal
A.Recta discreta	I.Recta discreta	D.Recta discreta
A.Recta graduada	I.Recta graduada	D.Recta graduada
A.Continuidad	I.Continuidad	D.Recta continua

Gráfico 9.8. Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus respuestas a los tres ítems de la Tarea R3 y sus NEM.

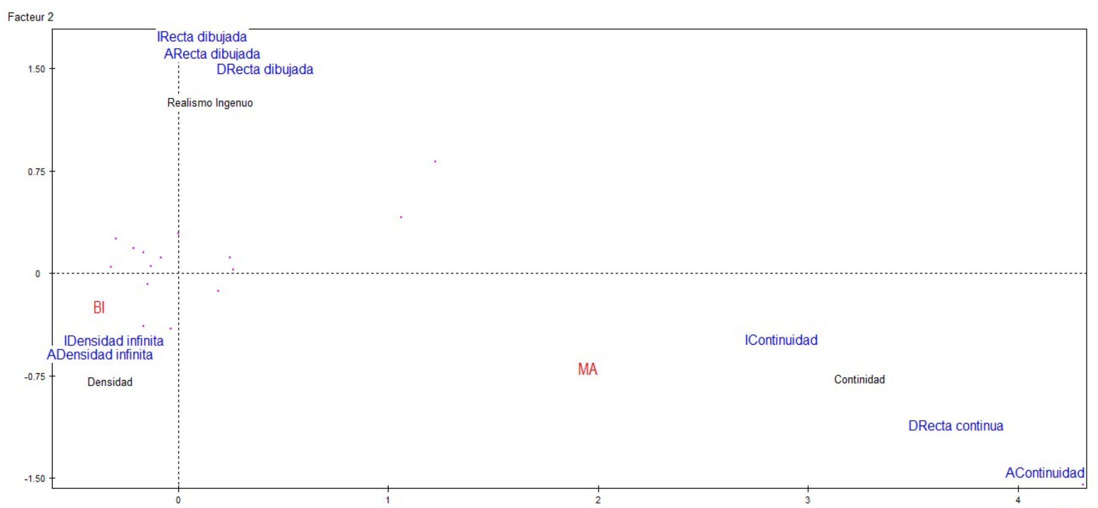
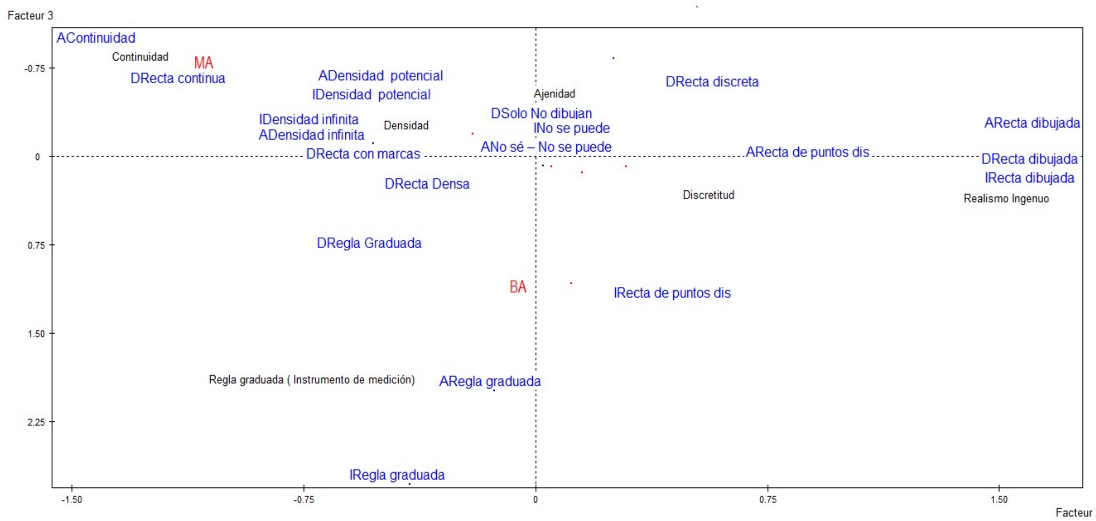


Gráfico 9.9. Segundo plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos por sus respuestas a los tres ítems de la Tarea R3 y sus NEM.



En este AFCM encontramos que el principal factor de variabilidad corresponde a respuestas *continuidad* asociadas a MA oponiéndose al resto de tipos de respuestas. El segundo factor discrimina entre las modalidades correspondientes una *recta dibujada o material* y las de una *recta numérica densa*. El tercer factor discrimina entre las respuestas *no sé* o *no se puede* y las correspondientes a *regla graduada*.

De modo que por un lado tenemos una variación fijada en propiedades de la recta: *discretitud, densidad o continuidad*, y por otros modos particulares de afronta la tarea, como son la *ajenidad, la recta dibujada o material* o tomar la recta utilitariamente como una *regla graduada.*

Clasificación de los y las estudiantes según las respuestas a la Tarea R3

A continuación, presentamos las siete clases obtenidas en la clasificación jerárquica ascendente posterior al AFCM descripto en el apartado anterior. Esta clasificación agrupará en una misma clase los y las estudiantes que respondieron en forma similar los tres ítems de la tarea.

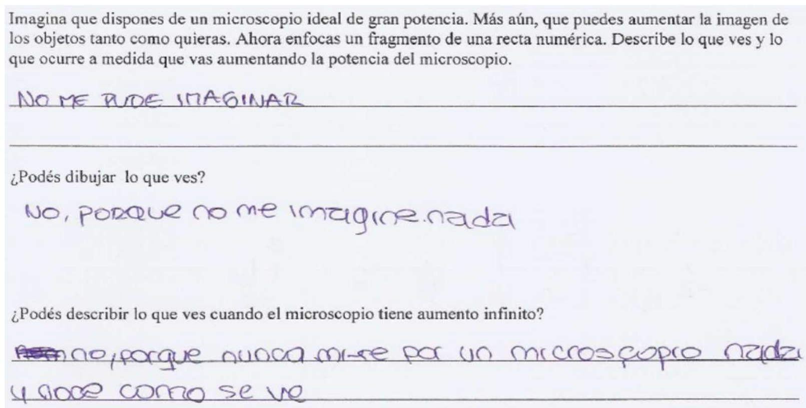
Informaremos la cantidad de estudiantes en cada clase, tipo de respuestas verbales y gráfica y modalidades de NEM relacionadas particularmente. Haremos una caracterización de las clases según las ideas relacionadas con los modos de respuesta asociados a cada una de ellas y, por último, ilustraremos cada clase con respuestas literales y dibujos de estudiantes representativos de la clase.

Clase R3.1. *Ajenidad*. N=5.

Modalidades asociadas: *A. No sé-no se puede; I. No se puede.*

El problema les es ajeno, manifiestan no saber qué ocurriría o aseguran que no se puede describir lo que ocurre por tratarse de un aumento infinito, no se comprometen con la actividad. Principalmente son estudiantes de 3ro y EFI.

Respuesta de un/una estudiante de 3ro de secundaria.



Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

NO ME PUDE IMAGINAR

¿Podés dibujar lo que ves?

NO, PORQUE NO ME IMAGINE NADA

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

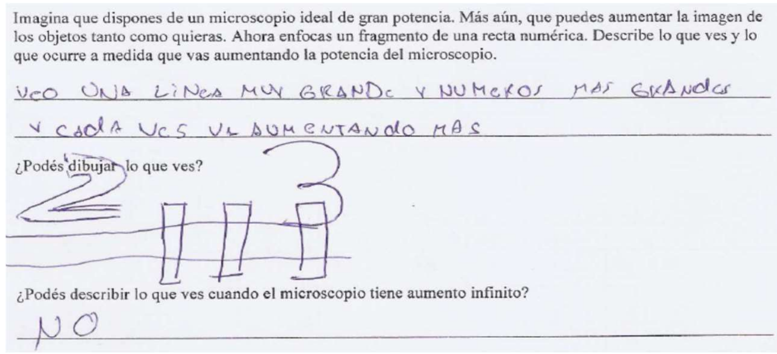
no, porque nunca mire por un microscopio nada y nose como se ve

Clase R3.2. *Recta dibujada o material*. N=53.

Modalidades asociadas: *A. Recta dibujada o material; D. Recta dibujada o material; I. Recta dibujada o material.*

Aseguran que al ir aumentando la potencia y con potencia infinita verán una imagen aumentada en tamaño o que el espacio entre marcas se agranda. Otros estudiantes aseguran ver los componentes de la recta física, como son átomos, moléculas o partículas de tinta. En el dibujo muestran una recta que se estira, las etiquetas de los números se amplían, la recta se hace más gruesa o se agrandan los espacios entre marcas. Interpretamos que estos y estas estudiantes poseen una concepción materialista, o no pueden desprenderse del objeto real 'microscopio' o de la representación externa de la recta (como la marca que deja el lápiz o la tinta de la impresora en un papel). Para estos y estas estudiantes la recta no es un objeto matemático. Esta clase no presenta modalidades de NEM particularmente asociadas.

Respuesta de un/una estudiante de 3ro de secundaria.


Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

VEO UNA LINEA MUY GRANDE Y NUMEROS MAS GRANDES Y CADA VES VA AUMENTANDO MAS

¿Podés dibujar lo que ves?

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

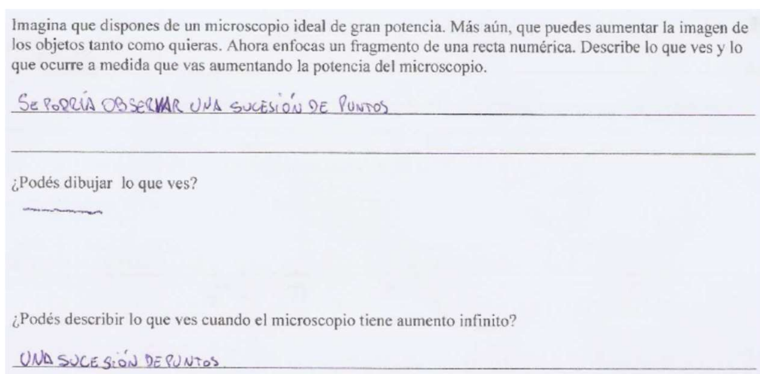
NO

Clase R3.3. *Recta (de puntos) discreta.* N=17.

Modalidades asociadas: *A. Recta discreta (puntos); I. Recta discreta (puntos).*

Expresan que ven pocos, muchos o una sucesión de puntos, algunos aseguran ver una sucesión de infinitos puntos. Esta clase no presenta modalidades de NEM particularmente asociadas.

Respuesta de un/una estudiante de BA


Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

SE PODRÍA OBSERVAR UNA SUCESIÓN DE PUNTOS

¿Podés dibujar lo que ves?

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

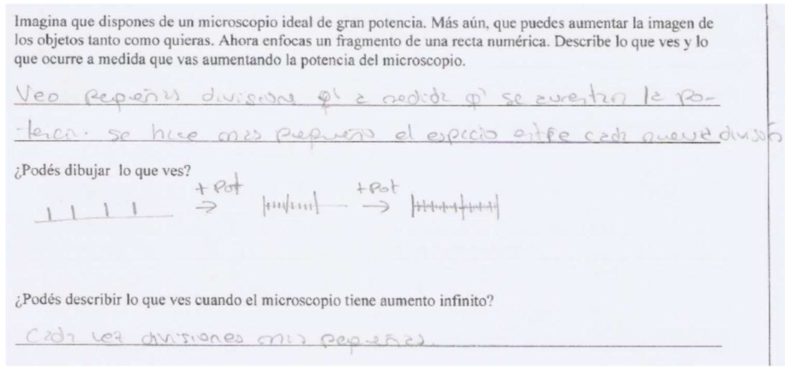
UNA SUCESIÓN DE PUNTOS.

Clase R3.4. *Recta de magnitudes.* N= 36

Modalidades asociadas: *A. Recta graduada; I. Recta graduada.*

Dicen ver la recta con una escala, una segmentación, divisiones o subdivisiones de esta. Otros u otras imaginan la recta con marcas o líneas (rayas), infinitas marcas o divisiones. Conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes, es decir como un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal o una regla. Asociada a BA (el 35% de la clase es de BA).

Respuesta de un/una estudiante de BA.



Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

Veo pequeñas divisiones q' a medida q' se aumenta la potencia se hace más pequeño el espacio entre cada nueva división

¿Podés dibujar lo que ves?

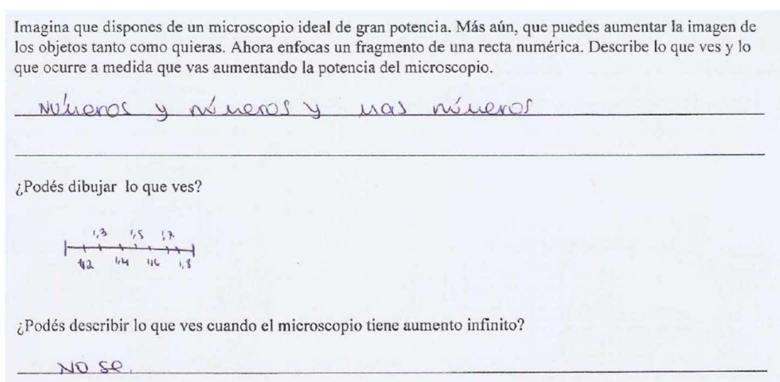
¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

Cada vez divisiones más pequeñas.

Clase R3.5. *Densidad numérica potencial - infinito como indefinido.* N=74. Modalidades asociadas: *A. Densidad numérica potencial; I. Densidad numérica - Inseguridad, indefinición y D. Recta graduada.*

Aseguran ver muchos o más números, nuevos números, o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta. La recta se concibe como densa de números. Con aumento infinito manifiestan no saber, o que en el infinito no es posible. Algunos dibujan la recta con escala decimal. Asociada a 5to (el 30% de la clase es de 5to de secundaria). Es la clase más numerosa.

Respuesta de un/una estudiante de 5to de secundaria.



Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

Números y números y más números

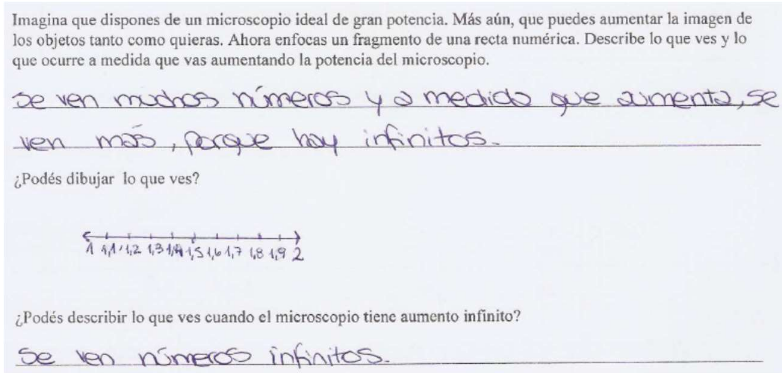
¿Podés dibujar lo que ves?

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

No se.

Clase R3.6. *Densidad numérica potencial - infinito potencial*. N=61. Modalidades asociadas: *A. Densidad numérica potencial; A. Densidad numérica infinita; I. Densidad numérica Infinita; D. Recta con marcas y D. Recta Densa.* Aseguran ver muchos o más números, nuevos números o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta. Algunos aseguran que al ir aumentando la potencia ven *infinitos* números. Con aumento infinito ven infinitos o todos los números. La recta se concibe como densa de números, potencialmente infinita, siempre habrá números nuevos y en el infinito podrán encontrarse infinitos números. Suelen dibujar la recta con muchas marcas. Esta clase no presenta modalidades de NEM asociadas.

Respuesta de un/ una estudiante de BI.



Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

Se ven muchos números y a medida que aumenta, se ven más, porque hay infinitos.

¿Podés dibujar lo que ves?

1 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2

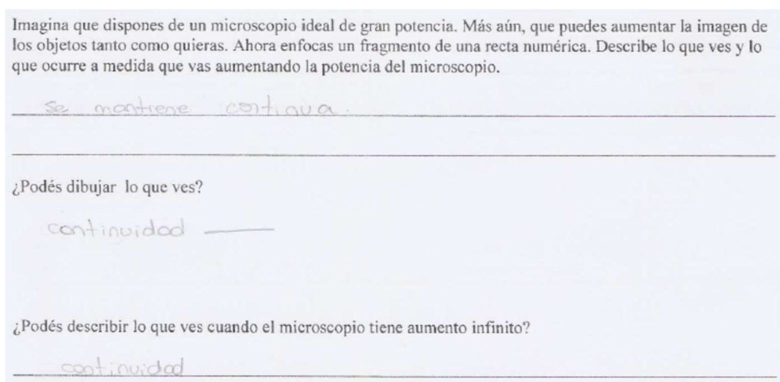
¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

Se ven números infinitos.

Clase R3.7. *Continuidad*. N=15.

Modalidades asociadas: *A. Continuidad; D. Recta continua y I. Continuidad.* Aseguran que al ir aumentando la potencia y con aumento infinito ven la recta continua o siempre ven lo mismo. Dibujan un segmento de recta sin marcas ni números. Conciben la recta como continua y como representación de la completitud de los números reales. Son estudiantes avanzados de Matemática.

Respuestas de un/una estudiante de MA.



Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

se mantiene continua.

¿Podés dibujar lo que ves?

continuidad

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

continuidad

Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea R3

Daremos una caracterización de estas clases de respuestas particularmente en términos de concepciones sobre la naturaleza de la recta.

Interpretamos que los 46 estudiantes que no respondieron al menos dos ítems de la tarea tuvieron un comportamiento similar al de los y las estudiantes de la clase *ajenidad*. De modo que, los reincorporamos al análisis incluyéndolos en la clase *ajenidad*, que quedó entonces compuesta por 51 estudiantes, de modo que de ahora en adelante los resultados se dan para la totalidad de los 307 estudiantes de la población.

En la Tabla 9.16 encontramos una síntesis de las clases de respuestas en términos de concepciones sobre la naturaleza de la recta numérica y la comprensión de la densidad y completitud de los números reales en relación con la continuidad de recta y porcentaje de la población que representa para cada clase de respuesta.

Tabla 9.16. Etiquetas de las clases de respuestas a la Tarea R3 y porcentaje de la población en cada clase. En negrita la clase con mayor frecuencia.

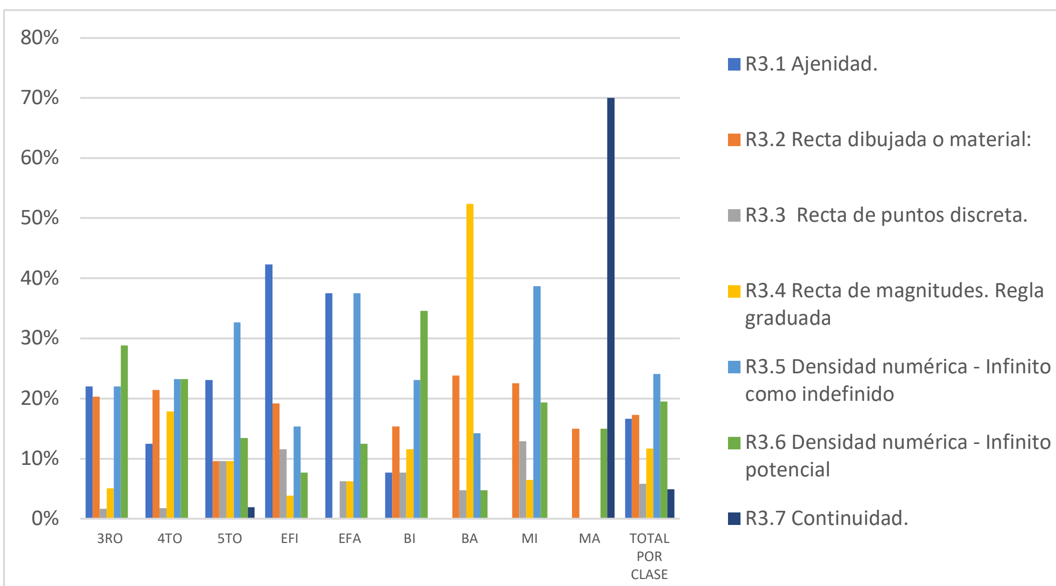
Etiquetas de las clases de respuestas	%
R3.1. Ajenidad (frente a la naturaleza de la recta numérica).	17%
R3.2. Recta dibujada o material.	17%
R3.3. Recta de (puntos) discreta.	6%
R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada.	12%
R3.5. Densidad numérica potencial - infinito como indefinido.	**24%**
R3.6. Densidad numérica potencialmente infinita.	20%
R3.7. Continuidad.	5%

9.3.3. Perfiles de clases de respuestas a la Tarea R3 según el NEM

Distribución de las clases de respuestas en los niveles de estudio

En la Gráfico 9.10 puede observarse el porcentaje en el que se presenta cada tipo de respuestas a la Tarea R3 al interior de los niveles de estudio en matemática.

Gráfico 9.10. Distribución de las clases de respuestas a la Tarea R3 dentro de cada grupo de estudiantes.



Si bien algunas concepciones se presentan como características de algún NEM (como *ajenidad* para EFI, *recta de Magnitudes* para BA o *continuidad* para MA), en cada nivel de estudios en matemática se manifiestan una diversidad de concepciones y salvo la de *continuidad*, están presentes casi todas. De hecho, *densidad numérica e infinito potencial* está presente en todo los NEM y *densidad numérica e infinito como* *indefinido* (la más popular en la población) en todas menos MA. Los NEM 3ro y 4to son similares al perfil medio de la población.

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea R3 según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las modalidades de NEM, a fin de observar si existen perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM. Esta tabla de contingencia puede verse en Tabla AII.19 en el Anexo II.

A continuación, presentamos los dos primeros planos factoriales de este AFC realizado sobre los perfiles de distribución de las siete clases de respuestas al interior de los nueve niveles de estudio (Gráficos 9.11 y 9.12). Sólo hemos dejado las modalidades bien representadas en cada plano.

Gráfico 9.11. Primer plano factorial del AFC de los perfiles de distribución de las clases de respuestas de la Tarea R3 en los NEM.

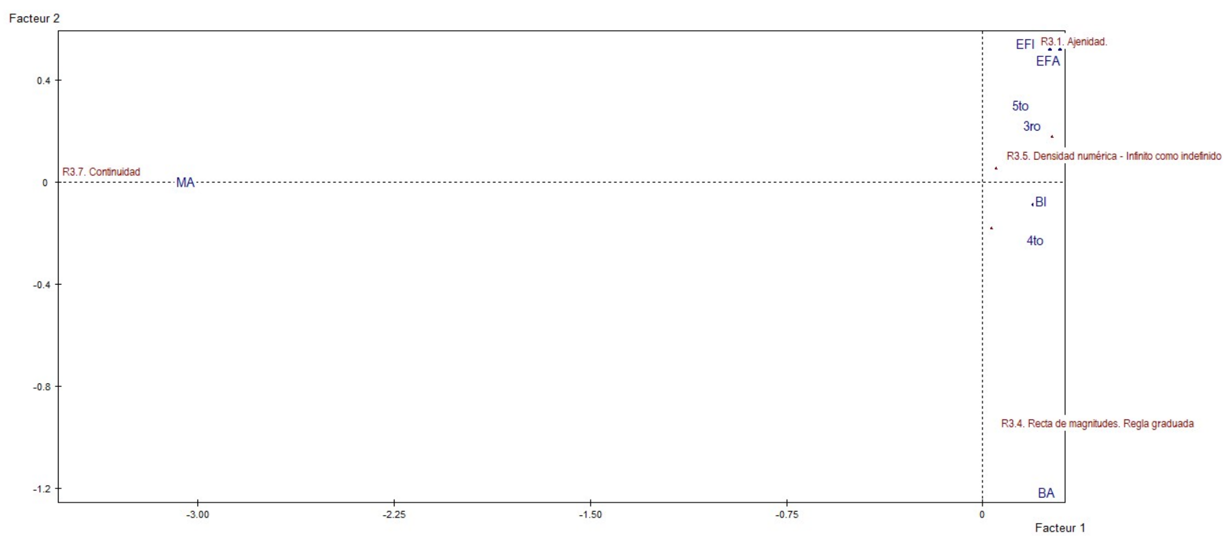
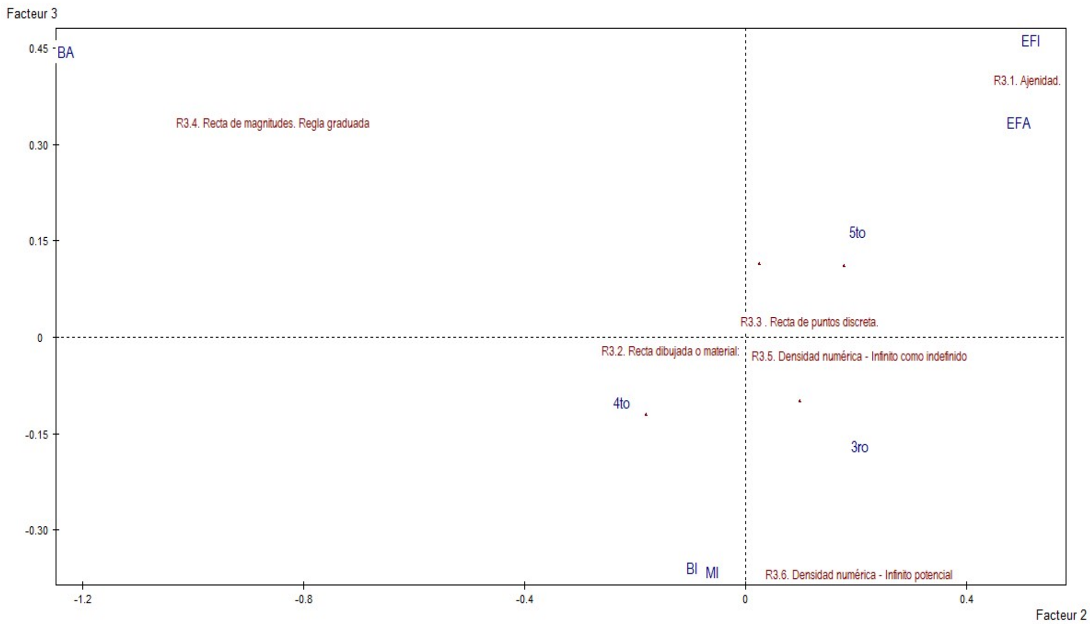


Gráfico 9.12. Segundo plano factorial del AFC de los perfiles de distribución de las clases de respuestas a la Tarea R3 en los NEM



El principal factor de variabilidad corresponde a la clase *continuidad* y al NEM MA, oponiéndose al resto de clases y modalidades de NEM. El segundo factor discrimina dentro de las clases no-continuistas separando la clase *recta de magnitudes* (asociadas principalmente a BA) por una parte, de las clases *ajenidad* y *densidad numérica infinito como indefinido* (asociadas principalmente a EFA, EFI, 3ro, 4to, 5to, BI y MI) por otra. El tercer factor separa las clases *ajenidad* (asociada principalmente a EFI) y *recta de magnitudes* (asociadas principalmente a BA) de la clase *densidad numérica, infinito potencial* (asociadas principalmente a MI, BI, 3ro y 4to).

En el segundo plano puede observarse las clases *recta dibujada o material; densidad numérica potencial e infinito como indefinido* y *recta de (puntos) discreta* como compartida por casi todos los NEM.

La Tabla 9.17 sintetiza los grupos de asociaciones de los perfiles de distribución de las clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, encontrados. Sintéticamente, teniendo en cuenta las asociaciones detectadas en el AFC y que pueden ilustrarse en la distribución de las clases de respuestas en los distintos niveles de estudio de matemática (Gráfico 9.10), puede observarse en la Tabla 9.17 que en la base se encuentran los y las estudiantes que no han estudiado matemáticas universitarias (Educación Física) asociados a la *ajenidad* frente al problema

Tabla 9.17: Grupos de asociaciones entre clases de respuestas a la Tarea R3 y modalidades de NEM.

Asociaciones de clases de concepción	NEM
Continuidad	MA
Recta de magnitudes	BA
Densidad numérica potencialmente infinita. Recta de puntos discreta	5to, MI
Densidad numérica potencial - infinito como indefinido Recta dibujada o material	3ro; 4to y BI
Ajenidad	EFA y EFI

En una zona intermedia encontramos las clases de respuestas más compartidas por los NEM de secundaria y estudiantes ingresantes a Biología y a Matemática: la *densidad numérica e infinito como indefinido* y *recta dibujada o* material asociadas principalmente a 3ro, 4to y BI y *densidad numérica potencialmente infinita* y *recta de puntos discreta* asociadas a principalmente a 5to y MI.

Por último, se encuentran los dos niveles que poseen más estudio de matemática: asociando a BA una concepción de *recta de magnitudes* y a MA la *continuidad* de la recta.

9.3.4. Síntesis de resultados de la Tarea R3.

El objetivo de la Tarea R3 fue conocer cómo estas/os estudiantes conciben a la recta numérica como representación de los números reales, identificando diferentes modos de concebir la naturaleza de la recta e inferir sus concepciones sobre el infinito, la densidad y completitud de los números reales en relación con la continuidad de recta.

Notamos como esta tarea, que no se corresponde con las tradicionales tareas escolares de representar números en la recta, sino que apela a una visión internalizada de la naturaleza de la recta numérica, se presentó como atractiva a los y las estudiantes de las carreras científicas con mayor estudio de matemática, pero no logró comprometer a los y las estudiantes con menor nivel de estudio en matemática. De igual forma vemos como el requerimiento de una respuesta gráfica que permitiera una mayor explicitación de esta visión internalizada representó un mayor desafío en general, dando cuenta del esfuerzo cognitivo que conlleva la explicitación de propiedades tan abstractas como la completitud-continuidad de los reales.

El incremento importante encontrado entre el número de estudiantes que respondieron que no saben qué ocurriría al ir aumentando la imagen y los que responden ‘no sé’, ‘no se puede’ o ‘no puedo imaginarlo’ con aumento infinito puede indicar a que conciben el infinito como indefinido.

Las respuestas más comunes describen a la recta numérica como 'hecha de números' que aparecen en más y más cantidad según se vaya aumentando la imagen o también que 'siempre' hay lugar para un número más, basándose en la densidad numérica. Algo similar ocurre con los dibujos, ya que la mayoría se centra en la densidad de la recta dibujando marcas (y más marcas) sobre ella.

Tanto en las respuestas verbales como gráficas encontramos cuatro tipos de representaciones minoritarias: una visión de la recta identificada con su representación externa (recta dibujada o material); un segundo tipo que hace referencia a la recta discreta constituida por puntos; luego otra visión de la recta graduada con marcas de escala y por último una visión de recta continua.

Tanto la ajenidad frente al problema (16% de los estudiantes) como la concepción de recta dibujada o material (17%) están asociadas con la no apropiación o acercamiento ingenuo al problema. En la primera, la tarea les resulta extraña no logrando comprometerse con la actividad, y en la segunda no pueden desprenderse del objeto real 'microscopio' o de la representación externa de la recta. Ambas están asociadas a un menor nivel de estudio en Matemática y se corresponden con aquellos y las estudiantes que 'no juegan el juego' según Romero (1996).

Si observamos el ordenamiento en los perfiles según el NEM, encontramos un gradiente de profundidad en las concepciones, directamente relacionado con un mayor nivel de estudio en Matemática, en dos sentidos. Un sentido es el de un ordenamiento según la naturaleza de la recta: *recta dibujada o material, recta de puntos (discreta)* y *recta de magnitudes*. Un segundo sentido está dado por un orden centrado en las propiedades matemáticas: *discretitud, densidad* y *continuidad*.

En el primer sentido encontramos la visión de *recta dibujada o material* (17%) asociada a un realismo ingenuo de Romero (1996), según el cual la recta no representa a los números reales, sino que es un objeto físico externo. Esta concepción está asociada a los y las estudiantes más jóvenes. La recta de *puntos discreta* (6%), que considera a la recta numérica como un conjunto de puntos y se asocia principalmente a estudiantes de BA y MI, se asemeja a las respuestas brindadas por los y las estudiantes 'atomistas' de Romero (1996). Sin embargo, en nuestros resultados no son tan numerosos como en el trabajo de este autor. Esta discrepancia podría deberse a que en nuestro cuestionario propusimos previamente a los y las estudiantes un modelo de recta numérica sobre un cuadriculado donde se marcaban los décimos.

Encontramos también, manifestada una concepción de la recta como representando a las magnitudes (12%) asociada principalmente a estudiantes avanzados/as de Biología. La recta numérica es percibida como una idealización del instrumento de medida, similar a una regla graduada decimal.

En el sentido de las propiedades de *discretitud, densidad y continuidad* algunos pocos estudiantes avanzados de Biología o ingresantes de Matemática respondieron pensando a la recta como *discreta*. En la concepción más común se concibe a la recta como un objeto matemático que representa la *densidad* de los números. Esta visión se centra en la densidad numérica potencial, pero con distinta concepción del infinito: infinito como indefinido (24%) e infinito potencial (20%). En la primera concepción, si bien se piensa en una densidad potencial, frente a la idea del infinito se presentan el modelo de indefinición que indica cierta imposibilidad de operar con procesos u objetos infinitos. En la segunda concepción se presenta una visión de densidad potencial en conjunción con un enfoque de infinito potencial que es congruente con una visión del infinito como un proceso sin fin. Si bien estas concepciones están presentes en todos los niveles de estudio, están especialmente asociadas al último año de secundaria e ingresantes a las carreras científicas.

La concepción de *continuidad* es poco numerosa (5%), presente en estudiantes que deciden representar la recta sin números ni puntos dando la idea de que la ven como continua. Esta concepción, asociada únicamente con estudiantes avanzados/as de Matemática, se centra en la característica de la recta asociada a la completitud de los números reales, propiedad fundamental de este conjunto numérico, siendo la concepción más cercana a una visión matemática de la recta como representación de los números reales.

Un párrafo aparte merece los resultados que muestran cómo el modo de concebir el infinito puede mediar en la comprensión de este contenido. Los y las estudiantes que describen a la recta como discreta al ir aumentando la potencia son más que los que la describen como discreta con un aumento infinito, lo que nos hace pensar que la discretitud de la recta es más difícil de sostener cuando se piensa en infinito.

Por otra parte, la mayoría de estos/as estudiantes pueden pensar la recta numérica como densa de números mientras se aumenta la recta, sin embargo, no podrán comprender una densidad infinita debido a disponer de un modelo de infinito como indefinido que no les daría la oportunidad de operar en una conceptualización de una densidad infinita. Así mismo, es importante el grupo de estudiantes que piensa en una densidad numérica potencialmente infinita, es decir un proceso de subdivisión (densa) de la recta, que al “no tener fin” se torna en un obstáculo para la comprensión de la continuidad, que necesariamente es actualmente infinita.

Ver en el Anexo IV la Tabla AIV.10, a modo de síntesis de las modalidades de respuestas determinadas para esta tarea, con ejemplos ilustrativos y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

9.4. Integración de los resultados del Grupo Temático R.

Las tareas de este grupo temático solicitan al resolutor/a alguna actividad relacionada con la recta numérica como representación de los números reales, planteando diferentes desafíos. En la Tarea R1 se da un modelo de recta numérica con marcas en los décimos (además del 0 y el 1) y se solicita ubicar algunos números, ésta es una tarea muy habitual en la escuela. Mientras que en la Tarea R2 se solicita "imaginar" que sucedería cuando colocamos (o retiramos) en la recta conjuntos *infinitos* (numerables) de números y por último la Tarea 3 solicita "imaginar" y luego "verbalizar" (en un contexto finito y en uno infinito) y "dibujar" lo que se imagina sobre la naturaleza de la recta.

Esta diferencia en el requerimiento en las tareas se vio reflejada en los resultados. El hecho más notable se da en cuanto a la *ajenidad (inseguridad*) frente al problema, que fue mínima en la primera tarea (6%), significativamente mayor en segunda (27%) y en forma media en la tercera (17%) (al interior de esta, fue notablemente mayor cuando el requerimiento fue "dibujar"). Hablamos entonces de que, si a los y las estudiantes se les brinda un modelo de recta numérica, con marcas en los enteros y los décimos, al estilo de una regla graduada, la recta como sostén de los números resulta muy accesible. Sin embargo, cuando se profundiza en visualizarla como representación de los números reales con su orden, densidad, completitud y no numerabilidad, la tarea se presenta como más compleja.

Mas allá de esta visión de *ajenidad*, de la cual ya hablamos en un párrafo anterior, el punto de vista más naturalizado en la población, en las tres tareas, es una visión de una recta densa, que representa a los decimales o a lo sumo a los racionales. De modo que en la Tarea R1 las clases más populares (*grafican todos los racionales;* $2{,}2\hat{9}$ *aproximado*, con predominio en 3ro, EFI y EFA y *grafican todos los números por aproximación decimal,* con predominio de BI, MI y BA), denotan una visión de los números densos e identificados con su representación decimal. Mientras que en la Tarea R2, las clases más populares (*la recta representa a las fracciones infinito-potencialmente densas* y *la recta representa a los racionales y algunos números no-racionales*, asociadas ambas a MI, BI y BA), muestran una *visión de recta densa* en la cual se identifican a los reales con los racionales (aun cuando se reconozcan algunos números no-racionales). De forma similar en la Tarea R3 las clases más populares están relacionadas con una visión de *la recta densa de números*, asociadas a los NEM de secundaria, MI y BI.

Hemos identificado, en los resultados de estas tres tareas, niveles de profundidad en la comprensión en tres ejes: uno de estos ejes relacionado con los números, que esto/as estudiantes piensan, representa la recta numérica (*enteros, decimales, racionales y reales)*; otro eje se relaciona con las propiedades de *discretitud, densidad y completitud*. Por último, un eje relacionado con la concepción de infinito que media en estas comprensiones (*ajenidad frente al infinito, visión finitista, infinito como indefinido, infinito identificado con todo, infinito potencial* e *infinito actual*).

Los números que representa la recta numérica

La recta representa a los enteros. En la Tarea R1, encontramos la clase de respuestas en la que *sólo se grafican los enteros* (2 y -2) y aquella en que se *grafican solo los decimales finitos* (-2, 2, 0,2 y 2,2), que muestran que estos/as estudiantes toman a *los enteros como modelo*, mientras que para la Tarea R2, tenemos la clase *la recta representan a los enteros y sus fracciones (no enteras), no explicada,* que mostraría una visión similar. Para Tarea R3 encontramos en la clase *la recta de puntos discretos*, esta visión de la recta representando a los enteros (discretos) como modelo. Pareciera que el hecho escolar de ir construyendo la recta primero con los enteros y luego incorporar (llenando espacios) a las fracciones ha influido en sus respuestas y se muestra como una dificultad para concebir la recta como densa (menos aun continua) y los reales completos.

La recta representa los decimales. Luego tenemos las clases de respuestas que manifiestas la identificación de los números con los decimales, que serían en la Tarea R1: *grafican sólo racionales finitos* y *grafican por aproximación decimal.* Para la Tarea R2: *la recta representa las fracciones,* en forma *potencialmente densa, identificando infinito con todo*. En la Tarea R3 encontramos dos clases de respuestas que manifiestan una visión de recta densa: *la recta es densa de números e infinito como indefinido* o *la recta es infinito potencialmente denso de números.*

La recta representa los racionales. La identificación de los reales con los racionales la observamos en la Tarea R1, sólo en la clase de respuestas *grafican todos, 2,99… aprox. y* $\sqrt{2}$ *exacto.* En la Tarea R2, en las clases *identificando en forma explícita los reales con los racionales* y *la recta representa a los racionales y algunos números no-racionales*. Para la Tarea R3 encontramos la *recta de magnitudes* (asociadas a BA).

La recta representa los reales. Por último, las clases de respuestas que nos dicen que *la recta representa los reales* (coinciden con las clases de continuidad).

Serían las clases *grafican todos en forma exacta*, *la recta representa los reales completos* y *recta continua* para las tareas R1, R2 y R3 respectivamente.

Las propiedades de discretitud, densidad y completitud.

La recta discreta. Con mayor presencia en la Tareas R1, quizás por el modelo de recta ofrecido con marcas en los décimos, similar a una regla graduada. En esta visión, para la Tarea R1, hemos agrupado las respuestas: *no contestan o grafican sólo enteros*; *grafican solo decimales finitos (no ½)* y *grafican solo racionales finitos (no explicada* e *infinito como indefinido*), asociadas a estudiantes de secundaria y de Educación Física. Con menor presencia encontramos esta visión de *recta discreta* en las Tareas R2 y R3 donde necesariamente se debe operar con conjuntos infinitos y densos (racionales, raíces de racionales y todos los representados en la rect*a*). Para la Tarea R2 tenemos la clase *la recta representa los enteros y sus fracciones, no explicada* (asociada a los NEM de secundaria) mientras para la Tarea R3, tendríamos las clases *recta dibujada o material* y *recta de puntos discretas* (asociada 3ro, 4to, 5to, BA y MI).

La recta densa. En un lugar intermedio encontramos la visión de *recta densa*, con gran presencia encontramos en todas las tareas. Para la Tareas R1 agrupamos las clases de respuestas: *grafican sólo racionales (2,99… aprox.)* y *grafican todos por aproximación decimal.* Para la Tarea R2 tenemos las clases *la recta representa las fracciones (racionales),* en forma *potencialmente densa*, *identificando infinito con todo* o *identificando en forma explícita los reales con los racionales* (asociadas a MI, BI y BA), por último, la clase *la recta representa a los racionales y algunos números no-racionales* asociada a BA. Para la Tarea R3 encontramos tres clases de respuestas que manifiestan una visión de recta densa: *la recta es densa de números, infinito como indefinido* o *la recta infinita potencialmente densa* (asociada a los NEM de secundaria, BI y MI) y la *recta de magnitudes* (asociadas a BA).

En la concepción más común se concibe a la recta como un objeto matemático que *representa la densidad de los números*, presentes en todos los niveles de estudio, están especialmente asociadas al último año de secundaria e ingresantes a las carreras científicas. La concepción de *recta de magnitudes* indicaría que la recta numérica es percibida como una idealización del instrumento de medida, similar a una regla graduada decimal, particularmente asociada a estudiantes avanzados/as de Biología.

La recta continua. Por último, encontramos la visión de *recta continua* (14%, 11% y 5% respectivamente para cada Tarea), solo manifestada por estudiantes avanzados/as de Matemática. Serían las clases *grafican todos 2,99… aprox. y* $\sqrt{2}$ *en* *forma exacta, grafican todos en forma exacta*, *la recta representa los reales completos* y *recta continua* para las tareas R1 (las dos primeras), R2 y R3 respectivamente.

Las concepciones sobre infinito

Ajenidad. En principio encontramos la *ajenidad (inseguridad*) respectivamente para cada Tarea. Como vimos significativamente mayor en las tareas con cercanía con el concepto de infinito, particularmente cuando en la Tarea R2 se solicita imaginar conjuntos *infinitos* y en la Tarea R3 se solicita imaginar un aumento *infinito*.

Finitistas. Una *visión finitista* manifestada en las clases de respuestas *grafican sólo racionales finitos (no ½ y no explicada)* en la Tarea R1; *recta dibujada o material,* donde se ven moléculas o átomos finitos y *recta de puntos discreta,* similar a un collar de perlas para la Tarea R3. Por la forma en que están planteadas, estas dos últimas tareas hubo poco lugar para respuestas finitistas.

Indefinición. La noción de *infinito como indefinido* (o con infinito no se puede) aparece mediando en clases de respuestas en la Tarea R1, cuando *explícitamente no grafican 2,99… y/o* $\sqrt{2}$ *por ser infinitos*, mientras que en la Tarea R3 cuando manifiestan *no poder contestar que ocurría con aumento infinito*.

Infinito es todo. En cuanto a la visión de infinito identificado con todo, es aquella en la cual se considera que *la recta se completa con las fracciones porque son infinitas y por lo tanto deben estar todos los puntos*.

Infinito potencial. La concepción de infinito como proceso potencial la encontramos mediando en las respuestas de la Tarea R2, cuando consideran que *la recta no se completa con las fracciones* (no porque hay números no-racionales) sino *porque siempre (potencialmente) hay lugar para una más*, y en la Tarea R3 encontramos las repuestas de estudiantes que ven (aun en el infinito) *más y más números*, acorde con la forma frecuentemente en que los y las jóvenes conciben al infinito como un proceso sin fin, es decir en forma potencial. Como vemos, el concebir el infinito como un proceso se presenta como un conflicto para pasar de la densidad a la continuidad

Infinito actual. La visión *infinito actual o matemático*, manifestada solo por unos pocos estudiantes, la mayoría universitarios y de matemática que dieron repuestas infinitistas en un sentido matemático (infinito actual), que coinciden con la visión de la *recta continua*, se mostraría en las clases *grafican todos en forma exacta*; *la recta representa los reales completos* y *recta continua* para las tareas R1, R2 y R3 respectivamente.

A modo de recapitulación de los resultados de las tres tareas, destacamos que hemos identificado cinco niveles en la comprensión de la *recta como representación de los números reales*, que muestran un gradiente de profundidad en el siguiente orden: (i) *ajenidad,* (ii) *recta discreta; la recta numérica representa a los enteros y decimales finitos;* (iii) *recta densa* y *la recta numérica representa a los decimales*; (iv) *recta densa*; *la recta numérica representa a los racionales* y es *infinito potencialmente densa* y (v) *recta continua; la recta representa a los reales* e *infinito actual o matemático.* Así, el orden en los NEM relacionados con cada nivel de comprensión que identificamos es el siguiente: estudiantes de (1) ingresantes y avanzados de Educación Física; (2) tercer año, cuarto año y quinto año de secundaria, ingresantes a Biología, ingresantes a Matemática y avanzados/as de Biología, (3) quinto año de secundaria, ingresantes a Biología, ingresantes a Matemática y avanzados/as de Biología, (4) avanzados/as de Biología (5) por último, estudiantes avanzados/as de Matemática. Para una mejor visualización de cómo se asocia este gradiente de comprensiones a los NEM presentamos una síntesis en la siguiente tabla (Tabla 9.18).

Tabla 9.18: Gradiente de profundidad en las concepciones de la recta como representación de los reales y los NEM asociados.

Concepción sobre la discretitud, densidad y continuidad de la recta como representación de los números reales		NEM asociados
Ajenidad (inseguridad)	No se apropian del problema, no contestan o expresan que no saben. Esta ajenidad está en relación con la intervención del concepto de infinito en la tarea.	EFI y EFA
Recta Discreta La recta numérica representa a los enteros y decimales finitos.	Grafican solo decimales o racionales finitos. La recta representa los enteros y sus fracciones, no explicada. Es vista como: recta dibujada o material y recta de puntos discreta. Da la idea de una recta discreta, sostén de los enteros y de algunas fracciones o decimales finitos. Una visión finitista.	3ro, 4to y 5to. BI, BA y MI
Recta Densa La recta numérica representa a los decimales.	Grafican sólo racionales (2,99… aprox.); grafican todos por aproximación decimal; la recta representa las fracciones (racionales), en forma explícita, potencialmente densa o identificando infinito con todo; la recta es densa de números (mediando infinito como indefinido o infinito potencial). Encontramos que frente a la visión de recta densa median diferentes nociones de infinito en sentido común como son: -*infinito como indefinido* (o con infinito no se puede) aparece cuando explícitamente no grafican 2,99… por ser infinito y en la clase *grafican racionales, no grafican por ser infinitos*; cuando manifiestan no poder contestar que ocurría *con aumento infinito porque con infinito no se puede.* - *infinito identificado con todo*. Se considera que la recta se completa con las fracciones porque son infinitas y por lo tanto deben estar todos los puntos. - *infinito potencial.* Consideran a la recta como representando a las fracciones (potencialmente) densas, es decir la recta no se completa con las fracciones porque siempre (potencialmente) hay lugar para una más y ven (aun en el infinito) más y más números.	5to, MI, BI y BA
La recta numérica representa a los racionales.	Encontramos esta concepción en las respuestas que manifiestan que la recta representa las fracciones (racionales), en forma potencialmente densa o identificando en forma explícita los reales con los racionales y la recta representa a los racionales y algunos números no-racionales, particularmente la recta de magnitudes. La recta como representando a los enteros y sus fracciones (potencialmente) densas, es decir la recta no se completa con las fracciones porque siempre hay lugar para una más.	BA
Recta continua La recta numérica representa a los reales. Infinito actual.	Grafican todos aproximado – exacto o grafican todos en forma exacta; la recta continua, representa los reales. Solo unos pocos estudiantes, la mayoría universitarios y de matemática, dieron repuestas infinitistas en un sentido matemático (infinito actual). Que coinciden con la visión de la recta continua representando la unión de reales e irracionales	MA

Capítulo 10

Modos integrales de comprensión de los números reales y su relación con el nivel de estudio en Matemática

En los capítulos precedentes hemos presentado los resultados del análisis de la información aportada por las respuestas de los y las participantes, a cada una de las diez tareas del cuestionario (Fase 1 de análisis de la información). La sistematización de esa información sirvió de insumo para la Fase 2 de análisis de la información aportada por el cuestionario.

El presente capítulo dará cuenta de la serie de análisis realizados tendiente a describir los modos integrales de comprensión del número real, interrelacionando los distintos aspectos de este concepto indagados en cada tarea y en búsqueda de inferir la incidencia en la profundidad de esta comprensión de los estudios de matemática realizados. Se han incorporado tres instancias de síntesis. De modo que pueden realizarse dos formas de lectura, una completa, que informa detalladamente la secuencia de decisiones y resultados, otra que permite alcanzar más directamente los hallazgos generales pasando directamente a la lectura de los apartados de síntesis e integración 10.1.3, 10.2.2 y 10.4.

Como producto de la Fase 1 de análisis, en los Capítulos 6, 7, 8 y 9, se describen las tipologías de respuesta que hemos detectado en la población en estudio, para cada tarea en cada grupo temático (N, D, I y R) referidos a concepción de número y numero irracional (Tareas N1 y N2); densidad y orden en los reales (Tareas D1 y D2); el infinito en los reales (Tareas I1, I2 y I3) y la representación de los reales en la recta (Tareas R1, R2 y R3) respectivamente. Como dijimos cada tarea implica más de uno de estos aspectos, sin embargo, consideramos que esta agrupación atiende al principal en cada una de las ellas.

En el Anexo IV, a modo de síntesis y con el fin de tenerlas presente en la lectura del presente capítulo, presentamos, para cada tarea del cuestionario, una tabla con la descripción de las modalidades de respuestas encontradas en el capítulo correspondiente. Además, mostramos en cada una de ellas un ejemplo ilustrativo de una respuesta textual representativa de la modalidad y el porcentaje de la población que presenta el tipo de respuesta correspondiente a cada modalidad. Estas tablas son: Tabla AIV.1, AIV.2, AIV.3, AIV.4, AIV.5, AVI.6, AIV.7, AIV.8, AIV.9 y AIV.10 para las tareas: N1, N2, D1, D2, I1, I2, I3, R1, R2 y R3 respectivamente.

Principalmente se utilizaron, en esta fase, métodos de estadística multivariada: Análisis Factorial de Correspondencias (AFC); Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) y de Clasificación Jerarquia Ascendente (CJA). En el Capítulo 5 dimos una descripción de estos métodos y en el Anexo III se puede ver la justificación teórica y de aplicación de estos Para más detalles ver también Baccalá y Montoro, 2008; Benzécri, 1973; Crivisqui, 1993; Escofier y Pages, 1990; Fine, 1996; Lébart et al., 1995; Ward, 1963.

En el apartado 10.1 se presentan los resultados del AFCM realizado con la intención de describir las asociaciones existentes entre los modos de respuesta a las diez tareas del cuestionario en un mismo/a estudiante y entre los de distintos/as estudiantes entre sí, como así también las relaciones de estos modos de respuesta a todo el cuestionario con el Nivel de estudio en Matemática (NEM).

Luego, en el apartado 10.2, describimos la clasificación de los y las estudiantes, sobre la base de la semejanza global en sus modos de respuesta a todas las tareas del cuestionario. Realizamos una caracterización de cada clase obtenida, según las ideas emergentes relacionadas con los distintos aspectos del número real indagados y mostramos el gráfico de distribución de los NEM al interior de cada clase, realizando una síntesis de las ideas presentes en las respuestas de los y las estudiantes de la clase.

En el apartado 10.3, considerando a los y las participantes agrupados según su NEM, observamos los perfiles de distribución de los modos de respuesta encontrados, al interior de cada NEM y buscamos similitudes y diferencias entre los perfiles de respuesta de estos grupos de estudiantes.

Por último, en el apartado 10.4 sintetizaremos la tipología de respuestas obtenidas para las diez tareas globalmente, ordenaremos las clases de respuestas en un gradiente de comprensión y daremos cuenta de las relaciones entre estas y los NEM.

10.1. Asociaciones entre modos de respuesta a todas las tareas del cuestionario y con el nivel de estudio en Matemática

Con la intención de describir las asociaciones existentes entre los modos de respuesta a las distintas tareas en un mismo/a estudiante y entre los y las estudiantes entre sí, como así también las relaciones de los modos de respuesta con el NEM de los y las participantes, se utilizó un AFCM. Considerando a cada estudiante como un individuo estadístico, se tomaron como variables activas, para la formación de los ejes, las variables de caracterización de respuesta para cada tarea, para luego proyectar sobre los planos factoriales definidos por estas, las modalidades de la variable NEM como ilustrativas.

Esto posibilita observar los principales factores de variabilidad de los tipos de respuesta globalmente, así como visualizar la relación de estos con las modalidades de NEM. De un modo muy sintético, diremos que con este estudio pretendemos evidenciar “qué grupo de modos de respuesta son elegidos por los y las mismos/as estudiantes” y “qué estudiantes responden qué”.

10.1.1. Las variables y sus modalidades

Sobre el conjunto de individuos se definieron diez *variables de categorización de respuestas*, una por cada tarea (Tarea N1, Tarea N2, Tarea D1, Tarea D2, Tarea I1, Tarea I2, Tarea I3, Tarea R1, Tarea R2 y Tarea R3), cada una con tantas modalidades como las categorías resultantes en la categorización de las respuestas para la tarea correspondiente (por ejemplo, para la variable N1, tendremos cinco modalidades: N1.1, N1.2, N1.3, N1.4 y N1.5). Estas variables se constituyeron en las variables activas en el AFCM y consideramos como variable ilustrativa a la variable NEM con sus 9 modalidades.

En la siguiente Tabla 10.1 resumimos con qué aspecto de la comprensión del número real se relaciona cada variable de categorización de respuestas en cada grupo temático y el aspecto principal puesto de relieve en cada modalidad de respuesta. Hemos incorporado una primera columna con la denominación de la tarea según el orden original en el cuestionario (Anexo I). Para una descripción de cada modalidad de respuesta ver Tablas AIV.1 a AIV.10 en Anexo IV.

Tabla 10.1: Etiquetas de las variables de categorización de respuestas y de sus modalidades para las diez tareas del cuestionario.

Orden cuestionario	Variable (tarea)	Modalidades de la variable (modos de respuesta)
Grupo N. Número en general y número irracional en particular		
T1	N1. Número en general (según una tipología)	N1.1. Sólo los enteros son números.
		N1.2. Los enteros como modelo de número.
		N1.3. Identificación del número con su representación.
		N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares.
		N1.5. Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura.
T2	N2. Número irracional.	N2.1. Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales.
		N2.2. Centrada en la resolución de una operación. No expresan solución/resultado (exacta/o).
		N2.3. Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, los números con coma.
		N2.4. Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma.
		N2.5. Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.
		N2.6. Definición literal no-fracción. No se pueden escribir como fracción.
		N2.7. Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros.

Grupo D. La densidad de los reales (en relación con el orden y el supremo de un intervalo)		
T3	D1. El orden y la densidad en los reales en el contexto de buscar números entre dos dados	D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).
		D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.
		D1.3. Densidad finitista. Infinito es mucho. No comprenden el orden.
		D1.4. Densidad infinitista. No comprenden el orden.
		D1.5. Comprensión de la densidad y el orden.
T9	D2. El orden y la densidad en relación con el supremo de un intervalo en los reales	D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo).
		D2.2. Discretitud no explicada.
		D2.3. Discretitud (finitista -redondeo).
		D2.4. Discretitud (notación infinita)
		D2.5. Discretitud (infinito es todo).
		D2.6. Densidad potencialmente infinita.
		D2.7. Densidad no explicada.
		D2.8. Densidad infinito-actual de los reales.
Grupo I. El infinito en los números reales		
T4	I1. El infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número	I1.1: Ajenidad (notación decimal infinita).
		I1.2. Finitista no justificada (notación decimal infinita).
		I1.3. Finitista explicita (notación decimal infinita).
		I1.4. Infinito como indefinido (notación decimal infinita).
		I1.5. Infinitista. Único infinito (notación decimal infinita).
		I1.6. Infinito Cardinal (notación decimal infinita).
T5	I2. El infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números	I2.1: Ajenidad (comparando conjuntos).
		I2.2. Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos).
		I2.3. Finitista no justificada (comparando conjuntos).
		I2.4. Finitista explícita (comparando conjuntos).
		I2.5. Infinito como indefinido (comparando conjuntos).
		I2.6. Único infinito (comparando conjuntos).
		I2.7. Infinito cardinal (comparando conjuntos).
T10	I3. El infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número	I3.1: Ajenidad (número periódico).
		I3.2. Finitista no justificada (número periódico).
		I3.3. Finitista - Centrada en la representación externa finita.
		I3.4. Discretitud explicita o redondeo (número periódico).
		I3.5. Infinito potencial (número periódico).
		I3.6. Infinitista no explicada (número periódico).
		I3.7. Infinito actual (número periódico).
Grupo R. La representación de los números reales en la recta		
T6	R1. La representación de números reales en la recta	R1.1: Grafican sólo los enteros
		R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½).
		R1.3. Grafican sólo racionales finitos - No explicado.
		R1.4. Grafican racionales finitos – Infinito como indefinido.
		R1.5. Grafican sólo los racionales ($2{,}2\hat{9}$ aproximado).
		R1.6. Grafican todos por aproximación decimal.
		R1.7. Grafican todos. $2{,}2\hat{9}$ aproximado - $\sqrt{2}$ exacto
		R1.8. Grafican todos en forma exacta.
T7	R2. La recta como representación de los números reales	R2.1: Ajenidad -Inseguridad (frente a la representación de los reales en la recta).
		R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.
		R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras).
		R2.4. La recta completa con fracciones (infinito es todo).
		R2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales.
		R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada.
		R2.7. La recta representa a los reales completos.
T8	R3. La naturaleza de la recta numérica	R3.1. Ajenidad (frente a la naturaleza de la recta numérica).
		R3.2. Recta dibujada o material.
		R3.3. Recta de (puntos) discreta.
		R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada.
		R3.5. Densidad numérica potencial - infinito como indefinido.
		R3.6. Densidad numérica potencialmente infinita.
		R3.7. Continuidad.

Presentación de los datos. En el Anexo V encontraremos la Tabla AV.1 donde se consignan los valores que toman las variables: NEM y de categorización de respuestas para cada estudiante. También puede encontrarse en la Tabla AV.2, las etiquetas cortas y largas de las modalidades de categorización de respuestas utilizadas para el AFCM, la frecuencia de estudiantes en cada modalidad y porcentaje de la población que representa. En la Tabla AV.3 los mismos datos para las modalidades de NEM.

10.1.2. Principales factores de variabilidad de las modalidades de respuesta a todas las tareas del cuestionario. Asociación con el NEM

En la Tabla AV.4 (Anexo V), encontraremos los resultados del AFCM. Para cada modalidad activa la respectiva distancia al origen de coordenadas y las contribuciones de cada modalidad a cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM resaltando aquellas modalidades que poseen una contribución mayor a la media (1,5%) en los dos primeros ejes del AFCM, es decir aquellas que muestran la mayor variabilidad de los datos. En la Tabla AV.5 (Anexo V) encontramos el valor test que le correspondió a cada modalidad en cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM. Resaltadas las modalidades en negrita poseen un valor test mayor que 2 (en valor absoluto) que nos permitirá descartar significativamente que su proyección en el respectivo eje se deba al azar.

Dado que una amplia mayoría de modalidades están bien representadas en los dos primeros ejes, decidimos realizar la descripción de estos (principales factores de variabilidad) y mostrar para su interpretación el primer plano factorial definido por ellos.

Dada la gran cantidad de modalidades se hace difícil la visualización conjunta en un plano factorial de todas ellas, por lo que presentaremos cuatro gráficos de este primer plano factorial. En cada uno de ellos sólo se conservaron las modalidades de respuesta a las tareas de cada grupo temático (N, D, I y R) a fin de poder observar sus posiciones relativas, sin embargo, hay que tener en cuenta que los factores (y por lo tanto el plano) fueron conformados por la totalidad de las variables.

Estos cuatro gráficos que presentamos (Gráficos 10.1., 10.2, 10.3 y 10.4) representan al mismo plano, por lo que es útil pensarlos como superpuestos. Al ser el mismo plano, las modalidades de NEM tendrán la misma ubicación en los cuatro gráficos. En el Anexo V en el Gráfico AV.1 encontraremos el primer plano factorial de este AFCM en el que puede visualizarse las asociaciones entre las modalidades de respuesta a todas las tareas y las modalidades de NEM proyectadas como ilustrativas

Gráfico 10.1: Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos/as por sus modos de respuesta a las todas las tareas. Modalidades de las tareas del Grupo N, bien representadas. En rojo las modalidades de NEM proyectadas como ilustrativas.

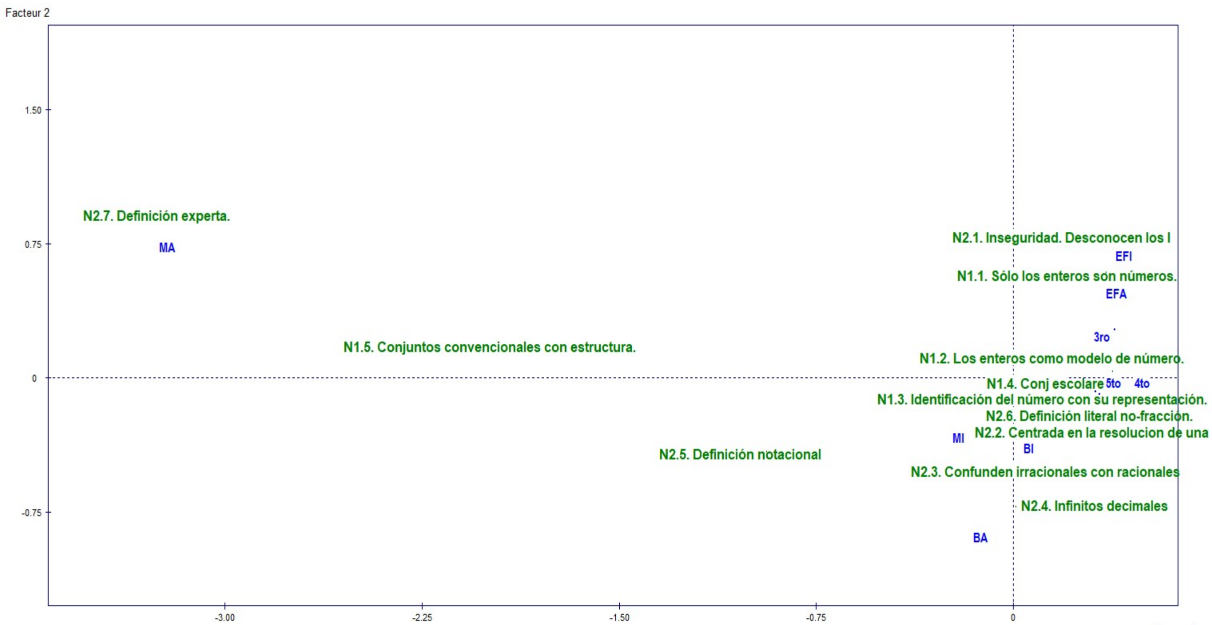


Gráfico 10.2: Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos/as por sus modos de respuesta a las todas las tareas. Modalidades de las tareas del Grupo D, bien representadas. En rojo las modalidades de NEM proyectadas como ilustrativas.

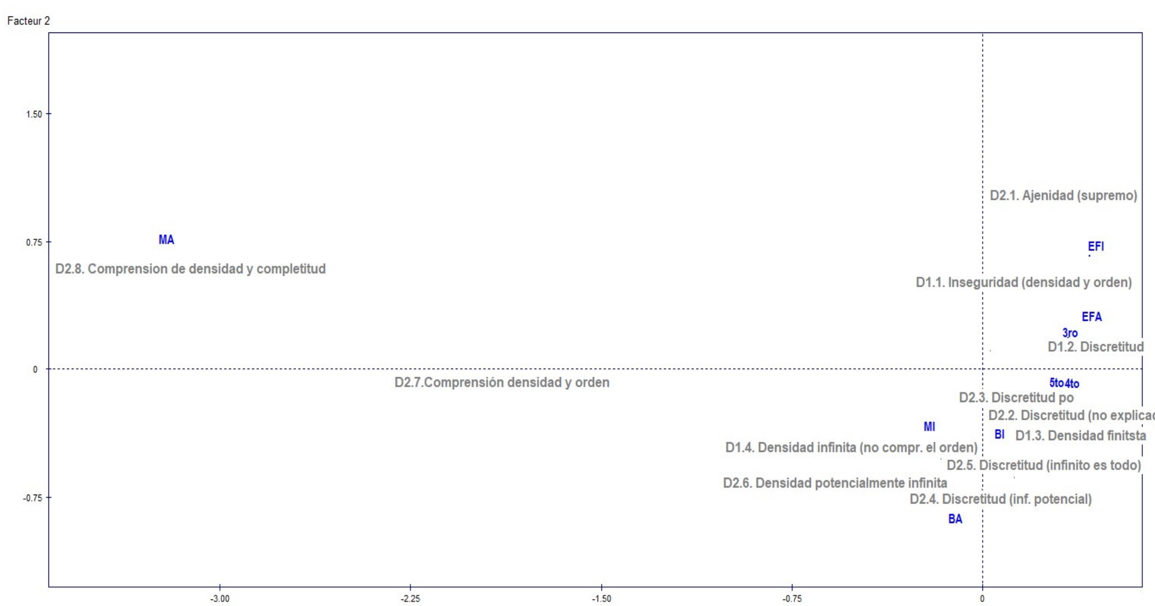


Gráfico 10.3: Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos/as por sus modos de respuesta a las todas las tareas. Modalidades de las tareas del Grupo I, bien representadas. En azul las modalidades de NEM proyectadas como ilustrativas.

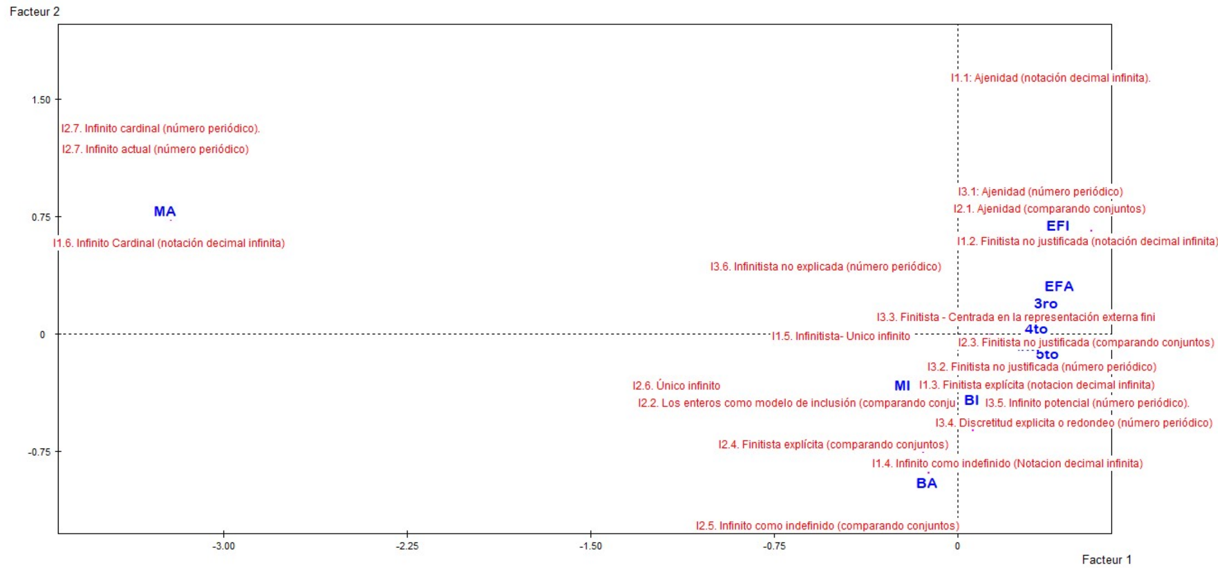
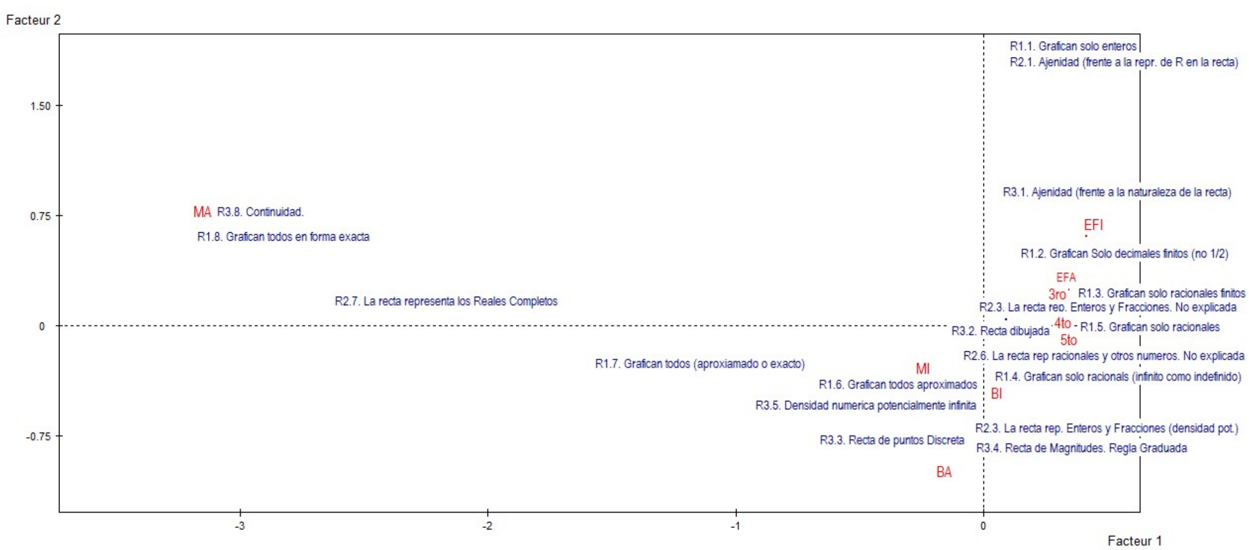


Gráfico 10.4: Primer plano factorial del AFCM de estudiantes descriptos/as por sus modos de respuesta a las todas las tareas. Modalidades de las tareas del Grupo R, bien representadas. En rojo las modalidades de NEM proyectadas como ilustrativas.



Descripción e interpretación del primer factor de variabilidad en el AFCM

Conformación del primer factor de variabilidad. Presentamos en la próxima Tabla 10.2 las modalidades de categorización de respuestas que conforman principalmente este primer factor, en negrita remarcamos las modalidades cuya contribución al mismo sea mayor a la contribución media (1,5%) (Tabla AV.1). Hemos considerado todas aquellas modalidades que posee valor test mayor (en valor absoluto) a 2 (Tabla AV.2), incluso para las modalidades ilustrativas de NEM. Las modalidades más alejadas (en ambos sentidos) de la zona central representan la mayor variabilidad entre modalidades.

Tabla 10.2. Modalidades de categorización de respuestas que conforman principalmente el primer factor del AFCM. En negrita las que poseen una contribución mayor a la media. Modalidades de NEM con un buen v. t. en el Eje 1

COORDENADAS		**Modalidades de categorización de respuestas**	V.T.	NEM	V.T
NEGATIVAS	**D2.8**	**Densidad infinito-actual de los reales**	-13,74	**MA**	-14,85
	I3.7	**Infinito actual (número periódico)**	-13,46		
	R2.7	**La recta representa a los reales completos**	-13,36		
	N2.7	**Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros**	-13,17		
	R3.7	**Continuidad de la recta**	-12,64		
	D1.5	**Comprensión de la densidad y el orden**	-11,95		
	I2.7	**Infinito cardinal (comparando conjuntos)**	-10,98		
	N1.5	**Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura**	-10,91		
	I1.6	**Infinito Cardinal (notación decimal infinita)**	-9,19		
	R1.8	**Grafican todos en forma exacta**	-8,95		
	R1.7	**Grafican todos. $2,2\hat{9}$ aproximado - $\sqrt{2}$ exacto**	-7,53		
	I2.6	**Único infinito (comparando conjuntos)**	-6,39		
	N2.5	Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos	-4,33		
	I1.5	Infinitista. Único infinito (notación decimal infinita)	-3,90		
		ZONA CENTRAL			
POSITIVAS	R1.2	Grafican sólo decimales finitos (no ½)	3,01		
	R2.2	La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada	3,20		
	R2.1	Ajenidad -Inseguridad (frente a la representación de los reales en la recta)	3,33		
	I1.1	Ajenidad (notación decimal infinita)	3,46		
	D1.1	Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R)	3,57		
	R1.5	Grafican sólo los racionales - $2,2\hat{9}$ aproximado)	3,63		
	I2.3	Finitista no justificada (comparando conjuntos)	4,20		
	R3.1	Ajenidad (frente a la naturaleza de la recta numérica)	4,36		
	N2.1	Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales	4,49	EFI	2,24
	D2.1	Ajenidad (frente al problema del supremo)	4,95	5to	2,49
	D1.2	Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal	5,14	4to	2,72
	I2.1	Ajenidad (comparando conjuntos)	5,17	3ro	2,86

Las modalidades de NEM asociadas significativamente al primer factor son: MA en el extremo izquierdo oponiéndose a EFI, 3ro, 4to, 5to en el extremo derecho. Respecto de este primer factor, todas las modalidades de NEM se ubican (de izquierda a derecha) MA, MI y BA --- BI, 5to, 4to, 3ro, EFA y EFI.

Descripción del primer factor de variabilidad. Observamos que el primer factor de variabilidad queda determinado por las respuestas:

- que denotan una comprensión de número como un elemento de un conjunto con estructura y una adecuada comprensión de los irracionales, asociadas a MA, oponiéndose al resto que reflejan concepciones alternativas sobre los irracionales o en que se considera a los enteros como modelo de números (Gráfico 10.1);

- que muestran una adecuada comprensión de la densidad (infinito-actual) y el orden de los números reales, asociadas a MA, oponiéndose al resto que reflejan concepciones alternativas sobre la densidad y el orden de los reales. Quedando en un sector intermedio las concernientes a una concepción de densidad potencial (Gráfico 10.2);
- infinitistas oponiéndose al resto. Agrupándose las correspondientes a una visión actual y cardinal del infinito, asociadas a MA y las infinitistas no explicadas o de único infinito, (asociadas a MI y BA, oponiéndose al resto de respuestas que reflejan concepciones finitistas o de ajenidad frente al infinito (Gráfico 10.3) y
- en que se grafican todos los números en la recta en forma exacta o aproximado-exacta y las que denotan una comprensión de la recta continua, representado a los reales completos, asociadas a MA, oponiéndose al resto que reflejan concepciones alternativas sobre la recta numérica. En una zona intermedia encontramos las que denotan una visión de la recta como infinito-potencialmente densa (Gráfico 10.4).

Interpretación primer factor de variabilidad.

Encontramos que el primer factor del AFCM ubica en un extremo las modalidades que se corresponden con una comprensión adecuada de los irracionales, de la densidad y el orden de los números reales, así como a una concepción del infinito como actual-cardinal y una visión de la recta continua, representado a los reales completos; asociadas a MA. Mientras que en una zona intermedia muestra una visión de los reales como potencialmente densos, identificados con los racionales el infinito como infinito potencial y la recta potencialmente densa o de magnitudes (racionales) y asociadas a MI, BI y BA para dejar en el otro extremo las respuestas que muestras concepciones alternativas (o ajenidad) para estos conceptos asociadas a 3ro, 4to, 5to, EFA y EFI.

Descripción e interpretación del segundo factor de variabilidad en el AFCM

Conformación del segundo factor de variabilidad. La próxima Tabla 10.3 muestra las modalidades que conforman principalmente este segundo factor, en negrita las modalidades cuya contribución es mayor a la contribución media (1,5%) (Tabla AV.1). Se consideran aquellas modalidades que posee valor test mayor (en valor absoluto) a 2 (Tabla AV.2). Las modalidades más alejadas (en ambos sentidos) de la zona central representan la mayor variabilidad residual dentro de la nube de modalidades.

Tabla 10.3. Modalidades de categorización de respuestas que conforman principalmente el segundo factor. En negrita las modalidades con contribución mayor a la c media. Modalidades de NEM con un buen v. t. en el Eje 2.

COORDENADAS	Modalidades de categorización de respuestas		V.T.	NEM	V.T
NEGATIVAS	**I1.4**	**Infinito como indefinido (notación decimal infinita).**	**-7,38**	BA	-4,21
	I3.5	**Infinito potencial (número periódico).**	**-6,05**		
	R2.3	**La recta repr**esenta a los enteros y es infinito-potencialmente **densa de fracciones (no enteras)**	-5,91		
	N2.4	**Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma;**	-5,37		
	D2.4	**Discretitud (notación infinita)**	-5,23		
	I2.4	**Finitista explícita (comparando conjuntos).**	-5,13		
	D2.6	**Densidad potencialmente infinita**	-4,81		
	R3.4	Recta de magnitudes. Regla graduada.	-4,58		
	R1.6	Grafican todos por aproximación decimal.	-3,87		
	I2.5	**Infinito como indefinido (comparando conjuntos)**	-3,82		
	R1.4	Grafican racionales finitos – Infinito como indefinido.	-3,67		
	R3.6	Densidad numérica potencialmente infinita.	-3,62		
	I3.2	Finitista no justificada (número periódico).	-3,49		
	D1.4	Densidad infinitista. No comprenden el orden.	-3,41		
	D2.5	Discretitud (infinito es todo).	-3,39		
	D1.3	Densidad finitista. Infinito es mucho. No comprenden el orden.	-3,17		
ZONA CENTRAL					
POSITIVAS	**I1.3**	**Finitista explicita (notación decimal infinita).**	2,94		
	R1.2	Grafican sólo decimales finitos (no ½).	2,94		
	R3.7	Continuidad de la recta	2,95		
	N2.7	**Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura**.	3,48		
	N1.2	Los enteros como modelo de número.	3,82		
	I2.7	Infinito cardinal (comparando conjuntos).	4,00		
	D1.1	Ajenidad (frente al problema del supremo)	4,12		
	I3.7	Infinito actual (número periódico).	4,31		
	I1.1	**Ajenidad (notación decimal infinita)**	6,94		
	N2.1	**Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales**.	7,85		
	I2.1	**Ajenidad (comparando conjuntos).**	8,49		
	R1.1	**Grafican sólo los enteros**	8,49		
	I3.1	**Ajenidad (número periódico).**	9,18		
	R3.1	**Ajenidad (frente a la naturaleza de la recta numérica)**	9,52		
	R2.1	**Ajenidad -Inseguridad (frente a la representación de los reales en la recta)**	10,01	MA	3,36
	D2.1	**Ajenidad (frente al problema del supremo).**	10,95	EFI	3,54

La modalidad de NEM asociadas significativamente al segundo factor son: BA en el extremo inferior oponiéndose a EFI por un lado y a MA por otro. Respecto de este primer factor, las modalidades de NEM se ubican (de arriba hacia abajo): EFI, EFA, 3ro, 4to, 5to ---- BI, MI y BA.

Descripción del segundo factor de variabilidad. Observamos que el segundo factor se relaciona con las modalidades que expresan ideas alternativas:

- discriminando entre aquellas en las que se evidencia que sólo se considera número a los enteros y que se desconocen a los irracionales, asociadas a EFI; de las en que se reconoce a otros números, pero se los identifican con su notación (ej: decimales) o se confunden los irracionales con los racionales, asociadas a BI y MI (Gráfico 10.1);

- ordenándolas desde aquellas en las que se evidencia ajenidad frente al problema del supremo e inseguridad en cuanto a la densidad, asociada a EFI, pasando por una zona donde las respuestas denotan una visión discreta de los números, para en el otro extremo ubicar la identificación de los reales con los racionales potencialmente densos, asociadas a BA, BI y MI (Gráfico 10.2);
- discriminando al interior de las modalidades no-infinitistas, ordenándolas desde aquellas en las que se evita el infinito, asociadas a EFI, siguiendo por las finitistas (no justificadas y explicitas), luego aquellas en las que el infinito se considera indefinido para terminar con las respuestas en las que se considera al infinito en forma potencial, asociadas a BA, BI y MI. En otro sentido discrimina entre las modalidades de respuesta más elaboradas asociadas principalmente a las que denotan una visión de infinito actual, asociadas a MA y respuestas que denotan una visión potencial del infinito, asociadas a BA (Gráfico 10.3);
- ordenándolas desde aquellas en las que se evidencia ajenidad frente a la representación de los reales en la recta, pasando por aquellas en la que la recta representa sólo los enteros o los enteros y las fracciones, para luego encontrar aquellas en que la recta representa a los racionales. En cuanto a la naturaleza de la recta numérica, se ordenan desde la ajenidad, pasando por la densidad numérica finitista o potencialmente infinita hasta una concepción de la recta como recta de magnitudes, asociadas a BA.

Interpretación del segundo factor de variabilidad.

El segundo factor discrimina al interior de las modalidades alternativas, ordenándolas desde aquellas en las que se evidencia ajenidad frente a la representación de los reales en la recta y del infinito, inseguridad en cuanto a la densidad y el orden y una visión de los enteros como modelo de número, asociadas a EFI y EFA (menor nivel de estudio en Matemática). Pasando luego por una zona donde las respuestas denotan una visión discreta de los números y una concepción finitista, asociada a 3ro, 4to, 5to. En el otro extremo se ubican la concepción de los reales como potencialmente densos, identificados con los racionales, la recta potencialmente densa o de magnitudes (racionales) y una visión potencial del infinito asociadas a BI, MI y BA (universitarios con un estudio intermedio de Matemática). En este factor se presentan como fundamentales las tareas relacionadas con la recta numérica.

Este segundo factor discrimina principalmente entre los NEM universitarios, agrupando en un extremo a BI, MI y BA (universitarios con un estudio intermedio de Matemática) y separándolos, por un lado, de EFI y EFA (menor nivel de estudio en Matemática) y por otro de MA (mayor estudio de Matemática).

10.1.3. Grupos de asociaciones de modos de respuesta a todas las tareas

Podemos decir que ambos factores se corresponden con una profundización en el estudio de la matemática, pero en dos sentidos. En el extremo inferior en ambos sentidos vemos a los NEM de menor estudio e interés en la Matemáticas, poniendo en el otro extremo, como de mayor profundización en un sentido a MA (estudios formales de los números reales) y en el otro a BA (estudios de los reales para aplicaciones). Pueden ser considerado factores de profundidad en la comprensión de los números reales asociada al nivel de estudio en Matemática y al tipo de Matemática estudiada, en el sentido de Matemática escolar, avanzada teórica o avanzada aplicada.

Conjugando ambos factores, tendremos en el plano (Gráficos 10.2, 10.2, 10.3 y 10.4) cuatro grupos principales de asociaciones de modalidades de respuesta y de NEM:

(i) un primer grupo (a la izquierda, arriba) que ubica en un extremo las modalidades que se corresponden con una comprensión adecuada de los irracionales, de la densidad y el orden de los números reales, una concepción del infinito como actual y cardinal, una visión de la recta continua, representado a los reales completos y asociados a MA;

(ii) mientras que en una zona intermedia (al medio y al medio abajo) tendremos las modalidades que muestran una visión de los reales como potencialmente densos, identificados con los racionales, el infinito como infinito potencial y la recta potencialmente densa o de magnitudes (racionales), asociadas a MI, BA y BI;

(iii) cercano al centro de gravedad una zona donde las respuestas denotan una visión discreta de los números y una concepción finitista, asociadas a 3ro, 4to, 5to y

(iv) para concluir, al medio arriba, aquellas modalidades que se evidencian una visión de los enteros como modelo de número, inseguridad en cuanto a la densidad y el orden, ajenidad frente al infinito y a la representación de los reales en la recta, asociadas a EFI y EFA.

Por lo que tendríamos un plano que muestra en un análisis macro, al menos cuatro grupos de modos de respuesta, esta agrupación es muy general y las modalidades pueden estar compartidas por los diferentes grupos. Esta agrupación podrá ser corroborada y analizada con un grano más fino mediante la CJA que aplicaremos en el paso siguiente del análisis. De hecho, como se verá en el próximo apartado, se consideró, como la más conveniente, una clasificación en siete clases, dado que, en la clasificación en cuatro clases, se observó que se fusionaron las que más adelante se denominan Clase 1, 2, 3 y 4 cuya distinción nos interesó mantener.

10.2. Clasificación de los y las estudiantes según sus modalidades de respuesta a todas las tareas

El objetivo de este estudio es encontrar una tipología de respuestas a todo el cuestionario integralmente, para lo cual realizamos una clasificación de los y las estudiantes sobre la base de la semejanza global de las modalidades de respuesta que les correspondió en cada una de las tareas.

La clasificación se realizó considerando a los y las estudiantes descriptos por sus coordenadas en los diez ejes principales del AFCM realizado, es decir que se retuvo mayor cantidad de información que al considerar sólo el primer plano factorial. En el Anexo V puede encontrarse el histograma de índices de nivel de las iteraciones de la CJA, así como el árbol de clasificación (Gráfico AV.2 y AV.3). En el mismo Anexo V se describen las razones por las cuales se consideró, como la más conveniente, la clasificación en siete clases que describiremos a continuación.

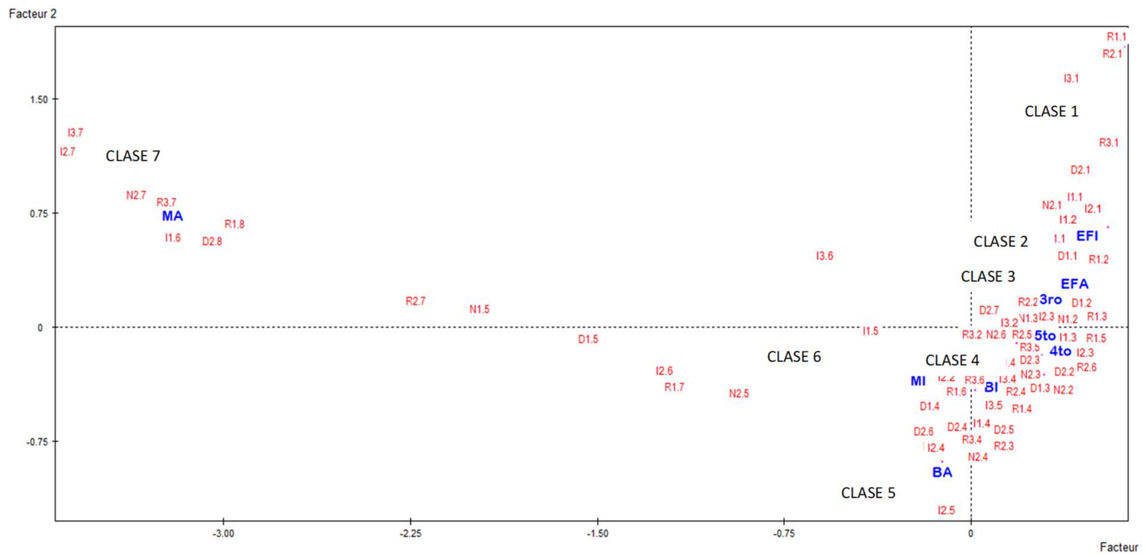
La siguiente Tabla 10.4 muestra, como resultado de este método de clasificación, la cantidad de estudiantes que conformaron cada una de las clases, la distancia del centro de gravedad de cada clase al centro de gravedad de la población (esta distancia será mayor cuanto más diferentes de la respuesta media global sean las respuestas agrupadas en la clase). También se da el valor test del centro de gravedad de las clases en los dos primeros ejes.

Tabla 10.4. Efectivo de estudiantes que conformaron cada una de las clases. Distancias del centro de gravedad de cada clase al centro de gravedad de la población. Valor test del centro de gravedad de las clases en los dos primeros ejes

	Efectivos	**Distancia al origen**	**v. t. Eje 1**	**v. t. Eje 2**
Clase 1	19	2,59	**3,14**	**10,96**
Clase 2	56	0,58	**3,92**	**5,47**
Clase 3	76	0,34	**3,92**	-0,69
Clase 4	57	0,43	1,85	**-4,04**
Clase 5	51	0,57	-0,09	**-6,93**
Clase 6	32	0,92	**-4,28**	**-4,06**
Clase 7	16	7,89	**-15,04**	**4,19**
Total	307			

Dado que todos los centros de gravedad de las clases están bien representados en el primer plano factorial representados (poseen un valor test mayor a 2 en valor absoluto), hemos incorporado el Gráfico 10.5, donde puede observarse el primer plano factorial del AFCM, en el cual se han proyectado estos centros de gravedad de las clases en relación con las modalidades de respuesta y a las de NEM.

Gráfico 10.5: Primer plano factorial del AFCM. Proyecciones de los centros de gravedad de las clases en relación con las modalidades de respuesta y a las de NEM.



10.2.1. Caracterización de las clases de modos de respuesta integral

Presentamos una caracterización de las clases obtenidas en la CJA posterior al AFCM. Informaremos, para cada clase, la cantidad de estudiantes que la constituyen y porcentaje de la población que representa, modalidades de respuestas asociadas según al grupo temático de tareas al que pertenecen y modalidades de NEM relacionadas particularmente. Haremos, luego, una caracterización de las clases según las ideas coherentes con los modos de respuesta asociados en cada grupo temático y mostraremos un gráfico con la distribución de los NEM al interior de cada clase. Para finalizar haremos una síntesis e interpretación de las ideas presentes en las modalidades de respuestas de la clase.

Nos basaremos en los resultados de la CJA y que veremos reflejados en tres tablas para cada clase en el Anexo V (Tablas desde AV.7 hasta AV.21) que servirán de permanente referencia: (i) una primera tabla, para cada clase, en la cual puede observarse una caracterización de la clase por sus variables y modalidades de respuestas asociadas, contemplándose el porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a la clase y el porcentaje de individuos de la clase que presentan una determinada modalidad. En esta primera tabla sólo se consideran aquellas modalidades con valor test (en valor absoluto) mayor a 2. (ii) una segunda tabla, para cada clase, que es una lista de los y las estudiantes más representativos/as de cada clase (paragones)y (iii) una tercera tabla, para cada clase, que lista los y las estudiantes que componen la clase, según sea al NEM al que pertenecen, la cantidad de estudiantes que corresponden a cada NEM y el porcentaje que representa en la clase.

CLASE 1. N=19 (6% de la población). Pueden observarse para esta clase las Tablas AV7, AV8 y AV9 en Anexo V.

Modalidades de respuesta asociadas: R2.1, R1.1, D2.1, R3.1, I3.1, I1.1, I2.1, D1.1, N1.1 y N2.1 (el orden, de izquierda a derecha, respeta el nivel de asociación con la clase). Modalidad de NEM asociada: EFI.

Clase 1 - Grupo N. Número y número irracional

N1.1. *Sólo los enteros son números.* No nombran reales, ni racionales, ni irracionales. Nombran a los naturales, los enteros o algún subconjunto notable de los enteros (ej. positivos, negativos, primos).

N2.1. *Ajenidad. Inseguridad. Desconocen los irracionales.* No contestan o responden que no saben o un aspecto irrelevante y no dan ejemplos.

Estudiantes que consideran sólo a los enteros como números y desconocen los irracionales.

Clase 1 - Grupo D. Densidad, orden y supremo de un intervalo.

D1.1: *Inseguridad con la densidad y el orden de los reales*. Responden sólo cuando se trata de enteros. Consideran que entre 0 y 2 hay algún número, pero no dan ejemplo y para los demás ítems expresan no saber o no contestan.

D2.1: *Ajenidad (problema del supremo).* No responden o manifiestan no saber o no entender el planteo.

Estudiantes que presentan inseguridad en cuanto al orden y la densidad y no se apropian del problema del supremo de un intervalo en los reales.

Clase 1- Grupo I. El infinito en los números reales.

I1.1: *Ajenidad (notación decimal infinita)*. No consideran que las colecciones sean infinitas (infinitos decimales) o manifiestan no saber y no justifican.

I2.1. *Ajenidad* al comparar la cardinalidad de conjuntos infinitos de números. No responden mayormente la tarea o manifiestan no saber o que los conjuntos no se pueden comparar sin más justificación

I3.1. *Ajenidad* en la representación decimal infinita-periódica de un número racional. No contestan o manifiestan no saber o que no realizar la tarea sin más justificación.

Estudiantes que manifiesta ajenidad frente al infinito en los tres contextos indagados, en particular parecen no considerar los números con notación decimal infinita.

Clase 1 - Grupo R. La representación de los números reales en la recta

R1.1. *Grafican sólo los enteros*. Ubican sólo -2 y 2. Sin justificar o manifestando que no grafican el resto porque no saben, no entienden o no recuerdan como se hace.

R2.1. *Ajenidad frente de la recta numérica como representación de los números reales.* No contestan o contestan no sé sin justificar en al menos dos de los tres ítems de la Tarea. T7. Densidad de la recta- completitud

R3.1. *Ajenidad frente a la naturaleza de la recta numérica.* El problema les es ajeno manifiestan no saber o no poder imaginar que ocurriría, no se comprometen con la actividad.

Estudiantes que muestran ajenidad frente al problema de la recta como representación de los números reales.

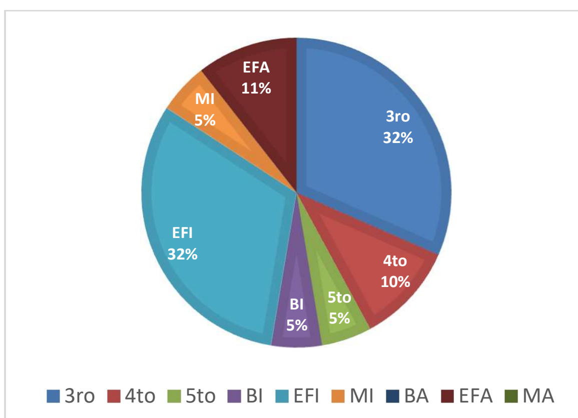
Ideas presentes en los modos de respuesta de la Clase 1

Sintéticamente, estos/as estudiantes consideran sólo a (algunos) enteros como números y no conocen los números irracionales. Se muestran inseguros en cuanto al orden y la densidad de los números reales y la representación de éstos en la recta. Frente a las tareas que involucran al infinito se le presentan como ajenas.

Composición de la clase y distribución de los NEM al interior de la Clase 1

La única modalidad de NEN asociada significativamente a esta clase es EFI (el 23% de estudiantes de EFI está en esta clase y el 38% de los miembros de la clase es de EFI). En esta clase no hay ningún/a estudiante de MA o de BA. El 32% de la clase es de 3ro, pero esto representa sólo el 12% de estudiantes de 3ro. A continuación, encontramos un gráfico que muestra la distribución de los NEM en esta clase.

Gráfico 10.6. Distribución de los NEM al interior de la Clase 1.



CLASE 2. N=56 (18% de la población). Pueden observarse para esta clase las Tablas AV10, AV11 y AV12 en Anexo V.

Modalidades de respuesta asociadas: R2.2, D2.1, R1.2, I1.3, I2.1, R3.1, N2.1, I3.1 y N1.3 (el orden, de izquierda a derecha, respeta el nivel de asociación con la clase).

Clase 2 - Grupo N. Número y número irracional

N1.3. *Identificación del número con su representación.* Nombran reales, racionales o irracionales y además algún tipo de número por su notación (decimales, fraccionarios, periódicos, negativos, imaginarios).

N2.1. *Ajenidad. Inseguridad. Desconocen los irracionales.* No contestan o responden que no saben o un aspecto irrelevante y no dan ejemplos.

Estudiantes que identifican los números con su notación y no conocen los irracionales.

Clase 2 - Grupo D. Densidad orden y supremo de un intervalo

D2.1: *Ajenidad (problema del supremo).* No responden o manifiestan no saber o no entender el planteo.

Estudiantes que muestran ajenidad frente al problema del supremo de un intervalo.

Clase 2- Grupo I. El infinito en los números reales.

I1.3. *Finitista explicita (notación decimal infinita).* Al comparar lo hacen (explícitamente) considerando lo que ocurriría con colecciones finitas (observan lo que ocurre con finitos decimales).

I2.1. *Ajenidad al comparar la cardinalidad de conjuntos infinitos de números*. No responden mayormente la tarea o manifiestan no saber o que los conjuntos no se pueden comparar sin más justificación.

I3.1. *Ajenidad* en la representación decimal infinita-periódica de un número racional. No contestan o manifiestan no saber o que no realizar la tarea sin más justificación.

Estudiantes que aparecen como finitistas en cuanto a la notación decimal, consideran (explícitamente) a los decimales finitos. Muestran ajenidad frente a la cardinalidad de los conjuntos infinitos.

Clase 2- Grupo R. La representación de los números reales en la recta.

R1.2. *Grafican sólo decimales finitos (no ½).* Ubican correctamente a -2; 2; 0,2 y 2,2. La fracción ½ la ubican entre 1 y 2. No ubican $2{,}2\hat{9}$ ni $\sqrt{2}$ porque no saben, no se acuerdan o sin justificar

R2.2. *La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.* Consideran que con las fracciones (racionales) se completa la recta, sin embargo, no explicitan su pensamiento. Al enfrentar la tarea de ubicar más números en la recta, evitan la tarea. No conocen números no-racionales

R3.1. *Ajenidad frente a la naturaleza de la recta numérica*. El problema les es ajeno manifiestan no saber o no poder imaginar que ocurriría, no se comprometen con la actividad.

Estudiantes que parecen sentirse cómodos con los decimales finitos, la recta representa sólo a los enteros y sus fracciones.

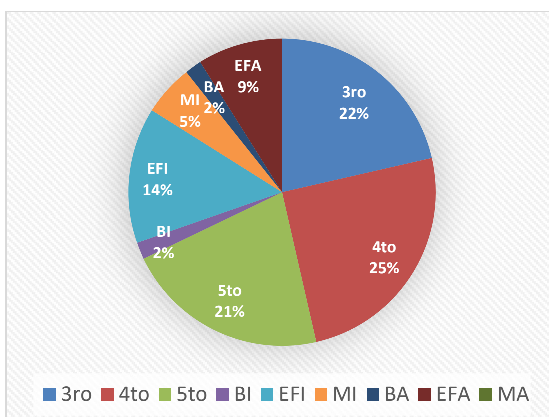
Ideas presentes en los modos de respuesta de la Clase 2

Al igual que en la clase anterior estos/as estudiantes no reconocen a los números irracionales, sin embargo, nombran otros números además de los enteros, asociándolos a su representación, principalmente *decimales*. Expresan una visión finitista en cuanto a la notación decimal. Sólo grafican decimales (finitos) en la recta numérica y consideran a la recta como compuesta por los números enteros y sus fracciones. Para ellos/as los números son los enteros y algunos números decimales finitos o fraccionarios, no consideran a números no racionales. Presentan ajenidad frente a los dos problemas más complejos: supremo de un intervalo y cardinalidad. Muestran inseguridad frente a la naturaleza de la recta numérica.

Composición de la clase y distribución de los NEM al interior de la Clase 2

No posee modalidades de NEM asociadas particularmente, sin embargo, el 67% de la clase son estudiantes de secundaria y en esta clase no hay ningún/a estudiante de MA. A continuación, encontramos un gráfico que muestra la distribución de los NEM en esta clase.

Gráfico 10.7. Distribución de los NEM al interior de la clase 2.



CLASE 3. N=76 (25% de la población). Pueden observarse para esta clase las Tablas AV13, AV.14 y AV.15 en Anexo V.

Modalidades de respuesta asociadas: I2.3, D1.2, N1.3, N2.3, D2,5, R1.3, D2.2, D2.4, R3.3, R3.2, R2.4, R2.5, I1.2, D2.3 (el orden, de izquierda a derecha, respeta el nivel de asociación con la clase). Modalidad de NEN asociada: 5to.

Clase 3- Grupo N. Número y número Irracional

N1.3. *Identificación del número con su representación.* Nombran reales, racionales o irracionales y además algún tipo de número por su notación (decimales, fraccionarios, periódicos, negativos, imaginarios). En esta clase están también, sin ser muy numerosos, los que dan ejemplos notables de irracionales y los que dicen romanos.

N2.3. *Confunden irracionales con racionales.* Son los decimales, números con coma. Manifiestan que los irracionales son números decimales o con coma o también que son las fracciones o tienen infinitos decimales periódicos, es decir los confunden con los racionales. Brindan como ejemplos números racionales. Hay un subgrupo que considera que son los que sirven para medir con precisión (en el sentido de más o menos decimales).

Estudiantes que confunden los irracionales con los números racionales, fundamentalmente con los decimales, pero también con las fracciones.

Clase 3- Grupo D. Densidad, orden y supremo de un intervalo

D1.2. *Discretitud.* Identifican π con su aproximación decimal. Sólo presentan seguridad cuando se trata de enteros; manifestando que hay pocos o muchos números entre 0 y 2. Pero consideran que entre las fracciones con denominador consecutivo no hay ningún o unos pocos números. Identifican a π con el racional 3,14

D2.2: *Discretitud - no explicada.* Manifiestan que es posible encontrar un número anterior a uno dado, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante

D2.3. *Discretitud finitista (redondeo).* Consideran que es posible encontrar un número “anterior” a uno dado y éste es un decimal finito o que se puede estimar, redondear o que depende de la escala.

D2.4. Discretitud mediada por una notación infinita. Consideran que es posible encontrar un número “anterior” y este es un número con infinitos decimales.

D2.5. *Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo*. Consideran que debe existir tal número porque al ser infinitos deben estar todos los posibles.

Estudiantes que consideran a las fracciones discretas (pedacitos de enteros) y a los números reales como discretos (puede existir uno anterior a uno dado). Expresan una visión de discretitud de los números, puede ser no explicada o finitista o mediada por una notación infinita o de infinito identificado con todo.

Clase 3- Grupo I. El infinito en los números reales.

I1.2. *Finitista no justificada (notación decimal infinita).* Al comparar eligen lo que ocurriría con colecciones finitas (finitos decimales) sin embargo no justifican su pensamiento.

I2.3*. Finitista no justificada (comparando conjuntos).* Al comparar eligen lo que ocurriría al comparar conjuntos finitos (un intervalo finito o acotado de números), sin embargo, no justifican su pensamiento.

Estudiantes que presentan una visión finitista cuando se trata de comparar colecciones de números, aun cuando sean ordenadas como en el caso de los decimales de un racional.

Clase 3- Grupo R. La Representación de los números reales en la recta.

R1.3. *No grafican infinitos- No explicada. Grafican sólo racionales finitos.* Ubican a -2; 2; 0,2; 2,2 y 1/2 bien; no ubican $\sqrt{2}$ ni $2{,}2\overset{\frown}{9}$ porque no saben, no se acuerdan o sin justificar.

R2.4. La recta esta completa con las infinitas fracciones (infinito es todo) Consideran que los racionales completan la recta porque son infinitos y deben estar "todos". Su concepción del infinito (identificado con todo) está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales.

R2.5*. La recta representa los racionales.* Confunden los reales con los racionales. Sus respuestas son coherentes con identificar a los números reales con los racionales.

R2.6*. La recta representa los racionales y otros números no-racionales* - No explicada. Consideran que con las fracciones (racionales) no se puede completar la recta, ya que existen otros números, aun cuando no tengan muy claros cuantos ni cuales, algunos no consideran a los enteros como racionales. Con las raíces tampoco se completa porque existen otros números.

R3.2*: Recta dibujada o material:* Conciben la recta como un dibujo, como la marca que deja el lápiz o la tinta de la impresora en un papel (no se abstraen de la representación externa) o como constituida de materia (no se abstraen del objeto real "microscopio"). La recta no es un objeto matemático.

R3.3. *Recta de (puntos) discreta. Ven* uno pocos, muchos o una sucesión de puntos. Algunos aseguran ver una sucesión de infinitos puntos. La recta se concibe como conjunto de puntos (con medida) corresponde a la analogía del collar de perlas.

Estudiantes que identifican a los reales con los racionales y la recta se presenta como discreta, representando las fracciones de enteros (discretas). En cuanto a la naturaleza de la recta numérica expresan una visión de recta dibujada o de puntos discreta.

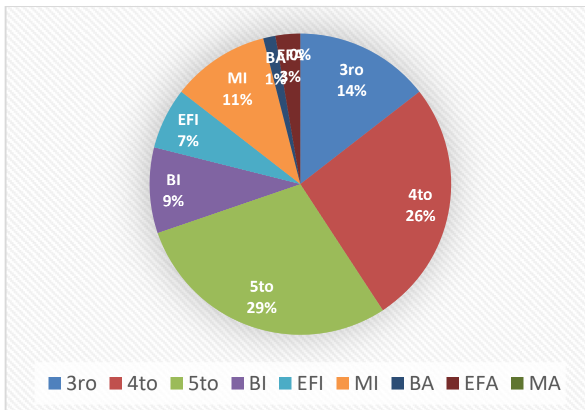
Ideas presentes en los modos de respuesta de la Clase 3

Los y las estudiantes de esta clase confunden los irracionales con los números racionales, fundamentalmente en notación decimal, considerando que los irracionales son los *números con coma*. En ocasiones también con las fracciones, identificando los números con su representación (decimales, fracciones), incluso no consideran a los enteros como fracciones. Expresan una visión discreta sobre los números. Consideran a las fracciones discretas (pedacitos de enteros) y a los números reales como discretos, en el sentido de que puede existir uno anterior a uno dado. Identifican π con su aproximación decimal. Dan respuestas finitistas, en algunos contextos y en otros ven al infinito identificado con todo. Presentan una visión finitista cuando se trata de comparar colecciones de números, aun cuando sean ordenadas como en el caso de los decimales de un racional. La recta se presenta como discreta, representando las fracciones de enteros (discretas). En cuanto a la naturaleza de la recta numérica expresan una visión de recta dibujada o de puntos discreta.

Composición y distribución de los NEM al interior de la Clase 3

Posee como modalidad de NEN asociada a 5to constituyendo estos el 29% de la clase y el 42% de los de 5to están en esta clase. El 68% de la clase son estudiantes de secundaria. No hay ningún/a estudiante de MA. A continuación, encontramos un gráfico que muestra la distribución de los NEM en esta clase.

Gráfico 10.8. Distribución de los NEM al interior de la clase 3.



CLASE 4. N=57 (19% de la población). Pueden observarse para esta clase las Tablas AV.16, AV.17 y AV.18 en Anexo V.

Modalidades de respuesta asociadas: R3.5, R1.5, R2.3, I3.5, I2.2, N2.6, D2.6, N1.4 (el orden, de izquierda a derecha, respeta el nivel de asociación con la clase). Modalidad de NEM asociada: 3ro.

Clase 4- Grupo N. Número y número Irracional

N1.4. *Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares.* Además de reales, racionales o irracionales dicen naturales y enteros. No dicen complejos

N2.6. *Definición literal no-fracción.* No se pueden escribir como fracción. Expresan la frase textual: *no se pueden escribir como fracción*, sin más detalles; sólo esa frase sin especificar "de enteros" o "con denominador distinto de cero", tampoco nombran que son reales. Da idea de una definición literal sin mucha comprensión. Como ejemplo suelen dar *una generalización correcta.*

Estudiantes centrados en su reciente aprendizaje de los conjuntos numéricos, de modo que conocen los términos *naturales, enteros, racionales y reales*, dando una definición literal de los irracionales sin mucha internalización.

Clase 4- Grupo D. Densidad, orden y supremo

> D2.6. *Densidad potencialmente infinita*. Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", porque hay infinitos números y nunca se llegaría o siempre se podría agregar un decimal.

Estudiantes que comprenden la densidad como potencialmente infinita.

Clase 4- Grupo I. El infinito en los números reales.

> I2.2. *Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos).* Sólo comparan (por inclusión) las parejas de conjuntos donde figuran los enteros. No se apropian del resto de conjuntos.
>
> I3.5. *Infinito potencial (número periódico).* Aluden a las infinitas cifras decimales, como un proceso sinfín; como un proceso que no termina.

Estudiantes que presentan una visión de infinito potencial, como proceso sin fin. Piensan el "infinito de los enteros" como modelo de infinito, cuando se trata de comparar colecciones de números, comparan por inclusión (tomando a los enteros como modelo).

Clase 4- Grupo R. La representación de los números reales en la recta.

> R1.5. *Grafican sólo los racionales ($2{,}2\hat{9}$ aproximado). Ubican* correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\hat{9}$ muy próximo a 2,3 y no representan $\sqrt{2}$ sin justificar porque no lo hacen o justificando que no saben o no recuerdan cómo se calcula la raíz. Algunos grafican $\sqrt{2}$ aproximadamente pero mal ubicada.
>
> R2.3. *La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras).* Consideran que la recta no se completa, porque su concepción del infinito como un proceso sin fin, está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales. Muchos no consideran a los enteros como racionales. Confunden los reales con las fracciones.
>
> R3.5. *Densidad numérica potencial - infinito como indefinido. Aseguran* ver muchos o más números, nuevos números, o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta. La recta se concibe como densa de números. Con aumento infinito manifiestan no saber, o que en el infinito no es posible. Algunos dibujan la recta con escala decimal.

Estudiantes que consideran que la recta representa a los enteros y sus fracciones o los decimales hasta los décimos (corren los enteros a los décimos) Expresan una idea de la recta potencialmente densa y expresan una idea de infinito (potencial) o como indefinido (no expresan fin, ni se puede operar, ni graficar)

Ideas presentes en los modos de respuesta de la Clase 4

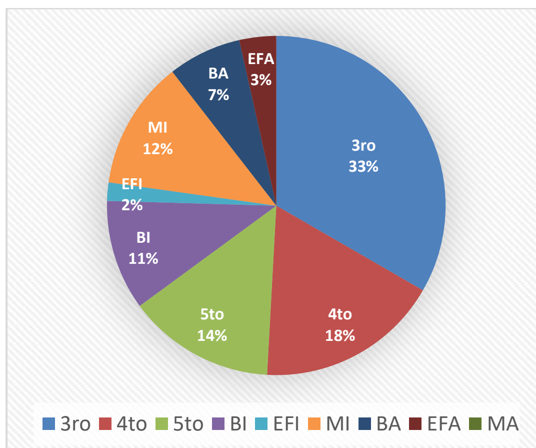
Estos/as estudiantes parecen centrados en su reciente aprendizaje de los conjuntos numéricos, de modo que conocen los términos naturales, enteros, racionales y reales, dando una definición literal de lo irracionales sin mucha internalización. Piensan el infinito en forma potencial, de modo que los números son los enteros y potencialmente densas fracciones o decimales. Expresan una idea de infinito (potencial) o como indefinido, ven a la recta como potencialmente densa de números.

Composición y distribución de los NEM al interior de la Clase 4

Posee 3ro como modalidad de NEM asociada (33% de los 3ro están en esta clase y son el 32% de la clase). Es notable la presencia de BI y MI.

A continuación, encontramos un gráfico que muestra la distribución de los NEM en esta clase.

Gráfico 10.9. Distribución de los NEM al interior de la Clase 4.



CLASE 5. N=51 (17% de la población). Pueden observarse para esta Clase las Tablas AV.19, AV.20 y AV.21 en Anexo V.

Modalidades de respuesta asociadas: D2.4, N2.4, R3.4, R1.6, I2.4, I2.5, N1.2, D1.3, R2.3, I3.4 y I2.6 (el orden, de izquierda a derecha, respeta el nivel de asociación con la clase). Modalidad de NEM asociada: BA.

Clase 5- Grupo N. Número y número Irracional

N1.2. *Los enteros como modelo de número*. Nombran a los *reales, racionales o irracionales* y además algún subconjunto notable de los enteros (*pares, impares, primos*).

N2.4. *Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma* - Consideran que los irracionales tienen infinitas cifras decimales o son infinitos. Suelen dar como ejemplos a ejemplares irracionales, pero también a ejemplos racionales.

Estudiantes que parecieran centrados en los enteros, sin embargo, conciben los reales como "con infinitos decimales después de la coma". Suelen confundirlos con racionales.

Clase 5 -Grupo D. Concepción de número, orden, discretitud, densidad y completitud

D1.3. *Densidad finitista. Infinito es mucho. No comprenden el orden.* Consideran que entre dos números hay pocos (a lo sumo muchísimos) números. No comprenden el orden de los racionales (no saben calcular un número entre 1/5 y 1/4 o ni entre 3,14 y π).

D2.4. *Discretitud mediada por una notación infinita.* Consideran que es posible encontrar un número "anterior" y este es un número con infinitos decimales.

Estudiantes que consideran a los números como densos en el sentido de poder encontrar entre dos números dados un número y también muchos números. Se puede encontrar el número "que me convenga" considerando el redondeo (considerando *0,99 = 0,999. Si estoy trabajando con dos decimales*). Sin embargo, consideran que es posible encontrar un número "anterior" a un entero y este es un número con infinitos decimales "9".

Clase 5-Grupo I. El infinito en los números reales

I2.4. *Finitista explícita*. Manifiestan un tipo de comprensión finitista, apelando a lo que ocurre en un intervalo finito o acotado de números. Dan justificaciones por razones finitistas, salvo en el caso de naturales/enteros que se justifica por inclusión.

I2.5. *Infinito como indefinido.* Consideran que los conjuntos (por infinitos) no se pueden comparar. Evidencian una idea de que lo infinito es equivalente a lo sin límite, sin reglas, indefinido.

I2.6. *Único infinito (comparando conjuntos).* Consideran que existe una única cantidad infinita, por la tanto todos los conjuntos infinitos son igualmente abundantes (con una cantidad "infinita" de elementos).

I3.4. *Discretitud explicita o redondeo (número periódico).* Comparan explicitando que se piensa en un salto discreto entre los dos números o por la posibilidad de redondeo.

Estudiantes que son finitistas en un sentido explicito, es decir consideran lo que ocurriría en una colección finita o redondean o aproximan al racional más cercano. Consideran que el infinito es indefinido o un adjetivo.

Clase 5 -Grupo R. La representación de los números reales en la recta.

R1.6. *Grafican todos. Aproximación decimal*. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2; ½. $2,2\widehat{9}$ próximo a 2,3 y aproximan $\sqrt{2}$ a 1,41. Dado que consideran que graficaron todos los números pedidos la gran mayoría no justifica

R2.3. *La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras.* Consideran que la recta no se completa, porque su concepción de infinito como un proceso sin fin, está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales. Muchos no consideran a los enteros como racionales. Confunden los reales con las fracciones.

R3.4. *Recta de magnitudes. Regla graduada.* Ven la recta con la escala, segmentada, con divisiones y subdivisiones. Podríamos decir que conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes, es decir un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal.

Estos/as estudiantes grafican todos los números en forma aproximada (según redondeo). Consideran a la recta como infinito-potencialmente densa de fracciones o decimales finitos. Conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes, es decir un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal, con la aproximación que consideren necesaria.

Ideas presentes en los modos de respuesta de la Clase 5

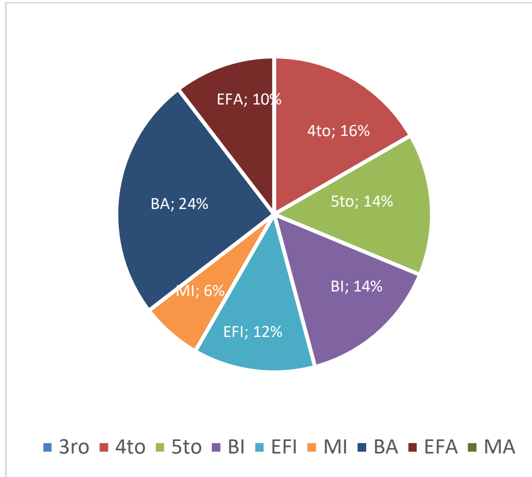
Identifican explícitamente los reales con su aproximación racional finita. Si bien consideran números irracionales lo hacen como números con decimales infinitos, considerando algunos ejemplares irracionales por su aproximación racional finita. Los reales son vistos como magnitudes, con decimales finitos, con tantos decimales como "convenga" (redondeo). Consideran que a los números se los puede pensar como discretos, finitamente densos o potencialmente densos, según convenga, considerando el redondeo. Conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes (con decimales finitos), es decir un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal. Son finitistas en un sentido explicito, considerando lo que ocurriría en una colección finita o en forma intencional a través de redondear o aproximar al racional más cercano. En ocasiones al considerar colecciones dadas como infinitas consideran que el infinito es indefinido o único infinito.

Composición de la Clase y distribución de los NEM al interior de la Clase 5

Posee como modalidad de NEM asociada a BA (el 24% de la clase es de BA y el 57% de los de BA están en esta clase).

A continuación, encontramos un gráfico que muestra la distribución de los NEM en esta clase.

Gráfico 10.10. Distribución de los NEM al interior de la Clase 5.



CLASE 6. N=32 (10% de la población). Pueden observarse para esta Clase las Tablas AV.22, AV.23 y AV.24 en Anexo V.

Modalidades de respuesta asociadas: N2.5, R2.7, N1.5, D2,6, D1.5, I2.2, D1.4, I2.4, R1.7, I2.6 (el orden, de izquierda a derecha, respeta el nivel de asociación con la clase). Modalidad de NEM asociada: MI.

Clase 6- Grupo N. Número y número irracional.

N1.5. *Conjuntos convencionales con estructura.* Además de reales, racionales o irracionales dicen naturales, enteros y complejos. La respuesta clásica es sólo estos 6 conjuntos numéricos y en ese orden: naturales, enteros, racionales, reales y complejos; muchos nombran también los irracionales

N2.5. *Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.* Manifiestan que son los "decimales no-periódicos". Dan como ejemplo: ejemplares irracionales (raíces de primos-notables) o también una generalización correcta centrado en la definición notacional.

Estudiantes que denotan conocer los números reales, definiendo los irracionales como *los números con infinitos decimales no-periódicos.*

Clase 6 – Grupo D. Densidad, orden y supremo de un intervalo.

D1.5: *Comprensión de la densidad y el orden*. Consideran la densidad infinita de los reales. Los ejemplos pueden ser dados en forma de fracción o decimal, pero están bien

D1.4. Densidad infinita. Comprenden el orden de los racionales. Consideran una densidad infinita, sin embargo, no comprenden el orden de los racionales: dan un numero errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π.

D2.6. *Densidad potencialmente infinita*. Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", porque hay infinitos números y nunca se llegaría o sería una tarea interminable.

Estudiantes que comprenden la densidad infinita de los reales, aunque algunos no comprenden el orden de los reales y otros la consideran potencialmente infinita.

Clase 6 -Grupo I. El infinito en los números reales.

I2.2. *Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos).* Sólo comparan (por inclusión) las parejas de conjuntos donde figuran los enteros. No se apropian del resto de conjuntos.

I2.4. *Finitista explícita (comparando conjuntos).* Manifiestan un tipo de comprensión finitista, apelando a lo que ocurre en un intervalo finito o acotado de números. Dan justificaciones por razones finitistas, salvo en el caso de naturales/enteros que se justifica por inclusión.

I2.6: *Único infinito.* Consideran que existe una única cantidad infinita, por la tanto todos los conjuntos infinitos son igualmente abundantes (con una cantidad "infinita" de elementos).

Estudiantes que, respecto de la comparación de conjuntos numéricos algunos comparan por inclusión tomando los enteros como modelo y otros utilizando razonamientos finitistas y algunos tomando el infinito como adjetivo.

Clase 6 – Grupo R. La representación de los números reales en la recta.

R1.7 *Grafican todos en forma aproximada-exacta.* Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\hat{9}$ aproximado a 2,3 y $\sqrt{2}$ por método geométrico o aproximado (justificando que hubiesen necesitado el compás para hacerlo exacto).

R2.7. *La recta representa a los reales completos.* Sus respuestas hacen pensar que comprenden a los reales como la unión de los racionales y de los irracionales, conciben la recta como continua

Estudiantes que grafican en forma correcta, sin embargo $2{,}2\hat{9}$ por aproximación a 2,3. Comprenden a los reales como la unión de los racionales y de los irracionales, conciben la recta como continua.

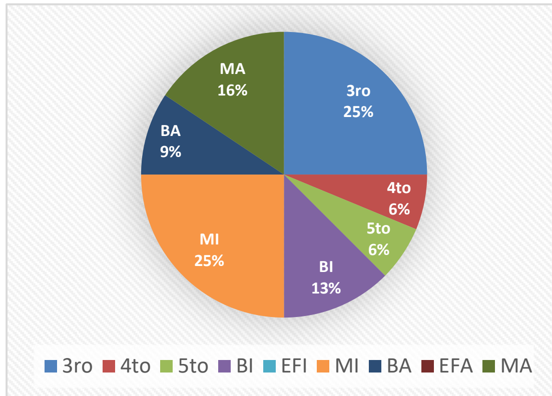
Ideas presentes en los modos de respuesta de la Clase 6

Conocen los irracionales describiéndolos mediante su definición notacional (*infinitos decimales no-periódicos*). Conciben los reales como densos, comprendiendo la densidad como potencialmente infinita y el orden. Grafican en forma correcta, sin embargo $2{,}2\hat{9}$ por aproximación a 2,3. Comprenden a los reales como la unión de los racionales y de los irracionales, conciben la recta como continua. Algunos comparan por inclusión tomando los enteros como modelo, otros utilizando razonamientos finitistas y algunos piensan que existen una única cantidad infinita.

Composición de la clase y distribución de los NEM al interior de la Clase 6

Tienen asociada la modalidad MI (el 25% de la clase es de MI y el 26% de los de MI están en esta clase). No hay estudiantes de Educación Física en esta clase. A continuación, encontramos un gráfico que muestra la distribución de los NEM en esta clase.

Gráfico 10.11. Distribución de los NEM al interior de la Clase 6.



CLASE 7. N=16 (5% de la población). Pueden observarse para esta Clase las Tablas AV.25, AV.26 y AV.27 en Anexo V.

Modalidades de respuesta asociadas: I3.7, D2.8, N2.7, R2.7, D1.5, N1.5, I2.7, N1.5, R1.8, R1.7, I1.6, I2.6, I1.5 (el orden, de izquierda a derecha, respeta el nivel de asociación con la clase). Modalidad de NEM asociada: MA

Clase 7- Grupo N. Número y número irracional.

N1.5. *Conjuntos convencionales con estructura.* Además de reales, racionales o irracionales dicen naturales, enteros y complejos. La respuesta clásica es sólo estos 6 conjuntos numéricos y en ese orden: naturales, enteros, racionales, reales y complejos muchos nombran también los irracionales.

N2.7. *Definición experta.* Dan una definición correcta de irracionales, los que no se pueden expresar como cociente de enteros con denominador distinto de cero. Como ejemplo raíces de números primos positivos o alguna generalización correcta.

Estudiantes que conocen los números reales, nombrando los conjuntos convencionales con estructura. Definiendo los irracionales con una definición experta, como cociente de números enteros, con divisor distinto de cero.

Clase 7- Grupo D. Densidad, orden y supremo de un intervalo.

D1.5: *Comprensión de la densidad y el orden.* Consideran la densidad infinita de los reales. Los ejemplos pueden ser dados en forma de fracción o decimal, pero están bien D1.4. Densidad infinita. Comprenden el orden de los racionales. Consideran una densidad infinita, sin embargo, no comprenden el orden de los racionales: dan un numero errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π.

D2.8. *Comprenden la densidad y completitud de los reales.* Consideran que no existe un número “anterior”, por la densidad de los reales.

Estudiantes que comprenden el orden y la densidad infinito-actual de los reales.

Clase 7 -Grupo I. El infinito en los números reales.

I1.6. *Infinito Cardinal.* Consideran que ambas colecciones son equipotentes (en el sentido cantoriano), comparando por relación uno a uno entre ambas colecciones.

I1.5. *Único infinito.* Consideran que existe una única cantidad infinita, por la tanto hay la misma cantidad "infinita" en ambas colecciones.

I2.7. *Infinito cardinal.* Consideran, de forma matemáticamente correcta, que todos los conjuntos numerables son igualmente abundantes y que hay (infinitamente) más irracionales que racionales, en el sentido de la cardinalidad cantoriana.

I2.6. *Único infinito (comparando conjuntos).* Consideran que existe una única cantidad infinita, por la tanto todos los conjuntos infinitos son igualmente abundantes (con una cantidad "infinita" de elementos).

I3.7. *Infinito actual*. Consideran las infinitas cifras decimales como actualmente infinitas ya sea justificación mediante una "prueba" o por la densidad de los números reales.

Estos/as estudiantes comprenden el infinito en forma actual y comparan por cardinalidad.

Clase 7 -Grupo R. La representación de los reales en la recta. Naturaleza de la recta numérica.

R1.7. *Grafican todos en forma aproximada-exacta.* Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\hat{9}$ aproximado a 2,3 y $\sqrt{2}$ por método geométrico o aproximado (justificando que hubiesen necesitado el compás para hacerlo exacto).

R1.8. *Grafican todos en forma exacta*. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. Hacen explícito que $2{,}2\hat{9}$= 2,3 y grafican $\sqrt{2}$ por método geométrico.

R2.7. *La recta representa a los reales completos*. Sus respuestas hacen pensar que comprenden a los reales como la unión de los racionales y de los irracionales, conciben la recta como continua

R3.7. *Continuidad.* Conciben la recta como continua, y podríamos decir que una representación de la completitud de los reales; ya que a pesar de haber dado la recta como numérica aquí no aparecen ni números ni puntos.

Para estos/as estudiantes la recta representa a los reales completos y es continua.

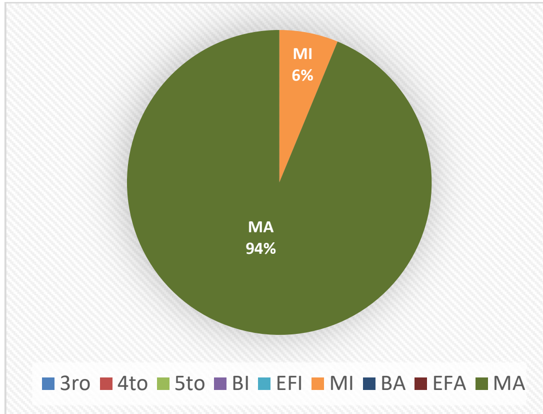
Ideas presentes en los modos de respuesta de la Clase 7

Son estudiantes que conocen los irracionales, comprenden la densidad y la completitud de los reales y comprenden el infinito actual. Al comparar conjuntos la mayoría compara por cardinalidad.

Composición y distribución de los NEM al interior de la Clase 7

Posee como modalidad de NEN asociado a MA (el 75% de MA están en la clase y el 94% de la clase es de MA). En esta clase sólo hay estudiantes de Matemática. A continuación, encontramos un gráfico que muestra la distribución de los NEM en la clase.

Gráfico 10.12. Distribución de los NEM al interior de la Clase 7.



10.2.2. Síntesis de la caracterización de las clases

A continuación, encontraremos una caracterización de cada clase de respuestas encontrada al considerar las diez tareas conjuntamente, con una etiqueta que sintetiza la concepción sobre los números reales que pudimos distinguir en los y las estudiantes que le correspondieron. También encontraremos a que NEM se encuentra especialmente asociada cada clase.

Clase 1. N=19 (6%). *Solo los enteros son números. Ajenidad.* EFI.
Estudiantes que sólo consideran como números a los enteros, presentan inseguridad frente al orden y la densidad de los reales, la recta sólo sostiene a algunos enteros y los conceptos de densidad, completitud-continuidad, la naturaleza de la recta numérica e infinito se le presentan como ajenos.

Clase 2. N=56 (18%). *Los enteros y sus (finitas) fracciones. Notación finitista. Ajenidad.* Estudiantes de secundaria.
Estudiantes que consideran que números son los enteros y finitas fracciones. Presentan inseguridad frente al orden y la densidad. La recta representa a los enteros, sus fracciones (no enteras) y a decimales finitos. Son explícitamente finitistas y no se apropian de la naturaleza de la recta ni de la cardinalidad de conjuntos numéricos.

Clase 3. N=76 (25%). *Enteros y decimales (finitos). Discretitud Explícita. Finitistas tácitos. Traslado de los enteros a los décimos.* Estudiantes de secundaria, especialmente 5to.
Estudiantes que consideran que números son los enteros y los decimales finitos. Expresan una visión discreta explícita de los números. La recta representa los decimales finitos y la ven como material o dibujada. Se trata de una visión finitista no explícita, en ocasiones identifican infinito con todo.

Clase 4. N=57 (19%). *Enteros e infinitas (potencialmente) densas fracciones y decimales.* 3ro y notable la presencia de BI y MI.

Estudiantes que manifiestan una visión centrada en el reciente aprendizaje de los conjuntos numéricos, de modo que conocen los términos naturales, enteros, racionales y reales, dando una definición literal incompleta de lo irracionales sin mucha internalización. Los números son los enteros y potencialmente densas fracciones o decimales. Ven a la recta como potencialmente densa de números y expresan una idea de infinito (potencial) o como indefinido.

Clase 5. N=51 (17%). *Racionales por su aproximación decimal finita mediada por la utilidad. Magnitudes.* BA.

Estudiantes que consideran que números son los enteros, decimales, fracciones y racionales. A los irracionales los describen como *los que pueden tener infinitos decimales*. Expresan una visión finitamente densa o potencialmente densa de los números, recurriendo a la aproximación decimal finita por redondeo. Comparando cardinalidades expresan una visión finitista explicita, de infinito como indefinido o de único infinito. Ven a la recta como una regla graduada, una recta de magnitudes con la aproximación que consideren necesaria.

Clase 6. N=32 (10%). *Comprensión aproximada de los números reales. Densidad potencialmente Infinita.* MI y notable presencia de MA.

Estudiantes que consideran que número es elemento de un conjunto numérico. Definición notacional de los irracionales. Comprenden el orden de los reales y la densidad (como potencialmente infinita). Comparando cardinalidades expresan una visión finitista o de único infinito. Comprenden a la recta representando a los reales como la unión de racionales e irracionales, conciben la recta como continua.

Clase 7. N=16 (5%). *Comprensión consolidada de los reales. Reales completos. Recta continua. Infinito actual.* MA.

Estudiantes que consideran que número es un elemento de un conjunto numérico. Dan una definición experta de los irracionales. Comprenden el orden y la densidad actual de los reales. Al comparar cardinalidades muestran una visión de infinito actual (algunos plantean una única cardinalidad infinita). Conciben la recta continúa representando a los reales completos.

En el Anexo V encontraremos la Tabla AV.28, que sintetiza las clases de respuestas encontrada al considerar todas las tareas conjuntamente, una etiqueta relacionada con la concepción sobre los números reales que se manifiesta en dicha clase, cantidad de estudiantes, porcentaje de la población y NEM asociada cada clase.

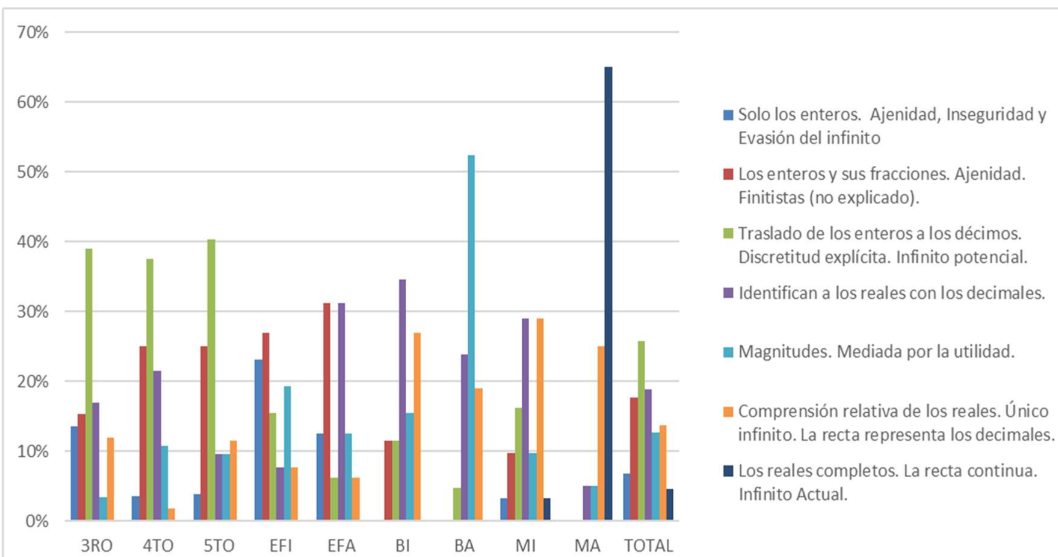
10.3. Perfiles de distribución de las clases de respuestas a todo el cuestionario

En esta instancia de la Fase 2 de análisis de la información y con el fin de buscar indicios de asociaciones de las clases de respuestas a todo el cuestionario con su NEM y la influencia de este en la profundidad de la comprensión del número real, se estudiaron los perfiles de distribución de modos de respuesta integrales, según el NEM. Realizamos un AFC de la tabla de contingencia de estas clases integrales respecto de las modalidades de NEM.

10.3.1. Distribución de las clases de respuestas completas en los niveles de estudio

En la Gráfico 10.13 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada clase de respuestas a todo el cuestionario en cada nivel de estudio y en la población en general.

Gráfico 10.13. Distribución de las clases según modos de respuesta a todo el cuestionario en cada NEM.



Vemos como cada perfil de distribución es característico y distinto al perfil medio de la población. Algunos tipos de respuestas se presentan como característicos de algún NEM: como *comprensión de los reales: reales completos, recta continua* e *infinito actual* para MA; *racionales por su aproximación decimal finita, magnitudes, mediada por la utilidad,* para BA; *decimales (finitos), discretitud explícita y finitistas* para 4to y 5to, Como así también *enteros e (infinito-potencialmente densas) fracciones y los enteros como modelo de inclusión e infinito potencial* para 3ro. Es notable como (salvo para MA) en cada NEM están presentes casi todas las clases de respuestas.

En la población en general observamos que: la primera clase no muy numerosa y asociada a Educación Física pareciera ser de estudiantes que no jugaron el juego o que no les resultaron accesibles las tareas realizando aquellas en las que figuraban (algunos enteros). Las Clase 2, 3 y 4 constituyen el 62% de la población, siendo la más común la Clase 3. Las tres se corresponden con visiones de la escuela secundaria o comienzo de la universidad. Presentándose, las Clase 3 y 4 como de transición entre la escuela y la universidad, particularmente asociando los números con los decimales, sean finitos (Clases 3) o potencialmente densos (Clase4).

Las otras tres clases de respuestas son principalmente universitarias, constituyen el 38% de la población y muestran tres versiones de los reales (racionales e irracionales). Una asociándolos intencionalmente con los racionales por su aproximación decimal finita mediada por la utilidad (Clase 5) asociada a BA, la segunda cercana a una visión de los reales como unión de racionales e irracionales consideran la densidad como potencial mente infinita, es decir sin llegar a la completitud (Clase 6) asociada a MI y por último una versión experta de los reales completos y la recta continua (Clase 7) asociada a MA.

10.3.2. Asociaciones de perfiles de respuesta a todo el cuestionario según el NEM

Considerando a los y las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de las siete clases surgidas en la clasificación de respuestas integrales, respecto de las modalidades de NEM a fin de evidenciar si existen asociaciones entre los perfiles de respuesta de los distintos NEM, observando si hay perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM.

Descripción de las variables y sus modalidades. Presentación de los datos

En el Anexo V, presentamos las Tabla AV.29 y Tabla AV.30 de los resultados del AFC, realizado sobre la tabla de contingencia que cruza mediante frecuencias, las siete clases de respuestas integrales, con las modalidades de NEM de los y las estudiantes. En las nombradas Tablas AV.28 y AV.29 se pueden observar las contribuciones de las modalidades de clases de respuestas y de NEM respectivamente, a los tres primeros factores los del AFC realizado sobre la tabla de contingencia descripta (Tabla 10.4).

Tabla 10.4. Tabla de contingencia de las clases de respuestas respecto de las modalidades de NEM.

Clases de respuesta / NEM	3ro	4to	5to	EFI	BI	MI	EFA	BA	MA	
C1. Sólo los enteros, ajenidad e inseguridad, evasión del infinito.	6	2	1	6	1	1	2	0	0	19
C2. Los enteros y sus fracciones, ajenidad respecto de la recta y finitistas (no explicado).	12	14	12	8	1	3	5	1	0	56
C3. Traslado de los enteros a los décimos, discretitud explícita e infinito potencial	11	20	22	5	7	8	2	1	0	76
C4. Identificación a los reales con los decimales.	19	10	8	1	6	7	2	4	0	57
C5. Magnitudes, Mediada por la utilidad (redondeo).	3	8	7	6	7	3	5	12	0	31
C6. Comprensión relativa de los reales, único infinito y la recta representa los decimales	8	2	2	0	4	8	0	3	5	32
C7. Los reales completos, la recta continua e infinito actual	0	0	0	0	0	1	0	0	15	16

Observamos (Tabla AV.29 y AV.30 - Anexo V) que todas las modalidades de ambas variables (clasificación de respuestas y NEM) expresan una contribución más alta que la media en al menos uno de los tres primeros ejes factoriales, por lo que realizaremos el análisis teniendo en cuenta estos tres primeros ejes (principales factores de variabilidad) y mostraremos para su interpretación los dos primeros plano factoriales determinadas por estos tres ejes.

Descripción de los ejes respecto a las modalidades de la variable clases de respuestas

En la Tabla 10.5 encontramos una descripción de la composición de los ejes factoriales respecto de las modalidades de clase de respuestas y de NEM.

Tabla 10.5: Conformación de los ejes del AFC.

EJE	MODALIDADES DE CLASE DE RESPUESTAS		MODALIDADES DE NEM	
1	(+): C7 (-) : todo el resto		(+) MA oponiéndose al (-) resto de NEM	
2	(+): C5 y C6 (-): C2, C3 y C4		(+) BA, BI y MI oponiéndose a (-) 5to, 4to y 3ro	
3	(+): C1 y C2 (-): C3 y C4	(+) C5 (-) C4 y C6	(-) EFI y EFA oponiéndose a (+) 3ro, 4to y 5to	(-) BA oponiéndose a (+) MI y BI

El *principal factor* de variabilidad corresponde a: *C7. Los reales completos, la recta continua e infinito actual* y MA; oponiéndose al resto de clases de respuestas y modalidades de NEM.

El *segundo factor* discrimina dentro del resto de las clases (Clases del 1 al 6) separando: *C2. Los enteros y sus fracciones, ajenidad y finitistas, C3. Decimales (finitos), discretitud explícita y finitistas* y *C4. Enteros e (infinito-potencialmente densas) fracciones, los enteros como modelo de inclusión e infinito potencial*, asociadas a 5to, 4to y 3ro; de *C5: magnitudes, mediada por la utilidad* y *C6. Comprensión relativa de* *los reales, densidad potencialmente infinita, infinito potencial y único infinito*, asociadas a BA, BI, y MI.

El *tercer factor* separa por un lado a *C1. Ajenidad* y *C2. Los enteros y sus fracciones, ajenidad y finitistas*, asociadas a EFI y EFA de *C3. Decimales (finitos), discretitud explícita y finitistas* y *C4. Enteros e infinito-potencialmente densas fracciones, los enteros como modelo de inclusión e infinito potencial,* asociadas a 5to, 4to y 3ro. Por otro lado, separa a *C6. Comprensión relativa de los reales, densidad potencialmente infinita, infinito potencial y único infinito*, asociada a MI y BI de *C5. Magnitudes, mediada por la utilidad*, asociada a BA.

Planos factoriales. En el Gráfico 10.14 se puede observar el primer plano factorial del AFC, con las modalidades (tanto de respuesta como de NEM) que poseen una contribución mayor a la media en los Ejes 1 o 2 y grupos notables de asociaciones de estas modalidades. Mientras se puede realizar lo propio en el Gráfico 10.15 para un segundo plano factorial (Ejes 2 y 3). En el primer plano factorial se encuentran mal representadas la *C1. Ajenidad.* En el segundo plano factorial se encuentran mal representada la *C7. Los reales completos, la recta continua e infinito actual* y la modalidad de NEM, MA.

Gráfico 10.14. Primer plano factorial del AFC de la distribución de las clases de respuesta en los NEM.

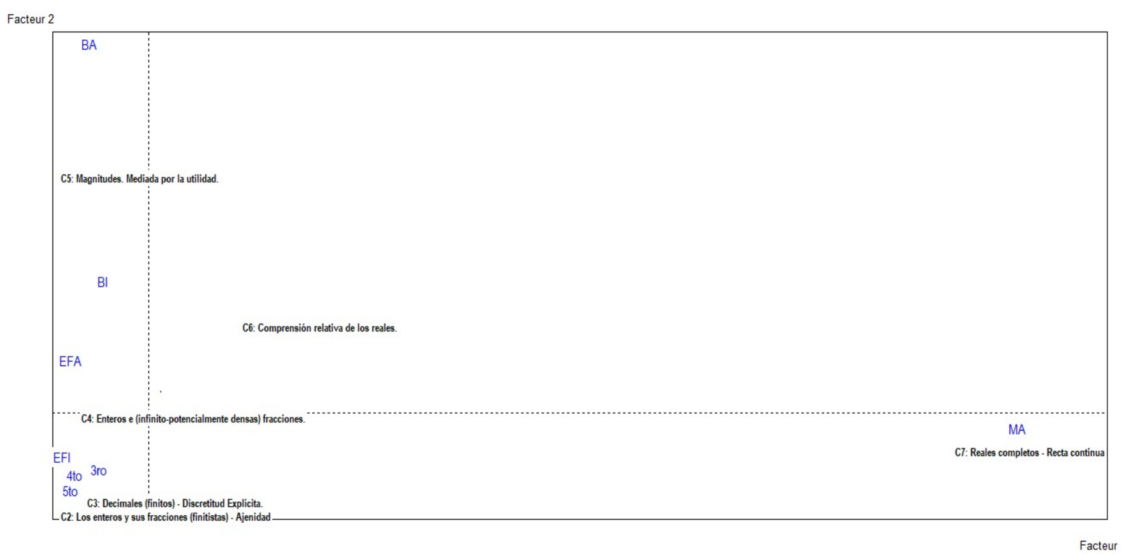
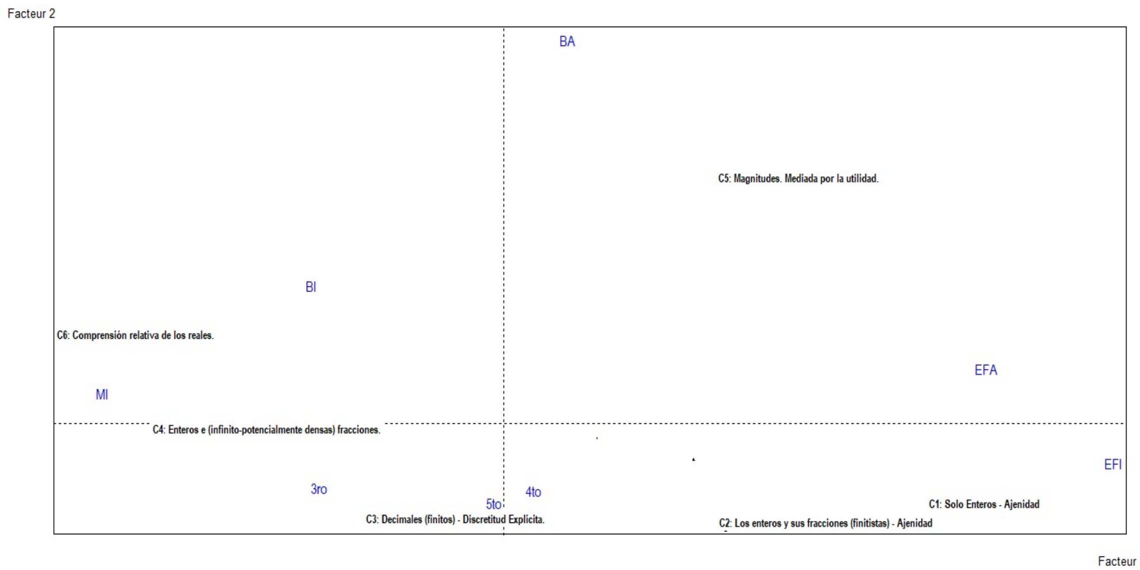


Gráfico 10.15. Segundo plano factorial del AFC de la distribución de las clases de respuesta en los NEM.



El primer plano factorial marca lo característico del perfil MA que se corresponde con una visión de *los reales completos, la recta continua e infinito actual,* separándolo del resto de perfiles. El segundo plano nos ayuda a ver asociaciones entre perfiles en que el estudio de la Matemática no ha sido central, principalmente diferenciado los perfiles de NEM universitarios de los de secundaria. Para luego discriminar entre los primeros separando los de careras científicas de los de Educación Física.

La Tabla 10.5 sintetiza estos cinco grupos de asociación de las clases de respuestas con los niveles de estudio relacionados, visualizados mediante el AFC.

Tabla 10.5. Grupos de asociaciones entre clases de respuesta y modalidades de NEM en el AFC.

Asociaciones de clases de respuestas integrales		NEM
Los reales	C7. *Los reales completos, la recta continua e infinito actual*	MA
Los racionales Los decimales	C5. *Magnitudes, Mediada por la utilidad (redondeo)*	BA
	C6. *Comprensión relativa de los reales, único infinito y la recta representa los decimales* C4. *Identificación a los reales con los decimales*	BI y MI
Los enteros como modelo	C4. *Identificación a los reales con los decimales* C3. *Traslado de los enteros a los décimos, discretitud explícita e infinito potencial.* C2. *Los enteros y sus fracciones, ajenidad respecto de la recta y finitistas (no explicado)*	3ro, 4to y 5to
Ajenidad	C2. *Los enteros y sus fracciones, ajenidad respecto de la recta y finitistas (no explicado)* C1. *Sólo los enteros, ajenidad e inseguridad,* evasión del infinito.	EFI y EFA

10.3.3. Perfiles de respuesta característicos por nivel de estudio en Matemática

Encontramos cinco asociaciones de perfiles de respuesta diferenciados: el de Educación Física; el de secundaria; el de ingresantes a las carreras científicas; el de avanzados/as de Biología y avanzados/as de Matemática. Estas asociaciones nos dan un panorama general de como responden según NEM, ya que, en cada nivel de estudio, salvo en los y las estudiantes avanzados/as de Matemática, se presentan múltiples modos de respuesta

Perfil de Educación Física (EFI y EFA). Estudiantes con estudios secundarios, sin estudios universitarios de Matemática y con poco interés en el tema, presentan un perfil de respuesta basado en los números enteros, a los sumo algunas fracciones y decimales finitos, en este grupo prevalece la ajenidad respecto de la problemática.

Perfil de secundaria (3ro, 4to y 5to). Una segunda asociación de perfiles de respuesta, principalmente de los y las estudiantes de secundaria, es decir que se encuentran cursando los estudios secundarios, en la que prevalece la visión de los enteros como modelo de números. Parecieran ha construido una visión de los números como un traslado de los enteros a los décimos, de una discretitud explícita. Algunos/as expresan una visión de infinito potencial e identificación de los reales con los decimales.

Perfil de ingresantes a carreras científicas (BI y MI). Asociado a ingresantes a las carreras científicas, prevalece la identificación de los reales con los decimales o una comprensión relativa de los reales, viendo la densidad como potencialmente infinita y una visión de infinito como infinito potencial o único infinito al comparar.

Perfil de avanzado/as de Biología (BA). Comparte aspectos con el anterior e incorpora una visión de los racionales con aproximación decimal finita mediada por la utilidad (magnitudes), en la que los reales aparecen identificados con los racionales según una intencional finitud y discretitud.

Perfil de avanzado/as de Matemática (MA). Una visión de los reales completos, la recta continua e infinito actual, muy cercana a una visión experta.

10.4. Síntesis de los modos de comprensión de los números reales en relación con el nivel de estudio en Matemática

Sintetizaremos aquí las relaciones entre los tipos de respuestas a todas las tareas del cuestionario entre sí y con los NEM.

Observamos que la falta de apropiación (ajenidad-inseguridad) de las tareas en general es baja, está por debajo del 20% de la población en seis de las diez tareas, resultado mayor al 20% en las Tareas: N2, D2, I1, I2 y R3. Correspondientes a: descripción de los irracionales; densidad en relación con el supremo de un intervalo;

comparación de cardinalidad de colecciones infinitas (ordenas o no) y la naturaleza de la recta numérica respectivamente. Notemos que estas no-respuestas o ajenidad están asociadas a los y las estudiantes sin estudios universitarios de matemática. Toda ellas están relacionadas de una u otra forma con la noción de infinito actual o cardinal, en este sentido Reina et al. (2014) reporta resultados similares en estudiantes de Profesorado de Matemática.

Describiremos las clases de respuestas encontradas según los factores de variabilidad, que como dijimos se corresponden con un gradiente en la profundidad en los estudios de Matemática en dos sentidos, desde la ajenidad hacia el estudio teórico, o desde esta misma ajenidad hacia el estudio de Matemática aplicada.

En el orden de profundidad de las comprensiones, observamos tres ejes: el conjunto numérico que se evidencia se está considerando en las respuestas, las nociones de discretitud, densidad o completitud que se pusieran en juego y si las respuestas pueden ser consideradas finitistas, infinitistas en sentido común o infinitistas en sentido matemático.

Desde las más cercanas a la escolaridad primaria y alejadas del concepto de número real legitimado por la comunidad académica, como es la de concebir *sólo como números a los enteros, presentar inseguridad respecto del orden, la densidad, la representación en la recta y evasión del infinito,* continuando por un grupo de estudiantes que percibe a los números *como los enteros y sus (finitas) fracciones y presentan ajenidad respecto de la recta numérica y una visión finitista (no explicada),* ambas presentes en los grupos con menos estudios de Matemática (EFI y EFA). Juntas representan un 24% de la población.

Encontramos, luego, como la comprensión más popular en esta población (25%) y manifestada principalmente por estudiantes de secundaria, la visión de *los números como decimales finitos, un traslado de los enteros a los décimos, discretitud explícita y visión finitista*. Una segunda forma de comprender los números reales en estadio intermedio, principalmente en estudiantes de quinto año de secundaria e ingresantes a las carreras científicas (19%), que sería una visión de los *números como los enteros e infinitas (potencialmente) densas fracciones y decimales, de los enteros como modelo de inclusión y del infinito en forma potencial.* Es decir, una fase intermedia en que estos/as estudiantes identifican a los números con los decimales (en forma finita o infinita). Estas dos clases representan el 44% de la población**,** asociadas a estudiantes de secundaria y la última también a ingresantes de las carreras científicas.

En el otro extremo encontramos tres clases de comprensiones más elaboradas: una mediada por la utilidad, en la que los y las estudiantes ven *a los números como* *magnitudes o decimales, en forma intencionalmente finitista y discreta mediante redondeo o aproximación,* fundamentalmente construida por estudiantes avanzados de Biología (17%). Por otra parte, una comprensión relativa de los reales *concibiendo los números reales como unión de racionales e irracionales, estos últimos descriptos por su definición notacional, la densidad como potencialmente infinita; una visión de infinito potencial o de único infinito al comparar y la recta como representando los decimales*, construida por estudiantes de Matemática (ingresantes y avanzados/as) (10%). Por último, unos pocos estudiantes avanzados/as de Matemática (5%), que han construido una visión muy cercana al concepto matemático y ven a *los números reales como completos, la recta continua y el infinito en forma actual.* Estas dos últimas clases de respuestas juntas representan el15% de la población.

Al observar las distribuciones de las distintas clases de respuestas al interior de los NEM, es notable la diversidad de ideas con las que pueden operar los y las estudiantes de un mismo grupo educativo, en este caso eran estudiantes de una misma clase áulica y con el/la mismo/a docente de Matemática.

El hecho de que estudiantes con casi la misma escolaridad (5to, EFI, BI y MI) tengan perfiles de distribución de sus clases de respuesta tan distintos entre sí y al perfil medio de la población, nos habla de que las tareas se han constituido como oportunidad de manifestar diversos intereses y miradas cobre estos aspectos, íntimamente relacionados con los estudios de matemática. Por otra parte, el perfil de estudiantes avanzados/as de Matemática (MA) es el de menos diversidad de concepciones y más coherente con una visión académica de los números reales, de lo que inferimos que es importante la incidencia del estudio explícito de estas cuestiones para su comprensión.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Capítulo 11

Amplitud y profundidad en los modos de comprensión de los números reales en diálogo con la bibliografía consultada

En el capítulo anterior dimos cuenta de los resultados de la segunda fase del análisis de la información aportada por las respuestas al cuestionario. Pudimos describir los modos integrales de comprensión sobre el número real, interrelacionando los distintos aspectos indagados en cada tarea y en cada grupo temático de tareas.

Estos resultados dan cuenta de las asociaciones existentes entre los modos de respuesta a las diez tareas del cuestionario en un mismo/a estudiante y entre los de distintos/as estudiantes, como así también de las relaciones de estos modos de respuesta a todo el cuestionario con el nivel de estudio en Matemática.

En el presente capítulo haremos una interpretación y discusión de estos resultados poniéndolos en diálogo con la bibliografía consultada.

Discutiremos las siete clases de respuestas determinadas en el capítulo anterior, que podemos ver en forma sintética en el apartado 10.2.2. del Capítulo 10. Buscaremos establecer un gradiente de amplitud y de profundidad de las comprensiones inferidas en cada clase de respuestas. Este orden lo estableceremos teniendo en cuenta: cuán amplio es el conjunto numérico que se evidencia en las respuestas; las nociones de discretitud, densidad o completitud que se pusieron en juego; y si las respuestas pueden ser consideradas finitistas, infinitistas en sentido común, o infinitistas en sentido matemático. También se tendrá en cuenta cómo estas visiones de discretitud o densidad y las concepciones sobre infinito se manifiestan en la comprensión de la recta numérica.

Consideraremos en primera instancia los conjuntos numéricos que abarcan los y las estudiantes en los tipos de respuestas en cada clase, de este modo obtuvimos un gradiente que comienza desde lo que podemos denominar una comprensión centrada en los números enteros, para luego encontrar una comprensión centrada en los números racionales y, por último, una comprensión centrada los números reales como unión de racionales e irracionales.

11.1. Comprensión centrada en los enteros como modelo de números

Las tres formas más restringidas de comprensión de los números que hemos identificado evidencian una visión centrada en los números enteros. Se corresponden con las tres primeras clases de respuestas de la clasificación obtenida en el capítulo precedente. Esta concepción de los enteros como modelo de los números, que la manifiesta el 49% de la población, está asociada a menores estudios en Matemática y se presenta como una forma de comprensión característica de una Matemática escolar construida durante los estudios secundarios.

En su extremo más restringido encontramos una clase no muy numerosa, y que agrupa respuestas de estudiantes de Educación Física y de 3er año de secundaria, que se relacionan sólo con algunos números enteros ya que responden solo las tareas en las que se consideraban los enteros: -2,0,1 y 2, y no exploran de la tarea en ningún otro caso. Interpretamos que han construido una comprensión muy restringida de los números o no jugaron el juego del cuestionario por falta de interés. Sólo se sintieron atraídos por las tareas que le resultaron muy cercanas a lo que podría ser la experiencia de la escuela primaria.

A continuación, encontramos una segunda clase en la que se manifiesta una visión de los números centrada en los enteros, pero incorporando fracciones (muchas veces como pedacitos de enteros) y algunos decimales finitos. *C*onstituye una clase de respuestas un poco más numerosa y se presenta como característica de estudiantes de secundaria y como así también de Educación Física. Además de tener en cuenta algunos números racionales esta visión se caracteriza por incorporar la recta como representación de los enteros, sus fracciones y algunos decimales finitos, manteniéndose la ajenidad frente al orden, la densidad, el infinito (tanto en su aspecto cardinal como en la notación infinita) y a la naturaleza de la recta, en tanto no respuesta o expresión no sé.

Encontramos luego, la concepción numérica más común en estudiantes de secundaria, principalmente en quienes la están finalizando. En ella se incorporan a los enteros, fracciones y decimales finitos (los racionales en notación decimal finita). Se distingue de la anterior porque incorpora una descripción de los números como explícitamente discretos y frente a las tareas sobre infinito, se aproximan a la tarea tomando decisiones finitistas sin justificar. También realizan las tareas de la recta describiéndola como de puntos discreta y que representa a los enteros, sus fracciones y decimales finitos. Por lo que decimos que su visión podría describirse como un traslado del orden discreto de los enteros a los décimos o a los centésimos.

Los enteros (discretos) como modelo de los números

Los naturales y los enteros son los números que se aprenden en la escolaridad primaria, por lo cual es de destacar cómo los y las estudiantes que no han estudiado matemáticas universitarias, pero sí de secundaria, han construido una visión de los números restringida a los números enteros, o a lo sumo fracciones y decimales finitos.

Estos/estas estudiantes, que piensan a los números enteros como modelo de los números, presentan una visión de discretitud frente al orden. Estos resultados coinciden con los de Arcavi et al. (1987); Fischbein et al. (1994; 1995) y Tirosh et al. (1998), quienes encontraron que estudiantes de secundaria o con algunos estudios universitarios de matemática ven a los números como discretos, considerando a los números enteros como modelo de los números. Esta concepción de los números "como" los naturales y por lo tanto discretos, es coherente con la visión histórica manifestada explícitamente por el matemático polaco Leopold Kronecker (1823-1891), quién estaba persuadido de que la aritmética y el análisis matemático deben basarse en los números enteros. Su visión finitista le convirtió en un precursor del intuicionismo en matemáticas. Es muy conocida entre los y las matemáticos/as su frase "Dios hizo los naturales; el resto es obra del hombre" (Bell, 1986).

Similarmente a Khoury y Zazkis (1994) y a O'Connor (2001), hemos identificado estudiantes que piensan que diferentes representaciones de un número racional representan diferentes números y, más aún, que los decimales y las fracciones pueden ser subconjuntos disjuntos del conjunto de números racionales. Esto último también se encuentra reportado por Vamvakoussi y Vosniadou (2010). En nuestra población, frecuentemente los (números) *decimales* son citados tomándolos como un tipo de números distintos de los racionales, es decir identificando al número con su notación.

Puede observarse que los y las estudiantes de nuestra población, particularmente sin estudios universitarios en Matemática, suelen trasladar a los racionales el tipo de orden de los naturales (un racional puede tener un anterior) y no reconocer a los irracionales o los identifican con alguna de sus aproximaciones racionales, lo que concuerda con lo encontrado por Behr et al. (1983), Malara (2001), Merenluoto y Lehtinen (2002) y Palacios-Amaya et al. (2018) en estudiantes de secundaria.

Los y las estudiantes de las dos primeras clases mantienen una actitud de ajenidad frente a todas las tareas que de algún modo implican interactuar con la idea de infinito. En estos resultados de ajenidad frente al infinito, al igual que en estudios anteriores, aunque en otros contextos (Juan et al., 2012; Montoro, 2005; Montoro y Scheuer, 2006), encontramos que casi un tercio de los y las estudiantes, en general los y las más jóvenes o con menos estudio de matemática, suelen mostrar inseguridad o ajenidad frente a la posibilidad de la existencia de colecciones infinitas, manifestando incluso explícitamente esta imposibilidad.

Por otra parte, la ajenidad frente a la discretitud-densidad en la tarea del supremo de un intervalo, las tareas de cardinalidad o las relacionadas con la naturaleza continua de la recta, que en general no son resueltas por los y las estudiantes de estas tres clases, podría estar asociada a la íntima relación de estos conceptos con la idea de infinito, lo cual es acorde con los resultados de Belmonte y Sierra (2011), Juan et al. (2012), Montoro (2005) y Waldegg (1993b), quienes han observado que los y las estudiantes con menor estudio de matemática suelen mostrar indiferencia frente a tareas que de alguna manera impliquen el infinito en forma actual.

El tercer grupo de estudiantes, si bien mantienen ajenidad frente a las tareas más complejas, dan un paso hacia a una visión finitista sin justificar. Dan respuestas acordes a lo que ocurriría en colecciones finitas o con un número muy grande (aunque finito) de decimales, sin explicitar su pensamiento. Esta visión del infinito es congruente con la concepción implícita del infinito que lo identifica con "un número muy grande" descripta por Fischbein et al. (1979), Juan et al. (2012), Monaghan (2001), Montoro y Scheuer (2006) como muy común entre jóvenes estudiantes que comienzan a resolver tareas en este tipo u otros de contextos.

Particularmente en este tercer grupo de estudiantes encontramos algunos/as que, cuando se enfrentan a colecciones dadas como infinitas, brindan respuestas acordes a una visión asociada a *en infinito debe estar todo*. Por ejemplo, es frecuente que consideren que debe existir un número anterior al supremo de un intervalo, porque al ser infinitos los números en el intervalo deben estar *todos* los posibles, o que la recta se completa con las fracciones en el sentido de que si las fracciones (o las raíces de las fracciones) son infinitas, deben ocupar *todos* los puntos-números.

Esta visión de infinito identificado con todo es una concepción que hemos descripto en otros trabajos con poblaciones similares, pero en contexto de conteo y que puede convivir con una visión finitista (Juan y Montoro, 2015; Montoro, 2005; Montoro et al., 2014). Esto es que estudiantes que tratan las colecciones como finitas, al encontrarse con conjuntos planteados como infinitos consideran que en dichos conjuntos deberían estar *todos* los elementos posibles. No hemos encontrado registro de esta concepción en otra bibliografía sobre concepciones sobre el número real o el infinito.

Como dijimos, los enteros son los números que se aprenden en la escolaridad primaria y generalmente también en primaria se introduce la recta numérica en la cual en primera instancia se marcan los enteros, para luego incorporar fracciones y decimales finitos. Encontramos en estas clases de respuestas una visión donde la recta sirve de soporte a los números enteros y a lo sumo es posible, también, marcar algunas fracciones y decimales finitos. Si bien en el tercer grupo se incorpora la recta como representando no solo a los enteros y sus fracciones, sino también a los decimales finitos, los y las estudiantes muestran una visión discreta de la recta y no grafican cuando se enfrentan al conflicto de representar números con “infinitos” decimales (Scaglia, 2000).

En estas tres clases los y las estudiantes mantienen ajenidad frente a la naturaleza de la recta. Observamos que principalmente en esta cuestión los y las aprendices no sólo se enfrentan a la contraintuitiva representación de los reales en la recta (Thomaidis y Tzanakis, 2007) sino a uno de los conflictos más fuertes encontrados en esta representación, como es el infinito actual (Scaglia, 2000; Waldegg, 1993) manifestado en la completitud de los reales y la continuidad de la recta.

En el tercer grupo solemos encon*trar la visión de recta dibujada o material* asociada al “realismo ingenuo” que describe Romero (1996), según el cual la recta no representa a los números reales, sino que es un objeto físico externo. También reconocemos en este grupo una visión de recta de puntos discreta, similar a un ‘collar de perlas’ (Arrigo y D’Amore, 2004) y una semejanza con las respuestas brindadas por los y las estudiantes ‘atomistas’ de Romero (1996). En todo caso se manifiesta una visión pobre de la recta como representación de los números reales.

La tercera clase que, a diferencia de las anteriores, incorpora a la recta describiéndola como de puntos discreta y que representa a los enteros, sus fracciones y decimales finitos, nos lleva a pensar en las narrativas respecto a la recta numérica que describe Bass (2019): en la narrativa de la *construcción*, se incorporan cada vez más puntos-números para construir la recta, en cambio en la narrativa de la *ocupación* todos los puntos-números están presentes en la recta desde el principio. Nuestros resultados podrían fortalecer la postura de este autor cuando afirma que la narrativa de la *ocupación* resulta más intuitiva a los jóvenes, ya que la tarea se trata de encontrar números que (de alguna manera) ya estaban en la recta, favorecida por las marcas en los décimos. También Peeters et al. (2017) encontraron que las marcas sobre la recta mejorar la estimación de los números sobre la recta numérica notablemente, aun en estudiantes muy jóvenes.

De lo discreto a lo denso

Es posible que estos/as estudiantes que piensan a los números enteros como modelo de los números y presentan esta visión de discretitud frente al orden de los reales, no comprendan el orden denso de los racionales. Dado que la densidad es precisamente la propiedad que distingue a los números racionales de los números enteros, es dado pensar que estos estudiantes podrían tener problemas para diferenciar los números como enteros o racionales, más aún para reconocer a los irracionales.

Pareciera que en la comprensión de estos/as estudiantes hay un corrimiento de los enteros a los décimos o centésimos considerando a estos últimos como discretos. Vemos aquí cómo una transferencia incorrecta de las propiedades de los números naturales a los números racionales puede llevar a una comprensión deficiente de estos números. En este aspecto, nuestros resultados están en concordancia con los trabajos de Behr et al. (1983); Malara (2001); Merenluoto y Lehtinen (2002); Vamvakoussi y Vosniadou (2004; 2007); Yujing y Yong-Di (2005), que encontraron que una de las principales dificultades para comprender los números racionales (para luego pasar a los reales) se debe a que los y las estudiantes operan con los números racionales utilizando las propiedades de los números enteros, lo que muchas veces les conduce a errores. Mas aun acordaría con investigaciones que dan cuenta de que los y las estudiantes aun en primaria y secundaria experimentan dificultades y contradicciones al aprender y utilizar los números racionales, provenientes de su identificación con los enteros tal como informan los trabajos de Merenluoto (2003); Palacios-Amaya et al. (2018); Stafylidou y Vosniadou (2004); Steinle y Pierce (2006); Tirosh et al. (1998).

11.2. Comprensión centrada en los números racionales como decimales

Las siguientes dos formas de comprensión de los números reales identificadas se muestran como asociadas a una visión de los números centrada en los racionales, casi siempre por su notación decimal, aparece como característica de la escuela secundaria, sin embargo, es común también entre los ingresantes a las carreras científica y avanzados/as de Biología, por lo que pareciera característica del paso de la secundaria a la universidad. Representa el 36% de la población.

Se corresponden con las cuarta y quinta clases de respuestas de la clasificación obtenida en el capítulo precedente. En la primera de estas clases, encontramos una visión de los números que incorpora a los *racionales (decimales) potencialmente densos*, mientras que en la segunda también se incorporan a los *racionales (decimales),* pero ahora *mediante la aproximación decimal finita.*

Pareciera que este paso hacia concepciones universitarias está marcado por reconocer, además de los racionales a los números irracionales. Sin embargo, esto se hace mediante una descripción incompleta de los irracionales, lo que pone de manifiesto que los números reales son identificados con los racionales (casi siempre en notación decimal) y los irracionales son unos pocos números raros. Dificultades similares fueron encontradas por Castela (1996) como sucediendo en la escuela secundaria francesa y por Tirosh et al. (1998) con futuros profesores de primaria, especialmente aquellos/as que no tenían una especialización en matemáticas.

Los y las estudiantes de nuestra población con estas clases de comprensión y que dan una definición incompleta de los irracionales, luego los identifican con los decimales (finitos), es decir, a pesar de que han estudiado las definiciones y características de los números irracionales, luego no pueden reconocerlos o ejemplificarlos, muchas veces confundiéndolos con su aproximación decimal. Similarmente Sirotic y Zazkis (2007b) observaron entre sus participantes (estudiantes de secundaria y futuros maestros) una importante dependencia de las aproximaciones decimales de los irracionales para describirlos, consideraron, además, que hay incoherencias entre las intuiciones de los participantes y su conocimiento de una definición.

Estas dos maneras de ver los números como racionales también están caracterizadas por la incorporación de visiones infinitistas en sentido común, particularmente como infinito potencial en cuanto a la densidad y notaciones decimales, mientras que, en la comparación de colecciones infinitas, encontramos concepciones alternativas como: finitistas explícitas, comparar por inclusión, infinito como indefinido o único infinito.

Diferenciamos estas dos maneras de ver los números, de modo que la primera se presenta centrada en los números decimales infinito-potencialmente densos, mientras que la segunda está signada por la utilidad, en ella se ven a los números como los racionales, si bien potencialmente densos, tomados como “intencionalmente” finitos. En este sentido la potencialidad infinita de la densidad puede interpretarse como un proceso que *debe* continuar siempre en el primer caso y que *puede* (a no ser que sea interrumpido) seguir siempre si es necesario en el segundo.

Los decimales infinito-potencialmente densos

Encontramos, entonces que la primera de estas formas de ver los números *como los racionales (decimales) infinito-potencialmente denso*s, que se presenta como una visión característica de la escuela secundaria (19% de la población), asociada a los conjuntos escolares y a un conocimiento de los irracionales mediante una definición literal y parcial, que luego no se ve reflejado en las tareas resueltas. Pareciera tratarse de la cercanía con el estudio de los conjuntos numéricos.

La novedad respecto a los anteriores modos de comprensión de los números es que en esta clase de respuestas prima la visión de densidad (potencialmente) infinita de los números. En esta comprensión, se da un paso de la visión finitista a una visión de infinito potencial. Este grupo está formado por estudiantes de secundaria y por ingresantes universitarios de Biología y Matemática, lo cual coincide con que frecuentemente los y las jóvenes conciben al infinito en forma (intuitiva) como potencial

(Arrigo y D’Amore, 2004; Fischbein et al., 1979; Monaghan, 2001; Montoro y Scheuer, 2004).

La visión de densidad infinita potencial, por ejemplo, es manifestada por estos/as estudiantes al considerar que no se puede encontrar un número “anterior” a uno dado, lo cual es acertado, sin embargo, su justificación de que esto sería así, *porque hay infinitos números y nunca se llegaría o siempre se podría agregar un decimal* no matemáticamente correcta. También los llevará a una respuesta, ahora no correcta del punto de vista estándar y sin embargo la más común e intuitiva entre jóvenes sin instrucción matemática (Cornu, 1991, Katz y Katz, 2010; Tall, 1991), al elegir *0,999… es menor a 1* aludiendo a las infinitas cifras decimales como un proceso (seguir agregando “9”). Al igual que parte de la población estudiada por Peled y Hershkovitz (1999) se encuentran con dificultades al comprender el orden denso de los números por mantener una concepción potencial del infinito.

Se hace evidente cómo el infinito en sentido potencial puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del orden, la densidad y la notación en los números reales y además que cuando el contexto de la tarea involucra el infinito, suelen suscitarse inconsistencias, incoherencias (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014) o presentarse nociones paradójicas, en función del contexto o de la tarea (Fischbein et al., 1979; Garbín, 1998; Garbín y Azcárate, 2000; Mántica y Carbó, 2013). Algo similar ocurre al comparar colecciones infinitas, estas inconsistencias provienen de aplicar a conjuntos infinitos características de las colecciones finitas (Arrigo y D’Amore, 2004, Waldegg, 1993b).

Aquí como en otras ocasiones, dependiendo de la tarea, algunos/as estudiantes muestran una concepción de infinito como indefinido (Belmonte y Sierra, 2011), que indica imposibilidad de operar con procesos o imaginar situaciones con objetos infinitos. Esta concepción de infinito como indefinición podría interpretarse como un paso de lo finito a lo infinito. Es decir, ya el problema no es ajeno y tampoco es tratado como finitista, sino que infinito es interpretado como indefinido (sin fin, sin reglas). La presencia de este modelo va disminuyendo en los grupos de estudiantes con mayor nivel de estudio en Matemática.

Estos/estas estudiantes, si bien la mayoría, piensan (notación infinita o densidad) en un infinito potencial, a la hora de comparar conjuntos infinitos de números suelen hacerlo por inclusión, en la cual se hace uso de lo aprendido en los conjuntos escolares: los naturales incluidos en los enteros a su vez incluidos en los racionales y éstos en los reales. Vemos que estos estudiantes apelan a una concepción de los enteros como modelo de inclusión que es consistente con la concepción que suele denominarse *de inclusión* descripta en Falk (1994), Fischbein et al. (1979), Fischbein (1987), Tirosh et al. (1985) y Waldegg (1993a), mediante la cual se compara los conjuntos por inclusión prevaleciendo el principio (finitista) de que *el todo es mayor que las partes*.

La visión de densidad potencial que han construido estos/as estudiantes la mantienen respecto de la recta, mediante la cual, consideran, se representan los enteros e infinito potencialmente densas fracciones o decimales. Si bien se incorpora la densidad (como potencialmente infinita) aún persiste la ajenidad frente a la completitud- continuidad, que aparece como identificada con la densidad de los racionales.

Los decimales intencionalmente discretos y finitos

La segunda forma de comprender a los números como racionales es aquella que denominamos *racionales con aproximación decimal finita mediada por la utilidad.* Esta visión de los números es característica de los y las estudiantes avanzados de Biología, aunque también hay estudiantes de 4to, 5to y BI. Siendo el 17% de la población. Identifican explícitamente los reales con alguna aproximación racional finita. Si bien conocen (en forma incompleta) los números irracionales y los asocian a una representación decimal infinita, en la práctica para resolver las tareas trabajan con racionales finitos, considerando a los irracionales por su aproximación racional finita.

Estos/as estudiantes se caracterizan por haber construido una visión explícitamente discreta de los números, en muchas ocasiones eligen la discretitud a partir de redondear o tomar finitos decimales. Los reales son vistos como magnitudes, con decimales finitos muchas veces por redondeo. Consideran que a los números se los puede pensar como discretos, finitamente densos o potencialmente densos, según convenga al problema a resolver. Recurren casi siempre a la aproximación decimal finita; sin embargo, pueden concebir los números como densos y la recta densa (en un sentido infinito potencial) y cortando el proceso cuando lo consideren necesario, al estilo *tantos decimales como hagan falta*.

De manera similar, cuando tienen que comparar utilizan razonamientos válidos en conjuntos finitos o acotados. Son finitistas en un sentido explícito, considerando lo que ocurriría en una colección finita o redondean o aproximan al racional más cercano. La concepción *finitista explícita* en la que los y las estudiantes justifican sus elecciones por lo que ocurre en conjuntos finitos, es común entre los y las estudiantes de secundaria y comienzos de la universidad, descripta por Fischbein et al. (1979); Juan et al. (2012), Monaghan (2001), Montoro y Scheuer (2006), Tall (1980), entre otros. En ocasiones al considerar colecciones dadas como infinitas consideran que el infinito es indefinido (con infinito no se puede operar) (Belmonte y Sierra, 2011), o también como único infinito o modelo de aplanamiento del infinito (Arrigo y D´Amore, 2004; Fischbein et al., 1979; Fischbein, 2001).

Esta concepción es fundamentalmente construida por estudiantes avanzados de Biología, que a pesar de ver el infinito en forma potencial suelen ser “intencionalmente finitistas” para la notación decimal, es decir considerando tantos decimales como haga falta. De hecho, nuestros/as estudiantes avanzados/as de Biología han estudiado una matemática aplicada fundamentalmente a los modelos biológicos finitos. Aun cuando consideran que el orden puede ser potencialmente denso, manifiestan *discretitud explícita o por redondeo*, que considera que es posible encontrar un número “anterior” a uno dado y éste es un decimal finito o que se puede estimar, redondear, o que depende de la escala. Estarían denotando una visión utilitaria de los números reales asociada a las magnitudes en un sentido “intencionalmente finitista”.

En este grupo también encontramos lo que hemos dado en llamar una visión que denominamos *densidad* finitista. Parece un tipo de respuesta paradójico que muestra lo contradictorio de la idea del infinito ya que, se piensa que entre dos números puede haber muchos otros, en este caso tantos como se necesiten, pero no necesariamente infinitos. Este tipo de concepción del infinito como identificado con “un número (o cantidad) muy grande” es habitual en los y las jóvenes estudiantes, como lo han descripto Fischbein et al. (1979), Juan et al. (2012), Monaghan (2001), Montoro y Scheuer (2006). De alguna manera se asemeja a la concepción que Vamvakoussi y Vosniadou (2004) denominaron *discretitud-densidad* en la cual se piensa que, en algunos casos, entre dos números racionales hay infinitos números, y en otros casos que hay una cantidad finita de números.

Sin embargo, en ocasiones, la visión de infinito potencial manifestada respecto de la densidad puede llevar a los y las estudiantes a una visión que hemos denominado *discretitud mediada por una notación infinita*. Es decir que un número anterior a un entero sea uno con infinitos decimales “9”. Como expresa Artigue (1998), aun cuando el orden en los reales sea reconocido como orden denso, en función del contexto, los y las estudiantes pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números justo antes de un número determinado; por ejemplo, 0,9999..., (con infinitos nueves), como el número anterior a 1. En este caso podríamos pensar una posible visión del infinito como *totalidad* en la cual se puede ver un proceso infinito como un todo (los infinitos nueves) sin que esto implique que se pueda realizar el paso a que sea 1 en forma actual (Dubinsky et al. 2013 y Millán et al. 2022).

Estos/as estudiantes consideran a la recta como infinito-potencialmente densa de fracciones o decimales finitos como el sostén de las magnitudes. La concepción de recta de magnitudes indicaría que la recta numérica es percibida como una idealización del instrumento de medida, similar a una regla graduada decimal. Esta visión de la recta se mueve entre la *recta dibujada y modelo discreto* de Robinet (1986) y *potencialmente atomista* de Romero (1996) aunque sin ajustarse totalmente a esta clasificación. Es que comprenden a la recta como potencialmente densa, sin embargo, al verla como un instrumento de medida, intencionalmente discretizada, la representan como imagen de una visión instrumental de la matemática utilizada en las ciencias biológicas. Este hallazgo supone es una novedad de nuestro estudio respecto de la bibliografía revisada

Los desconocidos irracionales

Mediante todos los modos de comprender a los números ya descriptos, hemos detectado que una amplia mayoría de nuestra población (85%) no reconoce en forma acabada a los números irracionales y por lo tanto a los reales.

La diferenciación de número racional e irracional es esencial para la construcción del concepto de número real. Sin embargo, encontramos que una mayoría de los y las participantes, terminaron sus estudios secundarios sin haber construido un conocimiento cabal del número irracional y con una creencia generalizada de que la irracionalidad se basa en las representaciones decimales. Podríamos decir que esta mayoría han *naturalizado el concepto de número real identificándolo con el de racional*, casi siempre en notación decimal y que, para ellos/as los irracionales (cuando los conocen) son algunos (pocos) números especiales, que muchas veces se identifican con su aproximación racional finita.

Estos resultados son consistentes con los mostrados en trabajos como los de Arcavi et al. (1987) y Fischbein et al. (1994; 1995) quienes encontraron un alto porcentaje de estudiantes que, a pesar de haberlos estudiado en la escuela secundaria o comienzo de la universidad, parecían no conocer los números irracionales. En su trabajo Waldegg (1996) encontró que para los y las estudiantes suele no haber ninguna diferencia entre la “recta real” y la “recta racional”: se asocian todos los puntos de la recta a números racionales, y los números irracionales (como pi o e) se piensan como unos pocos números especiales.

11.3. Comprensión centrada en los números reales como unión de racionales e irracionales

Esta forma de comprender los números es característica de estudiantes con mayor estudio de matemática. Conocen los irracionales con condiciones necesarias y suficientes; comprenden el orden y la densidad infinita (en forma diferenciada como potencial o actualmente infinita); la recta aparece como continua. Se distribuyen en dos clases infinitistas, la primera en sentido común y la segunda en sentido matemático. En conjunto representan el 15% de la población.

En estas dos clases de respuestas, que se corresponden con la sexta y séptima obtenidas en el capítulo anterior, se da como novedad respecto de las anteriores, principalmente la incorporación de los números irracionales, la comprensión del orden y densidad de los reales y una visión de la recta como continua en la que se pueden representar todos los números reales. Encontramos por primera vez una comprensión cabal del orden de los reales, vemos como la noción de orden aparece como menos intuitiva que la de densidad, al menos cuando esta última se concibe como potencialmente infinita.

No debiera extrañarnos que la densidad se muestre más intuitiva que el orden, ya que éste por ser dado en forma axiomática es tratado, usualmente en la enseñanza escolar, en forma transparente cuando se extiende el campo de los enteros a los racionales. Esta actitud es mantenida frente al supremo de un intervalo. Además, encontramos que los y las estudiantes que comprenden el orden, en su mayoría cuentan con estudios de matemática universitaria. Esto refuerza la idea de que las concepciones numéricas evolucionan hacia una mayor profundidad cuando media un estudio profundo de los conjuntos numéricos y sus propiedades, aun respecto de aquellas esenciales como son el orden.

No hemos encontrado investigaciones que estudien las concepciones sobre el orden de los reales en general. La mayoría de las investigaciones sobre el orden de los números están relacionadas con los números negativos, es decir el orden de los enteros, en niños y niñas de primaria (ver por ejemplo Schindler y Hußmann, 2013). Además, nuestros resultados revelan que la representación del continuo de los números reales está lejos de ser una noción que se adquiere por el solo hecho de conocer una convención.

El orden denso de los números reales es un obstáculo (Brousseau, 1983) con el que deben lidiar los y las estudiantes al expandir el campo numérico primero, desde el orden discreto de los enteros, hacia el orden (infinitamente) denso de los racionales, y luego incorporando la propiedad del supremo al orden de los reales, que, como también planteamos, suele presentarse como una propiedad contraintuitiva debido a su relación esencial con el infinito matemático. Podemos decir que el orden es un obstáculo epistemológico, que al ser axiomático es esencial, y que lleva al concepto de densidad. *"El concepto de orden y el concepto "entre" derivan el uno del otro y están en tal reciprocidad que se puede decir que es la misma noción"* (Bachelard,1938/1987, p.33).

La comprensión del orden de los reales se ve acompañada con una visión de la recta como representación de los números reales. En la primera de estas clases los y las estudiantes ven a la recta como potencialmente densa y esa densidad se percibe como continuidad, pero en forma intuitiva, mientras que en la segunda clase, la continuidad de la recta aparece identificada explícitamente con la completitud de los reales. Debemos reconocer que la representación de los reales en la recta aparece en forma tardía en la historia de la matemática y en forma bastante contraintuitiva, ya que es establecida como un formalismo arbitrario (Scaglia 2001; Thomaidis y Tzanakis, 2007). La bibliografía trabajada trata el orden de los reales en la representación en la recta numérica, informando que la representación de los reales en la recta ayuda a construir el orden de los reales (Cifuentes et al., 2019; Coriat y Scaglia, 2000).

Racionales e irracionales, ordenados e infinito-potencialmente densos

La primera de estas formas de comprender a los números en la se incorporan los irracionales a las visiones anteriores, es propia de estudiantes universitarios de Matemática. Además de incorporar a los números irracionales, han construido una comprensión acabada del orden de los reales y a la densidad la evidencian como infinita en forma potencial. Constituyen el 10% de la población.

Conocen los irracionales y los asocian a su definición notacional, es decir a su representación decimal (decimales no-periódicos), lo que dificulta el acceso a una comprensión esencial del número irracional. Algo similar reportaron Zazkis y Sirotic (2004) y Zazkis (2005) en cuanto a que los y las estudiantes suelen centrar sus decisiones sobre la irracionalidad de un número en cómo pueden ser (o no pueden ser) representados.

Se mantiene la visión de la densidad como *potencialmente infinita en este* grupo que está formado casi exclusivamente por estudiantes universitarios, lo cual coincide con que frecuentemente los jóvenes universitarios conciben al infinito en forma potencial (Arrigo y D'Amore, 2004; Fischbein et al., 1979; Monaghan, 2001; Montoro y Scheuer, 2004). Esta visión potencial de la densidad, como vimos, puede llevarlos/as a respuestas contradictorias (Peled y Hershkovitz, 1999).

Al comparar cardinalidades de colecciones infinitas suelen mostrar una concepción *finitista explícita* en la justifican sus elecciones por lo que ocurre en conjuntos finitos, o intervalos finitos o acotados de números. Este enfoque es común entre los y las estudiantes jóvenes y es descripta por Fischbein et al. (1979), Juan et al. (2012), Monaghan (2001), Montoro y Scheuer (2006), Tall (1980), entre otros. Sin embargo, algunos/as de estos/as estudiantes dieron repuestas infinitistas considerando que existe una *única cantidad infinita*. Es decir, conciben el cardinal de los conjuntos infinitos en el mismo sentido que el modelo de *aplanamiento* planteado por Arrigo y D´Amore (2004), Fischbein et al. (1979) y Fischbein (1987).

Mostramos que la concepción predominante en estos/as estudiantes suele ser la de concebir la recta como *densa de números*, pero sin conceptualizar una *densidad actualmente infinita* (paso que se presenta como necesario para comprender la continuidad). Consideramos que esta forma de comprender es una visión aproximada de los reales, donde la densidad potencial de los números se identifica con la continuidad de la recta, presentándose como un obstáculo para pensar en la completitud de los reales.

Los reales completos

Por último, un porcentaje muy pequeño (5%) de estos/as estudiantes expresan una visión de los *reales completos* (como unión de racionales e irracionales). Son principalmente estudiantes avanzados de Matemática. Conocen los irracionales dando una definición experta de los mismos y consideran a los números como elementos de conjuntos numéricos con estructura. Comprenden el orden denso como *infinita actualmente denso* y la completitud de los reales, conciben el infinito en forma actual y comparan por cardinalidad, considerando a la recta continua como representación de los reales completos. Esta visión es muy cercana a la comprensión matemática experta.

Respecto a los números irracionales, mostramos que las dificultades en su comprensión no son sólo de naturaleza intuitiva, sino que implican una cierta profundidad en el estudio, que solo obtienen algunos/as estudiantes avanzados de matemática. Podemos afirmar que la profundidad del estudio matemático juega un papel importante para la mejor comprensión de los números reales (Fischbein et al., 1994, 1995; Voskoglou y Kosyvas, 2012), y hemos observado en nuestros resultados que esto es así aun en las nociones más básicas, como son la diferenciación de racionales e irracionales.

Respecto a la visión de infinito actual vemos cómo, solo unos pocos estudiantes, la mayoría avanzados/as de Matemática, dieron repuestas infinitistas en un sentido matemático. Como hemos dicho con anterioridad, cuando una situación requiere que los y las estudiantes piensen en las colecciones formadas por una infinidad de elementos en forma actual, en general está asociada a al estudio específico de estos temas (Montoro 2005; Montoro et al., 2014).

Son solo estos/as pocos/as estudiantes, la mayoría avanzados/as de Matemática, quienes consideran comparar colecciones infinitas mediante cardinalidad.

Algo similar ocurrió en los trabajos de Belmonte, 2009, Juan et al., 2012. Montoro y Scheuer, 2006 y Moreno–Armella y Waldegg, 1991.

El bajo porcentaje de estudiantes infinitistas al comparar conjuntos infinitos de números de este estudio contrasta con resultados anteriores en los cuales casi el 50% de los y las estudiantes con nivel de estudio en Matemática similares fueron considerados como infinitistas (Juan et al., 2012; Montoro y Scheuer, 2006). En el caso del estudio de Belmonte (2009) este grupo fue de casi un 60%. Esta diferencia puede estar motivada por el tipo de tarea empleada en cada estudio. En nuestro trabajo, la tarea de comparar conjuntos infinitos de números está planteada en un contexto de conjuntos numéricos, es decir infinito matemático (actual), lo que da lugar a que el grupo de estudiantes infinitistas sea sensiblemente menor. Esto pone de relieve la brecha conceptual entre poder pensar u operar con colecciones potencialmente infinitas, o poder hacerlo con conjuntos actualmente infinitos. De este modo, destaca que el infinito cardinal está muy lejos de ser una noción que los y las estudiantes adquieren por el solo hecho de estar en contacto con conjuntos infinitos de números.

La recta la describen como continua, representando a los reales (potencialmente densos). En este sentido, vemos la comprensión más elaborada desde el punto de vista matemático se asocia casi exclusivamente con estudiantes avanzados/as de Matemática. Es notable cómo la biyección punto-número y la idea de continuidad-completitud de la recta-reales asociada al infinito actual necesita de cierta madurez cognitiva frente al estudio de las matemáticas. Nuestros resultados refuerzan lo dicho en cuanto a que la representación de los reales en la recta aparece en forma tardía en la matemática y es establecida como un formalismo arbitrario, lo que la hace contraintuitiva para los y las estudiantes ya que deben lidiar con cuestiones cognitivamente complejas como el continuo geométrico, la biyección entre el conjunto de los números reales y la recta y el infinito actual (Coriat y Scaglia, 2000; Scaglia 2001; Thomaidis y Tzanakis, 2007).

Respecto de la completitud-continuidad, nuestros resultados muestran que para los y las estudiantes en general, cuando se les plantean tareas en donde están en juego estos conceptos, éstas puedan carecer de sentido (Berge, 2008). Ciertamente, se puede considerar la noción de completitud (continuidad) funcionan como opacas en los últimos cursos de la secundaria y primeros de la universidad.

11.4. Una Matemática para cada necesidad

Para cerrar destacamos que las tres principales formas de comprender a los números asociadas a un gradiente en el nivel de estudio y tipo de Matemática, que hemos discutido en este capítulo tienen un paralelismo con las tres poblaciones que describe Chevallard (2013) y que considera debieran estudiar y aprender una matemática distinta, de acuerdo con su necesidad e interés.

Una población *P*1, muy pequeña, de matemáticos/as profesionales (comunidad académica matemática). La población *P*2, una población compuesta por los usuarios de las matemáticas que son los ingenieros, biólogos, físicos, etc. y por razones históricas, también profesores/as de matemáticas de enseñanza secundaria. Por último, la población *P*3, población que incluye a todos aquellos que no son matemáticos/as creadores/as (no pertenecen a *P*1) y ni siquiera trabajan en un campo profesional fuertemente matematizado (no pertenecen a *P*2). Debe subrayarse que la población *P*3 contiene tanto gente de poca instrucción como personas cultísimas en otras ramas del saber. Destaca en ella el grupo de maestras/os de primaria (Chevallard, 2013, p 5).

Podemos encontrar un paralelismo entre nuestros resultados y estas tres formas de ver la educación matemática. Tendremos la comprensión centrada en los enteros como modelo de números como naturalizada por los que podríamos denominar nuestra P3 (EFI, EFA, 3ro, 4to y 5to), mientras que la comprensión centrada en los números racionales como decimales estaría asociada a nuestra P2 (BI, MI y BA) y, por último, la comprensión centrada en los números reales como unión de racionales e irracionales a la P1 (MA). Consideramos que este paralelismo no se debe solo a la instrucción recibida, sino que está también relacionado con el interés y las practicas concretas realizadas en sus estudios.

Capítulo 12

Reflexiones finales y perspectivas

En esta tesis estudiamos qué comprensiones han construido sobre el número real estudiantes que se encuentran cursando los últimos años de secundaria, ingresantes universitarios (recién terminados sus estudios secundarios) y universitarios avanzados/as de carreras donde la Matemática tiene distinto peso. Nos interesamos asimismo por la incidencia que pudiera tener el estudio en Matemática sobre estas comprensiones.

Como sabemos, los números reales se estudian en la escuela secundaria y son protagonistas del paso entre la Matemática escolar y la avanzada. En Matemática universitaria, es frecuente observar que la noción de número real se trabaja como un contenido naturalizado en la escuela secundaria, sin embargo, nuestros resultados muestran que, al ingresar a la universidad, la noción de número real suele no estar disponible en el estudiantado como facilitadora del acceso a la matemática avanzada.

Para comprender nuestro objeto de estudio nos fue de utilidad repasar desde la Historia y la Epistemología la dinámica implícita en la construcción de la teoría matemática en la comunidad de especialistas en torno al número real y el infinito matemático. Luego abordamos perspectivas cognitivas y educativas que nos brindaron instrumentos para identificar y comprender los desafíos y sentidos que intervienen en las distintas concepciones estudiantiles.

En cuanto al enfoque metodológico

Tomamos la decisión de centrarnos en la comprensión de aspectos básicos de los números reales como son: concepciones sobre número en general y números racionales, irracionales y reales en particular; comprensión de la densidad y el orden de los números reales; cómo se relacionan las concepciones sobre infinito y la comprensión del número real (en particular notaciones con infinitos decimales y cardinalidad de conjuntos numéricos) y cómo se relaciona la comprensión del número real con el uso la recta como representación de los números. De aspectos como la comprensión de la completitud, no-numerabilidad y la inconmensurabilidad de los números reales nos ocupamos sólo tangencialmente dado que suponen mayor abstracción y necesitan una madurez cognitiva específica.

Se elaboró un cuestionario consistente en diez tareas focalizadas, cuidadosamente diseñadas, la mayoría abiertas y no escolares, para la indagación en profundidad sobre las comprensiones de los y las estudiantes acerca de estas varias facetas del número real. Acceder a este repertorio de respuestas nos permitió analizar sus relaciones y así obtener un panorama rico de los modos en que los y las estudiantes piensan en este campo de lo numérico.

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de esta investigación fue analizar la influencia del nivel de estudio de los y las participantes sobre las concepciones y comprensiones que han construido, se seleccionó una población de estudiantes que contemplara todo un arco de estudios de los números reales. Desde estudiantes que estuvieran en el comienzo de este estudio como son los y las estudiantes de 3ro de secundaria hasta los y las estudiantes avanzados/as de Matemática que han realizado un estudio sistemático y axiomático de este conjunto numérico. Este arco se completó con estudiantes de 4to y 5to de secundaria, ingresantes a Educación Física y avanzados/as de (muchos/as sin completar la secundaria) y avanzados/as en la carrera que no contaban con estudios universitarios de matemática; ingresantes a Biología y Matemática (recientemente completada la secundaria) y avanzados/as de Biología (con estudios universitarios de matemática aplicada).

El cuestionario utilizado resultó adecuado para la edad y nivel de estudio de los y las participantes, mostrando que las tareas no resultaron ni muy difíciles ni demasiado sencillas y permitieron evidenciar una gama amplia de concepciones. Por otra parte, el hecho de que estudiantes con casi la misma escolaridad, es decir que se encontraban en el último año de la secundaria e ingresantes universitarios de las tres carreras, evidencien perfiles de respuesta tan distintos entre sí y al perfil medio de la población, nos habla que las tareas se han constituido en oportunidades de manifestar diversos intereses y miradas cobre estos aspectos.

Para el análisis de la información organizamos las tareas en cuatro grupos temáticos (N, D, I y R). Estos grupos están referidos principalmente a *concepción de número y de número irracional en particular (N); la densidad de los reales (en relación con el orden y el supremo de un intervalo) (D)*; *algunos aspectos del infinito implicados en los números reales (I) y la representación de los reales en la recta (R).* Si bien la agrupación de tareas refleja el aspecto fundamental que indaga cada tarea, por la índole de los conceptos trabajados, en cada una de ellas aparecen relacionados la mayoría de estos aspectos.

Como fuente de información contábamos con las respuestas a las tareas del cuestionario, cada una con varios ítems que presentaban distintas demandas, ya sean respuestas verbales, numéricas, gráficas o categóricas. Debimos, por lo tanto, recurrir a distintos métodos de análisis, según fuera el tipo de variables a analizar. Integramos métodos cualitativos y estadísticos multivariados, en forma calibrada y justificada, en varias instancias del análisis de la información.

Modos de comprensión por grupo temático en relación con el nivel de estudios en Matemática

Respecto a las concepciones sobre *número en general y número irracional en particular*, hemos detectado que una amplia mayoría de estudiantes de secundaria y de universidad, mayormente sin estudios de matemática superior no conocen los números irracionales o manifestaron problemas para diferenciar los números como racionales o irracionales. Encontramos un arco en las concepciones de los reales como números que comienzan desde lo que podemos denominar una visión *centrada en los enteros,* asociada a estudiantes de menores estudios; seguida por una *visión centrada en los racionales (principalmente como decimales) con una descripción incompleta de los irracionales,* esto último de dos maneras: *no se pueden escribir como fracción* o *son los números con infinitos decimales*, ambas centradas en la notación y sin mucha profundización, asociadas a estudiantes de secundaria y también universitarios de Biología e ingresantes a Matemática. Por último, encontramos una visión de los reales con una *definición matemática de los irracionales* asociada sólo a estudiantes de Matemática.

Determinamos un gradiente de profundidad en la comprensión de *la densidad en correspondencia con el orden* y *con el supremo de un intervalo de números reales,* en el siguiente orden: *inseguridad y ajenidad,* asociada a estudiantes de Educación Física y de tercer año*; discretitud explícita,* característica de secundaria*; densidad finitista como un paso intermedio hacia la densidad y el orden,* principalmente estudiantes de cuarto año de secundaria e ingresantes a Biología y Matemática*; discretitud mediada por la concepción de infinito; densidad potencialmente infinita (sin y con comprensión del orden),* asociada a ingresantes a Biología, ingresantes a Matemática y estudiantes avanzados/as de Biología y *densidad actualmente infinita con comprensión del orden*, asociada a avanzados/as de Matemática.

En cuanto a la comprensión *del infinito en el contexto del número real*, identificamos un gradiente de profundidad en esta comprensión en el siguiente orden: *ajenidad* y *concepción finitista no explicada* asociadas a estudiantes de Educación Física y tercero de secundaria*; finitista explícita*; *infinito como indefinido*, *de infinito potencial* y *único infinito* al comparar asociadas a la escuela secundaria, ingresantes a las carreras científicas y avanzados*/as* de Biología, e *infinitista en un sentido matemático* (actualmente *infinitista)* asociada a algunos/as pocos estudiantes avanzados/as de Matemática. También hemos reseñado algunos paralelismos entre este gradiente de profundidad en compresiones de infinito y el análisis histórico.

Referente a la comprensión *de la recta como representación de los números reales*, determinamos un gradiente de profundidad en esta comprensión en el siguiente orden: *ajenidad; recta discreta; recta densa y recta continua. La ajenidad* está asociada a estudiantes de Educación Física, mientras que *la recta discreta (la recta numérica representa a los enteros y decimales finitos)* es una comprensión asociada a la secundaria, aunque también a estudiantes de Biología e ingresantes a Matemática*. La recta densa* que *representa a los decimales* y *la recta infinita-potencialmente densa* que *representa a los racionales,* están asociadas principalmente a estudiantes universitarios y por último *la recta continua que representa a los reales completos,* asociada a estudiantes avanzados/as de Matemática. Particularmente nos ocupamos de cómo el modo de concebir el infinito puede mediar en la comprensión de este contenido.

Modos integrales de comprensión de los números reales en relación con el nivel de estudio en Matemática

Mediante el análisis de las asociaciones existentes entre los modos de respuesta a todas las tareas en un mismo/a estudiante y entre los de distintos/as estudiantes hemos construido una tipología integral de respuesta al cuestionario, caracterizando cada clase de respuestas obtenida según las ideas emergentes relacionadas con los distintos aspectos del número real indagados. Asimismo, encontramos asociaciones entre estos modos de respuesta y el nivel de estudio en Matemática de los y las participantes.

Los núcleos temáticos indagados se interrelacionan tanto epistemológica como cognitivamente, por lo que, a través de este análisis, hemos podido sacar a la luz cómo la manera de enfocar cada uno de estos aspectos puede colaborar a construir una idea más acabada del número real, o en vez operar como obstáculo para ello.

Mostramos el gradiente de profundidad en la comprensión de los números reales evidenciado en las clases de respuestas a todo el cuestionario; qué nociones se incorporaron en forma característica en cada paso hacia la profundización de la comprensión de los números y los niveles de estudio asociados a cada tipo de respuestas. También describimos perfiles de modos de comprensión de los reales según el nivel de estudio en Matemática. Interpretamos y discutimos estos resultados, poniéndolos en dialogo con la bibliografía consultada. A continuación, haremos una síntesis de estos resultados, brindando reflexiones y conclusiones al respecto.

Gradiente de profundidad en la comprensión de los números reales

Este gradiente se manifiesta desde un pequeño grupo de estudiantes que ve *sólo como números a los enteros, presenta inseguridad respecto del orden, la densidad, la representación en la recta y evasión del infinito,* continuando por un grupo de estudiantes que perciben a los números *como los enteros y sus (finitas) fracciones y presentan ajenidad respecto de la recta numérica y una visión finitista (no explicada).* Son principalmente estudiantes con menos estudios de Matemática. Es esta una visión netamente centrada en los números enteros y representa el 24% de la población.

En un nivel intermedio encontramos, como la comprensión más popular en esta población y manifestada principalmente por estudiantes de secundaria, la visión de *los números como decimales finitos, un traslado de los enteros a los décimos, discretitud explícita y concepción finitista*. Una segunda forma de comprender a los reales intermedia también, principalmente de estudiantes de quinto año de secundaria e ingresantes a las carreras científicas, es una visión de los *números como los enteros e infinitas (potencialmente) densas fracciones y decimales, el conjunto de enteros como modelo de inclusión y el infinito en forma potencial.* Son visiones de los números donde se consideran principalmente los decimales y representan el 44% de la población.

En el otro extremo encontramos tres formas de comprensiones más elaboradas: una visión de *los números como magnitudes (decimales), en forma intencionalmente finitista y discreta mediante redondeo o aproximación,* fundamentalmente construida por estudiantes avanzados de Biología (17%). Las otras dos formas son: una comprensión relativa de los reales *concibiendo los números reales como unión de racionales e irracionales,* estos últimos descriptos por su *definición notacional, la densidad como potencialmente infinita; una visión de infinito potencial o de único infinito al comparar y la recta como representando los decimales*, construida por estudiantes de Matemática (ingresantes y avanzados/as) y por último, unos pocos estudiantes avanzados/as de Matemática, que han construido una visión muy cercana al concepto matemático y ven a *los números reales como completos, la recta continua y el infinito en forma actual.* Representan estas dos últimas el 16% de la población.

Hitos en los pasos hacia la profundización de la comprensión de los números

A partir de los resultados de las asociaciones de respuesta al conjunto de tareas, sabemos que los aspectos que determinan la mayor variabilidad en este repertorio de modos de comprender los números reales tienen que ver con: cómo se concibe a la recta como representación de los números y con las concepciones de infinito que operan. La interpretación del repertorio completo de modos de comprender los números reales según un gradiente de amplitud y profundidad ha puesto de relieve cuales son los matices de los aspectos indagados cuya incorporación hacen notable la ampliación y profundización conceptual entre modos de comprensión. A continuación, desarrollaremos los seis hitos principales que nuestro estudio pone de relieve.

La incorporación de la recta como representación de los números

Como característica del salto entre la visión elemental de manejarse solo con algunos números enteros a una concepción de los números enteros en conjunto, incorporando además algunas fracciones y decimales finitos, encontramos el considerar la *representación de números en la recta***.** Aun cuando esta representación aparece como restringida a los enteros, sus fracciones y algunos decimales finitos, al incorporar la posibilidad de representar números en la recta vemos que se amplifica la comprensión numérica, quizás justamente por contar con una nueva forma de representación externa (Duval, 1995).

La incorporación de la noción de lo finito y lo discreto

En el siguiente nivel, encontramos naturalizada una visión de los números como discretos y una visión finitista no justificada al estilo: infinito es un número muy grande o propiedades que se verifican en colecciones finitas sin justificar). Es decir se mantiene la recta como representación de enteros y decimales finitos, pero se incorpora una visión finitista implícita. De alguna manera se incorpora el problema de lo infinito, aun cuando se lo vea como un número muy grande, pensado como un entero muy grande (o una cantidad muy grande) o con muchísimos decimales. Los números son los enteros y algunos decimales finitos y discretos.

La incorporación de la densidad potencialmente infinita y la comparación por inclusión

Este paso, está caracterizado por la incorporación de lo infinito (en sentido común) al considerar a los números y la recta como infinito-potencialmente densos y una incorporación de números no-racionales, mediante una definición incompleta. Este pasaje a otro nivel de comprensión es propio del final de la secundaria e ingreso a la universidad. Se muestra cómo un modo de comprensión fuertemente mediado por la concepción de infinito potencial, es decir es la primera comprensión infinitista en este gradiente. Los números son los decimales (potencialmente) densos o los racionales. Observamos una concepción de infinito en sentido común, ya que además del infinito potencial, al comparar conjuntos infinitos, lo hacen por inclusión.

La incorporación de los números como magnitudes, de la discretitud y finitud intencional

Esta visión es característica de los y las estudiantes avanzados de Biología, que estudian una matemática aplicada y poco tratada en la bibliografía de consulta. Se muestra como favorecida por el estudio utilitario de los números (*sirven para…).* Son estudiantes que si bien conocen los irracionales en la práctica recurren siempre a la aproximación decimal finita, eligiendo operar en un orden discreto. Sin embargo, puede concebir la densidad de los números y de la recta densa en un sentido potencial y cortando el proceso cuando lo consideren necesario, al estilo *tantos decimales como necesite*.

Ven a la recta como una regla graduada, una recta de magnitudes. Si bien conocen los números (racionales e irracionales) con notación infinita, intencionalmente prefieren en la práctica un ámbito finito. Cuando tienen que comparar utilizan razonamientos validos en conjuntos finitos y suelen considerar que con infinito no se puede operar (infinito como indefinido). Por ello "eligen" operar con decimales finitos. Es decir, si bien conocen los irracionales, los consideran como una curiosidad matemática. A los efectos prácticos con los decimales finitos les es suficiente.

La incorporación del orden y la densidad potencial de los números identificada con la continuidad de la recta

En el siguiente nivel de concepciones propiamente universitarias, se reconocen los números irracionales (mediante condiciones necesarias y suficientes). Se reconocen los reales como racionales e irracionales, concebidos como infinito-potencialmente densos y surge la comprensión del orden, que se muestra como menos intuitiva que la de la densidad. También se da un paso extraordinario, al concebir a la recta como continua, representando todos los números reales. La densidad potencial de los números se identificaría con la continuidad de la recta. Comparan cardinalidades por razones finitistas o plantean que hay un único infinito.

La incorporación del infinito matemático y de la completitud-continuidad

El último eslabón de esta profundización en las comprensiones estudiantiles está asociado fuertemente al estudio de matemática avanzada. Se da el paso de lo infinito potencial a lo infinito actual. Se compara mediante cardinalidad y ya no por medio de infinito común. Se concibe la continuidad de la recta en relación con la completitud de los reales. Esta visión se corresponde con una visión experta y en nuestra población de estudiantes es minoritaria.

Asociaciones de perfiles de respuesta según el nivel de estudio en Matemática

Hemos estudiado asociaciones entre los perfiles de distribución de modos integrales de respuesta a todo el cuestionario y con los niveles de estudio. Describimos estas asociaciones mediante los modos de respuesta que encontramos como característicos de los distintos nieles de estudio.

No debemos perder de vista que esto nos da un panorama muy general y que en cada nivel de estudio se presentan casi todos los modos de respuesta; salvo en los y las estudiantes avanzados/as de Matemática en los que se dan los modos más cercanos a una visión matemática y que justamente los encontramos en forma minoritaria en los otros niveles de estudio.

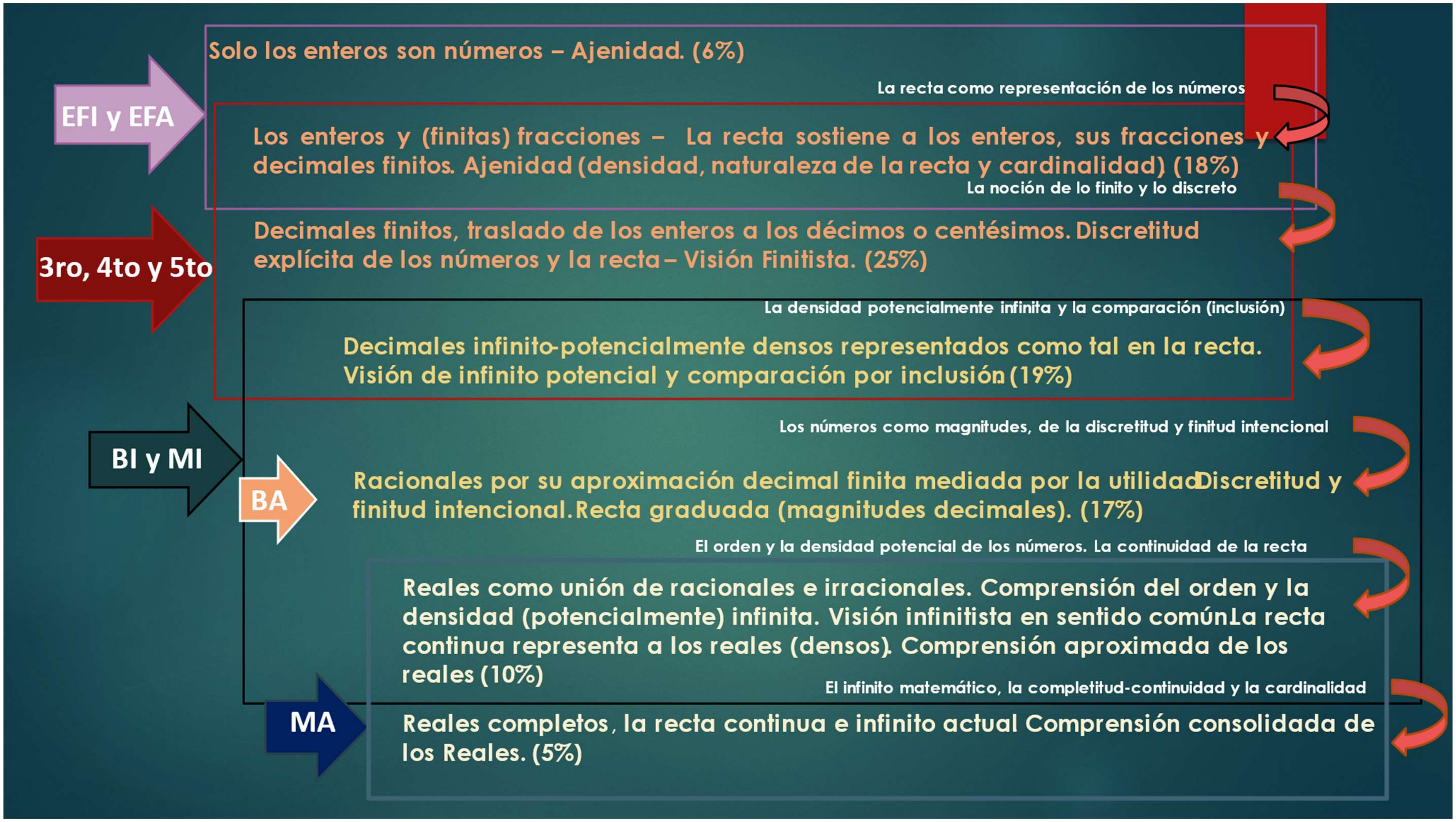
Hemos encontrado cinco asociaciones globales de perfiles de respuesta diferenciados, según los niveles de estudio en Matemática: (i) correspondiendo uno a la asociación de la clase *sólo los enteros, ajenidad e inseguridad, ajenidad frente* al *infinito* y la clase *los enteros y sus fracciones, ajenidad respecto de la recta y finitistas (no explicado)* asociado principalmente a EFI y EFA (ii) otro grupo correspondiente principalmente a la clase *traslado de los enteros a los décimos, discretitud explícita e infinito potencial* asociada con las clases *identificación a los reales con los decimales* y *los enteros y sus fracciones, ajenidad respecto de la recta y finitistas;* principalmente asociado a 3ro, 4to y 5to; (iii) otro grupo que asocia *identificación a los reales con los decimales y comprensión relativa de los reales, densidad potencialmente infinita e infinito potencial* - *único infinito* asociado a BI y MI, en los cuales se identifica los *reales con los decimales y se concibe el infinito como potencial.* Por último, dos grupos muy característicos y diferenciados entre sí (iv): la clase *magnitud mediada por la utilidad (redondeo)* asociada a BA, en la que los reales aparecen *identificados con los racionales por sus aproximaciones finitas* y (v) la clase *los reales completos, la recta continua e infinito actual* asociada a MA.

Estos perfiles de respuesta característicos son el de Educación Física; el de secundaria; el de ingresantes a las carreras científicas; el de avanzados de Biología y avanzados de Matemática. Los dos primeros están relacionados a una población que tendría a la matemática como insumo para su vida diaria. Los dos siguientes se relacionan con una población usuaria de la matemática como subsidiaria de otra ciencia o de la tecnología y el último corresponde a una población muy pequeña relacionada con la matemática profesional. Se reencuentran así las poblaciones P3, P2 y P1 identificadas por Chevallard (2013) respectivamente. En los cuatro primeros perfiles que emergen de nuestro estudio (población P3 y P2) encontramos que prima una Matemática de aproximación, mientras que la Matemática de precisión de Klein (1972) sólo se manifiesta en estudiantes avanzados de Matemática.

Progresión en la comprensión de los números reales según el nivel de estudio en Matemática

En el siguiente esquema (Figura 12.1) sintetizamos el gradiente de profundidad en la comprensión de los números reales evidenciado en las clases de respuestas a todo el cuestionario, los hitos característicos en los pasos entre grados de comprensión de los números y los perfiles de niveles de estudio en Matemática asociados con sus grupos de respuestas característicos

Figura 12.1. Esquema del gradiente de profundidad de la comprensión de los números reales, hitos característicos en los pasos entre grados de comprensión (evidenciados con flechas curvas) y según los perfiles de respuesta características por NEM



Los modos de comprender los números reales se nos mostraron en un arco que abarca desde una visión escolar primaria basada plenamente en *los números enteros*, para ir incorporando algunas fracciones y decimales finitos, característica de estudiantes con menores estudios e interés en la matemática. Luego *los racionales* identificados con su representación como fracciones o *decimales* conservando la *discretitud de los enteros*, como una visión propia de la secundaria.

En una transición entre secundaria y universidad encontramos la visión de los *decimales,* pero ahora *potencialmente densos*, que de alguna manera acerca a los y las estudiantes a la visión de los *números como los racionales*.

Como concepciones universitarias encontramos tres formas: la que *incorpora los números irracionales, y ve a los números como potencialmente densos*, una *visión de discretitud e infinitud, pero explicitada o intencional* (redondeo, tantos decimales como se necesiten, etc.) que da de los números una visión utilitaria como magnitudes; otra que concibe a los reales como unión de *racionales e irracionales, comprendiendo el orden como potencialmente denso;* y finalmente una visión de *densidad infinito actual de los números y de los reales como completos*.

En la Figura 12.2 presentamos un esquema de la progresión en la visión de los números según el tipo de números que los y las participantes incorporan en sus respuestas y según los distintos niveles de estudio en Matemática característicos. Como ya hemos señalado, debe tenerse en cuenta que los modos de comprensión pueden superponerse en los distintos niveles de estudio en Matemática, tanto como los NEM en los modos de comprensión.

Figura 12.2. Esquema de la visión de los números según el tipo de números que los y las estudiantes incorporan en las respuestas y según los NEM. El tamaño de la tipografía es proporcional al número de participantes que presentan esta visión

El gradiente de comprensión de los números reales, asociado a la amplitud del conjunto numérico considerado, así como a los diferentes modos de ver la densidad numérica, de concebir el infinito y la recta numérica como representación de los reales, mantiene una relación con el nivel de estudio en Matemática, pero no se da de forma ni cronológica ni uniforme. Decimos que la relación no es cronológica pues estudiantes que previamente han cumplimentado cierta cantidad de años de estudio, pero no se encuentran actualmente en contacto con la Matemática, pueden evidenciar menor nivel de comprensión que otros/as con menos años de estudio pero que actualmente están estudiando matemática. Decimos que la asociación tampoco es uniforme pues un mismo nivel de estudio puede estar asociado a más de un nivel de comprensión, excepto para estudiantes avanzados/as de Matemática.

Encontramos aquí, con características específicas, lo que Pozo (1999) denomina *integración jerárquica* de diversas formas de conocimiento cotidiano, escolar y científico. En efecto, nuestro estudio revela que una mayor amplitud y profundidad en la comprensión de los números requiere de un estudio que explícitamente ayude al/la aprendiz a reconstruir y redescribir sus intuiciones, situándolas en un nuevo y más potente marco conceptual, pero sin abandonarlas, ya que forman parte no sólo de su sentido común, sino que le han sido útiles (y pueden serlo aún) en otros contextos numéricos.

Sin embargo, ampliar y profundizar el conocimiento numérico requerirá del o de la estudiante y docente un esfuerzo cognitivo importante al hacerse necesario poder reconocer correctamente qué propiedades son adecuadas al conjunto numérico utilizado y a la tarea en cuestión. Es posible que en la vida cotidiana sea suficiente una visión finitista y discreta de los números, mientras que, aunque en las aplicaciones a la ciencia, la tecnología o la educación puede parecer suficiente una visión infinito potencial de los decimales (en ocasiones intencionalmente finitista), por momentos se necesitará (dependiendo de la complejidad del contexto) una visión más avanzada en cuanto a la continuidad de los números y del infinito actual. Sin lugar a duda para la población de matemáticos/as u otros científicos que construyen o justifican la Matemática como ciencia es imprescindible una visión numérica de los reales completos, y de infinito actual.

La Matemática puede ser vista como una construcción cultural e históricamente generada, que nos permite acceder a otros mundos posibles además del mundo real, de objetos finitos y discretos (Bruner, 1995; Riviére, 1991). Entendida así, la adquisición de conocimiento numérico no sólo hace necesaria la reconstrucción cultural de la mente, sino que, sobre todo, la hace posible. Adquirir estos conocimientos es por tanto una actividad cultural que genera no sólo nuevas representaciones, sino también nuevas formas de representar y concebir el mundo (Pozo, 2002).

Diversidad de ideas en un mismo nivel de estudio en Matemática

Al observar las distribuciones de las distintas clases de respuestas al interior de los NEM, en cada tarea y en la clasificación global, es notable la diversidad de ideas con las que pueden operar los y las estudiantes de un mismo grupo educativo, en este caso eran estudiantes del mimo grupo escolar y con el/la mismo/a profesor/a de Matemática.

En este sentido, estos resultados muestran que lejos de ajustarse a una expectativa de homogeneidad, en cada grupo educativo, excepto aquel con mayor nivel de estudio específico, conviven un amplio rango de supuestos y nociones. Nuestros resultados muestran que *la diversidad* de ideas lejos de ser una anomalía es una condición esperable para la enseñanza. Algo similar han observado Scheuer et al. (2013) en grupos de primer grado de primaria, también al pensar en y con números. Nuestro estudio muestra que la heterogeneidad cognitiva en el terreno numérico no se restringe al inicio de la escolarización, sino que se extiende a la secundaria e incluso a la universidad.

La diversidad en los modos de concebir al número irracional descriptas en nuestros resultados revela que la noción de número real (racional o irracional) está lejos de adquirirse por el solo hecho de trabajar con definiciones. Así mismo, observamos concepciones sobre infinito que muchas veces no son estables en un mismo/a estudiante y entran en conflicto bajo determinados contextos, lo cual genera contradicciones internas que se expresan mediante respuestas incoherentes y lábiles y que operan en el modo de comprender a los reales. Por ejemplo, la visión de densidad infinito potencial (por su misma naturaleza numerable) se convertiría en un fuerte obstáculo para comprender a la completitud de los reales (actual y no-numerable).

La recta numérica es un contenido que se ha trabajado durante toda la escolaridad y sin embargo continúa manifestándose en ideas y comprensiones de lo más diversas en un mismo grupo escolar de estudiantes. Este hallazgo nos muestra que la representación de los números reales en la recta puede no resultar 'natural' o accesible directamente al estudiante, sobre todo en cuanto al paso de los enteros (discretos) al orden denso de los racionales y al orden continuo de los reales representados en la recta.

Los desafíos cognitivos en la comprensión de los números reales

Como vemos la comprensión más elaborada desde el punto de vista matemático se asocia casi exclusivamente con estudiantes avanzados/as de Matemática. Es notable cómo los aspectos estudiados asociados al infinito actual necesitan de cierta madurez cognitiva frente al estudio de las matemáticas. De hecho, los trabajos de investigación reseñados y el propio estudio epistemológico presentaron la comprensión de los números reales como compleja epistemológica y cognitivamente (Artigue et al., 1995; Bergé, 2008; Fischbein et al., 1994; Romero, 1995; Romero y Rico, 1999; Sirotic y Zazkis, 2007b). Nuestros resultados muestran que salvo para estudiantes avanzados de Matemática, las concepciones al respecto aparecen como frecuentemente contradictorias y lábiles, sobre todo cuando se relacionan con las concepciones de infinito. Cuando una situación requiere que los y las estudiantes piensen en las colecciones formadas por una infinidad de elementos en forma actual, su comprensión está asociada al estudio específico de estos temas. Podemos decir que el infinito es una noción que, si no se la explicita o estudia, se mantiene intuitiva, lábil, paradójica y puede ocasionar grietas en la conceptualización del número real.

Respecto a los números irracionales, mostramos que la profundidad del estudio matemático juega un papel importante para la mejor comprensión de los números reales y que esto es así aun en las nociones más básicas, como son la diferenciación de racionales e irracionales. Hemos visto, además, lo complejo que resulta a los y las estudiantes la comprensión de las representaciones externas del número real. Esto podría asociarse a la carencia intrínseca de una representación que pueda dar cuenta de todas las características de este conjunto numérico (Steiner, 1984; Stevenson, 2000). En particular la notación decimal de los números reales alude a infinitas cifras, involucrando la ya comentada labilidad y lo paradójico de la idea de infinito que construyen los jóvenes estudiantes cuando está en juego la aceptación del infinito actual.

En cuanto a la representación de los reales en la recta, aparece como contraintuitiva para los y las estudiantes ya que deben lidiar con cuestiones cognitivamente complejas como el continuo geométrico, la biyección entre el conjunto de los números reales y la recta y el ya mencionado infinito actual. Vemos cómo el concepto completitud-continuidad adquiere significado (sólo) por una necesidad de validación matemática. Nuestros resultados muestran que para los y las estudiantes en general, cuando se les plantean tareas en donde están en juego estos conceptos, éstas puedan carecer de sentido.

Estos resultados son coherentes con la dimensión de consistencia creciente que, de acuerdo con Pozo y Rodrigo (2001), caracteriza el proceso de cambio representacional en la adquisición del conocimiento científico. En nuestro trabajo, los y las estudiantes que han realizado un estudio sistemático del número real aceptan consistentemente la existencia de conjuntos actualmente infinitos, el orden denso infinito-actual que los lleva a una visión de completitud de los reales y su asimilación con la continuidad de la recta. Todos temas que parecen requerir del estudio formal y axiomático de los números reales y de la cardinalidad de conjuntos infinitos. Concluimos que, para conceptualizar el número real, al igual que ocurre con el concepto de infinito (Montoro, 2005), se necesita de la intervención de complejos procesos representacionales, que requieren en este caso de la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión y explicitación matemáticas.

Hemos visto que la comprensión de los números reales representa un proceso cognitivo complejo que se ve favorecido por lo que podríamos llamar una explicitación progresiva de las representaciones intuitivas o naturalizadas, así como de las estructuras subyacentes (Pozo 2002), diferenciándolos de las estructuras y modelos utilizados por la comunidad científica. Ello implica no sólo una reflexión o explicitación de las concepciones construidas, sino también el dominio de nuevos lenguajes y sistemas explícitos de representación que permitan redescribir esos conocimientos en términos de sistemas conceptuales más potentes (Pérez-Echeverría et al., 2010). Esto también implica acceder a distintas formas de representaciones para el número real. Como señalara Duval (1995) la única forma de comprender un concepto matemático es a través de diferentes representaciones, pudiendo hacer un uso contextuado y complementario de ellas.

Reflexiones para la enseñanza

Encontramos apropiada la metodología de este trabajo para cumplir con nuestro objetivo de estudiar las concepciones que han construido, en torno al número real, estudiantes de secundaria, ingresantes a la universidad y de los últimos años de la universidad (cursando distintas carreras). Sin embargo, al no tener información de cómo estudiaron estas nociones, poco podemos decir sobre las dificultades derivadas de modalidades específicas de enseñanza. Aun así, nuestros resultados pueden dar pistas para la enseñanza en varios sentidos ya que ponen de manifiesto que una amplia mayoría de estudiantes no han logrado una comprensión acabada de las propiedades de los números reales aquí abordadas.

El conjunto de hallazgos confirma nuestra afirmación inicial de que el número real presenta una particular complejidad epistemológica, cognitiva y educativa y muestran que la razón de las dificultades para aprender estos conceptos de matemática avanzada, e importantes a la hora del paso de la escuela secundaria y la universidad, no es solamente su complejidad sino la naturaleza del conocimiento anterior de los y las estudiantes. Por lo cual consideramos puede ser de ayuda a la enseñanza nuestra discusión sobre cómo comprenden al número real y qué concepciones numéricas han construido los y las estudiantes de los últimos años de secundaria y en sus estudios de matemática en la universidad.

La heterogeneidad de las comprensiones que conviven en los grupos escolares desde la secundaria hasta avanzada la universidad pone de manifiesto la importancia de promover, en la formación docente, la percatación de esta variedad, junto al desarrollo de estrategias para visibilizarlas en el grupo clase total a fin de facilitar un intercambio reflexivo, que pueda ayudar a unos/as y otros/as a revisar, articular o incluso refinar sus ideas.

Nuestros resultados ponen de manifiesto que las formas en que los números se presentan a los y las estudiantes no son ni transparentes ni neutras: tanto el introducirlas explícitamente como infinitas o no hacerlo, como el uso de signos de uso corriente en contextos extra-matemáticos (los puntos suspensivos), y también la entidad ontológica involucrada (colecciones o números) son todos factores que operan en las posibilidades de los y las estudiantes para pensar con menor o mayor profundidad en este terreno. Del mismo modo, debiera ser de especial interés para la enseñanza dar variadas y progresivas oportunidades para que los y las estudiantes puedan explicitar las diferencias entre el orden discreto de los números enteros y el orden denso de los reales. Mas aun, al estudiar los irracionales, la propiedad relacionada con el supremo debiera manifestarse en forma explícita.

Los modos en que estudiantes responden a las tareas que implican el infinito nos llevan a pensar que, si bien para la matemática el infinito está bien definido, si no se lo estudia explícitamente, las concepciones sobre el mismo muchas veces no son estables en un mismo estudiante y entran en conflicto bajo determinados contextos, lo cual genera contradicciones internas que se expresan mediante respuestas incoherentes.

En esta misma línea, si bien representar números en la recta puede ser una tarea sencilla para estudiantes de primaria cuando se trata de marcar en ella números enteros según cierta convención, la representación del orden denso de los números reales y la completitud-continuidad de los números-recta, necesitan de una madurez que sólo da el trabajo específico en matemática y no es sencillo para los y las estudiantes que se encuentran al final de la secundaria y al principio de la universidad, aun cuando (y quizás por ello) muchas veces sean tratadas como opacas por la enseñanza.

Ciertamente, se puede considerar que las nociones de infinito actual y cardinal y la de completitud -continuidad, funcionan como opacas en los últimos cursos de la secundaria y primeros de la universidad, a pesar de servir de apoyo de varias prácticas sobre todo en los primeros años de las carreras científicas. Se hace necesaria una reconstrucción de estas nociones para iniciar un estudio más profundo de las matemáticas universitarias. Haciendo indispensable que la enseñanza prevea entre sus metas para los últimos años de secundaria y primeros años de la universidad un trabajo específico sobre estas complejas nociones de modo de facilitar el pasaje de una matemática escolar a una matemática avanzada.

Consideramos que intervenciones didácticas orientadas a presentar a los y las estudiantes tareas donde se trabaje explícitamente los conceptos de número irracional, continuidad de la recta y en forma paralela la completitud de los números reales, como así también que prevean una explicitación de la noción de infinito actual en relación con el continuo de los números reales, promoverían que los y las estudiantes puedan apropiarse de la representación de los números reales en la recta como un recurso riquísimo y semióticamente complejo.

Esto no equivale a que el o la docente enuncie explícitamente esta propiedad, pues la explicitación no se desarrolla vicariamente: es un proceso que puede ser andamiado y compartido, pero siempre para ser experimentado y puesto en juego en primera persona. Cuando estas ideas abstractas son tratadas como transparentes, o cuando sus propiedades son meramente enunciadas por la o el docente en el contexto del aula, se da lugar a una notable diversidad de ideas entre los y las estudiantes, muchas de ellas frágiles, parciales o poco eficaces. Por lo que el supuesto imperante en la enseñanza de que el pasaje progresivo de un campo numérico a otro puede darse en forma 'naturalizada' o accesible directamente al estudiante, puede convertirse en un serio obstáculo como muestran nuestros resultados.

Futuras líneas de investigación

El indagar estas ideas complejas desde lo epistémico y cognitivo y cuya comprensión se muestra ligada a un mayor nivel de explicitación y reflexión, a través de un cuestionario hemos obtenido un panorama estático de las comprensiones que los y las estudiantes han construido. Por lo que se presenta como continuidad natural el estudio de estas cuestiones a través de entrevistas, grupos de discusión o de alguna intervención didáctica concreta, a fin de observar los procesos dinámicos de comprensión.

Los hitos que hemos detectado para el paso de cierto tipo de concepción a otra de mayor profundidad conceptual pueden servir de insumo para el diseño de actividades que puedan ser probadas como motivadoras y anclajes a mayores niveles de profundidad en la comprensión del número real. Puede ser esto una oportunidad de acercamiento de la investigación en Educación Matemática y la tarea docente en el aula, posiblemente a través de trabajos colaborativos con docentes e investigadores/as (Esteley y Magallanes, 2015; Fiorentini y Lorenzato, 2015; Villarreal, 2014).

También hemos visto que en las concepciones numéricas de los y las estudiantes están en relación con sus estudios de matemática, por lo que se presenta como interesante realizar el seguimiento de un mismo grupo de estudiantes al largo de varios años de estudio, particularmente en el paso de la escuela secundaria a la universidad. Este estudio educativo longitudinal daría cuenta formas en que se construyen estas comprensiones, pudiendo identificar momentos e intervenciones clave para la ampliación y profundización de estos conocimientos.

A modo de cierre

Nuestro estudio, realizado sobre una población de estudiantes cursando la secundaria o que recientemente la han finalizado, nos muestra que la mayoría de los ingresantes y de los y las estudiantes sin una instrucción específica formal sobre el número real manifiestan ideas confusas y contradictorias frente a esta noción.

Este aspecto de la influencia del contenido sobre el razonamiento de las personas jóvenes y adultas sumado a que los y las estudiantes parecen ser muy propensos a confiar en sus presunciones y las experiencias cotidianas sugiere que una razón de las dificultades para aprender estos conceptos no es solamente su complejidad, sino que no tengan un trato explícito y formal con estos conceptos.

Vale decir que considerar la noción de número real como naturalizado y accesible directamente en el conocimiento de los estudiantes, puede convertirse en una seria dificultad en el aprendizaje de los conceptos de Matemática avanzada, por lo que se presentaría como necesaria, en la enseñanza matemática al finalizar la secundaria y en los primeros años de la universidad, una explicitación de las nociones complejas relacionadas con el infinito actual que atañen al número real.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, C. (2005). ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los y las estudiantes en tareas de construcción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, (8),* 7-23.

Arcavi, A., Bruckheimer, M. y Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *Learning of Mathematics, 7*(2), 18–23.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). Schemas, Their Development and Interaction. In *APOS Theory*, (pp. 109-135). Springer.

Arrigo, G. y D´Amore, B. (1999). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación Matemática, 11*(1), 5-24.

Arrigo, G. y D´Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*(2)*,* 5-19.

Arrigo, G., D'Amore, B. y Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático.* Ediciones Didácticas Magisterio.

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomenes de validation. *France Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 247-280.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME*, *1*(1), 40-55.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, 1*, 97-140.

Ausubel, D., Novak, J. y Henesiam, H. (1978/83)**.** *Educational psychology*. Holt Rinehart y Winton. Traducción al español*: Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* Trillas.

Babini, J. (1980). *Historia de las ideas modernas en matemáticas*. Organización de los Estados Americanos.

Baccalá, N. y Montoro, V. (2013). Lexicometría: técnicas estadísticas para análisis de textos escritos, orales y preguntas abiertas. *Cuaderno Universitario, 57*. *CRUB, Universidad Nacional del Comahue.* ISSN 0325-6308/57.

Baccalá, N., y Montoro, V. (2008). Introducción al Análisis Multivariado. *Cuaderno Universitario, 51. CRUB,. Universidad Nacional del Comahue.* ISSN, 0325-6308/51.

Bachelard, G. (1938/1987). *La formation del´ Esprit Scientifique.* Vrin. *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, *18*(2), 147-176.

Bass, H. (2019). Is the real number line something to be built, or occupied? In *The Legacy of Felix Klein* (pp. 67-77). Springer.

Bécue-Bertaut, M. (1991). *Análisis de datos textuales, Métodos estadísticos y Algoritmos*. CISIA.

Bécue-Bertaut, M., Lébart, L. y Rajadell, N. (1992). El análisis estadístico de datos textuales. La lectura según los escolares de enseñanza primaria. *Anuario de psicología/The UB Journal of psychology*, 7-22.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91 -125). Academic Press Inc.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208.

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad.* Tesis (Doctorado en Educación Matemática). Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

Belmonte, J. y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME*. *14*(2), 139 -171.

Benzécri, J. (1973). *L'Analyse des Données.* Tomo 2: *L' Analyse des Correspondances.* Dunod.

Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria* (Tesis de doctorado, Universidad de Buenos Aires).

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 217-235.

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME, 6*(3), 163-197.

Bero, P. (1985). *Fundamental concepts of differential calculus from the teaching aspect*. Doctoral dissertation, Dissertation, MFF UK, Bratislava.

Bourbaki, N. (1972). *Eléments d' histoire des mathématiques* (1969). Versión española de Jesús Hernandez. Alianza Editorial.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. Wiley and Sons.

Brousseau, G. (1983). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Zaratoga.

Brousseau, G. (2006). Obstáculos epistemológicos, problemas e ingeniería didáctica. In *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (Vol. 19), (pp.79-117). Springer Science & Business Media,

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, *29*, 5-18.

Bruner, J. S. (1995). Retrospective: On learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, *88*(4), 330.

Cantor, G. (1872a). Uber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annulen 5*, 123-132. Reprinted in *Gesummelte Abhandlungen,* 92-102. Springer, 1932.

Cantor, G. (1872b). *Extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas*. En J. Bares y J. Climent (Trad.) http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor72-84.pc.pdf

Cantor, G. (1899). Letter to Dedekind. En: *From Frege to Godël A source Book infinito mathematical Ligic*. *1879- 1931.* Jean Van Heijenoort. Harvart University Press (1967).

Carretero, M. (1997). *Introducción a la psicología cognitiva*. Aique.

Castela, C. (1996). *La droite des réels en seconde: point d'appui disponible ou enjeu clandestin?* IREM.

Castorina, J. A. (1995). Algunos problemas epistemológicos en las teorías del cambio conceptual. *Estudios e investigaciones (105).*

Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R. y Lamela, C. (2021). Representación y densidad en los reales. En Dossier: *Desafíos en el estudio, uso y enseñanza de la matemática*. *Revista científica EFI 7*(12), 109-122.

Chevallard, Y. (2013). La enseñanza de la matemática en la encrucijada: por un nuevo pacto civilizacional. *Discurso al recibir el Doctor Honoris Causa de la Universidad Nacional de Córdoba, 28*(11), 2013. http://edumat.famaf.unc.edu.ar/wp-content/uploads/2015/09/YC-DHC-Cordoba-28-11-2013.pdf

Chi, M., Hutchinson, J. y Robin, A. (1989). How inferences about novel domain-related concepts can be constrained by structured knowledge. *Merrill-Palmer Quarterly, 35*, 27-62.

Cifuentes, M., Juan, M. T. y Montoro, V. (2019, 27 de setiembre). [Ponencia trabajos de investigación]. *Estudiantes secundarios y universitarios representando números reales en la recta*. Reunión de Educación Matemática de la UMA.SUMA. Mendoza. http://www.union-matematica.org.ar/suma2019/abstract_ed_2.html#11/08/2019%2019:11:28

Conne, F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *5*(3), 269-341.

Coriat, M. y Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *18*(1), 25-34.

Cornu B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Comceptions et Obstacles,* Thése de Doctorat, Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, *11*. Springer Science & Business Media.

Crespo-Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Premisa*, *41*, 21-30.

Crivisqui, E. (1993). Análisis Factorial de Correspondencias. Un instrumento de investigación en ciencias sociales. *Laboratorio de Informática Social de la Universidad Católica de Asunción.*

Crossley, J. N. (1987). *The emergence of number*. World Scientific.

D'amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. *Épsilon 36.* 314-360.

Dauben, J. (1995). George Cantor. En *"Grandes Matemáticos", Investigación y Ciencia*, 94-105. Prensa Científica S.A.

de Torres Curth, M. (1999). La noción de límite. Una mirada histórica y epistemológica. *Cuaderno Universitario, 35. Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue.* ISSN 0325-6308/35.

Dedekind, R. (1963/1972). Continuity and Irrational Numbers. In W. W. Beman, (Trans), *Essays on the Theory of Numbers*. Dover Publications.

Dehaene, S. (1997). *The number sense. How the mind creates mathematics.* Oxford University Press.

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind and language, 16*(1), 16-36.

Dieudonné, J. (1966). *Fundamentos de Análisis Moderno.* Reverté.

Dieudonné. J. (1965). David Hilbert. En *Grandes corrientes del pensamiento matemático.* N. Míguez (Trad.) de Le Lionnais, F. (1948). *Les grands courants de la pensée mathématique.*

Driver, R. y Easley, J. (1978). *Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students.* Taylor and Francis.

Dubinsky, E., Arnon, I. y Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of $0.\bar{9}$ and 1. *Canadian Journal of science, mathematics, and Technology education*, *13*(3), 232-258.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. y Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics 58*, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. y Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics 60*, 253-266.

Duval, R. (1983). L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 385-414.

Duval, R. (1995). *Sémiosis Et Pensée Humaine. Registres Sémiotiques Et Apprentissages Intellectuels.* Peter Lang.

Edwards, B. E. S. (1997). *Undergraduate mathematics majors' understanding and use of formal definitions in real analysis*. The Pennsylvania State University.

Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999…< 1. *The teaching of mathematics*, *11*(1), 35-40.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 117–146.

Escofier, B. y Pagés, J. (1990). *Analyses factorielles simples et múltiples: objectifs, méthodes et interpretation.* Dunod

Esteley, C. y Magallanes, A. (2015). Una experiencia vivida en aula: enseñar y aprender a trabajar con estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, *9*, 29-45.

Eylon, B. y Linn, M. (1988). Learning and instruction: An examination of four research perspectives in science education. *Review of Educational Research, 58*(3), 251-301,

Falk, R. (1994). Infinity: A cognitive challenge. *Theory and Psychology* 4(1), 35-60.

Ferraris, C. y Ferrero, M. (2000). Un concepto matemático muy incorporado, aunque no tan obvio: el axioma de continuidad y algunas aplicaciones. *Revista de Educación Matemática, 15*(3), 35-42.

Ferrero, M. y Montoro V. (2013). Estudio preliminar del discurso docente sobre el aprendizaje del número real. En *Actas del VI Congreso Nacional y IV Internacional de Investigación Educativa*. Cipolletti, Río Negro, Argentina.

Ferrero, M., y Montoro, V. (2011). Consulta a profesores como medio de aproximación a las concepciones de los y las estudiantes acerca del número real. *Revista de Educación Matemática, 27*. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10187

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. *MAA notes*, 31-46.

Fine, J. (1996) Iniciación a los análisis de datos multidimensionales a partir de ejemplos. *Universidad de la República,* Montevideo.

Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2015). *Investigación en Educación Matemática: recorridos históricos y metodológicos*. Autores Associados LTDA,

Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* Reidel Publishing Company

Fischbein E., Jehiam, R. y Cohen D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. In *Proceedings of the XVIII PME, Lisboa*, (*2),* 352-359.

Fischbein E., Jehiam, R. y Cohen D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*. Educational Studies in Mathematics, 29*, 29-44.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational studies in Mathematics*, *48*(2), 309-329.

Fischbein, E., Tirosh y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 3-40.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. *ISBN 90-277-1535-1*. Pb 90-277-2261-7.

Garbín, S. (1998). *Esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el concepto de infinito actual contextualizado en problemas expresados en diferentes lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. Estudio exploratorio.* Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *8*(2), 169-193.

Garbín, S. y Azcárate, C. (2000). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual. *Educación Matemática, 12*(3), 5-17.

Gentile, E, (1976). *Notas de álgebra I.* (2ta edición). Eudeba.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 2*(3), 303–346.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, *25*. 77-88.

Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra, In S. Wagner y C. Keiran (Eds), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.*

Herscovics, N. y Bergeron, J.C. (1983). Modelos de Comprensión. *Revistas Internacionales sobre Educación Matemática*, *15*(2), 75-83.

Hiebert, J., y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 65-97.

Howard, R, W,.1987. *Concepts and Schemata. An Introduction*. Casell.

Iribarren, I. (1973). *Topología en Espacios Métricos*. Ed. Limusa-Wiley.

Juan, M. T., Montoro, V y Scheuer, N. (2012). Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación Matemática, 24*(2)*,* 61-90

Juan, Ma. T. y Montoro, V. (2015, 21 de setiembre). *Cuando infinito es todo.* [Ponencia]. XXVIII Reunión de Educación Matemática - Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe. Argentina.

Katz, K. y Katz, M. (2010). When is .999... less than 1? *The Montana Mathematics*

Khoury, H. A. y Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 191–204.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thaught from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press.

Kossak, E. (1872). *Die Elemente der Arithmetik.* Nauk

Küchemann, D. E. (1981). Positive and negative number. In Hart, K. (Ed.)*, Children 's Understanding of Mathematics*, 11-16. John Murray.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). The Basic Metaphor of Infinity. In *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics in to Being*. 155-180. Basic Books.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (6). Basic Books.

Lébart, B. y Pagès, J. (1990). *Analyses factorielles simples et multiples: objectifs. méthodes et interpretation, vol 1*, p. 284. Dunod.

Lébart, L. y Salem A. (1994). *Statistique Textuelles*. Dunod.

Lébart, L., Morineau, A., y Piron, M. (1995). *Statistique exploratoire multidimensionnelle*, *(3).* Dunod

Lébart, L., Salem, A. y Bécue-Bertaut, M. (2000). *Análisis estadístico de textos* [*Statistical text analysis*]. Milenio.

Lehtinen, E., Merenluoto, K. y Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un) real numbers*. European Journal of Psychology of Education, 12(2),* 131-145.

Mainzer, K. (1991). Real Numbers*,* In H. Ebbinghaus, H. Herme, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, ... and R. Remmert (Eds.). *Numbers* (123). Springer Science and Business Media.

Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In J. Novotna (Ed.), *Proceedings ofthe 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education*,II (pp. 35-46). Prague: Univerzita Karlova Praze, Pedagogicka Faculta.

Mántica, A. M. y Carbó, A. L. (2013). Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico. *Educación matemática*, *25*(3), 27-59.

Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación*. Visor.

Marx, A. (2006), *Schlervorstellungen zu "unendlichen Prozessen*". Verlag Franzbecker

McDonald, M. A., Mathews, D., and Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in collegiate mathematics education IV(8)*, 77-102.

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A. y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(3), 329-358.

Merenluoto, K. (2003). Abstracting the density of numbers on the number line a quasi - experimental study. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty and J. Zilliox (Eds.). *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, (*3)*, 285-292.

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In M. Limon y L. Mason (Eds)*. Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, 233-258.Kluwer Academic Publishers.

Millán, D. V., Fuentes, S. R. y Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *40*(1), 179-197.

Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 239-258.

Montoro V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, *28*(4), 409-427.

Montoro, V. (1999). La teoría de conjuntos. Una mirada histórica y epistemológica. *Cuaderno Universitario*, *33*. *Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue.* ISSN 0325-6308/33

Montoro, V. y de Torres Curth, M. (1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en aprendizaje de la matemática. *Épsilon*, *15*(45)*,* 357-364.

Montoro, V. y N. Scheuer. (2006). Distintas formas de pensar el infinito. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 159-161. ISBN 970-9971-08-5

Montoro, V. y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático estudiantes universitarios de distintas carreras? *Épsilon, 60 (3),* 435-447.

Montoro, V., (2010). Concepciones de los y las estudiantes de profesorado de matemática sobre la demostración*. Epsilon,75*(2), 45-55.

Montoro, V., Cifuentes, M., Salva, N. y Bianchi, M.J., (2017). Students' understanding of thenumber line /Estudiantes pensando en la recta numérica. *Infancia y Aprendizaje. 40*(2). 302 -342. Oxford.

Montoro, V., Scheuer, N. y Echeverría, M. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática, 28*(3), 145-174.

Montoro, V.; Juan, M.T; Scheuer, N. y Baccalá, N. (2014, junio 27). *Indagación de Concepciones Sobre el Infinito Matemático en Estudiantes Secundarios y Universitarios*. [Trabajo de Investigación] II JIEM y V JEM, UNL. Santa Fé, Argentina. https://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/pdf/Eje%206_Inv%20EM/ponencia%209_Montoro%20y%20otros.pdf

Moreno-Armella, L. y Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity*. Educational Studies in Mathematics, 22,* 211-231.

Moreno-Armella, L. y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Educación Matemática, 7*(1), 12-28.

Moseley, B. (2005). Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Efects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 37–69.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational psychologist*, *40*(1), 27-52.

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 143–185.

Oktaç, A. y Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition… in research about analysis. In *The didactics of mathematics: Approaches and issues*. 87-121. Springer, Cham.

Palacios-Amaya, M., Bianchi, V. y Montoro, V. (2018). Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales. *Revista de Educación Matemátic*a, *33*(3), 5–26.

Peeters, D., Verschaffel, L., and Luwel, K. (2017). *Benchmark-based strategies in whole number line estimation*. Br. J. Psychol. doi: 10.1111/bjop.12233

Peled, I. y Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1)*,* 39-46.

Pérez-Echeverría, M. del P. y Scheuer, N. (2005). Desde el sentido numérico al número con sentido. *Infancia y Aprendizaje*, *28*(4), 393-407.

Pérez-Echeverría, M. P., Martí, E. y Pozo, J. I. (2010). Los sistemas externos de representación como herramientas de la mente. *Cultura y Educación*, *22*(2), 133-147

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*, Norton (originally published in 1941).

Piaget, J. e Inhelder, B. (1956). *The Child's Conception of Space.* Routledge and Kegan Paul (originally published in 1948).

Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *The Psychology of the Child*. Routledge and Kegan Paul (originally published in 1966).

Pozo, J. (2014) *Psicología del Aprendizaje Humano: adquisición de conocimiento y cambio personal*. Morata.

Pozo, J. I. (2002). La adquisición del conocimiento científico como un proceso de cambio representacional. *Investigações em ensino de ciências*, *7*(3), 245-270.

Pozo, J. I. y Gómez-Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Morata.

Pozo, J. I. y Rodrigo, M. J. (2001). Del cambio de contenido al cambio representacional en el conocimiento conceptual. *Infancia y aprendizaje*, *24*(4), 407-423.

Pozo, J. y Carretero, M. (1987). Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia? *Infancia y Aprendizaje (38)* 35-52.

Pozo, J. y Scheuer, N. (1999). Las concepciones sobre el aprendizaje como teorías implícitas. En: J.I. Pozo. y C. Monereo (Eds.), *El aprendizaje estratégico,* (pp. 87-108). Santillana.

Pozo, J.I. (1987). *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal.* Visor libros.

Pozo, J.I. (1999) Sobre las relaciones entre el conocimiento cotidiano de los alumnos y el conocimiento científico: del cambio conceptual a la integración jerárquica. *Enseñanza de las Ciencias, (núm. extra, junio),* 15-29.

Reina, L., Wilhelmi, M. R., Carranza, P. y Lasa, A. (2014). Construcción de la noción de número irracional en formación de profesores: conflictos semióticos y desafíos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 629-637. https://core.ac.uk/download/33252060.pdf

Reina, L., Wilhelmi, M. R. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional: Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación matemática, 24*(3), 67-97.

Richman, F. (1999). Is 0.999…= 1? *Mathematics Magazine*, *72*(5), 396-400.

Rivière, A, (1991). *Objetos con mente.* Alianza.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática*, *26*(1), 73-101.

Robinet, J. (1986). Les Réels: Quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics, 17*, 359-386.

Robinson, A. (1974). *Non-Standard Analysis*. North-Holland Pub. Co.

Rodrigo, M. J. (1997). Del escenario sociocultural al constructivismo episódico: un viaje al conocimiento escolar de la mano de las teorías implícitas. En M.J. Rodrigo y J. Arnay (Eds.). *La construcción del conocimiento escolar*, (pp. 177-191)

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias*, *14*(1), 3-14.

Romero, C. (2003). *Sobre algunos entornos de significado para los números reales,* [Ponencia P63]. *X JAEM.*, 549-564.

Romero, I (1995). *La introducción del número real en educación secundaria.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Romero, I. y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real En alumnos de secundaria: Aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las Ciencias* *17*(2), 259-272.

Rudin, W. (1990), *Principios de Análisis Matemático.* McGraw Hill.

Sacristán, A. I. (1991). Los Obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. *Educación matemática*, *3*(1), 5-18.

Santinelli, R. (1999). Números Reales. Racionales e Irracionales. Una mirada Histórica y Epistemológica. *Cuaderno Universitario, 34. Centro Regional Bariloche. Universidad Nacional del Comahue.*

Sbaragli, S. (2004). *Teachers' convictions on mathematical infinity* (Doctoral dissertation, Doctoral thesis, FMFI UK, Bratislava).

Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar Números Reales en la recta*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Scaglia, S. (2001). Estudio previo al diseño de un cuestionario*. Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada*, 195-206.

Scheuer, N. (2005). Introducción al Dossier: De las matemáticas como conocimiento lógico a las matemáticas como conocimiento sociocultural: implicancias para el estudio de la adquisición y enseñanza del número. *Infancia y Aprendizaje, 28*(4), 363-375.

Scheuer, N., Santamaría, F. y Bordoli, C. (2013). Una aproximación al universo numérico a chicos que inician la escolaridad primaria. En C. Broitman (Comp.), *Matemáticas en la escuela primaria I. Números naturales y decimales con niños y adultos*. 147-171. Buenos Aires: Paidós.

Schindler, M., y Hußmann, S. (2013). About students' individual concepts of negative integer, in terms of the order relation. In B. Ubuz, C. Haser, and M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp.373-382). Middle East Technical University. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_Schindler.pdf.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in mathematics, (22),* 1-36.

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *Learning of Mathematics*, *14*(1), 44-55.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University press.

Sfard, A. (2010). A Theory Bite on Infinity: A Companion to Falk. *Cognition and Instruction, 28*, 210-218.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* The Falmer Press.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In *International handbook of mathematics education*. 827-876. Springer.

Sierpinska, A., (1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 371-397.

Sirotic, N. y Zazkis, R. (2004). Irrational numbers: dimensions of knowledge. In *Proceedings of the Conference for Psychology of Mathematics Education*. North American Chapter, Toronto, Canada

Sirotic, N. y Zazkis, R. (2007a). The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 49-76.

Sirotic, N. y Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line where are they. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 477-488.

Sophian, C., 1996**.** What's in a Number?. In *Children's Numbers*, 3-10. Westview Press.

Spivak, M. (1991). *Cálculo Infinitesimal.* Reverte.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Steiner, R. (1984). Teaching About the Real Numbers. *The American Mathematical Monthly, 91*(3). 202-203.

Steinle, V. y Pierce, R. (2006). Incomplete or incorrect understanding of decimals: an important deficit for student nurses. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká and N. Stelíková (Eds.). *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 30*(5), 161-168.

Stevenson, W.S. (2000). *Exploring the Real Numbers*. Prentice Hall.

Tall D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*, *11*. 3-21. Springer.

Tall D. y Schwarzenberger R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching, 82,* 44-49.

Tall, D. (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of $\sqrt{2}$. In *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 203–205. Warwick.

Tall, D. (1980). The Notion of Infinite Measuring Number and Its Relevance in the Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 271–284.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies of Mathematics, 48*(2 y 3), 200-238.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (1-16). Bergen, Norway.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM*. Mathematics Education, 41*(4), 481-492.

Tall, D. (2013a). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press.

Tall, D. (2013b). Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. In M. N. Fried y T. Dreyfus (Eds.). *Mathematics and Mathematics Education: Searching for Common Ground*. Springer.

Tall, D. y Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 97-124.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics. With Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Thomaidis, Y y Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educ Stud Math, 66,* 165–183. DOI 10.1007/s10649-006-9077-6.

Tirosh, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. In D. Tall (Ed.). In *Advanced Mathematical Thinking* (199-214). Dordrecht: Kluwer.

Tirosh, D., Fischbein, E. y Dor, E. (1985). The teaching of infinity. In L. Streefiand (Ed.), *Proceedings of the 9th International Conferencefor the Psychology of Mathematics Education* (pp. 501–506). Noordwijkerhout, The Netherlands: State University of Utrecht.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. y Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. Versión digital recuperada de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Torres-Díaz, J. A. y Mora-Mendieta, L. C. (2007). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales.* Tesis de Maestría publicada en Editorial Universidad Pedagógica Nacional - Colombia.

Trejo, C. (1968). *Matemática Elemental Moderna*, *Estructura y Método*, Ed. Eudeba.

Tsamir, P. y Tirosh D. (1994), Comparing infinite sets: intuition and representation. In *Proceedings of the XVIII PME, (2)* 345-352. Lisboa,

Vamvakoussi X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14,* 453-467.

Vamvakoussi X. y Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers' interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, y X. Vamvakoussi (Eds.). *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 265-282. Elsevier.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students´ understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*, 181-209. DOI: 10.1080/07370001003676603

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. *For the learning of mathematics*, *3*(2), 31-41.

Vergnaud, G. y Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de pédagogie*, 28-43.

Veronese, G. (1994). On non-Archimedean geometry. In P. Ehrlich (Ed.). *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*, 169-187. Kluwer Academic Publishers.

Villarreal, M. E. (2014, 28 de julio). *Formación inicial de profesores de matemática: nuevas demandas y desafíos*. [Conferencia inaugural] V REPEM. Santa Rosa (La

Pampa), Argentina. URI: http://redi.exactas.unlpam.edu.ar/xmlui/handle/2013/67

Vinner S. y Dreyfus T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*, 293-305.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 195-213.

Volle, M. (1980). *Analyse des données.* Economica

Voskoglou, M. y Kosyvas, G. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *REDIMAT*, *1*(3), 301-226.

Vosniadou, S. (Ed.) (2008). *International Handbook of Research on Conceptual Change*. Routledge.

Vygotsky, (1973) *Pensamiento y Lenguaje: Teorías del Desarrollo cultural de las Funciones Psiquicas*. Pleyade.

Waldegg, G. (1993a). El infinito en la Obra Aristotélica. *Educación Matemática, 5*(3)*,* 20-38.

Waldegg, G. (1993b). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 5*, 19-36.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1*(1)*,* 107-122.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association, 58.* 236-244.

White, R. T. (1988). *Learning science*. Basil Blackwell.

White, R. T. y Gunstone, R. F. (1989). Metalearning and conceptual change. *International Journal of Science Education*, *11*(5), 577-586.

Yujing, N. y Yong-Di, Z. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 36*(2–3), 207–218.

Zazkis, R. y Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. In M.J. Hoines and A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education, 4*, 497– 505 Bergen, Norway.

Zazkis, R. y Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16,* 1 -27.

ANEXOS

Anexo I. Cuestionario original utilizado en el estudio definitivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
1972

Este cuestionario forma parte de un trabajo de investigación en el área educación matemática del Centro Regional Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue.
Solicitamos tu importante colaboración y desde ya te agradecemos tu buena voluntad. Nuestro objetivo es conocer como piensan los estudiantes como vos, con el fin de contribuir a implementar mejores formas de enseñanza. No se trata de una evaluación y tus respuestas serán dadas a conocer como pertenecientes a un estudiante anónimo.

NOMBRE: ______________________________ GÉNERO: ☐F ☐M
Colegio/Carrera______________________________Curso/Nivel: __________

¿Cuántos años tenés?
Aproximadamente: ¿cuánto medís?:
¿Cuánta pizza solés comer?
¿Cuántos amigos tenés en facebook u otra red social?
¿Cuál es tu número preferido?
Los cuatro primeros números de tu DNI son:
¿Qué porcentaje de tu día dedicás a dormir?

Por favor, menciona los tipos de números que conoces. ¿Podrías darnos un ejemplo de cada uno?

____

____

Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracionales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser "irracionales"?

____

____

¿Conoces otros números irracionales? …… ¿Cuáles?

____

Cuando decimos "un número entre 0 y 2", nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2.

¿Podrías nombrar un número entre…..

0 y 2?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
3,14 y π?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé

¿Cuántos números hay entre:

0 y 2?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
3,14 y π?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé

1

Probablemente sepas que en matemática solemos escribir al número con infinitas cifras decimales iguales a 3 como: $0,\hat{3} = 0,33333...$
El número con infinitas cifras decimales que se repiten, iguales a 32 se escribe: $0,\overline{32} = 0,323232....$
De modo que por ejemplo $2,2\hat{9} = 2,299999...$ posee infinitas cifras decimales 9 a partir de los centésimos

¿En cuál de los siguientes números hay más cantidad de cifras 3?

Comparando $0,\hat{3} = 0,33333...$ y $0,\overline{32} = 0,3232323232....$

□ Hay más en $0,\hat{3} = 0,33333...$
□ Hay igual cantidad
□ No sé
□ Hay más en $0,\overline{32} = 0,3232323232....$
□ No se pueden comparar

¿Podés explicar por qué elegiste esa opción?

____

____

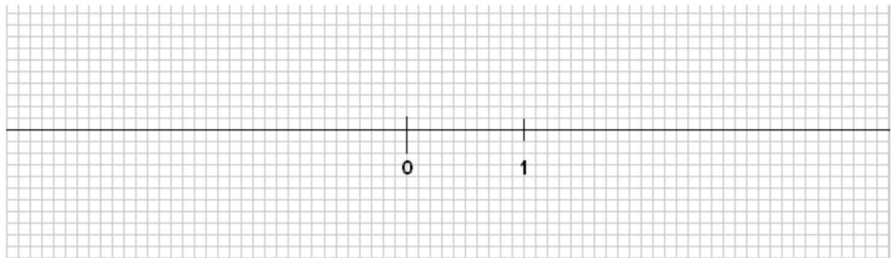
A continuación aparecen parejas de conjuntos numéricos. Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números? ¿Por favor, explicarías por qué pensás así en cada caso?

Capicúas	No capicúas	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Los números primos	Los números pares	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Naturales	Enteros	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Enteros	Racionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Racionales	Irracionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?

Durante muchos siglos una cuestión que intranquilizó a muchos matemáticos fue la representación y distribución de los números en la recta numérica.

Más abajo te ofrecemos una recta numérica. Por favor, ¿podrías representar los siguientes números en ella?

$0,2$; 2 ; -2 ; $\sqrt{2}$; ½ ; $2,2$; $2,2\overset{\frown}{9}$



Si no pudiste representar alguna de las expresiones te rogamos que para cada una de ellas llenes lo siguiente:
_______ no lo pude representar porque _____________________________________

Si fuera posible marcar sobre la recta TODAS las fracciones (números racionales), ¿la recta, se llenaría, se completaría? □ Si. □ No.
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Si además de los racionales, marcáramos todas sus raíces (cuadradas, cúbicas, etc) ¿se completaría la recta? __________. ¿Quedaría lugar para más números? __________ ¿Para cuántos? __________
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Si de la recta numérica quitásemos todas las fracciones (números racionales) ¿qué pensás que quedaría?

____

____

Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

____

____

¿Podés dibujar lo que ves?

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

____

____

En matemática solemos considerar el intervalo (1,2) como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo.
Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus alumnos sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2.

¿Qué pensás al respecto? ¿Se puede identificar el número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenezca al intervalo? ____

____

¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Comparando el número $0,\widehat{9} = 0,9999...$ con 1:

- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es mayor que 1
- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es menor que 1
- □ $0,\widehat{9} = 0,9999...$ es igual a 1
- □ son incomparables:
- □ otra posibilidad:
- □ no sé

¿Por qué pensás que esto es así?

____

Necesitamos para nuestra investigación entrevistar a algunos estudiantes que estén dispuestos a ello. Te solicitamos si es este tu caso, te asegures de haber escrito tu NOMBRE para poder identificarte.

MUCHAS GRACIAS! ! ! !

Anexo II. Métodos estadísticos multivariados

La Estadística Descriptiva Multivariada es una generalización natural de la Estadística Descriptiva tradicional univariada, pero diseñada para tratar la información concerniente a muchas variables. Brinda los medios para explorar una realidad multidimensional compleja y hacerla interpretable (Lébart et al., 1995), permitiendo el estudio de grandes masas complejas de información y la confrontación simultánea de numerosas variables.

Las técnicas del Análisis Estadístico Multivariado, o Análisis de Datos, como las denomina la escuela francesa (Benzécri, 1973; Lébart et al., 2000; Lébart y Pagés, 1990), tienen como objetivo la representación y la reducción de la información contenida en tablas de datos voluminosas y están fundamentadas en la búsqueda de representaciones geométricas (ejes y planos) que permiten la visualización gráfica de los elementos a describir y las interrelaciones existentes entre ellos.

Destaca entre estas técnicas estadísticas el Análisis Factorial de Correspondencias (Benzécri, 1973). El mismo hace posible el estudio de las asociaciones entre las distintas categorías (o modalidades) de 2 o más variables cualitativas o categóricas. Se denomina (simplemente) *Análisis Factorial de Correspondencias (AFC)* cuando trata sólo dos variables categóricas y se denomina *Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple (AFCM)*, cuando son más de dos las variables a estudiar.

AII.1. Análisis factorial de correspondencias (AFC)

El AFC se aplica, fundamentalmente, al análisis de una tabla de contingencia (o de frecuencias absolutas) que cruza las modalidades de dos variables categóricas V_1 y V_2 con p y q modalidades respectivamente, observadas sobre n individuos. Si bien, por simplicidad, el método se explicará en relación con una tabla de este tipo, también puede aplicarse a tablas con otras características, como veremos en el AFCM

Tablas de contingencia

Se parte de la tabla de contingencia N, de dimensiones pxq, tal que un elemento genérico de esta matriz es el número de individuos que poseen la modalidad de la fila correspondiente y la modalidad de la columna correspondiente.

En la Figura AII.1 se muestra una tabla de contingencia N, en la cual llamamos: n_{ij} al elemento genérico que representa la cantidad de individuos que poseyendo la modalidad i de la V_1 poseen la modalidad j de V_2; $n_{i.}$ es la frecuencia de la modalidad i de V_1, donde $n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$; n.j es la frecuencia de la modalidad j de V_2, donde $n_{.j}$ =

$\sum_{i=1}^{p} n_{ij}$; n es el número total de individuos, es la suma de todas las celdas de la Tabla N, osea

n = $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} = \sum_{i=1}^{p} n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{.j}$. Es decir que cada modalidad de V_1 se puede considerar como un vector de R^q y cada modalidad de V_2 se puede considerar como un vector de R^p.

Figura AII.1: Tabla *N* de Contingencia; n_{ij} representa el número de individuos que poseen la modalidad *i* de V_1 y la modalidad *j* de *V2*.

		Variable V_2					
		1	....	j	...	q	
Variable V_1	1	n_{11}	....	n_{1j}	....	n_{1q}	$n_{1.}$
	:	:	....	:	....	:	:
	i	n_{i1}	....	$\mathbf{n_{ij}}$	....	n_{iq}	$n_{i.}$
	:	:	....	:	....	:	:
	p	n_{p1}	....	n_{pj}	....	n_{pq}	$n_{p.}$
		$n_{.1}$	....	$n_{.j}$	....	$n_{.q}$	N

A partir de *N* se obtiene la *matriz de frecuencias relativas,* también *pxq,* tal que el elemento ij- ésimo es: $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$. Se definen, las frecuencias marginales para filas de tal manera que la frecuencia marginal de la fila *i* es: $f_{i.} = \sum_{j=1}^{q} f_{ij} = \frac{n_{i.}}{n}$ (donde $n_{i.}$ es el número de individuos que poseen la modalidad *i* de V_1); las frecuencias marginales para columnas, de manera que la frecuencia marginal para una columna *j es:* $f_{.j} = \sum_{i=1}^{p} f_{ij} = \frac{n_{.j}}{n}$ (donde $n_{.j}$ es el número de individuos que poseen la modalidad *j* de V_j).

Figura AII.2: Tabla de Frecuencias Relativas. En la celda i.j encontramos $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$.

		Variable V2					
		1	....	j	...	q	
Variable V1	1	f_{11}	....	f_{1j}	....	f_{1q}	$f_{1.}$
	:	:	....	:	....	:	:
	I	f_{i1}	....	$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$	....	f_{iq}	$f_{i.}$
	:	:	....	:	....	:	:
	P	f_{p1}	....	f_{pj}	....	f_{pq}	$f_{p.}$
		$f_{.1}$	....	$f_{.j}$	....	$f_{.q}$	1

Perfiles fila y perfiles columna

La tabla de frecuencias relativas sufre una doble transformación por un lado en perfiles fila y por otro en perfiles columna, generando dos nuevas tablas. La *tabla de perfiles filas* y la *tabla de perfiles columnas* (Figuras AII.3 y AII.4)

Un perfil *fila* es la distribución de frecuencias de la variable V_2 condicionada a una modalidad de la variable V_1. Un elemento a_{ij} de la matriz de perfiles fila, se obtiene de dividir f_{ij} por el marginal de la fila *i,* es decir: $a_{ij}=\frac{f_{ij}}{f_{i.}}=\frac{n_{ij}}{n_{i.}}$. Esto es que el perfil fila *i* es la distribución, en las distintas modalidades de V_2, de la clase de individuos que poseen la modalidad *i* para V_1. Se nombra *perfil fila medio* a la q.upla: $G_F = (f_{.1}, \dots, f_{.j}, \dots, f_{.q})$ cuyas componentes son las frecuencias marginales de las columnas.

Figura AII.3: Tabla de perfiles fila. En una celda i.j encontramos: $a_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}}$.

	1	....	j	...	q	
1						1
:						:
I			$a_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}}$			1
:						:
P						1
	$f_{.1}$	....	$f_{.j}$	....	$f_{.q}$	

Los *perfiles columna* son la distribución de frecuencias de la variable V_1 condicionada a las modalidades de la variable V_2. Un elemento b_{ij} de la matriz de perfiles columna, se obtiene de dividir f_{ij} por el marginal de la columna *j,* es decir $b_{ij}=\frac{f_{ij}}{f_{.j}}=\frac{n_{ij}}{n_{.j}}$. Esto es que el perfil columna *j* es la distribución, en las distintas modalidades de V_1, de la clase de individuos que poseen la modalidad *j* para V_2. Se define como *perfil columna medio* a la p-upla: $G_C = (f_{1.}, \dots, f_{j.}, \dots, f_{p.})$ cuyas componentes son las frecuencias marginales de las filas

Figura AII.4: Tabla de perfiles columna. En una celda *i.j* encontramos: $b_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{.j}}$.

	1	....	j	...	q	
1						$f_{1.}$
:						:
I			$b_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{.j}}$			$f_{i.}$
:						:
P						$f_{p.}$
	1	....	1	....	1	

Objetivos del método

El objetivo principal de este método es ver si existe alguna asociación o correspondencia entre las modalidades de las variables V_1 y V_2. Dos variables son *independientes* (ausencia de vínculo entre ellas) si la frecuencia relativa es igual al producto de las marginales, para todas las filas y columnas. Es decir: si $f_{ij} = f_{i.}.f_{.j}$ (para todo i y j).

Esto último coincide con la independencia en términos de probabilidad. Existirá, entonces relación entre las dos variables cuando alguno de los valores f_{ij} sea distinto de $f_{i.}.f_{.j}$. Si f_{ij} es mayor que el producto $f_{i.}.f_{.j}$ tendremos que las modalidades *i* de V_1 y *j* de V_2 se atraen y si es menor estas modalidades se oponen.

Este método permite hallar una tipología de perfiles fila, una tipología de perfiles columna y relacionar ambas tipologías. Para hallar una tipología de perfiles fila (o perfiles columna), diremos que dos perfiles fila (o perfiles columna), se consideran semejante si se asocian del mismo modo al conjunto de perfiles columna (o perfiles fila), es decir si se asocian *demasiado* o *demasiado poco* (con respecto a la situación de independencia) a los mismos perfiles columna (o perfiles fila).

Cada perfil fila es representado como un punto del espacio R^q, cada una de sus coordenadas está asociada a una modalidad de la segunda variable (V_2). Mientras que cada perfil columna es representado como un punto del espacio R^p y cada una de sus coordenadas está asociada a una modalidad de la primera variable (V_1).

Semejanza entre perfiles

En el AFC la semejanza entre dos filas o entre dos columnas está definida por una distancia entre sus perfiles (considerados como puntos de R^q y R^p respectivamente), esta distancia se la conoce con el nombre de distancia del Ji Cuadrado (χ^2).

$$d\chi^2 \text{ (perfil fila i ; perfil fila k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f_{\cdot j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} - \frac{f_{kj}}{f_{k.}}\right)^2}$$

El cuadrado de esta distancia es una suma ponderada de los cuadrados de las diferencias término a término entre los dos perfiles, es decir el cuadrado de una distancia euclídea ponderada entre perfiles.

$$d^2(i,k)= \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f_{\cdot j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} - \frac{f_{kj}}{f_{k.}}\right)^2 \text{ ; } d^2(j,l)= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{f_{i.}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{.j}} - \frac{f_{il}}{f_{.l}}\right)^2$$

La distancia χ^2 (para perfiles fila) posee las propiedades de una distancia euclídea y confiere a R^q la estructura de espacio euclídeo. La suma de las coordenadas de cada perfil fila vale 1, por lo tanto, la nube de puntos (perfiles fila) está incluida en un hiperplano. el centro de gravedad de la nube es el perfil fila medio.

El papel de los perfiles pila o columnas es totalmente simétrico, por lo que se tiene un papel similar para la distancia para perfiles polumna en $R^{p,}$ es decir que R^p adquiere estructura de espacio Euclídeo y se obtiene una nube de puntos que representan los perfiles columna en un hiperplano de R^p, cuyo centro de gravedad es el *perfil columna medio.*

Perfiles fila y columnas centrados.

El siguiente paso es centrar la nube de perfiles fila (o columnas), haciendo una traslación del origen de coordenadas al centro de gravedad de la nube. De tal modo que los perfiles fila centrados tendrán como nuevas coordenadas: $a'_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} - f_{.j}$. y los perfiles columna centrados tendrán como nuevas coordenadas $b'_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} - f_{i.}$.

Inercia total de la nube de perfiles e inercia proyectada sobre un eje

La distancia χ^2, nos permite estudiar la dispersión de los perfiles fila (o columnas) respecto del perfil fila medio (o columna).

Se define como *inercia total de la nube* de perfiles a la sumatoria de los cuadrados de las distancias entre los perfiles fila y el perfil fila medio, ponderados por el peso de la respectiva fila. Se puede demostrar que este valor es igual a la sumatoria de los cuadrados de las distancias entre los perfiles columna y el perfil columna medio, ponderados por el peso de la respectiva columna.

$$I = \sum_i f_{i.} .\ d^2(i,G_F) = \sum_i f_{.j} .\ d^2(j,G_c) = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij}-f_{i.}.f_{.j})^2}{f_{i.}.f_{.j}}$$

El estadístico χ^2mide la desviación de los efectivos observados respecto de los efectivos teóricos que se obtendrían, en media, si las variables fueran independientes:

$$\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(n.f_{ij} - n.f_{i}.f_{.j})^2}{n.f_{i}.f_{.j}} = n.\sum_{ij} \frac{(f_{ij} - f_{i.}.f_{.j})^2}{f_{i.}.f_{.j}}$$

Es decir, Inercia total de la nube es $I = \frac{\chi^2}{n}$ y representa la "relación" entre las dos variables. En el caso de la independencia total tendríamos una inercia igual a 0.

Se define como Inercia de la nube de perfiles fila (o de los perfiles columna) proyectados sobre un eje k (una determinada dirección en R^q) a:

$I_k=\sum_{i=1}^{p} f_{i.}(F_k(i))^2$ (o: $I_k=\sum_{j=1}^{q} f_{j.}.(F_k(.j))^2$)

donde $F_k(i)$ es la coordenada de la proyección del perfil fila i-ésimo sobre el eje k. (o $F_k(j)$ es la coordenada de la proyección del perfil columna j-ésimo sobre el eje k).

Planos y ejes factoriales

El AFC proporciona representaciones planas aproximadas de la nube de perfiles, es decir permite visualizar las proximidades entre perfiles fila, entre perfiles columna y entre perfiles fila y perfiles columna mediante proyecciones sobre planos, llamados *planos factoriales*. Para realizar estas representaciones se busca un conjunto de ejes ortogonales sobre los que se proyectará la nube de puntos. Dichos ejes se construyen bajo la condición de hacer máxima la inercia de la nube proyectada y bajo la restricción de ortogonalidad. A estos ejes se les denomina *ejes factoriales*. la solución a este problema desde el Álgebra Lineal puede verse en Baccalá y Montoro (2008).

Factores e interpretación de la inercia en relación con estos

Se denomina *factor* al vector (de R^p) conformado por las coordenadas de los perfiles fila (o columnas) sobre algún eje factorial. La inercia proyectada sobre un factor (sobre la dirección del factor) representa la “importancia” de este en la “relación” entre las variables. la inercia máxima sobre un factor es 1. Cuando la inercia proyectada sobre un factor vale 1 pone de manifiesto una situación de extrema dependencia de un grupo de modalidades de V_1 con un grupo de modalidades de V_2. La situación de extrema dependencia tendría una tabla diagonal y todos los factores tendrían una inercia proyectada igual a 1.

Por la condición de ortogonalidad impuesta a los ejes factoriales, habrá que tener en cuenta que un factor *s* traduce las tendencias residuales no consideradas en los factores precedentes. El interés de un eje factorial está determinado, fundamentalmente, por el número de elementos que lo configuran. Cuanto mayor sea el número de estos (filas o columnas) que contribuyen a definir la inercia a lo largo de un eje, mayor es su interés. Es en efecto que ese eje sintetiza un extenso grupo de relaciones entre modalidades de las variables consideradas (Crivisqui, 1993. p.196.-97).

Representación simultanea de perfiles fila y perfiles columna

Debido al centrado de la nube de perfiles (fila o columna), se puede interpretar a los ejes factoriales como las direcciones de máximo alargamiento de la nube y como aquellas direcciones que logran que las distancias entre las proyecciones de los perfiles se parezcan los más posibles a las distancias entre los mismos perfiles. Buscar las direcciones de Inercia máxima proyectada, en la nube centrada, pone de manifiesto los perfiles que más se desvían del perfil medio. La suma de todas las inercias proyectadas es igual a la inercia total de la nube.

Dado un conjunto de ejes factoriales, los perfiles fila y los perfiles columna se pueden proyectar simultáneamente, lo que permite visualizar proximidades entre perfiles fila, proximidades entre perfiles columna y relación entre ellos.

Puede demostrarse que salvo por una dilatación la representación de una modalidad *i* de V_1 es el centro de gravedad de las modalidades de la variable V_2 cuando se ponderan con la frecuencia de cada modalidad j para los individuos que toman la modalidad *i*.

Dos filas (o columnas) cercanas en el gráfico se interpretan en términos de perfiles fila similares (o perfiles columna similares). Entre filas y columnas, se interpreta en términos de baricentro o “centro de gravedad”. Ya que una fila (o columnas) será el baricentro de las columnas (o filas) cuando éstas se ponderan con su frecuencia relativa a la dicha fila (o columna). Es decir que cuanto mayor sea esa frecuencia relativa, la columna (o fila) estará más cerca de la fila (o columna) considerada.

Sobre un factor, del mismo lado que la fila *i* se encuentran las columnas asociadas a ella y del lado opuesto las columnas a las que menos se asocia. Una fila estará más cerca de las columnas para las cuales el f_{ij} es mayor.

Puede demostrares que las inercias proyectadas a ejes del mismo rango en cada nube es la misma. Los Factores sobre las filas y sobre las columnas del mismo rango deben ser interpretados conjuntamente ya que poseen la misma parte de la relación expresada en términos de perfiles fila o perfiles columna.

Ayudas a la interpretación

En los planos factoriales obtenemos una imagen aproximada de la nube de puntos mediante su proyección sobre el mismo, para evitar distorsiones de gran magnitud se busca tener una medida de cuan ajustada es esta representación a la forma de la nube, es decir una medida de la calidad de representación tanto para cada uno de los puntos como para el conjunto de la nube. Por otra parte, en los planos factoriales se representan las coordenadas de los puntos y no las medidas de inercia que los han determinado; por lo cual para interpretar correctamente los gráficos es necesario tener en cuenta esas medidas de inercia.

Calidad de representación de un elemento en un eje y en un plano.

La calidad de representación de *i* en el Eje *s* se mide por la razón:

CR = inercia de la proyección de i sobre el Eje s / inercia total de i

Coincide con el cuadrado del coseno del ángulo que forman *oi* y el eje *s*

$CR = \frac{(oF_s(i))^2}{(oi)^2} = cos^2\theta$ (donde $F_s(i)$: proyección de *i* sobre el eje *s*).

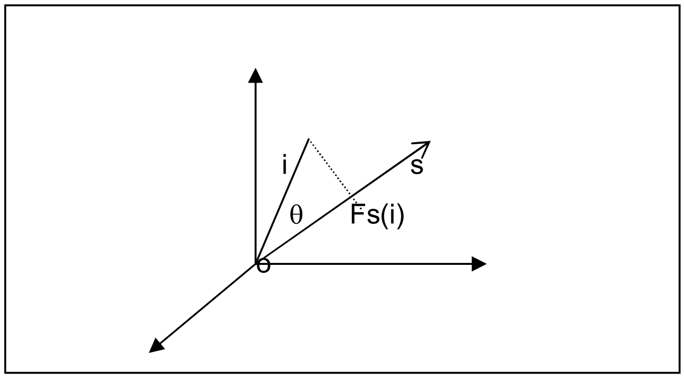


Figura AII.5: Calidad de representación de un elemento en un eje

Esta definición se generaliza para el caso de un plano. Debido a la ortogonalidad de los ejes factoriales, la calidad de representación del elemento *i* en un plano factorial (Eje *s*, Eje *t*) es la suma de las calidades de representación de *i* en el eje *s* y en el de *t*. Es también el coseno cuadrado del ángulo entre el vector *oi* y el plano de proyección. Si la calidad de representación de un punto en un eje o en un plano se acerca a 1, es que el punto se halla realmente muy próximo a dicho eje o plano.

Porcentaje de la Inercia total de la nube absorbido por un eje.

La definición anterior se generaliza al conjunto de la nube mediante la razón: *Inercia de la proyección de la nube en el eje / inercia total de la nube*

Este indicador, llamado porcentaje de inercia asociado a un eje, mide la "importancia" de un eje en la variabilidad de los datos. Estos porcentajes se pueden sumar cuando se refieren a varios ejes, de esa manera se hablará del porcentaje de inercia asociado a un plano o a los S primeros factores. Este porcentaje de inercia es utilizado para seleccionar la cantidad de ejes que se tendrán en cuenta para la interpretación de los datos.

Contribución de un elemento a la inercia de un eje

Un eje factorial maximiza (bajo la restricción de ortogonalidad a los ejes que le preceden) la inercia proyectada de una nube. Esta inercia de la nube se puede descomponer aditivamente punto por punto. El cociente de la inercia de la proyección del elemento i en el eje s por la inercia de la proyección de toda la nube sobre ese eje, mide la contribución del elemento i a la inercia del eje s. Este indicador se generaliza a subconjuntos de elementos. La contribución de cada conjunto a la inercia de un eje es la suma de las contribuciones de los elementos que lo componen. Esta relación es muy útil para resaltar subconjuntos de elementos que protagonicen la construcción del eje y en los que la interpretación se apoyará en primer lugar.

Elementos suplementarios o ilustrativos

Se suele utilizar la técnica de los elementos suplementarios o ilustrativos, que consiste en proyectar sobre los ejes factoriales, perfiles fila o columnas que no intervinieron en el cálculo de los ejes. Una fila (columna) suplementaria estará relacionada con las columnas (filas) activas en términos de baricentro.

Se suele considerar como filas o columnas suplementarias o ilustrativas a las filas o columnas que aporten poca información y que sin embargo interesa comparar con las que si aportan. También, la proyección de perfiles como suplementarios cumple varias funciones, como son por ejemplo la de "ilustrar" la estructura de la información con otras categorías o la de crear contrastes, o producir comparaciones que enriquezcan lo observado.

AII.2. Análisis factorial de correspondencias múltiple (AFCM)

El AFCM es un método estadístico multivariado que permite describir las relaciones entre más de dos variables categóricas y está particularmente adaptado al procesamiento de datos surgidos de encuestas. Es decir, permite estudiar una población de n individuos descriptos por k variables cualitativas

En las encuestas, generalmente se tiene *n* individuos que responden *k* preguntas (variables) las cuales presentan opciones de respuestas (las modalidades de cada variable) y los individuos eligen una y sólo una de estas modalidades para cada variable.

En el AFCM se efectúan tres tipos de estudio:

- *Estudio de los individuos*: Este análisis nos da una tipología de los individuos basada en que dos individuos se parecen más cuanto compartan mayor cantidad de modalidades.
- *Estudio de las variables*. Se puede estudiar desde dos puntos de vista: Uno desde el balance de la relación entre las variables categóricas estudiadas y el otro consiste en encontrar un pequeño número de variables numéricas (factores) que resuman el conjunto de variables.
- *Estudio de las Modalidades*: También se pueden estudiar desde dos puntos de vista: uno respecto a los individuos, donde dos modalidades se parecen tanto más cuanto mayor es su presencia o ausencia simultánea en un gran número de individuos, y otro, respecto a la relación con otras modalidades.

Presentación de los datos

Los datos son recogidos en una *Tabla Disyuntiva Completa* (TDC), en la cual las filas representan los individuos y las columnas las modalidades de las k variables. Tendremos tantas columnas como la suma de las modalidades de las *k* variables, supongamos *m* modalidades.

Figura AII.6: Tabla disyuntiva completa de los datos del AFCM. El elemento x_{ij} es *1* o *0* según el individuo *i* posea o no la modalidad j.

Individuos	Variable 1	....	Variable t	....	Variable k	
	1		..... j		.... m	Marginal
1			:			k
:			:			:
i	0...1..0....0		..... x_{ij}		0 ....1...0...0	k
:			:			:
n			:			k
	$n_{.1}$		... $n_{.j}$		.... $n_{.m}$	nk

El elemento x_{ij} (intersección de la fila *i* con la columna *j*) puede tomar los valores 0 o 1, toma el valor 0 cuando el individuo *i* no posee la modalidad *j* y el valor 1 si el individuo *i* posee la modalidad *j.* De tal manera que en cada fila figuran un 1 por cada variable y sólo uno, dado que las modalidades son mutuamente excluyentes dentro de cada variable.

AFC de la tabla disyuntiva completa

El AFCM consiste en realizar un AFC de la tabla disyuntiva completa de los datos. Dado que la TDC es de otra naturaleza que una tabla de contingencia (ver AII.2) este AFC debe ser reinterpretado.

Los individuos son representados por vectores en R^m cuyas coordenadas son 0 o 1. Es decir que un individuo estará representado por las modalidades que posee, y se asemejan tanto más cuantas más modalidades posean en común.

El marginal de una fila *i* (individuo *i*) será $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = k$, es decir todos los marginales son iguales a *k* y la suma de los marginales de los individuos es *n.k,* mientras que el marginal de una columna *j* (modalidad *j*): $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n_j$. Los marginales de todas las modalidades de una variable suman *n,* por lo que la suma de todas los marginales de las modalidades es *n.k*

La matriz de *perfiles individuo* tendrá como elementos los $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{k}$, es decir serán vectores de R^m con componentes 0 o $\frac{1}{k}$, cada individuo seguirá siendo representado por las modalidades que posee. La matriz de *perfiles modalidades* tendrá como elementos los $b_{ij} = \frac{x_{ij}}{n_j}$, es decir serán vectores de R^n con componentes 0 o $\frac{1}{n_j}$. El *perfil individuo medio* es un vector cuyo elemento j.esimo: $c_j = \frac{n_j}{n.k}$ y el *perfil modalidad medio* será un vector de R^n con todas sus componentes $\frac{1}{n} = \frac{k}{n.k}$.

Distancia entre individuos y entre modalidades

En este caso, el cuadrado de la distancia definida para el AFC entre el individuo *i* y el *p* tendría la expresión:

$$d^2(i,p) = \sum_j \frac{1}{c_j}\left(\frac{x_{ij}}{k} - \frac{x_{pj}}{k}\right)^2 = \sum_j \frac{n.k}{n_j}\left(\frac{x_{ij}}{k} - \frac{x_{pj}}{k}\right)^2 = \frac{1}{k}\sum_j \frac{n}{n_j}\left(x_{ij} - x_{pj}\right)^2$$

donde $x_{ij} - x_{pj}$ es 0 cuando la modalidad *j* la poseen los dos individuos o ninguno de los dos y es 1 sólo en el caso de que la modalidad *j* sea poseída sólo por uno de los individuos; por lo que esta distancia crece con el número de modalidades que difieren entre estos individuos. Una modalidad *j* intervine con el peso $\frac{n}{n_j}$ que es la inversa de su frecuencia. La presencia de una modalidad rara aleja a sus poseedores de los demás individuos; el peso de cada individuo es constante igual a $\frac{1}{k}$.

Por lo que esta distancia es satisfactoria con los objetivos planteados. El cuadrado de la distancia entre dos modalidades *j* y *h* está dado por la expresión:

$$d^2(j,h) = \sum_i n\left(\frac{x_{ij}}{n_j} - \frac{x_{ih}}{n_h}\right)^2$$

Desarrollando el cuadrado, usando el hecho que $x_{ij}^2 = x_{ij}$ y distribuyendo la sumatoria tendríamos:

$$d^2(j,h) = n.\left[\sum_i \frac{x_{ij}}{n_j^2} + \sum_i \frac{x_{ih}}{n_h^2} - 2\sum_i \frac{x_{ij}.x_{ih}}{n_j.n_h}\right] = n.\left[\frac{n_j}{n_j^2} + \frac{n_h}{n_h^2} - 2\frac{1.}{n_j.n_h}\sum_i x_{ij}.x_{ih}\right] =$$

$$= \frac{n}{n_j.n_h}\left[n_j - \sum_i x_{ij}.x_{ih} + n_h - \sum_i x_{ij}.x_{ih}\right]$$

dado que $\sum_i x_{ij}\, x_{ih}$ es el número de individuos que poseen ambas modalidades, el corchete representa el número de individuos que poseen una y sólo una de las modalidades *j, h.*

Tenemos entonces que la distancia entre modalidades crece con el número de individuos que poseen una y sólo una de las modalidades y decrece con el efectivo de cada modalidad. Dos modalidades de una misma variable están obligadamente alejadas; dos modalidades poseídas por los mismos individuos se confunden; las modalidades raras están alejadas de todas las demás. Esta distancia se adapta a los objetivos planteados. El peso de cada modalidad es: $\frac{n_j}{n.k}$.

Similarmente a lo ocurrido en el AFC una modalidad (excepto por una dilatación) es el centro de gravedad de los individuos que la poseen. Interpretadas de esta manera tendremos que dos modalidades están próximas cuando se asocian de la misma manera al conjunto de modalidades. En la práctica la proximidad de dos modalidades de una misma variable se interpreta como semejanza entre dos clases de individuos y la proximidad de modalidades de distintas variables se interpretan como asociación entre modalidades. (Escofier y Pagés, 1990)

Las modalidades de una misma variable tienen como centro de gravedad el centro de gravedad de la nube y son ortogonales entre sí, por lo que no es posible que 3 o más modalidades de una variable estén bien representadas por un mismo factor, para representar correctamente 3 modalidades de una misma variable necesitamos al menos un plano.

Inercia de la nube de modalidades

Una modalidad influye en la construcción de los ejes factoriales por su aporte a la inercia de la nube de modalidades. Esto es para la modalidad *j*: $I_j = \frac{n_j}{k} \sum_i \left(\frac{x_{ij}}{n_j} - \frac{1}{n}\right)^2$

desarrollando el cuadrado, distribuyendo la sumatoria y considerando que

$(x_{ij})^2 = x_{ij}$, tenemos que: $I_j = \frac{n_j}{k} . \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n} - 2\frac{1}{n}\right) = \frac{n_j}{k}\left(\frac{n-n_j}{n}\right) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{n_j}{n}\right)$

Con lo que vemos que en la medida que n_j sea muy pequeño, la contribución será mayor es decir la contribución de una modalidad a la formación de los ejes aumenta cuanto más disminuye la frecuencia absoluta de esta modalidad. Para evitar que las modalidades raras (contestadas por muy pocos individuos) intervengan en la formación de los ejes y con ellos pongan de manifiesto fenómenos muy particulares en detrimento de los más generales, las modalidades raras (contestadas por muy pocos individuos, 2 o menos) suelen ser fusionadas con alguna otra modalidad.

La inercia total de la nube será la sumatoria del aporte de todas las modalidades, es decir: $\sum_j \frac{1}{k}\left(1 - \frac{n_j}{n}\right) = \frac{m}{k} - 1$

Factores del AFCM

Un aspecto importante del AFCM es el de que permite establecer *variables sintéticas* que resuman el conjunto de variables y estén relacionadas lo más posible con las variables iniciales. Veremos que los factores del AFCM son las variables numéricas más relacionadas con el conjunto de variables cuantitativas. Para ello se usa la razón de correlación como una medida de esta relación.

Una variable categórica define una partición en el conjunto de individuos en tantas clases como modalidades posea. La inercia total (o varianza) de una variable numérica puede expresarse como la suma de la Inercia Inter (la inercia de los centros de gravedad de las clases) respecto del centro de gravedad de la nube y la Inercia Intra (la inercia de los individuos respecto del centro de gravedad de su clase).

La *razón de correlación* se define como el cociente entre la Inercia Inter y la Inercia Total, varía entre 0 y 1. Si es próximo a 1 los individuos de una misma clase están muy reagrupados y las clases están separadas entre sí: esto representa una relación muy fuerte entre la variable numérica y la variable categórica; cuando la razón de correlación es cercana a 0 los individuos de una misma clase están muy dispersos y los centros de gravedad de las clases están muy próximos al centro de gravedad de la nube en general.

La cantidad maximizada por los ejes factoriales es la inercia proyectada de la nube. Reagrupando las modalidades de una misma variable, y dado que la contribución de una variable a la inercia de un factor es la suma de las contribuciones de todas sus modalidades, este criterio no es otro que la media de las razones de correlación entre el factor y cada una de las variables. De ahí resulta que los factores del AFCM son estas variables sintéticas buscadas. El valor propio asociado a un factor es igual a la media de las razones de correlación entre el factor y cada variable. En general en un AFCM los valores propios son débiles y regularmente decrecientes.

Tomando los *ejes factoriales* dos a dos (dirección de los Factores) pueden definirse planos, denominados *planos factoriales.*

Práctica del AFCM

Tendremos *m –k = r* autovalores no nulos (r es el rango de la matriz a diagonalizar). La suma de los autovalores (es decir la inercia total) es igual a: $\frac{m}{k} - 1 = \frac{r}{k}$. La media de los autovalores no nulos es $\frac{1}{k}$ por lo que un criterio de selección para los ejes a conservar podría ser conservar aquellos que corresponden a autovalores má grandes que $\frac{1}{k}$, otro criterio válido y a menudo utilizado, consiste en considerar el decrecimiento de los autovalores. (Fine, 1996).

Modalidades suplementarias o ilustrativas

Luego de obtenidos los planos factoriales es posible proyectar sobre ellos modalidades suplementarias, que no intervienen en la formación de los ejes y observar la relación de estas con los factores y con las modalidades activas en el análisis.

Por ejemplo, en el caso en que, además de las modalidades de respuesta a una encuesta, tomadas como modalidades activas del AFCM, se tienen modalidades de características de los individuos que responden la encuesta, es útil proyectar estas modalidades de caracterización de la población como modalidades suplementarias. Tomando como activas las modalidades de respuesta tendremos una apreciación de cómo se distribuye la población observada en función de sus respuestas, al proyectar las modalidades de características, el investigador podrá ilustrar quienes son esos individuos que se distribuyen de esa manera. Las modalidades suplementarias ilustran la composición de la tipología de los individuos observados en la medida en que la proyección de esas modalidades suplementarias permite observar la asociación existente entre cada variable de caracterización de la población (considerada aisladamente) y la estructura de respuesta de esa población (Crivisqui, 1993).

Se calcula para cada modalidad suplementaria el *valor test*, que corresponde a la observación de una variable centrada reducida con la hipótesis que se extraiga al azar, dentro de los n individuos los n_j individuos de la modalidad considerada. Valores test más grandes que 2 en valor absoluto permiten rechazar la hipótesis de una extracción al azar con un umbral del 5%.

AII.3. Clasificación de los individuos posterior a un análisis factorial

El objetivo de este estudio es realizar una clasificación de los individuos a partir de sus distancias dos a dos. El método utilizado consiste en realizar una partición en el conjunto de individuos basada en las distancias entre las proyecciones de los puntos sobre un determinado número de ejes factoriales, de manera que en cada clase queden agrupados los individuos más cercanos. Recordemos que estos ejes constituyen las variables numéricas más correlacionadas con las variables cualitativas originales.

El método que se utilizó en esta tesis es un método de Clasificación *Jerárquica Ascendente.* Este método empieza desde la partición de todos los individuos por separados y agrupa en cada paso a los dos *más próximos.* En particular se trató del método de *agregación de Ward* (Ward, 1963; Lébart et al., 1995), que consiste en comenzar con una partición del conjunto de puntos (individuos) de manera que cada uno de ellos sea el único elemento de cada una de las clases, el siguiente paso agrupa en una nueva clase los dos puntos más cercanos en un nuevo punto que es el centro de gravedad de estos, asignándole un peso igual a la suma los individuos que se agrupó. Luego en cada etapa reúne los grupos más próximos en su centro de gravedad y le asigna la suma de los pesos, así siguiendo hasta obtener una sola clase constituida por todos los puntos.

Este método se funda en la noción de inercia intra-clase y la inercia interclases. Esto es, si tenemos $\{x_i / i=1.......n\}$, n individuos en el espacio Euclídeo R^p el centro de gravedad de la nube de puntos será: $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ y la Inercia total de la nube de individuos es: $I = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(g, x_i)$.

Supongamos que tenemos una partición en H clases; denominamos A_h a la clase h, n_h y g_h al número de individuos de A_h y al centro de gravedad de A_h, respectivamente. La inercia de A_h es $I_h = \frac{1}{n_h}\sum_{x_i \in A_h} d^2(g_h, x_i)$

Definimos la *inercia inter-clases* como la suma de los cuadrados de las distancias del centro de gravedad de cada clase al centro de gravedad de la nube ponderados por el peso de cada clase. Es decir: $I_{inter} = \sum_{h=1}^{H} \frac{n_h}{n} d^2(g, g_h)$ y la Inercia intra-clase como la suma de la inercia de cada clase ponderada por el peso de cada clase $I_{intra} = \sum_{h=1}^{H} \frac{n_h}{n} I_h$. Tenemos entonces que: $g = \sum_{h=1}^{H} \frac{n_h}{n} g_h$ y $I = I_{inter} + I_{intra}$

Al comenzar la partición, cada clase está constituida por un individuo y la inercia *intra-clase* es cero (por ser cero la inercia de todas las clases), mientras que la inercia *inter-clases* es igual a la *inercia total.* Al finalizar la partición está constituida por sólo una clase que agrupa a todos los individuos, por lo que la inercia *intra-clase* es igual a la *inercia total* y la inercia *inter-clases* es nula.

Este método propone, en cada etapa, reagrupar los individuos (o las clases) minimizando la pérdida de inercia *inter-clases*, es decir maximizando la ganancia de inercia *intra-clase*.

Si reagrupamos las clases A y B tendremos una variación de la inercia, se puede probar (Volle, 1980) que esta será: $\delta = \frac{p_A \cdot p_B}{p_A + p_B} d^2(g_A, g_B)$ donde $p_A = \frac{n_A}{n}$ y $p_B = \frac{n_B}{n}$ son los pesos de las clases.

Se trata entonces en cada etapa calcular este valor para cada par de clases y reagrupar aquellas que tengan el índice mínimo. Este índice es una medida de la distancia entre sujetos o grupos de sujetos que se fusionan en la iteración correspondiente. Si se detiene el proceso en un determinado paso se obtiene una clasificación en k clases.

La representación gráfica de estos índices es a través de un *dendograma o árbol de clasificación*, que consiste en representar a cada individuo con su correspondiente índice de nivel. Corresponde al investigador/a decidir donde considera se debe cortar el proceso y conviene que esto se haga a un nivel de agregación donde el índice de no sea muy elevado, es decir aun sea baja la transformación de las distancias iniciales entre los objetos. Descartando de esta manera las iteraciones en que se agrupan individuos (o grupos de individuos) muy distantes entre sí.

AII.4. Estadística textual o lexicometría

Lébart y Salem (1994) dan el nombre de Análisis Estadístico de Datos Textuales o Lexicometría a la aplicación de métodos estadísticos para el estudio de textos. El texto se analiza a partir de recuentos o frecuencias (de sus diferentes partes o particiones), esto es la *variable textual* es *cualitativa*.

El análisis estadístico de datos textuales es un área de la Estadística que es una herramienta muy útil para analizar las respuestas a preguntas abiertas realizadas en encuestas. La lexicometría trata de alejar la mirada subjetiva del investigador (Bécue- Bertaut, et al., 1992) y analizar los datos textuales después de diversas codificaciones a fin de obtener información sobre frecuencia de palabras, contexto en el que se hallan, frecuencia de dichos contextos, riqueza del vocabulario, etc. Estas frecuencias son posteriormente analizadas utilizando técnicas estadísticas cualitativas multivariadas (Benzecri, 1973), que son de mucha utilidad para el análisis estadístico del texto

El corpus. Partición del corpus y unidades léxicas

El *corpus* es el punto de partida para el análisis de datos textuales. Se llama *corpus* al conjunto de textos que serán objeto de estudio, en nuestro caso las respuestas a preguntas abiertas. Una vez definido el *corpus* es necesario identificar unidades en la cadena textual que permitan realizar recuentos utilizables en los análisis estadísticos posteriores, esta operación consiste en desglosar el texto en unidades de observación.

La Estadística en todas sus aplicaciones requiere la partición del corpus; no podrá operar sino hasta que la continuidad del lenguaje es quebrada o particionada ya que trabaja con el recuento o frecuencias de esas particiones mínimas (Lébart et al., 2000). Se definen como unidades léxicas a: las *formas gráficas o* palabras y los segmentos. En nuestro caso siempre utilizamos la *palabra*, que es una secuencia de letras delimitada a la izquierda y a la derecha, por un blanco o un signo de puntuación. La palabra así definida se denomina: *forma gráfica.*

Otra unidad léxica a considerar es el *segmento* que es una secuencia o una sucesión de formas gráficas. La partición del corpus en segmentos produce unidades léxicas que se solapan. Esto se debe tener en cuenta a la hora de realizar el análisis porque en estoscasos hay que decidir cuáles son los segmentos significativos para el estudio. Es importante aclarar que la partición del corpus en palabras o segmentos no tiene el mismo estatus. Una vez identificado el corpus y teniendo en cuenta cuales son las unidades léxicas y los delimitadores procedemos a definir las características de este.

Caracterización del corpus

El corpus presenta diferentes características que son necesarias identificar, ya que informan sobre la estructura de este. Una *ocurrencia* es la aparición de una forma gráfica en un corpus. Si consideramos al corpus como un conjunto de formas gráficas, el número total de ocurrencias es la cardinalidad de dicho conjunto. El número total de ocurrencias contenidas en el texto es su tamaño o longitud.

Se define *vocabulario* del corpus como el conjunto de las formas gráficas distintas que lo conforman. Las formas gráficas del corpus pueden listarse en *orden de frecuencia*, obteniendo así un *glosario o repertorio* de las formas del corpus ordenado según la *frecuencia* en orden decreciente. Para aplicar algunas técnicas estadísticas donde se comparan perfiles léxicos, sólo tienen sentido las formas que aparecen con una frecuencia mínima. Para ello se elige un *umbral de frecuencias*

Análisis del corpus

Tabla léxica y Tabla léxica agregada

Para el análisis estadístico del corpus se construye la *tabla léxica.* El corpus particionado (formas gráficas o segmentos) se presenta como una tabla *Z* que tiene tantas filas como individuos (o encuestados) y tantas columnas como formas (o palabras). La tabla léxica = **Z** (nxV) es la tabla de Individuos x formas donde: z_{ij}: número de veces que la forma *j* ha sido dicha por el encuestado *i* ; $z_{i.}$: el número total de palabras que dice el individuo i ; $z_{.j}$: el número total de veces que se dice la forma *j*. $z_{..}$: la longitud total del corpus; n= número total de individuos encuestados; V= número de palabras distintas después del umbral

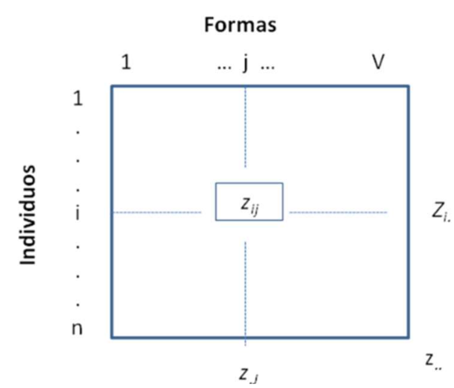


Figura AII.7: Tabla de individuos x formas o tabla léxica (**Z**).

Si las respuestas son numerosas y cortas, esta tabla es muy dispersa y se podrá almacenar en una forma condensada. Las respuestas se pueden agrupar en categorías que se denominan textos. Los textos pueden corresponder a partes naturales de un corpus (capítulos, artículos, discursos, entrevistas, etc.) o haber sido creadas mediante agrupamientos de los individuos por alguna variable de caracterización.

Para comparar las partes del corpus se contrastan los perfiles léxicos de los textos, que se pueden representar en la tabla léxica agregada que contiene las frecuencias de las formas en cada parte: la tabla de contingencia formas*textos (T), contiene en la casilla (ij) la frecuencia con la que la forma i se encuentra en el texto j.

Denotamos mediante: *tij* el número de veces que la forma *i* es dicha en el texto *j*; $t_i.$ la frecuencia de la forma *i* en todo el corpus; *t.j* el número de formas dichas por el texto *j* y *t..* la longitud total del corpus.

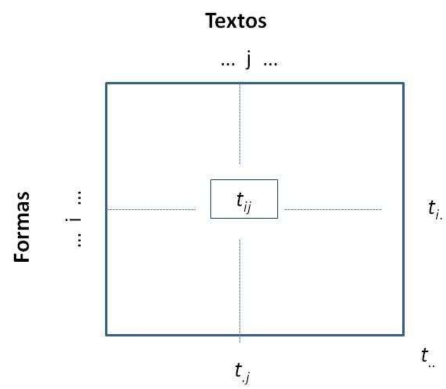


Figura AII.8: Tabla de frecuencias de formas*textos o tabla léxica agregada (**T**).

La estadística multivariada y su aplicación una tabla léxica

El desarrollo de los métodos del análisis de datos multivariados clásicos, o del análisis de datos (de acuerdo con la terminología francesa) son muy útiles para el tratamiento estadístico de los datos provenientes de encuestas (y textuales), al brindar al usuario panoramas globales de representación de la información, permitiendo describir estructuras de comportamiento. Estos métodos permiten describir una realidad compleja: la realidad multivariada, dado que su objetivo es visualizar las *proximidades* entre las filas y las columnas de una matriz de datos, representándolas en un subespacio de *dimensión menor* (generalmente un plano) con la *menor pérdida de información*.

Las técnicas multivariadas permiten aplazar la necesaria intervención interpretativa del usuario y proporcionan herramientas para analizar textos de diversa naturaleza: textos literarios, documentos o respuestas a preguntas abiertas, etc.

Este análisis permitirá responder a: ¿Qué personas o qué textos utilizan un vocabulario similar y emplean palabras distintas con frecuencias parecidas?, esto es ¿ qué textos presentan un perfil léxico similar? ¿Qué palabras caracterizan a los textos o individuos, por su presencia o ausencia?

Análisis de correspondencia de una tabla léxica

Una vez particionado el corpus en formas gráficas es posible conformar la tabla *Z = tabla léxica,* que tiene tantas filas como individuos y tantas columnas como formas. Por lo tanto, Z es una tabla de contingencia de individuos x formas o respuestas x formas; luego se puede aplicar un AFC a Z.

La proximidad entre dos palabras será mayor cuanto más frecuente sea pronunciadas o dichas por los mismos individuos o encuestados. La proximidad entre dos individuos será mayor en cuanto tengan en común mayor cantidad de palabras

Los individuos se ubican en el baricentro de las palabras que ellos dicen, es decir estarán en el centro de gravedad de las palabras que ellos emplean.

En muchas situaciones las respuestas individuales son demasiado pobres para ser objeto de un tratamiento directo y es necesario agruparlas (por textos o léxico de un grupo de individuos), en este caso la tabla léxica, resulta muy dispersa, es proyectar, en el subespacio generado por el AFC, los textos (o grupos de individuos) como elementos ilustrativos lo que resulta importante para validar el agrupamiento de las respuestas.

Los textos (en nuestro caso los NEM) son modalidades de una variable categórica o nominal. Una modalidad suplementaria o ilustrativa j, contiene nj individuos (o personas entrevistadas) que la elijen o pertenecen a ella (ver AII.1.9)

Respuestas modales o características.

Las respuestas modales no son respuestas artificiales construidas a partir de las formas características, sino respuestas reales, escogidas según un cierto criterio, como representantes del texto. El criterio de selección de las respuestas características utilizado fue el criterio Ji Cuadrado (χ^2).

En la tabla léxica Z cada respuesta (individuo) se puede considerar como un vector-fila, cuyas componentes son las frecuencias de cada una de las formas en esta respuesta. Luego se calcula la distancia χ^2, entre el perfil léxico de cada respuesta (o fila de la tabla léxica: Z) y el perfil léxico del Texto (columna de tabla léxica agregada: T). Se elige esta distancia en función de las propiedades distribucionales que se explicaron en el apartado AII.1.4. Para cada texto se ordenan las distancias en forma creciente y así seleccionar las respuestas representativas de un determinado Texto, en función de sus perfiles léxicos, es decir las respuestas correspondientes a las distancias más pequeñas (Lébart et al. 2000; Bécue-Bertaut, 1991).

Anexo III. Complementos a los resultados de la Fase 1 de análisis (Capítulos 6, 7, 8 y 9)

Complemento a los resultados de la Tarea N1.

Distribución de las citas de tipos de números según el NEM

En la Tabla AIII.1 podemos observar el porcentaje de cada NEM que nombra cada tipo de número entre los citados al menos por el 9% de la población para la tarea N1. En negrita aparecen los *racionales, irracionales* y *reales* por su relevancia para este estudio.

Tabla AIII.1: Porcentajes de estudiantes de cada NEM que nombra cada tipo de números.

	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	Total
Naturales	81%	77%	54%	38%	63%	96%	81%	84%	95%	74%
Enteros	81%	66%	60%	65%	75%	69%	67%	87%	90%	74%
Racionales	**88%**	**66%**	**60%**	**58%**	**38%**	**58%**	**67%**	**71%**	**90%**	**70%**
Irracionales	**71%**	**70%**	**62%**	**46%**	**38%**	**58%**	**62%**	**65%**	**85%**	**63%**
Reales	**63%**	**73%**	**62%**	**46%**	**25%**	**62%**	**38%**	**81%**	**85%**	**45,5%**
Decimales	54%	25%	35%	38%	56%	15%	14%	16%	0%	30%
Fraccionarios	7%	29%	15%	35%	56%	23%	29%	10%	0%	20%
Complejos	0%	4%	13%	0%	0%	15%	19%	16%	80%	14%
Negativos	8%	5%	15%	23%	38%	27%	14%	3%	0%	12,5%
Primos	8%	9%	12%	12%	13%	15%	24%	3%	0%	10%
Imaginarios	3%	4%	13%	8%	13%	12%	38%	6%	0%	9%

Las referencias a la notación (*fraccionarios/decimales)* son preferiblemente de estudiantes de secundaria o de Educación Física. Entre los y las estudiantes de Matemática (MA o MI) los más nombrados son los conjuntos numéricos convencionales. R*acionales, irracionales* y *reales* fueron nombrados por los y las estudiantes de secundaria, más por los y las estudiantes de 3ro descendiendo en 4to y 5to y menos aún en EFI y EFA para luego ascender en los grupos BI, BA y MI por último su mayor valor en MA.

Asociaciones de perfiles de respuesta a la Tarea N1 según el NEM

La siguiente Tabla AIII.2, muestra la tabla de contingencia de los tipos de respuestas a la Tarea N1 respecto de las clases de NEM.

Tabla AIII.2: Tipos de respuestas a la Tarea N1, respecto de los NEM.

	3RO	4TO	5TO	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	TOTAL
N1.1. Sólo los enteros son números.	6	5	4	8	7	2	2	3	0	37
N1.2. Los enteros como modelo	6	5	4	2	2	2	3	1	0	25
N1.3. Identificación del número con su representación**.**	21	22	22	10	5	8	11	7	0	106
N1.4. Conjuntos numéricos escolares.	26	23	17	6	2	12	4	17	4	111
N1.5. Conjuntos convencionales con estructura	0	1	5	0	0	2	1	3	16	28

Complemento a los resultados de la Tarea N2.

No respuestas a la descripción de número irracional.

Se identificó a los/las estudiantes que no contestaron o que contestaron que no sabían a la primera pregunta de la Tarea N2. Encontramos que 49 estudiantes no contestaron y 21 estudiantes contestaron que no sabían, *ni idea, no sé cómo explicarlo*, etc., cuando se les solicita que expliciten "qué es un número irracional", según la siguiente distribución en las modalidades de NEM (ver Tabla AIII.3).

Tabla AIII.3: Distribución de estudiantes que no respondieron o respondieron *no sé* a la Tarea N2 en las modalidades de NEM.

	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	Total
No contestaron	10	8	7	6	9	0	2	4	1	49
No saben	6	0	5	3	3	2	1	1	0	21
Total, de NS/NC	16	8	12	9	12	2	3	5	1	70
% de NS/NC	27%	14%	23%	35%	75%	8%	14%	16%	5%	23%

Respuestas características para cada grupo de NEM

Dado el interés que tiene para el presente estudio esta pregunta se buscó las respuestas características de cada NEM según el criterio distancia chi-cuadrado de la lexicometría. Se presentan a continuación (Tabla AIII.4) las 5 respuestas características más cercanas a la respuesta medias del grupo, según este criterio, en cada una de las modalidades de NEM.

Tabla AIII.4: Respuestas características de cada NEM al describir los números irracionales.

NEM	Distancia Chi^2	Respuesta característica
3ro	0.541	*Son irracionales porque son decimales infinitos y no se pueden escribir como fracción.*
	0.575	*Son los que no se pueden escribir como fracción.*
	0.601	*Porque los irracionales no se pueden escribir como fracción.*
	0.622	*Los que no se pueden escribir como fracción.*
	0.637	*Que no se pueden escribir como fracción y sirven para medir con precisión.*
4to	0.635	*Los números irracionales son los números que no tienen una solución exacta.*
	0.658	*Son los números que no son enteros, que son con coma.*
	0.663	*Los números irracionales son aquellos que después de la coma tienen infinitos números.*
	0.693	*Los números irracionales son aquellos que no tienen como resultado un número entero sino un número con coma.*
	0.694	*Son irracionales porque no son números enteros (la solución) resultado.*
5to	0.718	*Porque los números irracionales son los números los que no tienen solución.*
	0.747	*Los números irracionales son los números con coma.*
	0.753	*Que son números con coma.*
	0.779	*Los irracionales no tienen una solución de números enteros, sino que los resulta-dos son coma o infinitos.*
	0.797	*Los números irracionales son los que tienen una infinita cantidad de números después de la coma.*
EFI	0.767	*Desconozco la teoría concepto definición en el campo de la matemática es más ni aún sé si es la definición que aparece comúnmente en el diccionario.*
	0.836	*Lo primero que se me ocurre es decir que no los podemos concebir o razonar o definir claramente.*
	0.851	*Son números irracionales porque no pertenecen a los enteros (1,2,3) sino que*

		tienen coma (0,1) (0,99) (1,25.)
	0.887	*Que no se puede determinar el valor exacto del producto de esa raíz.*
	0.891	*Son irracionales de alguna manera porque no son enteros y su valor se escribe con números infinitamente.*
EFA	0.795	*Porque no existe un número que al elevarlo de cómo resultado 2 o π.*
	0.800	*Son números irracionales ya que su condición impide que estos se puedan dividir en fracciones pares.*
	0.819	*Que ningún número elevado al cuadrado da 2 o el número π.*
	0.820	*Son números con "comas" que luego de la coma tiene infinitos números (periódicos o infinitos).*
	0.840	*Que son números "irreales" no se pueden calcular con exactitud, son infinitos.*
BI	0.805	*Son números irracionales ya que raíz-de-dos da 1,41 y π es igual a 3,14 cosa que tienen coma.*
	0.811	*Los nº irracionales es aquellos que están entre uno y otro, por ej. del 1 al 2 esta 1,555; 1,999; etc.*
	0.817	*Aquellos números que poseen una cantidad de decimales infinitos, son los nº irracionales.*
	0.828	*De lo que me acuerdo, "irracional" significa que ese número se expresa con un nº seguido de una coma con nº decimales infinitos.*
	0.848	*Son irracionales porque tienen infinitas cifras después de la coma o muchas que son muy difíciles de medir.*
BA	0.797	*Consistiría en que el resultado de operar con estos números de un conjunto de resultados que quedan fuera del conjunto r(reales.)*
	0.802	*Son irracionales porque en el momento en que se descubrieron no cuadraban con los números considerados "racionales" como los naturales o los enteros. No resultaba una cifra exacta.*
	0.846	*La condición de ser irracional se basa en la falta de poder escribir el número Como un número fraccionario.*
	0.852	*Son irracionales aquellos números con cifras luego de la coma.*
	0.853	*Porque después de la coma hay infinitos números.*
MI	0.813	*Son números que no tienen razón porque tienen infinitas cifras decimales.*
	0.823	*Que al querer resolver por ejemplo ?2=1,414213562… me va a quedar un resultado Con infinitos números detrás de la coma, o sea que no es finita.*
	0.823	*Pienso que son irracionales porque son infinitos, nunca llegas a un exacto como por ejemplo 0,18, que termina en 18 y no sigue con otros números.*
	0.838	*Son irracionales porque tienen infinitos decimales y estos no muestran una. secuencia como los no-periódicos, es decir, no se puede saber su valor exacto.*
	0.872	*Porque no son números enteros.*
MA	0.690	*Un número irracional es aquel que tiene infinitas cifras decimales no-periódicas, es decir que no se puede escribir como un cociente entre 2 número (p/q.)*
	0.691	*Un número es irracional cuando no existe manera de expresarlo como cociente de dos números coprinos.*
	0.699	*Ser un nº irracional es no ser un nº racional, es decir, que es un nº que no se puede expresar como fracción de nº enteros.*
	0.738	*Son nº que tienen infinitas cifras decimales no-periódicas, no se pueden escribir como fracción.*
	0.749	*No se pueden expresar como el cociente de dos números enteros.*

No respuestas a ejemplos de irracionales

Ciento veinte estudiantes (40%), frente a la consulta de *si conocen otros irracionales además de* $\sqrt{2}$ *y* π, no contestaron o contestaron que no sabían (*no sé, ni idea, no sé cómo explicarlo*, etc.). En la Tabla AIII.5 puede verse la distribución de los y las estudiantes que no respondieron o respondieron *no sé*, en las modalidades de NEM.

Tabla AIII.5: Distribución de los y las estudiantes que no respondieron o respondieron no sé, a ejemplos de irracionales además de $\sqrt{2}$ ***y π*** , en las modalidades de NEM.

	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	Total
Frec. de no sabe/no contesta	22	13	24	20	13	11	7	12	0	122
% de no sabe/no contesta	37%	23%	46%	77%	81%	42%	33%	39%	0%	40%

Tabla de contingencia de las clases de respuestas en las modalidades de NEM

Considerando a los/las estudiantes agrupados según su NEM, realizamos un AFC de la tabla de contingencia de las clases surgidas en la categorización de respuestas respecto de las modalidades de NEM de los/las estudiantes a fin de observar si existen perfiles de distribución similares u opuestos entre los grupos de NEM. En la Tabla AIII.6 encontramos dicha tabla de contingencia.

Tabla AIII.6: Tabla de contingencia de las clases de respuestas a la Tarea N2 respecto de las modalidades de NEM.

	3RO	4TO	5TO	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	Total
N1.1: Desconocen los irracionales	31%	27%	33%	54%	50%	35%	19%	16%	0	29%
N1.2: No tienen solución/resultado (exacta/o)	10%	38%	27%	15%	0%	12%	14%	6%	0	17%
N1.3: Son los decimales, números con coma	12%	21%	23%	12%	25%	12%	24%	19%	0	17%
N1.4: Infinitos decimales después de la coma	8%	5%	15%	12%	19%	31%	33%	29%	0,1	15%
N1.5: Infinitos decimales no-periódicos	15%	0%	0%	0%	6%	0%	5%	16%	20%	7%
N1.6: No se pueden escribir como fracción	24%	9%	2%	8%	0%	8%	5%	6%	15%	9%
N1.7. Definición experta	0%	0%	0%	0%	0%	4%	0%	6%	60%	5%

Complemento a los resultados de la Tarea D1

Tabla de contingencia de las clases de respuestas respecto a las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.7, presentamos la tabla de contingencia de las cinco clases de respuestas a la Tarea D1 respecto a las nueve modalidades de NEM.

Tabla AIII.7. Tabla de contingencia de las clases de respuestas a la Tarea D1, respecto a las modalidades de NEM.

NEM	3RO	4TO	5TO	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	Total
D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	12	6	4	5	2	1	1	0	0	31
D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.	23	23	29	7	8	5	1	5	0	101
D1.3. Densidad finitista. No comprenden el orden.	9	22	12	6	5	7	7	13	0	81
D1.4. Densidad infinitista. No comprenden el orden.	10	3	5	4	0	6	6	8	2	44
D1.5. Comprensión de la densidad y el orden.	5	2	2	4	1	7	6	5	18	50
Total	59	56	52	26	16	26	21	31	20	307

Complemento a los resultados de la Tarea D2

Tabla de contingencia de las clases de respuestas respecto a las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.8, presentamos la tabla de contingencia de las cinco clases de respuestas a la Tarea D2 respecto a las nueve modalidades de NEM.

Tabla AIII.8. Tabla de frecuencias de clases de respuestas a la Tarea D2 en cada NEM.

NEM	3RO	4TO	5TO	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	TOTAL
D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo).	25	15	12	13	4	6	0	7	1	83
D2.2. Discretitud no explicada.	8	13	13	2	3	1	1	4	0	45
D2.3. Discretitud (finitista - redondeo).	4	6	4	1	2	5	4	2	0	28
D2.4. Discretitud (infinito potencial)	2	7	10	5	5	3	10	3	2	47
D2.5. Discretitud (infinito es todo).	6	8	4	1	1	4	1	1	0	26
D2.6. Densidad potencialmente infinita.	12	3	7	3	1	6	1	11	1	45
D2.7. Densidad no explicada.	2	4	2	1	0	1	1	1	2	14
D2.8. Densidad infinito-actual de los reales.	0	0	0	0	0	0	3	2	14	19
Total	59	56	52	26	16	26	21	31	20	307

Complemento a los resultados de la Tarea I1

Tabla de contingencia de las modalidades de respuesta respecto a las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.9, presentamos la tabla de contingencia de las seis modalidades de respuesta a la Tarea I1 respecto a las nueve modalidades de NEM.

Tabla AIII.9: Tabla de frecuencias de modalidades de respuesta a la Tarea I1 en cada NEM.

	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	Total
I1.1: Ajenidad (comparando notación decimal infinita).	20	11	10	7	6	4	2	5	0	65
I1.2. Infinito como indefinido (comparando notación decimal infinita).	17	23	13	7	4	6	6	4	4	84
I1.3. Finitista no justificada (comparando notación decimal infinita).	3	4	5	3	1	2	0	1	0	19
I1.4. Finitista explicita (comparando notación decimal infinita).	11	9	12	4	3	8	9	8	0	64
I1.5. Infinitista. Único infinito (comparando notación decimal infinita).	8	9	12	5	2	6	4	10	10	66
I1.6. Infinito Cardinal (comparando notación decimal infinita).	0	0	0	0	0	0	0	3	6	9
Total	59	56	52	26	16	26	21	31	20	307

Complemento a los resultados de la Tarea I2

Tabla de contingencia de las modalidades de respuesta en las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.10 presentamos la tabla de contingencia de las seis modalidades de respuesta a la Tarea I2 respecto a las nueve modalidades de NEM

Tabla AIII.10: Tabla de frecuencias de modalidades de respuesta a la Tarea I2 en cada NEM.

NEM	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	TOTAL
I2.1: Ajenidad (número periódico).	6	2	5	7	4	1	0	2	2	29
I2.2. Finitista no justificada (número periódico)..	3	10	8	10	7	3	2	4	2	49
I2.3. Finitista - Centrada en la representación externa finita.	19	16	7	1	2	7	1	1	0	54
I2.4. Discretitud explicita o redondeo (número periódico).	4	11	8	2	2	5	8	4	1	45
I2.5. Infinito potencial (número periódico).	27	16	23	5	0	10	10	16	2	110
I2.6. Infinitista no explicada (número periódico).	0	1	1	1	1	0	0	2	2	7
I2.7. Infinito actual (número periódico).	0	0	0	0	0	0	0	2	11	13
Total	59	56	52	26	16	26	21	31	20	307

Complemento a los resultados de la Tarea I3

Distribución de estudiantes que mayormente no realizaron la Tarea I3 en las modalidades de NEM

De la población de 307 estudiantes, 87 resolvieron menos de seis de las diez demandas de la Tarea I3, según la siguiente distribución en las modalidades de NEM (Tabla AIII.11).

Tabla AIII.11: Distribución de estudiantes que no realizaron al menos el 60% de la Tarea I3 en las modalidades de NEM.

NEM	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	TOTAL
Mayormente NC/NJ	18	20	17	13	7	4	1	7	0	87
% de mayormente NC/NJ	31%	36%	33%	50%	44%	15%	5%	23%	0%	28%

Tabla de contingencia de las modalidades de respuesta en las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.12, presentamos la tabla de contingencia de las seis modalidades de respuesta a la Tarea I3 respecto a las nueve modalidades de NEM.

Tabla AIII.12: Tabla de frecuencias de modalidades de respuesta a la Tarea I3 en cada NEM.

	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	Total por Clase
I3.1: Ajenidad (comparando conjuntos).	17	20	18	13	6	4	1	7	0	86
I3.2. Los enteros como modelo de inclusión.	19	2	8	0	0	9	4	7	4	53
I3.3. Finitista no justificada (comparando conjuntos).	11	26	16	8	6	5	7	7	0	86
I3.4. Finitista explícita (comparando conjuntos).	9	6	4	2	3	5	6	3	2	40
I3.5. Infinito como indefinido (comparando conjuntos).	0	0	3	3	0	1	1	1	0	9
I3.6. Único infinito (comparando conjuntos).	2	2	3	0	1	2	2	5	7	24
I3.7. Infinito cardinal (comparando conjuntos).	1	0	0	0	0	0	0	1	7	9

Complemento a los resultados de la Tarea R1

Tabla de contingencia de las modalidades de respuesta en las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.13, presentamos la tabla de contingencia de las seis modalidades de respuesta a la Tarea R1 respecto a las nueve modalidades de NEM.

Tabla AIII.13. Tabla de frecuencias de modalidades de respuesta a la Tarea R1 en cada NEM.

NEM	3RO	4TO	5TO	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	TOTAL
R1.1: Grafican sólo los enteros	7	5	0	4	1	1	0	0	0	18
R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½).	9	7	8	4	1	0	0	0	0	29
R1.3. Grafican sólo racionales finitos - No explicado.	6	4	12	2	2	0	0	0	0	26
R1.4. Grafican racionales finitos – Infinito como indefinido.	8	9	6	1	1	3	5	5	0	38
R1.5. Grafican sólo los racionales (2,299… aproximado)	24	10	16	9	7	7	4	5	0	82
R1.6. Grafican todos por aproximación decimal.	5	10	7	6	4	11	10	16	2	71
R1.7. Grafican todos aproximado-exacto	0	11	3	0	0	3	2	3	12	34
R1.8. Grafican todos en forma exacta.	0	0	0	0	0	1	0	2	6	9
Total	59	56	52	26	16	26	21	31	20	307

Complemento a los resultados de la Tarea R2

Distribución de frecuencias de las modalidades de no-respuesta a la tarea R2

De la población de 307 estudiantes, solamente el 4% no realizaron la tarea, sin embargo 70 estudiantes, es decir un 23% no respondió o respondió no sé (no recuerdo, ni idea, no entiendo, etc.) en al menos de dos de las tres situaciones de esta tarea según la siguiente distribución en las modalidades de NEM (Tabla AIII.13).

Tabla AIII.13: Distribución de estudiantes que no respondieron al menos dos ítems de la tarea en las modalidades de NEM.

	3ro	4to	5to	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	TOTAL
Mayormente NC/no sabe	17	12	13	13	8	3	1	3	0	70
% que mayormente NC/No sabe	29%	21%	25%	50%	50%	12%	5%	10%	0%	23%
Realizaron al menos dos de los ítems	42	44	39	13	8	23	20	28	20	237

Tabla de contingencia de las modalidades de respuesta en las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.14, presentamos la tabla de contingencia de las seis modalidades de respuesta a la Tarea R2 respecto a las nueve modalidades de NEM.

Tabla AIII:14. Tabla de frecuencias de modalidades de respuesta a la Tarea R2 en cada NEM.

NEM	3RO	4TO	5TO	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	TOTAL
R2.1: Ajenidad	17	12	13	13	8	3	1	3	0	70
R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.	10	12	7	7	0	1		4	0	41
R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones no enteras.	14	9	9	1	2	7	3	10	0	55
R2.4. La recta esta completa de infinitas fracciones infinito es todo.	7	3	7	4	3	2	2	3	0	31
R2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales.	1	3	1	1	1	5	3	3	0	18
R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada.	9	15	14	0	2	6	7	5	0	58
R2.7. La recta representa a los reales completos.	1	2	1	0	0	2	5	3	20	34
Total	59	56	52	26	16	26	21	31	20	307

Complemento a los resultados de la Tarea R3

Tabla de contingencia de las modalidades de respuesta en las modalidades de NEM

A continuación, en Tabla AIII.15, presentamos la tabla de contingencia de las seis modalidades de respuesta a la Tarea R3 respecto a las nueve modalidades de NEM.

Tabla AIII.15. Tabla de frecuencias de modalidades de respuesta a la Tarea R3en cada NEM.

NEM	3RO	4TO	5TO	EFI	EFA	BI	BA	MI	MA	**TOTAL**
R3.1. Ajenidad.	13	7	12	11	6	2	0	0	0	**51**
R3.2. Recta dibujada o material:	12	12	5	5	0	4	5	7	3	**53**
R3.3 . Recta de puntos discreta.	1	1	5	3	1	2	1	4		**18**
R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada	3	10	5	1	1	3	11	2	0	**36**
R3.5. Densidad numérica - Infinito como indefinido	13	13	17	4	6	6	3	12	0	**74**
R3.6. Densidad numérica - Infinito potencial	17	13	7	2	2	9	1	6	3	**60**
R3.7. Continuidad	0	0	1	0	0	0	0	0	14	**15**
Total	**59**	**56**	**52**	**26**	**16**	**26**	**21**	**31**	**20**	307

Anexo IV. Síntesis de los modos de respuesta de cada tarea del cuestionario.

En este anexo se sintetiza lo descripto en los capítulos 6, 7, 8 y 9 en cuanto a las tipologías de respuestas que hemos detectado en la población en estudio, esto para cada tarea en cada grupo temático: N, D, I y R respectivamente. A modo de síntesis y con el fin de tenerlas presente en la lectura de los resultados del Capítulo 10, presentamos, para cada tarea del cuestionario, una tabla con la descripción de las modalidades de respuesta resultantes y un ejemplo ilustrativo de respuesta representativo/a de la modalidad. También hemos incorporado el porcentaje de la población que presenta el tipo de respuestas correspondiente a cada modalidad.

Tarea N1. Concepciones de número según una tipología (Capítulo 6)

Tabla AIV.1: Modalidades de respuesta según los tipos de números que nombran los/las estudiantes. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población que presenta la modalidad de respuesta.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de…	Porc.
N1.1. Sólo los enteros son números. No nombran *reales,* ni *racionales,* ni *irracionales.* Nombran a los *naturales,* los *enteros* o algún subconjunto notable de los enteros (ej. *positivos, negativos, primos*). La mayoría son estudiantes de Educación Física.	EFI: *positivos (8), enteros, negativos (-8)*	12% (*)
N1.2. Los enteros como modelo de número. Nombran a los *reales, racionales o irracionales* y además algún subconjunto notable de los enteros (*pares, impares, primos).* Tiene asociada la modalidad de NEM: EFI. No hay ningún MA.	5to: *números reales R=…, números irracionales ($\sqrt{5}$), números enteros (1; -3), números primos (3), números pares (2) y números racionales (1,5)*	8%
N1.3. Identificación del número con su representación. Nombran *reales, racionales o irracionales* y además algún tipo de número por su notación (*decimales, fraccionarios, periódicos, negativos, imaginarios).* En esta clase están también, sin ser muy numerosos, los que dan *ejemplos notables de irracionales* y los que dicen *romanos*. MI y BA. No hay ningún MA.	EFA: *enteros (1; 2; 3), decimales (1,2), racionales (5; 7), fraccionarios (1/2).*	35%
N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares. Además de *reales, racionales o irracionales* dicen *naturales* y *enteros*. No dicen *complejos*. Tiene asociadas las modalidades de NEM: BI y MI.	MI: *reales (1/5) … abarca todo, naturales, enteros (1; 2; 3; 4), irracionales (√5, √2) y racionales (1/2; 1/5; 6/5)*	**36%**
N1.5. Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura. Además de *reales, racionales o irracionales* dicen *naturales, enteros y complejos*. La respuesta clásica es sólo estos 6 conjuntos numéricos y en ese orden (de inclusión): *naturales, enteros, racionales, reales y complejos* muchos nombran también los irracionales. Tiene asociada la modalidad de NEM: MA.	MA: *naturales (1), enteros (-3), racionales (3/4), irracionales (√2), reales (5), complejos (3+2i)*	11%

(*) Cabe destacar que el 88% de la población nombre *reales, racionales o irracionales.*

Tarea N2. Concepción de número irracional (Capítulo 6)

Tabla AIV.2: Modalidades de respuesta según las concepciones sobre número irracional. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población que presenta cada modalidad de respuesta.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de…	%
N2.1. Ajenidad - Inseguridad. *Desconocen los irracionales.* No contestan, o expresan que no saben, o algún aspecto irrelevante. No dan ejemplos	EFI. *Lo primero que se me ocurre es decir que* (a los irracionales) *no los podemos concebir o razonar.* No da ejemplos	**29%**
N2.2. Centrada en la resolución de una operación. *No tienen solución/resultado (exacta/o).* Consideran que los irracionales son los números que no tienen (al dividir o al calcular una raíz) una solución (exacta) o un resultado (exacto o entero). Asociada a 4to y 5to. No hay MA. Generalmente no dan ejemplos, algunos dan ejemplos complejos (raíces de negativos).	5to: *Son imposibles de resolver (no tienen un nº exacto)* Ejemplos: *√3 √5 √-7 √10 √-6 …*	17%
N2.3. Confunden irracionales con racionales. *Son los decimales, números con coma*. Manifiestan que los irracionales son *números decimales o con coma* o también que *son las fracciones o tienen infinitos decimales periódicos,* es decir los confunden con los racionales lo cual se ve reforzado por que brindan como ejemplos números racionales. Hay un subgrupo que considera que son *los que sirven para medir con precisión* (en el sentido de más o menos decimales). Generalmente dan ejemplos racionales. Asociada a: 3ro, 4to, 5to BI, MI.	4to: *Los números irracionales son números que no son enteros, sino que llevan coma.* Ejemplos: *Las fracciones*	17%
N2.4. *Infinitos decimales después de la coma -* Consideran que los irracionales tienen *infinitas cifras decimales* o *son infinitos*. Suelen dar como ejemplos a ejemplares irracionales, pero también a ejemplos racionales. Asociada a: BI, MI y BA.	MI: *Si es irracionales es que va a tener infinitas cifras.* Ejemplos: *0,2 ; √5*	15%
N2.5. Definición notacional. *Infinitos decimales no-periódicos*. Manifiestan que son los “decimales no-periódicos”. Dan como ejemplo: ejemplares irracionales (raíces de primos-notables) o también una generalización correcta centrado en la definición notacional. Asociada a 3ro.	3ro: *los irracionales son los decimales no periódicos*. Otros irracionales: *V6, V5.*	7%
N2.6. *No se pueden escribir como fracción.* Expresan la frase textual: *no se pueden escribir como fracción*, sin más detalles; sólo esa frase sin especificar “de enteros” o “con denominador distinto de cero”, tampoco nombran que son reales. Da idea de una definición literal sin mucha comprensión. Como ejemplo suelen dar *una generalización correcta.* Asociada a 3ro.	3ro. Son irracionales…*porque no se pueden escribir en fracción*. Otros irracionales: *√5, √7; cualquier raíz de un número primo*	9%
N2.7. Definición experta. *Los reales que no son cociente de enteros.* Dan una definición correcta de irracionales, como: *los* (números reales) *que no se pueden expresar como cociente de enteros con denominador distinto de cero.* Como ejemplo *raíces de números primos positivos* o *alguna generalización correcta.* Asociada a MA	MA. *Los irracionales son los reales que se pueden escribir como cociente de enteros (con denominador distinto de cero). Otros irracionales: √5; √3; cualquier raíz de un número primo.*	5%

Tarea D1. Comprensión del orden y la densidad de los reales en el contexto de buscar números entre dos dados (Capítulo 7)

Tabla AIV.3: Modalidades de respuesta según concepción de orden y densidad en R. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población que presenta cada modalidad.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de…	%
D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R). Responden sólo cuando se trata de enteros. Consideran que entre 0 y 2 hay algún número, pero no dan ejemplo y para los demás ítems expresan no saber o no contestan.	3ro: Entre 0 y 2: *Si - Unos pocos.* Entre 1/5 y 1/4: *No sé - No sé.* Entre 3,14 y π: NC - *No sé.*	18%
D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal. Sólo presentan seguridad cuando se trata de enteros; manifestando que hay pocos o muchos números entre 0 y 2. Pero consideran que entre las fracciones con denominador consecutivo no hay ningún o unos pocos números. Identifican a π con el racional 3,14. Asociada a 5to.	5to: Entre 0 y 2: *Si. 1 – unos pocos.* Entre 1/5 y 1/4: *no sé – unos pocos.* Entre 3,14 y π: *No hay (π es el mismo valor*) – no contesta.	**33%**
D1.3. Densidad finitista. *Infinito es mucho.* **No comprenden el orden.** Consideran que entre dos números hay pocos (a lo sumo muchos o muchísimos) números, pero no infinitos**.** No comprenden el orden ya que dan un numero errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π. Asociada a EFA, 4to y BA	4to: Entre 0 y 2: *Si. 1; 1,15; 1,7, etc.- Muchísimos.* Entre 1/5 y 1/4: *Si. 0,05 – unos pocos.* Entre 3,14 y π: *Si. 0,005 – unos pocos.*	21%
D1.4. Densidad infinitista. No comprenden el orden. Consideran una densidad infinita, sin embargo, no comprenden el orden de Q: dan un numero errado (o no saben) entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y π. Asociada a BI y BA.	BI: Entre 0 y 2: *Si. 1 – Infinitos.* Entre 1/5 y 1/4: *Si.1/44 – Infinitos.* Entre 3,14 y π: *Si. No sé – Infinitos.*	12%
D1.5. Comprensión de la densidad y el orden. Consideran la densidad infinita de los reales. Los ejemplos pueden ser dados en forma de fracción o decimal, pero están bien. Asociada a MA y BA	MA: Entre 0 y 2: *Si. 0,5 – Infinitos.* Entre 1/5 y 1/4: *Si. 0,21– Infinitos.* Entre 3,14 y π: *Si. 3,1413 – Infinitos.*	16%

Tarea D2. Concepción sobre el orden y la densidad en relación con el supremo de un intervalo en los reales (Capítulo 7)

Tabla AIV.4: Modalidades de respuesta según concepción de densidad y supremo de un intervalo. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población que representa cada modalidad.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de..	%
D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo). No responden o manifiestan no saber o no entender el planteo. Asociada a EFI y 3ro.	3ro: *No sé - No lo entiendo*	27%
D2.2. Discretitud no explicada. Manifiestan que es posible encontrar un número anterior a uno dado, sin justificar, parafraseando la pregunta o expresando algún aspecto no relevante. Asociada a 4to. 5to y EFA.	EFI: *Sí se puede - Es el número más cerca de 2, que no es 2.*	15%
D2.3. Discretitud finitista (redondeo). Consideran que es posible encontrar un número "anterior" a uno dado y éste es un decimal finito o que se puede estimar, redondear o que depende de la escala.	4to: *pienso que, sí se puede identificar, me parece que seria 1,9.*	9%
D2.4. Discretitud mediada por una notación infinita. Consideran que es posible encontrare un número "anterior" y este es un número con infinitos decimales. Asociada a BA.	BA: *es posible ya que el número 1,999…(infinitos nueves) es menor que 2 y pertenece al intervalo - basándome en el número como un decimal. Todo número menor a 2 por más cercano que sea pertenecerá al intervalo.*	15%
D2.5. Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo. Consideran que debe existir tal número porque al ser infinitos deben estar *todos* los posibles.	BI: *Creo que sí, hay uno anterior, porque dentro de estos dos Nº hay infinitos números con coma - Le explicaría que dentro del 1 y el 2 hay infinitos números, como ejemplo le daría el 3/2 que equivale a 1,5 que es un número y como este hay más, hay infinitos.*	8%
D2.6. Densidad potencialmente infinita. Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", porque hay infinitos números y nunca se llegaría o siempre se podría agregar un decimal. Asociada a Bi y MI.	MI: *Yo creo que no se puede, sería una tarea interminable - Sería como encontrar 1,9 e ir agregando decimales (1,99… etc.)*	15%
D2.7. Densidad no explicada. Consideran que no se puede encontrar un número "anterior", sin explicar su pensamiento.	5to: creo que no se puede – no sé cómo explicarlo.	5%
D2.8. Densidad infinito-actual de los reales. Consideran que no existe un número "anterior", justificando por la densidad de los reales. Asociada a MA.	MA: *No, porque siempre existe uno más cercano a 2 debido a la densidad de Q, es decir, entre dos reales siempre existe un racional - Cada vez que me voy acercando a 2 siempre va a existir uno mayor a dicho n°.*	6%

Tarea I1. Comprensión del infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número (Capítulo 8)

Tabla AIV.5: Modalidades de respuesta en cuanto a concepción de *Infinito cardinal* en el contexto de la comparación de colecciones numerables ordenadas. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población en cada modalidad.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de	%
I1.1: Ajenidad (notación decimal infinita). No consideran que las colecciones sean infinitas (infinitos decimales) o manifiestan no saber y no justifican. Asociada a 3ro y EFI.	3ro: Hay más en 0,32… porque el 32 es más grande que el 3 entonces va a haber más cantidad	21 %
I1.2. Finitista no justificada (notación decimal infinita). Al comparar eligen lo que ocurriría con colecciones finitas (finitos decimales) sin embargo no justifican su pensamiento. Asociada a EFI y 5to	5to: Hay más en 0,333… no sé cómo explicarlo	6%
I1.3. Finitista explicita (notación decimal infinita). Al comparar lo hacen (explícitamente) considerando lo que ocurriría con colecciones finitas (observan lo que ocurre con finitos decimales). Asociada a 5to, BI, MI y BA.	BA: Hay más en 0,333… Porque en el 0,32… se repetía además del 3, el 2, por lo tanto, es posible que se repita la mitad de las veces que en el 0,3….	21 %
I1.4. Infinito como indefinido (notación decimal infinita). Consideran que las colecciones (por infinitas) no se pueden comparar. Evidencian una idea de que lo infinito es equivalente a lo *sin límite, sin reglas, indefinido.* Asociada a 4TO	4to: Son incomparables. Porque si los decimales periódicos tienen infinitas cifras decimales, no las podría contar para compararlas	27 %
I1.5. Infinitista. Único infinito. Consideran que existe una *única cantidad infinita*, por la tanto hay la misma cantidad (infinitos) en ambas colecciones. Asociada a MA y MI.	MI: Iguales. Hay infinitos en los dos casos	21 %
I**1.6. Infinito Cardinal (notación decimal infinita).** Consideran que ambas colecciones coordinables (en el sentido cantoriano), comparando por relación uno a uno entre ambas colecciones. Asociada a MA	MA: *El conjunto de cifras 3 para estos números están en biyección: tienen igual cardinalidad*	3%

Tarea I2. Concepciones sobre el infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números (Capítulo 8)

Tabla AIV.6. Modalidades de respuesta en cuanto a concepción de infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población en cada modalidad.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de	**Porc**
I2.1: Ajenidad (comparando conjuntos). No responden mayormente la tarea o manifiestan no saber o que no se pueden comparar sin más justificación.	EFI: Más no-capicúas que capicúa */ no sé.* No contesta, ni justifica los otros cuatro ítems.	28%
I2.2. Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos). Solo comparan (por inclusión) las parejas de conjuntos donde figuran los enteros. No se apropian del resto de conjuntos.	3ro: Más no-capicúas que capicúa, porque *son más los números no capicúas.* Más pares que primos, *no sé.* Más enteros que naturales, porque *los naturales están dentro de los enteros.* Más racionales que enteros, porque *los racionales abarcan a los enteros.* Más racionales que irracionales, porque *abarcan más números y más conjuntos numéricos.*	17%
I2.3. Finitista no justificada (comparando conjuntos). Al comparar eligen lo que ocurriría al comparar conjuntos finitos (un intervalo finito o acotado de números), sin embargo, no justifican su pensamiento.	4to año: Más no-capicúas que capicúas / porque *hay más números no capicúas que capicúas.* Igualmente, abundantes pares que primos */* porque *son la misma cantidad.* Enteros y naturales son incomparables / porque *las dos clases de números son infinitos.* Enteros/racionales no contesta ni justifica. Más irracionales que racionales / porque *creo que hay más cantidad.*	**28%**
I2.4. Finitista explícita (comparando conjuntos). Manifiestan un tipo de comprensión finitista, apelando a lo que ocurre en un intervalo finito o acotado de números. Dan justificaciones por razones finitistas, salvo en el caso de naturales/enteros que se justifica por inclusión.	BI: Más no-capicúas que capicúa, *ya que cada una cierta cantidad de no capicúas hay uno capicúa por lo tanto la cantidad de no capicúas es mayor.* Más pares que primos, *porque por cada número par no hay un primo, sino que cada algún par aparece uno primo por lo tanto los pares son más abundantes.* Más enteros que naturales, porque *no solo posee infinitos números positivos, sino que también los posee en negativos.* Más racionales que enteros, porque *entre dos números enteros hay infinitos racionales entre ellos. Por lo tanto, los fraccionales son más abundantes.* Más irracionales que racionales, porque *por cada número racional hay infinitos irracionales por lo tanto* estos son más abundantes.	13%
I2.5. Infinito como indefinido (comparando conjuntos). Consideran que los conjuntos (por infinitos) no se pueden comparar. Evidencian una idea de que lo infinito es equivalente a lo *sin límite, sin reglas, indefinido.*	5to: Responde en las cinco comparaciones que no se pueden comparar / porque *la cantidad de números es infinita así que no se podría saber exactamente cuál es más abundante*.	3%
I2.6. Único infinito (comparando conjuntos). Consideran que existe una única cantidad infinita, por la tanto todos los conjuntos infinitos son igualmente abundantes (con una cantidad "infinita" de elementos).	MA: Igualmente abundantes para las cinco comparaciones. Justificando en todos los casos con la frase: *ambos son infinitos*, *aunque sean conjuntos densos o discretos*.	8%
I2.7. Infinito cardinal (comparando conjuntos). Consideran, de forma matemáticamente correcta, que todos los conjuntos numerables son *igualmente abundantes* y que hay (infinitamente) *más irracionales que racionales,* en el sentido de la cardinalidad cantoriana.	MA: Igualmente abundantes para capicúas/no-capicúas; primos / pares; naturales / enteros y enteros/ racionales. Justificando en todos estos casos con la frase: *son numerables*. Más irracionales que racionales / porque *tienen distinta cardinalidad (Alef).*	3%

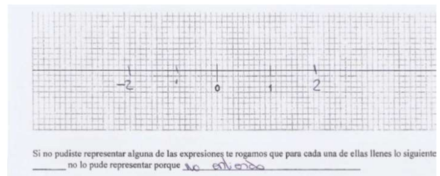
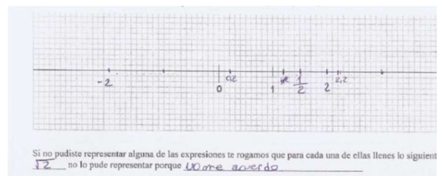
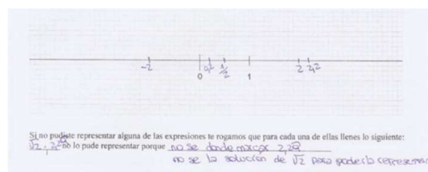
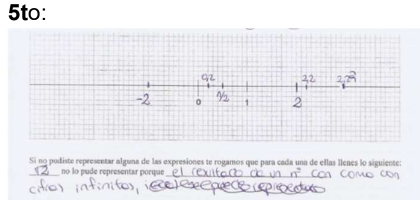
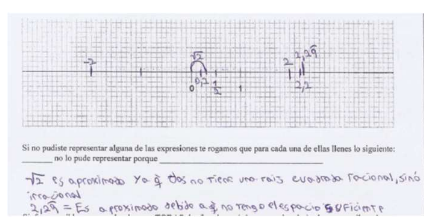
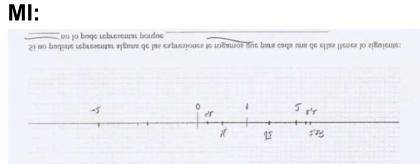
Tarea I3. Comprensión de la representación decimal infinito-periódico de un número (Capítulo 8)

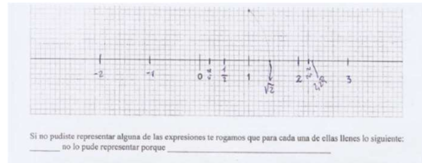
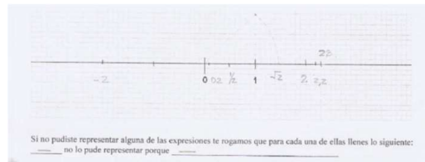
Tabla AIV.7: Modalidades de respuesta en cuanto a concepción de infinito actual en la representación decimal infinito-periódica de un número racional. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población en cada modalidad.

Caracterización de la clase de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de..	%
I3.1: Ajenidad. *No sé* y *Son Incomparables.* No contestan o manifiestan no saber o que no se pueden comparar sin más justificación.	EFA. *Incomparables, son incomparables*	9%
I3.2. Finitista no justificada. $0,\hat{9}$ *es menor a 1– No explicada.* Eligen la opción en la que no se tiene en cuenta las infinitas cifras decimales en forma actual sin explicar su razonamiento.	EFI: $0,\hat{9}$ *es menor a 1, porque es obvio*	16%
I3.3. Finitista - Centrada en la representación externa finita. $0,\hat{9}$ *es menor a 1– Representación externa*Comparan (explícitamente) por razones válidas para notaciones decimales finitos.	3ro: $0,\hat{9}$ *es menor a 1, porque es un decimal que empieza con "0" y 0 es menor que 1.*	18%
I3.4. Discretitud explícita o redondeo.$0,\hat{9}$ *es menor a 1 – Discreto / Redondeo***.** Comparan explicitando que se piensa en un salto discreto entre los dos números o por la posibilidad de redondeo.	BI: $0,\hat{9}$ *es menor a 1, porque es el anterior en su correlatividad antes de llegar al 1.*	15%
I3.5. **Infinito potencial.** $0,\hat{9}$ *es menor a 1- Proceso sin fin*. Aluden a las infinitas cifras decimales, como un proceso sinfín; como un proceso que no termina.	5to: $0,\hat{9}$ *es menor a 1, porque se va a acercar siempre pero nunca va a ser 1 por el famoso "infinitos decimales"*	**36%**
I3.6. Infinitista no explicada. $0,\hat{9}$ *es menor a 1- No explicada* Al comparar eligen la opción correcta si se consideran las (actualmente) infinitas cifras sin embargo no justifican su pensamiento.	MI: *Iguales, no sé.*	2%
I3.7. Infinito actual. $0,\hat{9}$ *es igual a - Prueba /Densidad.* Consideran las infinitas cifras decimales como actualmente infinitas ya sea justificación mediante una "prueba" o por la densidad de los números reales.	MA: *Igual, porque entre estos dos números no hay otro. Por lo tanto, son el mismo.*	4%

Tarea R1. Comprensión de la representación de números reales en la recta (Capitulo 9)

Tabla AIV.8: Modalidades de respuesta a la representación de distintos números reales en una recta numérica. Respuesta representativa de un/una estudiante y porcentaje de la población en cada modalidad.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de…	Porc
R1.1: Grafican sólo los enteros. Ubican sólo -2 y 2. Sin justificar por qué no graficaron el resto o manifestando que no grafican el resto porque no saben, no entienden o no recuerdan como se hace. También están los pocos que no realizan la tarea. Asociada a 3ro, 4to y EFI.	**3ro:** 	6%
R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½). Ubican correctamente a -2; 2; 0,2 y 2,2. La fracción ½ la ubican entre 1 y 2. No ubican $2,2\overset{\frown}{9}$ ni $\sqrt{2}$ porque no saben, no se acuerdan o sin justificar. Asociada a 3ro, 4to y 5to.	**5to:** 	9%
R1.3. Grafican sólo racionales finitos. Grafican sólo racionales finitos (evitan el infinito). Ubican a -2; 2; 0,2; 2,2 y 1/2 bien; no ubican $\sqrt{2}$ ni $2,2\overset{\frown}{9}$ porque no saben, no se acuerdan o sin justificar. Asociada a 3ro, 4to y 5to.	**BI:** 	8,5%
R1.4. Grafican racionales finitos – Infinito como indefinido Ubican correctamente a -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. No ubican $\sqrt{2}$ o $2,2\overset{\frown}{9}$ justificando que no lo hacen porque no se los pueden representar *porque son infinitos.* Denotan un pensamiento acorde a pensar el *Infinito como indefinido.* Asociada a 5to y BA.	**5to**:  .	12,5%
R1.5. Grafican sólo los racionales ($2,2\overset{\frown}{9}$ aproximado). Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2,2\overset{\frown}{9}$ muy próximo a 2,3 y no representan $\sqrt{2}$ sin justificar porque no lo hacen o justificando que no saben o no recuerdan cómo se calcula la raíz. Algunos grafican $\sqrt{2}$ aproximadamente pero mal ubicada. Asociada a 3ro, 4to y 5to	**3ro:**  .	**27%**
R1.6. Grafican todos por aproximación decimal. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2; ½. $2,2\overset{\frown}{9}$ próximo a 2,3 y aproximan $\sqrt{2}$ a 1,41. Dado que consideran que graficaron todos los números pedidos la gran mayoría no justifica. Asociada a MI, BA, BI y EFA	**MI:** 	23%

R1.7. Grafican todos. $2,2\widehat{9}$ aproximado - $\sqrt{2}$ exacto. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2,2\widehat{9}$ aproximado a 2,3 y $\sqrt{2}$ por método geométrico o aproximado (justificando que hubiesen necesitado el compás para hacerlo exacto). Asociado a MA, MI y BI	**MI:** 	11%
R1.8. Grafican todos en forma exacta. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. Hacen explícito que $2,2\widehat{9}$ = 2,3 y grafican $\sqrt{2}$ por método geométrico. Asociado a MA.	**MA:** 	3%

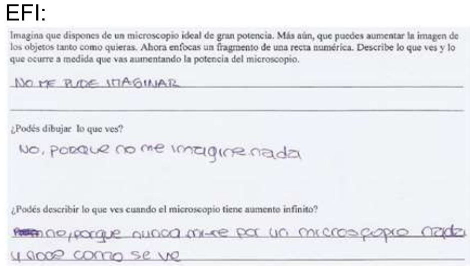
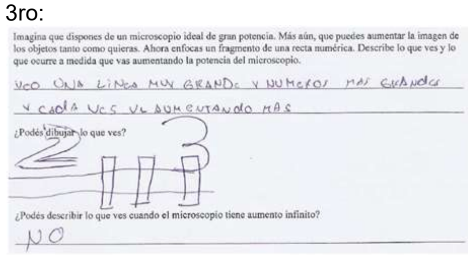
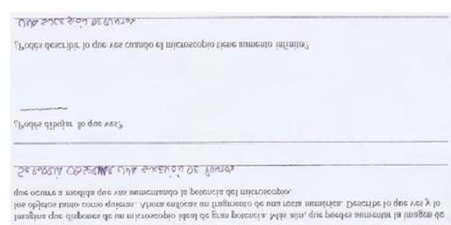
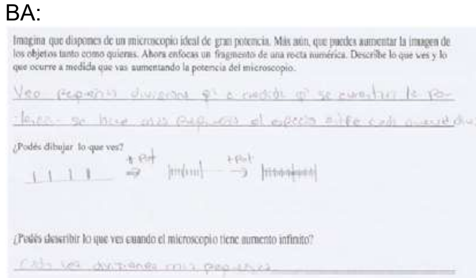
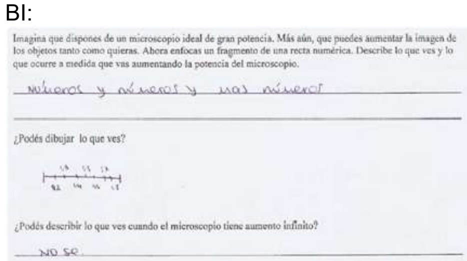
Tarea R2. Comprensión de la recta como representación de los números reales (Capitulo 9)

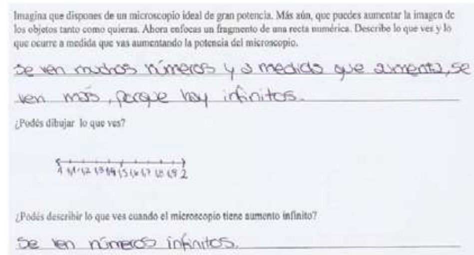
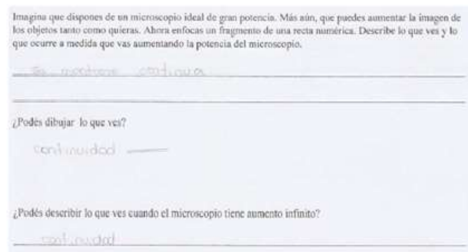
Tabla AIV.9: Modalidades de respuesta según la concepción de la recta numérica como representación de los números reales. Ejemplos literales de respuestas y porcentaje de la población en cada modalidad.

Caracterización de la modalidad de respuesta	Respuestas de un/a estudiante de	%
R2.1: Ajenidad-Inseguridad (frente a la representación de los reales en la recta). No contestan al menos dos de los tres ítems. Asociada a EFA y EFI	**EFI:** 1. NC / NJ / (Hay lugar para) …*muchísimos* números / NC / NC	9%
R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada. Consideran que con las fracciones (racionales) se completa la recta, sin embargo, no explicitan su pensamiento. Al enfrentar la tarea de ubicar más números en la recta, evitan la tarea. No conocen números no-racionales. Confunden los reales con los racionales. MI y BA	**3ro:** (Las fracciones).. *si* completan la recta (no justifica). NC / NJ. (Si se quitan las fracciones quedarían).. *los enteros supongo*	20%
R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras). Consideran que la recta no se completa, porque su concepción del infinito como un proceso sin fin, está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales. Muchos no consideran a los enteros como racionales**.** Confunden los reales con las fracciones. Asociada a MI y BA	**5to:** (Las fracciones)… *no completan* la recta. *Porque hay infinitos números racionales por lo que la recta nunca se completaría. (*Las raíces)… *no completan* la recta. (Hay lugar para).. *infinitos* números. *Porque siempre habría números que agregar a la recta ya que éstos son infinitos. (*Si se quitan las fracciones quedarían)… *los enteros*	19%
R2.4. La recta esta completa de infinitas fracciones (infinito es todo) Consideran que los racionales completan la recta porque son infinitos y deben estar “todos”. Su concepción del infinito (identificado con todo) está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales.	**5to** (Las fracciones)… *sí completan* la recta. *Si vos tenés 1/2, la mitad va a ser 1/4, la mitad 1/8, la mitad 1/16; infinitamente. Así llenás la recta.(* Las raíces).. *no completan* la recta. (Hay lugar para)… *infinitos* números. *Los números son infinitos, te limita pensar en potencias y raíces, **pero si tenés todos se completa**. (*Si quito las fracciones).. *quedarían todos los demás números (enteros, irracionales, π, números)*	8%
R2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales. Sus respuestas son coherentes con identificar a los números reales con los racionales. BI, EFA y EFI	BI: (Las fracciones).. *si* completan la recta. *Porque en ella están representados todos y cada uno de los números. (*Las raíces)… *si* completan la recta*. No hay lugar para más números*. NJ. (Si quito las fracciones).. *quedan los enteros.*	16%
R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada. Consideran que con las fracciones (racionales) no se puede completar la recta, ya que existen otros números, aun cuando no tengan muy claros cuantos ni cuales, algunos no consideran a los enteros como racionales. Con las raíces tampoco se completa porque existen otros números. 4TO; 5TO	**4to:** *Las fracciones no completan la recta. No sé cómo explicarlo. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para muchos números. Hay lugar para más números creo yo, no puedo explicarlo bien porque hay cosas que me falta ver en la materia. Si quito las fracciones quedan números que no son racionales.*	18%
R2.7. La recta representa a los reales completos. Sus respuestas son coherentes con una comprensión de los reales como la unión de los racionales y de los irracionales, conciben la recta como continua. Asociada a MA y BA.	**MA:** Las fracciones *no completan* la recta. *Faltarían "marcar" todos los números irracionales*. Las raíces *no completan* la recta. Hay lugar para *infinitos* número. *Faltarían ¨marcar¨ algunos números irracionales que no pueden escribirse como raíces por ej. e, π, etc.* Si quito las fracciones *quedarían infinitos números I.*	10%

Tarea R3. Concepciones sobre la naturaleza de la recta numérica (Capitulo 9)

Tabla AIV.10. Modalidades de concepción de la naturaleza de la recta numérica. Ejemplos de respuestas y porcentaje de la población en cada modalidad.

<table>
<tr><th>Caracterización de la modalidad de respuesta</th><th>Respuestas de un/a estudiante de</th><th>%</th></tr>
<tr><td>R3.1. Ajenidad (frente a la naturaleza de la recta numérica). El problema les es ajeno. Manifiestan no saber o no poder imaginar que ocurriría. Asociada a 3ro y EFI</td><td>EFI:
</td><td>17%</td></tr>
<tr><td>R3.2. Recta dibujada o material: Conciben la recta como un dibujo, como la marca que deja el lápiz o la tinta de la impresora en un papel (no se abstraen de la representación externa) o como constituida de materia (no se abstraen del objeto real “microscopio”). La recta no es un objeto matemático.</td><td>3ro:
</td><td>17%</td></tr>
<tr><td>R3.3. Recta de (puntos) discreta. Ven uno pocos, muchos o una sucesión de puntos. Algunos aseguran ver una sucesión de infinitos puntos. La recta se concibe como conjunto de puntos (con medida) corresponde a la analogía del collar de perlas.</td><td>BA:
</td><td>6%</td></tr>
<tr><td>R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada Ven la recta con la escala, segmentada, con divisiones y subdivisiones. Podríamos decir que conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes, es decir un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal. Asociada a BA</td><td>BA:
</td><td>12%</td></tr>
<tr><td>R3.5. Densidad numérica potencial - infinito como indefinido. Aseguran ver muchos o más números, nuevos números, o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta. La recta se concibe como densa de números. Con aumento infinito manifiestan no saber, o que en el infinito no es posible. Algunos dibujan la recta con escala decimal. Asociada a 5to.</td><td>BI:
</td><td>24%</td></tr>
</table>

R3. 6. Densidad numérica potencialmente infinita. Aseguran ver muchos o más números, nuevos números o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta. Algunos aseguran que al ir aumentando la potencia ven infinitos números. Con aumento infinito ven infinitos o todos los números. La recta se concibe como densa de números, potencialmente infinita, siempre habrá números nuevos y en el infinito podrán encontrarse infinitos números. Suelen dibujar la recta con muchas marcas.	3ro:  Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio. se ven muchos números y a medida que aumenta, se ven más, porque hay infinitos. ¿Podés dibujar lo que ves? 1 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2 ¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito? Se ven números infinitos.	20%
R3.7. Continuidad. Aseguran que al ir aumentando la potencia y con aumento infinito ven la recta continua o siempre ven lo mismo. Dibujan un segmento de recta sin marcas ni números. Conciben la recta como continua y como representación de la completitud de los números reales. Asociada a MA.	**MA:**  Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio. se muestra continua ¿Podés dibujar lo que ves? continuidad ¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito? continuidad	5%

Anexo V. Complementos a los resultados de la Fase 2 de análisis (Capítulo 10)

Presentamos este anexo como complemento del Capítulo 10 de resultados de la Fase 2 de análisis de la información.

Complemento del AFCM de estudiantes descriptos por sus modalidades de respuestas a todas las tareas y su nivel de estudio en Matemática

Presentación de los datos, variables y modalidades

Tabla AV.1: Base de datos de los valores de las modalidades de la variable NEM y de las variables de categorización de respuestas para cada estudiante.

EST.	NEM	T1- N1	T2- N2	T3-D1	T4-I1	T5-I2	T6-R1	T7-R2	T8-R3	T9-D2	I3.2
301	3ro	N1.2	N2.3	D1.5	I1.1	I2.2	R1.4	R2.3	R3.4	D2.2	I3.4
302	3ro	N1.3	N2.6	D1.2	I1.1	I2.2	R1.5	R2.5	R3.2	D2.7	I3.3
303	3ro	N1.4	N2.3	D1.1	I1.1	I2.4	R1.2	R2.2	R3.6	D2.3	I3.5
304	3ro	N1.3	N2.2	D1.2	I1.1	I2.3	R1.5	R2.2	R3.1	D2.3	I3.2
305	3ro	N1.4	N2.2	D1.1	I1.2	I2.4	R1.5	R2.3	R3.5	D2.6	I3.3
306	3ro	N1.4	N2.1	D1.2	I1.1	I2.2	R1.3	R2.1	R3.5	D2.1	I3.5
307	3ro	N1.4	N2.1	D1.4	I1.3	I2.2	R1.5	R2.1	R3.1	D2.1	I3.5
308	3ro	N1.4	N2.3	D1.3	I1.1	I2.3	R1.6	R2.3	R3.6	D2.5	I3.3
309	3ro	N1.3	N2.3	D1.5	I1.5	I2.7	R1.1	R2.6	R3.5	D2.5	I3.3
310	3ro	N1.4	N2.5	D1.4	I1.4	I2.2	R1.4	R2.5	R3.6	D2.5	I3.4
311	3ro	N1.4	N2.5	D1.1	I1.3	I2.1	R1.4	R2.6	R3.5	D2.3	I3.2
312	3ro	N1.1	N2.3	D1.2	I1.1	I2.2	R1.5	R2.3	R3.1	D2.6	I3.5
313	3ro	N1.3	N2.5	D1.3	I1.4	I2.2	R1.6	R2.7	R3.2	D2.2	I3.5
314	3ro	N1.4	N2.4	D1.3	I1.4	I2.2	R1.5	R2.3	R3.5	D2.6	I3.5
315	3ro	N1.1	N2.6	D1.2	I1.4	I2.1	R1.5	R2.5	R3.5	D2.1	I3.3
316	3ro	N1.3	N2.1	D1.1	I1.1	I2.1	R1.5	R2.5	R3.2	D2.1	I3.5
317	3ro	N1.3	N2.5	D1.2	I1.5	I2.6	R1.4	R2.2	R3.6	D2.5	I3.5
318	3ro	N1.4	N2.6	D1.2	I1.5	I2.1	R1.3	R2.3	R3.1	D2.6	I3.5
319	3ro	N1.4	N2.6	D1.2	I1.3	I2.2	R1.4	R2.6	R3.5	D2.4	I3.5
320	3ro	N1.4	N2.6	D1.1	I1.3	I2.2	R1.5	R2.6	R3.5	D2.2	I3.5
321	3ro	N1.4	N2.4	D1.1	I1.4	I2.4	R1.5	R2.6	R3.6	D2.6	I3.5
322	3ro	N1.3	N2.5	D1.2	I1.1	I2.4	R1.3	R2.3	R3.6	D2.2	I3.4
323	3ro	N1.1	N2.4	D1.2	I1.4	I2.6	R1.4	R2.3	R3.6	D2.6	I3.5
324	3ro	N1.4	N2.1	D1.3	I1.5	I2.1	R1.5	R2.2	R3.1	D2.1	I3.5
325	3ro	N1.3	N2.6	D1.2	I1.4	I2.3	R1.2	R2.3	R3.1	D2.5	I3.5
326	3ro	N1.4	N2.4	D1.2	I1.4	I2.2	R1.4	R2.3	R3.6	D2.6	I3.5
327	3ro	N1.2	N2.1	D1.2	I1.3	I2.1	R1.2	R2.2	R3.5	D2.6	I3.3
328	3ro	N1.4	N2.6	D1.3	I1.4	I2.1	R1.1	R2.6	R3.2	D2.7	I3.3
329	3ro	N1.3	N2.2	D1.3	I1.4	I2.3	R1.3	R2.4	R3.6	D2.2	I3.5
330	3ro	N1.3	N2.1	D1.1	I1.1	I2.3	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.3
331	3ro	N1.4	N2.6	D1.2	I1.3	I2.3	R1.5	R2.6	R3.4	D2.1	I3.5
332	3ro	N1.3	N2.6	D1.2	I1.5	I2.3	R1.6	R2.4	R3.2	D2.5	I3.3
333	3ro	N1.3	N2.6	D1.2	I1.5	I2.2	R1.4	R2.3	R3.2	D2.3	I3.3
334	3ro	N1.4	N2.6	D1.1	I1.1	I2.1	R1.2	R2.6	R3.5	D2.1	I3.5
335	3ro	N1.3	N2.1	D1.4	I1.5	I2.1	R1.6	R2.2	R3.2	D2.1	I3.3
336	3ro	N1.3	N2.1	D1.1	I1.3	I2.2	R1.3	R2.4	R3.2	D2.1	I3.5
337	3ro	N1.4	N2.3	D1.1	I1.4	I2.2	R1.2	R2.5	R3.5	D2.6	I3.3
338	3ro	N1.3	N2.5	D1.5	I1.4	I2.2	R1.5	R2.3	R3.3	D2.6	I3.3
339	3ro	N1.4	N2.1	D1.2	I1.2	I2.1	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.3
340	3ro	N1.4	N2.1	D1.1	I1.3	I2.2	R1.5	R2.4	R3.6	D2.1	I3.4
341	3ro	N1.3	N2.2	D1.1	I1.5	I2.4	R1.5	R2.4	R3.6	D2.6	I3.3

342	3ro	N1.1	N2.5	D1.2	I1.1	I2.4	R1.6	R2.5	R3.6	D2.6	I3.3
343	3ro	N1.4	N2.4	D1.5	I1.4	I2.4	R1.5	R2.6	R3.5	D2.4	I3.2
344	3ro	N1.3	N2.2	D1.2	I1.4	I2.3	R1.5	R2.3	R3.1	D2.1	I3.1
345	3ro	N1.2	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.5	R2.1	R3.6	D2.1	I3.5
346	3ro	N1.4	N2.5	D1.4	I1.4	I2.4	R1.5	R2.2	R3.6	D2.1	I3.3
347	3ro	N1.1	N2.1	D1.4	I1.3	I2.1	R1.2	R2.2	R3.2	D2.1	I3.1
348	3ro	N1.4	N2.1	D1.4	I1.2	I2.1	R1.2	R2.2	R3.1	D2.1	I3.5
349	3ro	N1.3	N2.1	D1.3	I1.1	I2.3	R1.2	R2.6	R3.1	D2.1	I3.1
350	3ro	N1.4	N2.3	D1.1	I1.1	I2.1	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.3
351	3ro	N1.1	N2.6	D1.5	I1.3	I2.2	R1.5	R2.1	R3.2	D2.1	I3.5
352	3ro	N1.3	N2.1	D1.1	I1.3	I2.1	R1.5	R2.3	R3.2	D2.2	I3.3
353	3ro	N1.3	N2.2	D1.1	I1.4	I2.4	R1.5	R2.3	R3.5	D2.2	I3.5
354	3ro	N1.2	N2.1	D1.2	I1.4	I2.1	R1.3	R2.2	R3.6	D2.2	I3.5
355	3ro	N1.3	N2.6	D1.2	I1.1	I2.2	R1.2	R2.5	R3.2	D2.1	I3.5
356	3ro	N1.2	N2.1	D1.1	I1.1	I2.1	R1.1	R2.1	R3.6	D2.1	I3.1
357	3ro	N1.2	N2.1	D1.4	I1.1	I2.3	R1.5	R2.6	R3.6	D2.1	I3.1
358	3ro	N1.4	N2.5	D1.2	I1.1	I2.2	R1.5	R2.2	R3.4	D2.1	I3.5
359	3ro	N1.4	N2.6	D1.1	I1.1	I2.1	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
401	4to	N1.4	N2.1	D1.3	I1.3	I2.3	R1.5	R2.3	R3.6	D2.2	I3.5
402	4to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.1	I2.1	R1.3	R2.6	R3.2	D2.1	I3.4
403	4to	N1.2	N2.1	D1.1	I1.4	I2.1	R1.1	R2.6	R3.1	D2.3	I3.1
404	4to	N1.4	N2.2	D1.2	I1.5	I2.3	R1.5	R2.5	R3.6	D2.5	I3.5
405	4to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.1	I2.3	R1.3	R2.6	R3.2	D2.1	I3.5
406	4to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.4	I2.3	R1.7	R2.6	R3.2	D2.3	I3.2
407	4to	N1.3	N2.4	D1.5	I1.4	I2.4	R1.7	R2.3	R3.6	D2.6	I3.3
408	4to	N1.3	N2.1	D1.2	I1.1	I2.1	R1.2	R2.2	R3.2	D2.1	I3.3
409	4to	N1.3	N2.2	D1.1	I1.2	I2.1	R1.6	R2.5	R3.1	D2.1	I3.2
410	4to	N1.3	N2.6	D1.2	I1.4	I2.3	R1.6	R2.5	R3.3	D2.5	I3.4
411	4to	N1.4	N2.1	D1.3	I1.4	I2.3	R1.7	R2.4	R3.5	D2.7	I3.5
412	4to	N1.1	N2.1	D1.1	I1.5	I2.1	R1.2	R2.2	R3.4	D2.1	I3.5
413	4to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.4	I2.1	R1.4	R2.2	R3.5	D2.1	I3.2
414	4to	N1.4	N2.1	D1.3	I1.1	I2.3	R1.2	R2.5	R3.4	D2.5	I3.2
415	4to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.4	I2.3	R1.4	R2.2	R3.5	D2.1	I3.2
416	4to	N1.3	N2.4	D1.3	I1.4	I2.2	R1.3	R2.2	R3.1	D2.3	I3.5
417	4to	N1.4	N2.2	D1.2	I1.4	I2.1	R1.4	R2.3	R3.2	D2.2	I3.4
418	4to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.4	I2.3	R1.4	R2.2	R3.6	D2.1	I3.4
419	4to	N1.3	N2.2	D1.3	I1.4	I2.3	R1.4	R2.7	R3.6	D2.5	I3.5
420	4to	N1.1	N2.1	D1.1	I1.5	I2.6	R1.4	R2.4	R3.2	D2.4	I3.2
421	4to	N1.4	N2.2	D1.1	I1.1	I2.3	R1.5	R2.4	R3.5	D2.1	I3.3
422	4to	N1.3	N2.3	D1.3	I1.1	I2.1	R1.6	R2.2	R3.4	D2.2	I3.4
423	4to	N1.4	N2.2	D1.1	I1.5	I2.1	R1.4	R2.3	R3.5	D2.2	I3.3
424	4to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.2	I2.1	R1.1	R2.6	R3.1	D2.3	I3.6
425	4to	N1.3	N2.2	D1.3	I1.5	I2.3	R1.2	R2.1	R3.1	D2.1	I3.3
426	4to	N1.5	N2.2	D1.3	I1.4	I2.1	R1.5	R2.3	R3.2	D2.2	I3.2
427	4to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.3	I2.3	R1.1	R2.5	R3.1	D2.2	I3.3
428	4to	N1.4	N2.4	D1.3	I1.4	I2.3	R1.6	R2.5	R3.2	D2.4	I3.4
429	4to	N1.3	N2.3	D1.3	I1.5	I2.2	R1.7	R2.3	R3.4	D2.5	I3.4
430	4to	N1.1	N2.3	D1.4	I1.5	I2.4	R1.7	R2.6	R3.6	D2.6	I3.5
431	4to	N1.3	N2.3	D1.3	I1.4	I2.4	R1.3	R2.3	R3.5	D2.5	I3.4
432	4to	N1.4	N2.2	D1.2	I1.4	I2.3	R1.6	R2.1	R3.5	D2.4	I3.3
433	4to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.4	I2.1	R1.5	R2.6	R3.6	D2.1	I3.3
434	4to	N1.2	N2.1	D1.1	I1.1	I2.1	R1.1	R2.2	R3.2	D2.1	I3.2
435	4to	N1.2	N2.3	D1.3	I1.4	I2.1	R1.6	R2.6	R3.5	D2.7	I3.5
436	4to	N1.3	N2.1	D1.2	I1.3	I2.1	R1.6	R2.1	R3.4	D2.2	I3.3
437	4to	N1.4	N2.6	D1.1	I1.4	I2.1	R1.5	R2.6	R3.5	D2.2	I3.3
438	4to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.4	I2.4	R1.7	R2.2	R3.4	D2.4	I3.5
439	4to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.1	I2.3	R1.5	R2.6	R3.5	D2.2	I3.5
440	4to	N1.2	N2.1	D1.3	I1.2	I2.4	R1.7	R2.2	R3.6	D2.3	I3.5
441	4to	N1.2	N2.1	D1.3	I1.3	I2.1	R1.2	R2.2	R3.4	D2.1	I3.1
442	4to	N1.4	N2.1	D1.3	I1.3	I2.1	R1.6	R2.6	R3.6	D2.6	I3.2
443	4to	N1.4	N2.2	D1.3	I1.3	I2.3	R1.6	R2.6	R3.6	D2.4	I3.4

444	4to	N1.4	N2.2	D1.5	I1.4	I2.3	R1.6	R2.3	R3.4	D2.4	I3.3
445	4to	N1.4	N2.6	D1.4	I1.5	I2.3	R1.5	R2.6	R3.6	D2.2	I3.3
446	4to	N1.4	N2.1	D1.3	I1.2	I2.3	R1.2	R2.6	R3.2	D2.1	I3.3
447	4to	N1.3	N2.6	D1.4	I1.3	I2.3	R1.7	R2.6	R3.2	D2.4	I3.3
448	4to	N1.4	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.7	R2.2	R3.6	D2.1	I3.3
449	4to	N1.3	N2.2	D1.3	I1.5	I2.4	R1.7	R2.6	R3.4	D2.2	I3.2
450	4to	N1.1	N2.2	D1.1	I1.5	I2.1	R1.7	R2.6	R3.5	D2.5	I3.5
451	4to	N1.3	N2.3	D1.2	I1.4	I2.3	R1.1	R2.5	R3.5	D2.7	I3.4
452	4to	N1.3	N2.2	D1.1	I1.4	I2.6	R1.2	R2.2	R3.1	D2.7	I3.4
453	4to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.3	I2.3	R1.5	R2.2	R3.4	D2.5	I3.5
454	4to	N1.4	N2.6	D1.2	I1.4	I2.3	R1.4	R2.7	R3.6	D2.2	I3.5
455	4to	N1.1	N2.1	D1.2	I1.1	I2.1	R1.5	R2.2	R3.5	D2.2	I3.3
456	4to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.3	I2.3	R1.4	R2.5	R3.2	D2.3	I3.5
501	5to	N1.4	N2.2	D1.2	I1.4	I2.1	R1.2	R2.4	R3.6	D2.7	I3.4
502	5to	N1.4	N2.2	D1.2	I1.5	I2.3	R1.2	R2.6	R3.6	D2.5	I3.4
503	5to	N1.3	N2.6	D1.2	I1.3	I2.3	R1.4	R2.2	R3.5	D2.1	I3.5
504	5to	N1.4	N2.2	D1.3	I1.4	I2.3	R1.4	R2.6	R3.2	D2.3	I3.3
505	5to	N1.4	N2.2	D1.4	I1.4	I2.5	R1.7	R2.3	R3.4	D2.4	I3.5
506	5to	N1.3	N2.1	D1.3	I1.1	I2.1	R1.4	R2.6	R3.1	D2.1	I3.1
507	5to	N1.3	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.6	R2.3	R3.2	D2.2	I3.2
508	5to	N1.2	N2.4	D1.2	I1.4	I2.3	R1.5	R2.2	R3.1	D2.4	I3.5
509	5to	N1.4	N2.4	D1.2	I1.5	I2.2	R1.5	R2.2	R3.1	D2.2	I3.5
510	5to	N1.4	N2.1	D1.2	I1.5	I2.3	R1.3	R2.6	R3.4	D2.2	I3.5
511	5to	N1.3	N2.2	D1.5	I1.4	I2.5	R1.5	R2.3	R3.2	D2.6	I3.5
512	5to	N1.4	N2.1	D1.1	I1.5	I2.1	R1.3	R2.1	R3.5	D2.7	I3.2
513	5to	N1.4	N2.1	D1.1	I1.1	I2.1	R1.5	R2.5	R3.1	D2.2	I3.4
514	5to	N1.1	N2.1	D1.1	I1.2	I2.1	R1.5	R2.3	R3.1	D2.1	I3.3
515	5to	N1.3	N2.2	D1.1	I1.1	I2.3	R1.5	R2.6	R3.6	D2.1	I3.2
516	5to	N1.2	N2.2	D1.2	I1.5	I2.2	R1.4	R2.2	R3.1	D2.1	I3.1
517	5to	N1.3	N2.2	D1.3	I1.4	I2.2	R1.5	R2.6	R3.5	D2.4	I3.5
518	5to	N1.5	N2.3	D1.3	I1.1	I2.2	R1.5	R2.6	R3.5	D2.4	I3.5
519	5to	N1.5	N2.1	D1.2	I1.4	I2.2	R1.4	R2.5	R3.5	D2.2	I3.5
520	5to	N1.5	N2.2	D1.4	I1.5	I2.6	R1.7	R2.3	R3.5	D2.6	I3.3
521	5to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.1	I2.3	R1.5	R2.6	R3.5	D2.3	I3.4
522	5to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.4	I2.3	R1.5	R2.4	R3.4	D2.5	I3.5
523	5to	N1.5	N2.4	D1.1	I1.3	I2.1	R1.4	R2.3	R3.5	D2.6	I3.5
524	5to	N1.3	N2.3	D1.2	I1.1	I2.1	R1.3	R2.6	R3.3	D2.2	I3.5
525	5to	N1.3	N2.2	D1.1	I1.2	I2.3	R1.5	R2.2	R3.6	D2.2	I3.3
526	5to	N1.3	N2.1	D1.2	I1.2	I2.1	R1.3	R2.5	R3.5	D2.1	I3.2
527	5to	N1.1	N2.2	D1.2	I1.5	I2.3	R1.2	R2.2	R3.5	D2.4	I3.5
528	5to	N1.3	N2.1	D1.2	I1.4	I2.1	R1.3	R2.6	R3.3	D2.2	I3.5
529	5to	N1.4	N2.3	D1.2	I1.2	I2.2	R1.5	R2.6	R3.6	D2.5	I3.5
530	5to	N1.3	N2.1	D1.2	I1.4	I2.1	R1.3	R2.2	R3.6	D2.6	I3.5
531	5to	N1.3	N2.3	D1.1	I1.5	I2.4	R1.2	R2.4	R3.2	D2.1	I3.1
532	5to	N1.4	N2.1	D1.2	I1.5	I2.1	R1.3	R2.4	R3.3	D2.2	I3.2
533	5to	N1.1	N2.1	D1.2	I1.3	I2.1	R1.2	R2.2	R3.6	D2.4	I3.3
534	5to	N1.4	N2.4	D1.3	I1.5	I2.4	R1.5	R2.5	R3.7	D2.4	I3.4
535	5to	N1.2	N2.3	D1.2	I1.4	I2.2	R1.6	R2.5	R3.2	D2.4	I3.2
536	5to	N1.4	N2.4	D1.3	I1.3	I2.3	R1.4	R2.3	R3.5	D2.2	I3.5
537	5to	N1.4	N2.3	D1.4	I1.3	I2.4	R1.3	R2.4	R3.5	D2.6	I3.4
538	5to	N1.3	N2.1	D1.3	I1.3	I2.1	R1.2	R2.1	R3.1	D2.1	I3.6
539	5to	N1.4	N2.1	D1.2	I1.1	I2.1	R1.3	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
540	5to	N1.3	N2.4	D1.2	I1.3	I2.1	R1.4	R2.5	R3.5	D2.2	I3.3
541	5to	N1.4	N2.1	D1.3	I1.4	I2.4	R1.5	R2.3	R3.5	D2.4	I3.5
542	5to	N1.4	N2.1	D1.2	I1.3	I2.3	R1.4	R2.6	R3.1	D2.2	I3.3
543	5to	N1.3	N2.3	D1.2	I1.3	I2.1	R1.5	R2.6	R3.3	D2.5	I3.5
544	5to	N1.3	N2.3	D1.2	I1.3	I2.2	R1.6	R2.7	R3.3	D2.3	I3.5
545	5to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.4	I2.3	R1.5	R2.6	R3.4	D2.2	I3.5
546	5to	N1.1	N2.1	D1.5	I1.5	I2.6	R1.6	R2.4	R3.5	D2.6	I3.4
547	5to	N1.5	N2.3	D1.2	I1.5	I2.1	R1.4	R2.2	R3.1	D2.1	I3.1
548	5to	N1.3	N2.3	D1.1	I1.3	I2.3	R1.2	R2.2	R3.5	D2.3	I3.5

549	5to	N1.2	N2.4	D1.4	I1.4	I2.5	R1.7	R2.6	R3.4	D2.6	I3.2
550	5to	N1.3	N2.2	D1.2	I1.2	I2.1	R1.4	R2.2	R3.1	D2.1	I3.4
551	5to	N1.3	N2.3	D1.2	I1.3	I2.3	R1.2	R2.3	R3.5	D2.1	I3.5
552	5to	N1.3	N2.4	D1.4	I1.4	I2.6	R1.4	R2.3	R3.1	D2.4	I3.2
BI01	BI	N1.4	N2.7	D1.5	I1.4	I2.4	R1.6	R2.5	R3.3	D2.6	I3.4
BI02	BI	N1.4	N2.1	D1.3	I1.5	I2.2	R1.5	R2.5	R3.6	D2.1	I3.5
BI03	BI	N1.4	N2.3	D1.3	I1.2	I2.2	R1.6	R2.1	R3.2	D2.5	I3.4
BI04	BI	N1.3	N2.4	D1.5	I1.4	I2.4	R1.7	R2.3	R3.6	D2.4	I3.3
BI05	BI	N1.5	N2.6	D1.5	I1.5	I2.4	R1.3	R2.5	R3.6	D2.3	I3.5
BI06	BI	N1.4	N2.4	D1.5	I1.4	I2.4	R1.7	R2.5	R3.4	D2.3	I3.5
BI07	BI	N1.3	N2.1	D1.5	I1.4	I2.2	R1.5	R2.6	R3.2	D2.1	I3.2
BI08	BI	N1.3	N2.1	D1.4	I1.4	I2.2	R1.8	R2.3	R3.6	D2.1	I3.5
BI09	BI	N1.4	N2.3	D1.2	I1.4	I2.3	R1.2	R2.5	R3.5	D2.1	I3.1
BI10	BI	N1.1	N2.4	D1.4	I1.5	I2.6	R1.6	R2.6	R3.5	D2.6	I3.2
BI11	BI	N1.1	N2.1	D1.1	I1.2	I2.1	R1.5	R2.1	R3.1	D2.1	I3.4
BI12	BI	N1.4	N2.2	D1.1	I1.4	I2.2	R1.4	R2.6	R3.5	D2.2	I3.5
BI13	BI	N1.3	N2.1	D1.2	I1.4	I2.3	R1.2	R2.3	R3.1	D2.4	I3.3
BI14	BI	N1.3	N2.1	D1.5	I1.3	I2.2	R1.7	R2.7	R3.4	D2.6	I3.3
BI15	BI	N1.2	N2.4	D1.5	I1.5	I2.3	R1.6	R2.5	R3.2	D2.5	I3.5
BI16	BI	N1.3	N2.3	D1.3	I1.4	I2.4	R1.6	R2.2	R3.6	D2.4	I3.4
BI17	BI	N1.4	N2.4	D1.2	I1.4	I2.2	R1.6	R2.5	R3.6	D2.5	I3.5
BI18	BI	N1.4	N2.2	D1.3	I1.4	I2.2	R1.4	R2.3	R3.4	D2.3	I3.5
BI19	BI	N1.4	N2.2	D1.3	I1.4	I2.3	R1.3	R2.1	R3.2	D2.1	I3.5
BI20	BI	N1.5	N2.1	D1.4	I1.3	I2.2	R1.4	R2.7	R3.6	D2.6	I3.5
BI21	BI	N1.4	N2.4	D1.1	I1.4	I2.5	R1.5	R2.2	R3.5	D2.5	I3.3
BI22	BI	N1.3	N2.6	D1.4	I1.4	I2.1	R1.2	R2.3	R3.5	D2.6	I3.3
BI23	BI	N1.2	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.2	R2.5	R3.6	D2.3	I3.4
BI24	BI	N1.4	N2.1	D1.1	I1.3	I2.1	R1.1	R2.5	R3.5	D2.3	I3.2
BI25	BI	N1.3	N2.4	D1.2	I1.5	I2.1	R1.6	R2.4	R3.3	D2.7	I3.3
BI26	BI	N1.4	N2.4	D1.1	I1.5	I2.6	R1.4	R2.5	R3.6	D2.6	I3.3
EFI01	EFI	N1.1	N2.1	D1.1	I1.1	I2.1	R1.5	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
EFI03	EFI	N1.1	N2.1	D1.1	I1.1	I2.1	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
EFI05	EFI	N1.1	N2.1	D1.1	I1.1	I2.1	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
EFI07	EFI	N1.3	N2.3	D1.4	I1.2	I2.3	R1.2	R2.2	R3.5	D2.5	I3.4
EFI09	EFI	N1.3	N2.1	D1.2	I1.5	I2.3	R1.4	R2.2	R3.1	D2.1	I3.2
EFI11	EFI	N1.3	N2.3	D1.5	I1.4	I2.5	R1.6	R2.2	R3.2	D2.6	I3.5
EFI13	EFI	N1.1	N2.1	D1.5	I1.5	I2.3	R1.4	R2.5	R3.3	D2.4	I3.2
EFI15	EFI	N1.2	N2.4	D1.3	I1.4	I2.5	R1.6	R2.3	R3.6	D2.4	I3.5
EFI17	EFI	N1.4	N2.1	D1.4	I1.5	I2.5	R1.6	R2.4	R3.6	D2.2	I3.2
EFI19	EFI	N1.3	N2.1	D1.2	I1.1	I2.1	R1.2	R2.2	R3.2	D2.1	I3.2
EFI21	EFI	N1.3	N2.1	D1.2	I1.4	I2.1	R1.6	R2.4	R3.3	D2.1	I3.2
EFI23	EFI	N1.1	N2.1	D1.4	I1.1	I2.1	R1.6	R2.5	R3.1	D2.6	I3.4
EFI25	EFI	N1.2	N2.2	D1.3	I1.2	I2.3	R1.6	R2.2	R3.5	D2.1	I3.5
EFI27	EFI	N1.1	N2.4	D1.3	I1.4	I2.4	R1.5	R2.2	R3.5	D2.4	I3.5
EFI29	EFI	N1.1	N2.6	D1.3	I1.5	I2.1	R1.5	R2.2	R3.5	D2.4	I3.2
EFI31	EFI	N1.4	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.1	R2.5	R3.3	D2.1	I3.1
EFI33	EFI	N1.4	N2.3	D1.3	I1.3	I2.3	R1.5	R2.2	R3.2	D2.2	I3.5
EFI35	EFI	N1.4	N2.2	D1.1	I1.2	I2.1	R1.5	R2.2	R3.1	D2.1	I3.6
EFI37	EFI	N1.3	N2.6	D1.1	I1.1	I2.1	R1.6	R2.5	R3.2	D2.3	I3.2
EFI39	EFI	N1.4	N2.4	D1.3	I1.1	I2.1	R1.5	R2.2	R3.1	D2.1	I3.2
EFI41	EFI	N1.4	N2.1	D1.2	I1.3	I2.3	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
EFI43	EFI	N1.3	N2.2	D1.5	I1.5	I2.4	R1.5	R2.5	R3.1	D2.1	I3.1
EFI45	EFI	N1.1	N2.1	D1.2	I1.3	I2.1	R1.5	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
EFI47	EFI	N1.3	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.2	R2.6	R3.1	D2.7	I3.2
EFI49	EFI	N1.3	N2.2	D1.5	I1.4	I2.1	R1.6	R2.4	R3.2	D2.6	I3.2
EFI51	EFI	N1.3	N2.1	D1.4	I1.3	I2.1	R1.2	R2.2	R3.4	D2.4	I3.3
MI01	MI	N1.4	N2.3	D1.3	I1.5	I2.1	R1.2	R2.1	R3.6	D2.1	I3.5
MI02	MI	N1.4	N2.4	D1.3	I1.4	I2.1	R1.7	R2.2	R3.6	D2.6	I3.5
MI03	MI	N1.4	N2.7	D1.5	I1.6	I2.6	R1.6	R2.7	R3.2	D2.6	I3.5
MI04	MI	N1.1	N2.1	D1.3	I1.1	I2.1	R1.6	R2.1	R3.5	D2.1	I3.7
MI05	MI	N1.4	N2.3	D1.3	I1.5	I2.6	R1.6	R2.3	R3.2	D2.2	I3.2

MI06	MI	N1.4	N2.4	D1.2	I1.1	I2.1	R1.2	R2.4	R3.5	D2.1	I3.1
MI07	MI	N1.1	N2.4	D1.1	I1.3	I2.2	R1.3	R2.6	R3.5	D2.6	I3.5
MI08	MI	N1.4	N2.1	D1.4	I1.6	I2.6	R1.6	R2.4	R3.5	D2.6	I3.4
MI09	MI	N1.5	N2.4	D1.3	I1.3	I2.2	R1.6	R2.7	R3.4	D2.5	I3.5
MI10	MI	N1.4	N2.5	D1.3	I1.4	I2.2	R1.6	R2.3	R3.2	D2.1	I3.5
MI11	MI	N1.4	N2.2	D1.4	I1.4	I2.2	R1.4	R2.3	R3.2	D2.6	I3.2
MI12	MI	N1.4	N2.4	D1.1	I1.5	I2.2	R1.5	R2.2	R3.6	D2.2	I3.4
MI13	MI	N1.4	N2.1	D1.5	I1.4	I2.5	R1.8	R2.3	R3.5	D2.6	I3.5
MI14	MI	N1.3	N2.3	D1.2	I1.1	I2.3	R1.6	R2.5	R3.5	D2.2	I3.5
MI15	MI	N1.4	N2.2	D1.1	I1.3	I2.1	R1.6	R2.5	R3.5	D2.4	I3.5
MI16	MI	N1.4	N2.4	D1.3	I1.5	I2.3	R1.4	R2.4	R3.6	D2.4	I3.5
MI17	MI	N1.3	N2.3	D1.2	I1.4	I2.3	R1.6	R2.6	R3.5	D2.3	I3.5
MI18	MI	N1.4	N2.4	D1.2	I1.5	I2.2	R1.6	R2.4	R3.5	D2.1	I3.4
MI19	MI	N1.3	N2.7	D1.5	I1.5	I2.7	R1.7	R2.7	R3.5	D2.8	I3.7
MI20	MI	N1.4	N2.1	D1.1	I1.1	I2.3	R1.6	R2.5	R3.3	D2.2	I3.2
MI21	MI	N1.3	N2.3	D1.4	I1.1	I2.1	R1.6	R2.6	R3.5	D2.1	I3.5
MI22	MI	N1.3	N2.4	D1.1	I1.3	I2.3	R1.4	R2.5	R3.2	D2.7	I3.1
MI23	MI	N1.4	N2.5	D1.4	I1.5	I2.4	R1.6	R2.3	R3.6	D2.4	I3.5
MI24	MI	N1.2	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.6	R2.6	R3.3	D2.6	I3.3
MI25	MI	N1.5	N2.5	D1.5	I1.6	I2.2	R1.6	R2.3	R3.3	D2.6	I3.6
MI26	MI	N1.4	N2.5	D1.4	I1.5	I2.4	R1.7	R2.2	R3.2	D2.6	I3.6
MI27	MI	N1.3	N2.4	D1.3	I1.2	I2.1	R1.6	R2.2	R3.3	D2.1	I3.2
MI28	MI	N1.5	N2.6	D1.4	I1.3	I2.4	R1.5	R2.3	R3.4	D2.6	I3.5
MI29	MI	N1.1	N2.6	D1.1	I1.5	I2.3	R1.5	R2.4	R3.2	D2.3	I3.4
MI30	MI	N1.4	N2.5	D1.5	I1.5	I2.6	R1.4	R2.3	R3.6	D2.8	I3.5
MI41	MI	N1.3	N2.3	D1.1	I1.4	I2.6	R1.8	R2.3	R3.5	D2.6	I3.5
BA01	BA	N1.3	N2.4	D1.3	I1.3	I2.4	R1.6	R2.2	R3.4	D2.3	I3.4
BA02	BA	N1.3	N2.3	D1.1	I1.4	I2.4	R1.4	R2.4	R3.4	D2.4	I3.5
BA03	BA	N1.2	N2.4	D1.3	I1.4	I2.3	R1.4	R2.6	R3.4	D2.4	I3.2
BA04	BA	N1.3	N2.2	D1.4	I1.5	I2.4	R1.6	R2.6	R3.4	D2.4	I3.5
BA05	BA	N1.4	N2.6	D1.3	I1.1	I2.3	R1.4	R2.5	R3.4	D2.4	I3.5
BA06	BA	N1.2	N2.4	D1.3	I1.3	I2.4	R1.5	R2.3	R3.6	D2.4	I3.3
BA07	BA	N1.3	N2.3	D1.4	I1.4	I2.2	R1.4	R2.7	R3.2	D2.4	I3.4
BA08	BA	N1.3	N2.4	D1.5	I1.3	I2.3	R1.6	R2.7	R3.4	D2.8	I3.4
BA09	BA	N1.5	N2.3	D1.5	I1.4	I2.2	R1.4	R2.7	R3.4	D2.5	I3.4
BA10	BA	N1.3	N2.1	D1.3	I1.4	I2.2	R1.4	R2.6	R3.5	D2.7	I3.5
BA11	BA	N1.3	N2.4	D1.5	I1.3	I2.5	R1.4	R2.3	R3.2	D2.3	I3.4
BA12	BA	N1.4	N2.4	D1.4	I1.5	I2.3	R1.4	R2.3	R3.4	D2.8	I3.5
BA13	BA	N1.3	N2.1	D1.5	I1.4	I2.1	R1.7	R2.2	R3.4	D2.8	I3.2
BA14	BA	N1.1	N2.2	D1.4	I1.4	I2.2	R1.4	R2.6	R3.4	D2.6	I3.5
BA15	BA	N1.1	N2.1	D1.5	I1.4	I2.4	R1.5	R2.2	R3.2	D2.3	I3.4
BA16	BA	N1.2	N2.4	D1.4	I1.4	I2.6	R1.7	R2.5	R3.4	D2.4	I3.5
BA17	BA	N1.3	N2.3	D1.1	I1.1	I2.3	R1.6	R2.4	R3.2	D2.2	I3.4
BA18	BA	N1.3	N2.3	D1.3	I1.4	I2.3	R1.5	R2.3	R3.5	D2.4	I3.5
BA19	BA	N1.3	N2.1	D1.2	I1.5	I2.3	R1.5	R2.3	R3.5	D2.3	I3.5
BA20	BA	N1.4	N2.5	D1.5	I1.5	I2.6	R1.6	R2.7	R3.3	D2.4	I3.5
BA21	BA	N1.4	N2.2	D1.4	I1.4	I2.4	R1.6	R2.7	R3.2	D2.4	I3.4
EFA01	EFA	N1.2	N2.1	D1.2	I1.1	I2.3	R1.6	R2.3	R3.6	D2.4	I3.4
EFA02	EFA	N1.1	N2.1	D1.3	I1.3	I2.4	R1.5	R2.3	R3.5	D2.2	I3.2
EFA03	EFA	N1.3	N2.1	D1.2	I1.5	I2.3	R1.4	R2.2	R3.5	D2.3	I3.6
EFA04	EFA	N1.3	N2.4	D1.5	I1.3	I2.6	R1.6	R2.4	R3.6	D2.6	I3.2
EFA05	EFA	N1.3	N2.3	D1.3	I1.4	I2.3	R1.6	R2.5	R3.5	D2.2	I3.4
EFA06	EFA	N1.1	N2.1	D1.1	I1.4	I2.3	R1.6	R2.3	R3.5	D2.5	I3.2
EFA07	EFA	N1.1	N2.1	D1.2	I1.1	I2.1	R1.5	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1
EFA08	EFA	N1.1	N2.1	D1.2	I1.4	I2.1	R1.6	R2.5	R3.1	D2.3	I3.2
EFA09	EFA	N1.1	N2.1	D1.3	I1.1	I2.1	R1.5	R2.2	R3.5	D2.1	I3.3
EFA10	EFA	N1.3	N2.3	D1.1	I1.5	I2.1	R1.5	R2.2	R3.6	D2.4	I3.1
EFA11	EFA	N1.4	N2.3	D1.3	I1.3	I2.1	R1.6	R2.5	R3.1	D2.4	I3.2
EFA12	EFA	N1.2	N2.3	D1.2	I1.2	I2.3	R1.5	R2.2	R3.5	D2.2	I3.3
EFA13	EFA	N1.3	N2.1	D1.2	I1.5	I2.1	R1.4	R2.2	R3.1	D2.1	I3.2
EFA14	EFA	N1.1	N2.4	D1.2	I1.1	I2.3	R1.1	R2.1	R3.1	D2.1	I3.1

EFA15	EFA	N1.4	N2.5	D1.3	I1.4	I2.4	R1.2	R2.5	R3.1	D2.4	I3.1
EFA16	EFA	N1.1	N2.4	D1.2	I1.5	I2.4	R1.6	R2.5	R3.4	D2.4	I3.2
MA01	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.5	I2.6	R1.8	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA02	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.6	I2.7	R1.7	R2.7	R3.2	D2.8	I3.5
MA03	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.5	I2.6	R1.8	R2.5	R3.7	D2.4	I3.2
MA04	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.1	I2.2	R1.7	R2.7	R3.6	D2.8	I3.7
MA05	MA	N1.5	N2.6	D1.5	I1.4	I2.4	R1.7	R2.7	R3.6	D2.8	I3.5
MA06	MA	N1.5	N2.5	D1.5	I1.6	I2.4	R1.7	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA07	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.5	I2.7	R1.8	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA08	MA	N1.4	N2.5	D1.5	I1.5	I2.7	R1.6	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA09	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.6	I2.7	R1.8	R2.7	R3.2	D2.8	I3.7
MA10	MA	N1.5	N2.4	D1.5	I1.4	I2.2	R1.6	R2.7	R3.7	D2.8	I3.4
MA11	MA	N1.5	N2.6	D1.5	I1.4	I2.2	R1.7	R2.7	R3.2	D2.6	I3.1
MA12	MA	N1.4	N2.7	D1.5	I1.6	I2.7	R1.8	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA13	MA	N1.5	N2.5	D1.4	I1.6	I2.6	R1.7	R2.7	R3.6	D2.8	I3.7
MA14	MA	N1.5	N2.6	D1.5	I1.1	I2.2	R1.7	R2.7	R3.7	D2.7	I3.2
MA15	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.5	I2.7	R1.7	R2.7	R3.7	D2.1	I3.1
MA16	MA	N1.5	N2.7	D1.5	I1.6	I2.7	R1.7	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA17	MA	N1.4	N2.7	D1.5	I1.5	I2.6	R1.7	R2.7	R3.7	D2.4	I3.6
MA18	MA	N1.5	N2.5	D1.5	I1.5	I2.6	R1.7	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA19	MA	N1.4	N2.7	D1.5	I1.5	I2.6	R1.8	R2.7	R3.7	D2.8	I3.7
MA20	MA	N1.5	N2.7	D1.4	I1.4	I2.6	R1.7	R2.3	R3.7	D2.7	I3.6

Tabla AV.2: Etiquetas cortas y largas de las modalidades de categorización de respuestas utilizadas para el AFCM. Frecuencia de estudiantes en cada modalidad y porcentaje de la población que representa.

Tareas - Modalidades de categorización de respuestas		N	%
T1 - N1	N1. Concepción de número en general (según una tipología)		
N1.1	N1.1. Solo los enteros son números	37	12%
N1.2	N1.2. Los enteros como modelo de número	25	8%
N1.3	N1.3. Identificación del número con su representación	106	35%
N1.4	N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares	111	36%
N1.5	N1.5. Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura	28	9%
T2.- N2	N2. Concepción de número irracional.		
N2.1	N2.1. Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales.	90	29%
N2.2	N2.2. Centrada en la resolución de una operación. No tienen solución/resultado (exacta/o).	53	17%
N2.3	N2.3. Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, números con coma.	52	17%
N2.4	N2.4. Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma -	47	15%
N2.5	N2.5. Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.	20	7%
N2.6	N2.6. Definición literal no-fracción. No se pueden escribir como fracción.	30	10%
N2.7	N2.7. Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros.	15	5%
T3 -D1	D1. Comprensión del orden y la densidad de R.		
D1.1	D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	56	18%
D1.2	D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.	101	33%
D1.3	D1.3. Densidad finitista. No comprenden el orden.	63	21%
D1.4	D1.4. Densidad infinitista. No comprenden el orden.	37	12%
D1.5	D1.5. Comprensión de la densidad y el orden.	50	16%
T4 -I1	I1. Concepción de Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables ordenadas (infinitas cifras decima-les)		
I1.1	I1.1: Evitan el infinito (notación decimal infinita).	62	20%
I1.2	I1.2. Finitista no justificada (notación decimal infinita).	19	6%
I1.3	I1.3. Finitista explicita (notación decimal infinita).	51	17%
I1.4	I1.4. Infinito como indefinido (notación decimal infinita).	99	32%
I1.5	I1.5. Infinitista. Único infinito (notación decimal infinita).	67	22%
I1.6	I1.6. Infinito Cardinal (notación decimal infinita).	9	3%
T5-I2	I2. Concepción de Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números		
I2.1	I2.1: Evitan el infinito (comparando conjuntos).	86	28%
I2.2	I2.2. Los enteros como modelo de inclusión.	53	17%
I2.3	I2.3. Finitista no justificada (comparando conjuntos).	86	28%
I2.4	I2.4. Finitista explícita (comparando conjuntos).	40	13%
I2.5	I2.5. Infinito como indefinido (comparando conjuntos).	9	3%
I2.6	I2.6. Único infinito (comparando conjuntos).	24	8%
I2.7	I2.7. Infinito cardinal (comparando conjuntos).	9	3%

T6	R1: Comprensión de la representación de números reales en una recta numérica.		
R1.1	R1.1: Grafican sólo los enteros.	18	6%
R1.2	R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½).	35	11%
R1.3	R1.3. No grafican infinitos (no explicada).	22	7%
R1.4	R1.4. No grafican infinitos (Infinito indefinido)	50	16%
R1.5	R1.5. Grafican sólo racionales.	74	24%
R1.6	R1.6. Grafican todos aproximados.	65	21%
R1.7	R1.7. Grafican todos en forma aproximada-exacta.	34	11%
R1.8	R1.8. Grafican todos en forma exacta.	9	3%
T7	R2. Comprensión de la recta numérica como representación de los números reales.		
R2.1	R2.1: Ajenidad (frente a la representación de los reales en la recta).	27	9%
R2.2	R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.	62	20%
R2.3	R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras).	57	19%
R2.4	R2.4. La recta es infinitamente densa e infinito es todo.	26	8%
R2.5	R2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales.	48	16%
R2.6	R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada.	55	18%
R2.7	R2.7. La recta representa a los reales completos.	32	10%
T8	R3. Concepción de la naturaleza de la recta numérica.		
R3.1	R3.1 Ajenidad.	51	17%
R3.2	R3.2 Recta dibujada o material:	53	17%
R3.3	R3.3 Recta de puntos discreta.	17	6%
R3.4	R3.4 Recta de magnitudes. Regla graduada	36	12%
R3.5	R3.5 Densidad numérica - Infinito como indefinido	74	24%
R3.6	R3.6 Densidad numérica - Infinito potencial	61	20%
R3.7	R3.7 Continuidad.	15	5%
T9	D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en R.		
D2.1	D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo).	83	27%
D2.2	D2.2. Discretitud no explicada.	45	15%
D2.3	D2.3. Discretitud (finitista -redondeo).	28	9%
D2.4	D2.4. Discretitud (infinito potencial)	47	15%
D2.5	D2.5. Discretitud (infinito es todo).	26	8%
D2.6	D2.6. Densidad potencialmente infinita.	45	15%
D2.7	D2.7. Densidad no explicada.	14	5%
D2.8	D2.8. Densidad infinito-actual de los reales.	19	6%
T10	32. Comprensión del orden y del infinito actual en la representación decimal infinito-periódico de un número.		
I3.1	I3.1: Evitan el infinito (número periódico).	29	9%
I3.2	I3.2. Finitista no justificada (número periódico)..	49	16%
I3.3	I3.3. Finitista - Centrada en la representación externa finita.	54	18%
I3.4	I3.4. Discretitud explicita o redondeo (número periódico).	45	15%
I3.5	I3.5. Infinito potencial (número periódico).	109	36%
I3.6	I3.6. Infinitista no explicada (número periódico).	8	3%
I3.7	I3.7. Infinito actual (número periódico).	13	4%

Tabla AV.3: Etiquetas cortas y largas de las modalidades de NEM. Frecuencia de estudiantes en cada modalidad.

NEM	Nivel de Estudio en Matemática	
3RO	3ro. Tercer año de secundaria	59
4TO	4to. Cuarto año de secundaria	56
5TO	5to. Quinto año de secundaria	52
BI	BI. Ingresantes a Biología	26
EFI	EFI. Ingresantes a Ed. Física	26
MI	MI. Ingresantes a Matemática	31
BA	BA. Avanzados/as de Biología	21
EFA	EFA. Avanzados/as de Ed. Física	16
MA	MA. Avanzados/as de Matemática	20

Principales factores de variabilidad de las modalidades de respuesta a todas las tareas del cuestionario. Asociación con el NEM

En la Tabla AV.4 se pueden ver, para cada modalidad, el efectivo de individuos que la poseen, la distancia al origen de coordenadas (cuanto más lejos del origen es una modalidad describe mayor variabilidad de los datos o es una modalidad rara), las contribuciones de cada modalidad de las variables de respuesta a cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM. Las modalidades en negrita son las que poseen una contribución mayor a la media en los dos primeros ejes, esto es que describen la mayor variabilidad de los datos; debemos tener en cuenta que la contribución media de una modalidad a un eje en este caso es de 1,5%. Los dos primeros ejes determinan el primer plano del AFCM el que conserva la mayor parte de la inercia, es decir el que mejor muestra la asociación entre modalidades de respuesta.

Mientras que en la Tabla AV.5. podemos observar, como novedad, el valor test de cada modalidad en cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM. Valores test más grandes que 2 en valor absoluto permiten rechazar la hipótesis de una extracción al azar con un umbral del 5%. Las modalidades en negrita poseen un buen v. t. en alguno de los dos primeros. En la Tabla AV.6, encontraremos para cada modalidad de NEM, el efectivo de individuos que la poseen, distancia del centro de gravedad al origen de coordenadas. Valor test en cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM. Las modalidades en negrita poseen un buen v. t. en alguno de los dos primeros ejes.

Tabla AV.4. Etiquetas, efectivo de individuos que la poseen, distancia al origen de coordenadas de cada modalidad. Contribuciones de cada modalidad a cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM. Las modalidades en negrita poseen una contribución mayor a la media en alguno de los dos primeros ejes.

			CONTRIBUCIÓN DE LAS MODALIDADES ACTIVAS				
ETIQUETA	Efectivo	Distancia al origen	EJE 1	EJE 2	EJE 3	EJE 4	EJE 5
N1. Número en general (según una tipología)							
N1.1. Solo los enteros son números	37	7,30	0,28	1,31	5,54	0,16	0,66
N1.2. Los enteros como modelo de número	25	11,28	0,21	0,00	0,34	1,06	5,76
N1.3. Identificación del número con su representación	106	1,90	0,32	0,18	3,99	1,54	0,78
N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares	111	1,77	0,04	0,15	0,06	0,40	0,97
N1.5. Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura	28	9,96	**6,39**	0,05	0,02	0,42	1,18
N2. Número irracional							
N2.1. Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales.	90	2,41	0,84	**4,45**	0,81	0,94	0,00
N2.2. Centrada en la resolución de una operación. No tienen solución/resultado (exacta/o).	53	4,79	0,27	0,54	0,47	0,11	0,23
N2.3. Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, números con coma.	52	4,90	0,21	0,42	3,81	0,71	0,14
N2.4. Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma.	47	5,53	0,00	**2,50**	3,05	0,04	0,92

N2.5. Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.	20	14,35	1,03	0,35	1,80	0,15	0,01
N2.6. Definición literal no-fracción. No se pueden escribir como fracción.	30	9,23	0,02	0,02	0,80	0,08	6,55
N2.7. Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros.	15	19,47	**9,75**	1,18	0,43	0,01	0,08
D1. Orden y densidad en los números reales							
D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	56	4,48	0,61	1,42	0,63	0,77	3,54
D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.	101	2,04	1,05	0,31	4,87	0,01	0,03
D1.3. Densidad finitista. No comprenden el orden.	63	3,87	0,26	0,82	0,05	3,63	2,05
D1.4. Densidad infinitista. No comprenden el orden.	37	7,30	0,06	1,04	7,49	0,14	0,01
D1.5. Comprensión de la densidad y el orden.	50	5,14	**7,06**	0,03	0,03	0,55	0,00
D2. Densidad y supremo de un intervalo de números reales							
D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo).	83	2,70	1,06	**8,96**	0,35	0,29	0,09
D2.2. Discretitud no explicada.	45	5,82	0,33	0,38	3,68	0,04	3,66
D2.3. Discretitud (finitista -redondeo).	28	9,96	0,13	0,10	1,08	0,02	0,72
D2.4. Discretitud (infinito potencial)	47	5,53	0,00	**2,37**	1,82	0,73	6,14
D2.5. Discretitud (infinito es todo).	26	10,81	0,02	1,08	3,45	0,95	0,61
D2.6. Densidad potencialmente infinita.	45	5,82	0,09	**2,02**	8,43	3,87	5,71
D2.7. Densidad no explicada.	14	20,93	0,00	0,02	0,90	2,41	0,00
D2.8. Densidad infinito-actual de los reales.	19	15,16	**10,47**	0,63	0,40	0,80	0,04
I1. Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables							
I1**.1: Ajenidad (notación decimal infinita).**	62	4,29	0,57	**4,00**	0,91	0,08	0,23
I1**.2. Finitista no justificada (notación decimal infinita).**	19	2,13	0,02	**3,79**	0,00	0,07	0,00
I1.3. Finitista explicita (notación decimal infinita).	51	15,16	0,34	0,83	0,01	0,41	1,73
I1.4. Infinito como indefinido (notación decimal infinita).	99	5,02	0,24	0,03	0,00	0,74	1,81
I1.5. Infinitista. Único infinito (notación decimal infinita).	67	3,21	0,68	0,00	0,63	0,77	1,24
I1.6. Infinito Cardinal (notación decimal infinita).	9	37,38	**4,87**	0,28	0,00	0,44	0,30
I2. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos de números							
I2.1: Ajenidad (comparando conjuntos).	86	2,57	1,14	**5,31**	0,47	1,30	0,03
I2.2. Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos).	53	4,79	0,03	1,03	0,20	0,71	6,91
I2.3. Finitista no justificada (comparando conjuntos).	86	2,57	0,75	0,04	8,17	0,83	1,89
I2**.4. Finitista explícita (comparando conjuntos).**	40	6,68	0,04	**2,34**	4,72	1,05	0,71
I2.5.Infinito como indefinido (comparando conjuntos).	9	33,11	0,01	1,45	2,03	0,13	0,02
I2.6. Único infinito (comparando conjuntos).	24	11,79	**2,23**	0,26	4,05	6,19	0,19
I2.7. Infinito cardinal (comparando conjuntos).	9	33,11	**6,92**	1,59	2,26	0,86	0,00
I3. Comprensión del orden y del infinito actual en la representación decimal periódica de un racional							
I3.1: Ajenidad (número periódico).	29	9,59	0,27	**7,81**	1,43	0,61	0,42
I3.2. Finitista no justificada (número periódico)..	43	6,14	0,05	0,00	0,02	9,22	1,90
I3.3. Finitista - Centrada en la representación externa finita.	54	4,69	0,31	0,04	0,24	0,01	1,12
I3.4. Discretitud explicita o redondeo (número periódico).	45	5,82	0,02	0,80	1,33	1,12	2,47
I3.5. Infinito potencial (número periódico).	115	1,67	0,10	**2,34**	0,05	4,52	2,64

I3.6. Infinitista no explicada (número periódico).	8	37,38	0,17	0,17	1,56	0,35	0,69
I3.7. Infinito actual (número periódico).	13	22,62	**10,25**	1,82	0,56	0,46	0,00
R1: Representación de números reales en la recta.							
R1.1: Grafican sólo los enteros.	18	16,06	0,39	**6,95**	0,06	0,01	0,01
R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½).	35	7,77	0,47	0,78	0,02	0,32	3,31
R1.3. No grafican infinitos (no explicada).	22	12,95	0,20	0,02	1,16	1,07	3,07
R1.4. No grafican por ser infinitos (Infinito indefinido)	50	5,14	0,05	1,15	0,07	0,09	0,11
R1.5. Grafican sólo racionales.	74	3,15	0,59	0,01	0,29	4,05	3,87
R1.6. Grafican todos (aproximación decimal).	65	3,72	0,00	1,21	0,37	8,01	3,09
R1.7. Grafican todos en forma aproximada-exacta.	34	8,03	**2,98**	0,30	2,03	0,93	0,64
R1.8. Grafican todos en forma exacta.	9	33,11	**4,59**	0,44	0,14	0,01	0,36
R2. La recta numérica como representación de los números reales							
R2.1: Ajenidad (frente a la representación de los reales en la recta).	27	10,37	0,60	**9,35**	1,18	0,46	0,67
R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.	62	3,95	0,48	0,12	0,48	1,63	7,02
R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras).	57	4,39	0,00	**2,91**	2,12	0,21	2,93
R2.4. La recta completa con fracciones (infinito es todo).	26	10,81	0,06	0,25	0,03	11,76	0,03
R2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales.	48	5,40	0,09	0,06	0,88	1,53	1,31
R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada.	55	4,58	0,36	0,17	1,71	0,54	1,77
R2.7. La recta representa a los reales completos.	32	8,59	**9,45**	0,08	0,78	0,39	0,02
R3. La naturaleza de la recta numérica.							
R3.1. Ajenidad en la naturaleza de la recta numérica.	51	5,02	0,94	**7,73**	1,32	0,53	0,57
R3.2. Recta dibujada o material.	53	4,79	0,00	0,06	1,15	3,07	0,09
R3.3. Recta de puntos discreta.	17	17,06	0,00	0,02	1,42	11,23	0,02
R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada.	36	7,53	0,00	1,90	0,04	3,50	2,41
R3.5. Densidad numérica potencial. Infinito como indefinido.	74	3,15	0,24	0,29	0,35	0,08	4,05
R3.6. Densidad numérica potencialmente infinita.	61	4,03	0,00	1,08	1,41	0,86	0,04
R3.7. Continuidad.	15	19,47	**8,99**	0,85	0,06	0,02	0,42

Tabla AV.5. Etiquetas, efectivo de individuos que la poseen, la respectiva distancia al origen de coordenadas y valor test en cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM de cada modalidad activa del AFCM Las modalidades en negrita poseen un buen v. t. en alguno de los dos primeros ejes.

			VALOR TEST				
ETIQUETA	Efectivo	Distancia al origen	EJE 1	EJE 2	EJE 3	EJE 4	EJE 5
N1. Número en general (según una tipología)							
N1.1. Solo los enteros son números	37	7,29730	**2,30**	**3,82**	6,18	0,99	-1,95
N1.2. Los enteros como modelo de número	25	11,28000	1,98	0,16	1,51	-2,50	5,65
N1.3. Identificación del número con su representación	106	1,89623	**2,89**	-1,65	-6,07	3,57	2,46
N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares	111	1,76577	0,99	-1,50	0,75	-1,83	-2,79
N1.5. Números son los elementos de los conjuntos convencionales con estructura	28	9,96429	**-10,91**	0,74	0,35	-1,58	-2,57

N2. Número irracional							
N2.1. Ajenidad - Inseguridad. Desconocen los irracionales.	90	2,41111	**4,49**	**7,85**	2,64	2,68	0,16
N2.2. Centrada en la resolución de una operación. No tienen solución/resultado (exacta/o).	53	4,79245	**2,35**	**-2,53**	-1,85	-0,84	1,19
N2.3. Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, números con coma.	52	4,90385	**2,04**	**-2,23**	-5,27	-2,15	0,91
N2.4. Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma.	47	5,53191	0,10	**-5,37**	4,67	-0,48	2,35
N2.5. Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.	20	14,35000	**-4,33**	-1,92	3,41	0,94	-0,17
N2.6. Definición literal no-fracción. No se pueden escribir como fracción.	30	9,23333	0,59	-0,41	-2,32	-0,69	-6,08
N2.7. Definición experta. Los reales que no son cociente de enteros.	15	19,46670	**-13,17**	**3,48**	-1,65	0,22	0,63
D1. Orden y densidad en los números reales							
D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	56	4,48214	**3,57**	**4,12**	2,16	2,26	-4,69
D1.2. Discretitud. Identifican π con su aproximación decimal.	101	2,03960	**5,14**	**2,13**	-6,63	0,30	0,48
D1.3. Densidad finitista. No comprenden el orden.	63	3,87302	**2,37**	**-3,17**	-0,59	-4,97	3,62
D1.4. Densidad infinitista. No comprenden el orden.	37	7,29730	-1,04	**-3,41**	7,18	0,92	0,23
D1.5. Comprensión de la densidad y el orden.	50	5,14000	**-11,95**	-0,55	0,49	1,88	0,13
D2. Densidad y supremo de un intervalo de números reales							
D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo).	83	2,69880	**4,95**	**10,95**	1,71	-1,46	0,81
D2.2. Discretitud no explicada.	45	5,82222	**2,56**	**-2,09**	-5,11	0,49	-4,67
D2.3. Discretitud (finitista -redondeo).	28	9,96429	1,57	-1,04	-2,68	-0,32	2,00
D2.4. Discretitud (infinito potencial)	47	5,53191	0,01	**-5,23**	3,60	-2,16	6,07
D2.5. Discretitud (infinito es todo).	26	10,80770	0,68	**-3,39**	-4,78	-2,37	1,84
D2.6. Densidad potencialmente infinita.	45	5,82222	-1,30	**-4,81**	7,73	4,95	-5,83
D2.7. Densidad no explicada.	14	20,92860	0,12	0,40	-2,38	3,69	-0,15
D2.8. Densidad infinito-actual de los reales.	19	15,15790	**-13,74**	**2,57**	-1,61	-2,15	0,46
I1. Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables							
I1.1: Ajenidad (notación decimal infinita).	62	4,29310	**3,46**	**6,94**	-2,60	0,75	-1,20
I1.2. Finitista no justificada (notación decimal infinita).	19	15,15790	**2,46**	**2,94**	0,31	-1,54	3,07
I1.3. Finitista explicita (notación decimal infinita).	51	5,01961	**2,20**	-0,59	0,07	-2,19	-3,33
I1.4. Infinito como indefinido (notación decimal infinita).	99	2,13265	0,77	**-7,38**	-0,12	-0,75	-0,11
I1.5. Infinitista. Único infinito (notación decimal infinita).	67	3,20548	**-3,90**	-0,09	2,23	2,34	2,87
I1.6. Infinito Cardinal (notación decimal infinita).	9	37,37500	**-9,19**	1,69	0,14	1,57	-1,25
I2. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos de números							
I2.1: Ajenidad (comparando conjuntos).	86	2,56977	**5,17**	**8,49**	1,99	3,13	-0,43
I2.2. Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos).	53	4,79245	-0,72	**-3,49**	-1,20	-2,16	-6,52
I2.3. Finitista no justificada (comparando conjuntos).	86	2,56977	**4,20**	-0,78	-8,28	-2,50	3,65
I2.4. Finitista explícita (comparando conjuntos).	40	6,67500	-0,93	**-5,13**	5,73	-2,55	2,04
I2.5. Infinito como indefinido (comparando conjuntos).	9	33,11110	-0,31	**-3,82**	3,55	0,85	0,31
I2.6. Único infinito (comparando conjuntos).	24	11,79170	**-6,39**	-1,67	5,15	6,02	1,04
I2.7. Infinito cardinal (comparando conjuntos).	9	33,11110	**-10,98**	4,00	-3,75	-2,19	0,00
I3. Comprensión del orden y del infinito actual en la representación decimal periódica de un racional							
I3.1: Ajenidad (número periódico).	29	9,58621	**2,26**	**9,18**	3,09	-1,91	1,54

I3.2. Finitista no justificada (número periódico)..	43	6,13953	0,95	-0,06	-0,33	7,61	3,36
I3.3. Finitista - Centrada en la representación externa finita.	54	4,68518	**2,54**	0,66	1,31	0,27	-2,63
I3.4. Discretitud explicita o redondeo (número periódico).	45	5,82222	0,65	**-3,02**	-3,07	2,67	3,84
I3.5. Infinito potencial (número periódico).	115	1,66957	1,65	**-6,05**	-0,66	-6,25	-4,63
I3.6. Infinitista no explicada (número periódico).	8	37,37500	-1,71	1,32	3,11	1,39	1,89
I3.7. Infinito actual (número periódico).	13	22,61540	**-13,46**	**4,31**	-1,87	-1,61	-0,16
R1: Representación de números reales en la recta.							
R1.1: Grafican sólo los enteros.	18	16,05560	**2,65**	**8,49**	0,60	0,21	-0,22
R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½).	35	7,77143	**3,01**	**2,94**	-0,41	-1,41	4,36
R1.3. No grafican infinitos (no explicada).	22	12,95450	1,92	0,42	-2,75	2,49	-4,10
R1.4. No grafican por ser infinitos (Infinito indefinido)	50	5,14000	1,02	**-3,67**	-0,71	-0,75	-0,80
R1.5. Grafican sólo racionales.	74	3,14865	**3,63**	0,26	1,51	-5,37	-5,09
R1.6. Grafican todos (aproximación decimal).	65	3,72308	-0,32	**-3,87**	-1,69	7,41	4,47
R1.7. Grafican todos en forma aproximada-exacta.	34	8,02941	**-7,53**	-1,81	3,71	-2,37	1,92
R1.8. Grafican todos en forma exacta.	9	33,11110	**-8,95**	2,12	-0,95	0,27	-1,37
R2. La recta numérica como representación de los números reales							
R2.1: Ajenidad (frente a la representación de los reales en la recta).	27	10,37040	**3,33**	**10,01**	2,80	-1,65	-1,94
R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.	62	3,95161	**3,20**	1,19	1,91	-3,32	6,69
R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras).	57	4,38596	0,05	**-5,91**	3,97	-1,19	-4,27
R2.4. La recta completa con fracciones (infinito es todo).	26	10,80770	1,06	-1,64	-0,47	8,33	-0,41
R2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales.	48	5,39583	1,38	-0,82	-2,51	3,13	2,82
R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada.	55	4,58182	**2,72**	-1,41	-3,55	-1,89	-3,31
R2.7. La recta representa a los reales completos.	32	8,59375	**-13,36**	0,93	-2,29	-1,54	-0,37
R3. La naturaleza de la recta numérica.							
R3.1. Ajenidad en la naturaleza de la recta numérica.	51	5,01961	**4,36**	**9,52**	3,10	-1,86	1,87
R3.2. Recta dibujada o material.	53	4,79245	-0,08	-0,86	-2,90	4,48	-0,72
R3.3. Recta de puntos discreta.	17	17,05880	0,16	-0,46	-3,01	8,02	0,32
R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada.	36	7,52778	0,14	**-4,58**	0,54	-4,63	3,73
R3.5. Densidad numérica potencial. Infinito como indefinido.	74	3,14865	**2,32**	-1,94	-1,67	-0,74	-5,21
R3.6. Densidad numérica potencialmente infinita.	61	4,03279	0,15	**-3,62**	3,26	-2,41	0,53
R3.7. Continuidad.	15	19,46670	**-12,64**	**2,95**	-0,61	-0,30	1,49

Tabla AV.6. Modalidad de NEM, efectivo de individuos que la poseen, distancia del centro de gravedad al origen de coordenadas y valor test en cada uno de los 5 primeros ejes del AFCM. Las modalidades en negrita poseen un buen v. t. en alguno de los dos primeros ejes.

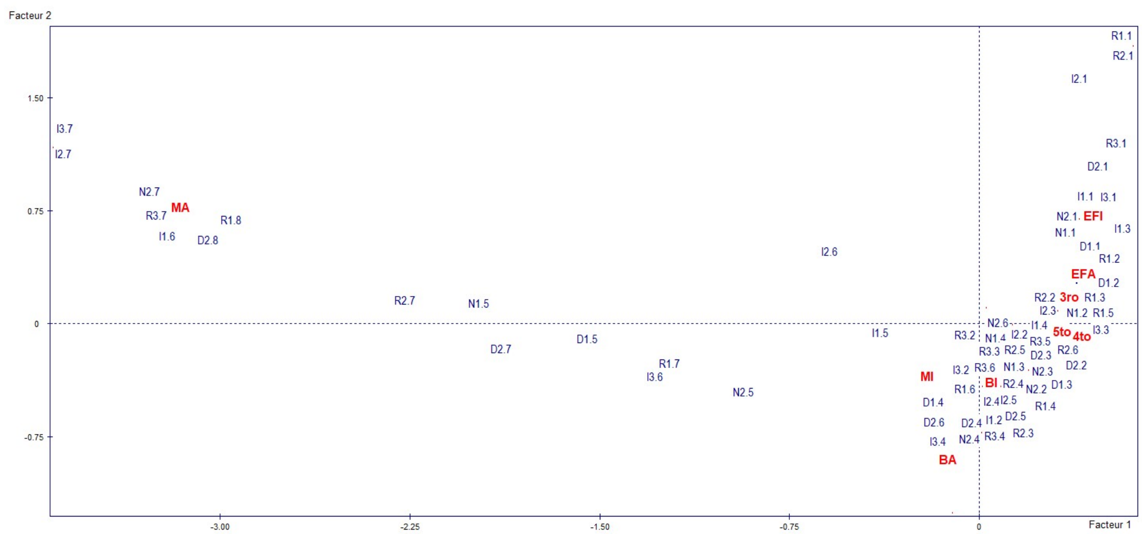
			VALOR TEST				
ETIQUETA NEM	Efectivo	Distancia al origen	EJE 1	EJE 2	EJE 3	EJE 4	EJE 5
3ro	59	4,20339	**2,86**	1,58	1,02	-1,45	-5,30
4to	56	4,48214	**2,72**	-0,76	-3,11	-1,19	2,00
5to	52	4,90385	**2,49**	-0,61	-1,60	-0,03	-0,71
BI	26	10,80770	0,30	-1,90	0,92	0,54	-0,01
EFI	26	10,80770	**2,24**	**3,54**	2,01	2,15	2,93
MI	31	8,90323	-1,23	-1,87	1,54	3,06	-1,47
BA	21	13,61900	-0,55	**-4,21**	0,27	-1,12	2,92
EFA	16	18,18750	1,59	1,09	1,22	-0,41	2,10
MA	20	14,35000	-14,85	**3,36**	-0,91	-1,03	0,04

Primer plano factorial del AFCM

A continuación, presentamos el primer Plano Factorial del AFCM de los y las 307 estudiantes descriptos por sus modalidades de respuesta a cada tarea y su NEM.

En este plano puede observarse las modalidades de respuesta que conforman los principales factores de variabilidad. Por razones de claridad, hemos dejado en este plano las etiquetas cortas de las modalidades de respuesta. Puede leerse las etiquetas largas en la Tabla 10.1 en el Capítulo 10. Recordemos que dos modalidades de respuesta estarán próximas cuando son elegidas globalmente por los mismos individuos.

Gráfico AV.1. Primer plano factorial de AFCM de los y las estudiantes descriptos por sus modos de respuesta a todas las tareas del cuestionario. En azul las modalidades de NEM. En rojo las etiquetas cortas de las modalidades de respuesta.



Hemos proyectado las modalidades de NEM como modalidades ilustrativas, por lo tanto, cada una de estas modalidades será el baricentro de las modalidades de respuesta que eligieron los/as estudiantes del respectivo NEM. Es decir, una modalidad de respuesta estaré tanto más cerca de una de NEM cuanto más sean los y las estudiantes de ese NEM que eligieron esa modalidad de respuesta.

Complemento de la clasificación posterior al AFCM

Histograma de índices de nivel de las iteraciones

Presentamos, a continuación, el histograma de índices de nivel de las iteraciones de índice más elevado correspondiente a la clasificación jerárquica posterior al AFCM descripto (Gráfico AV.2). Este índice es una medida de la distancia (semejanza o diferencia) entre sujetos o grupos de sujetos que se fusionan en la iteración correspondiente.

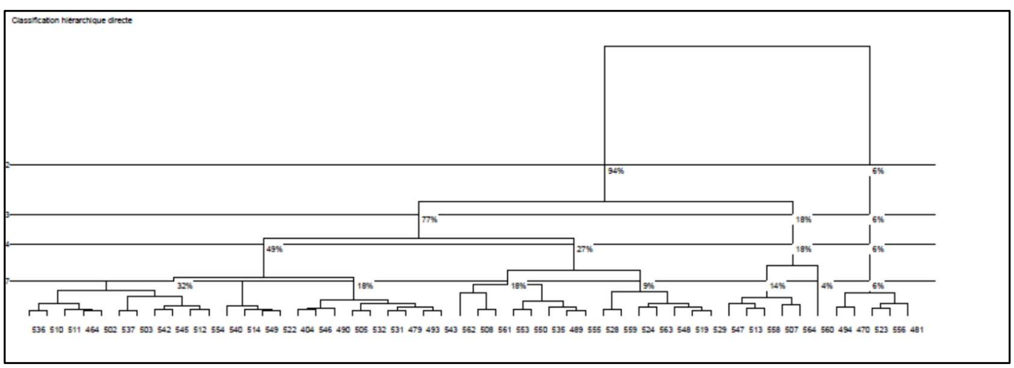
Se consideró, como la más conveniente, la clasificación en siete clases, dado que, en la clasificación en cuatro clases, se observó que se fusionaron las que más adelante se denominan Clase 1, 2, 3 y 4 conformando una clase muy numerosa y cuya distinción nos interesó mantener (Gráfico AV.3). Por todo esto se realizó un corte del histograma de índices de nivel a la altura de la iteración 608 (en negrita en la Gráfico AV.2), con lo que se obtuvo una partición en las siete clases que describimos en el Capítulo 10.

Gráfico AV.2. Histograma de los 18 índices de nivel más elevados de la clasificación jerárquica.

NUM[a]	EFE[b]	INDICE[c]	HISTOGRAMA DE LOS INDICES DE NIVEL
596	20	0,01877	****
597	30	0,01904	****
598	39	0,02269	*****
599	54	0,02650	*****
600	42	0,02914	******
601	47	0,02969	******
602	16	0,03460	*******
603	17	0,03527	*******
604	29	0,03692	*******
605	77	0,04035	********
606	55	0,05002	**********
607	97	0,05624	***********
608	**151**	**0,06140**	************
609	84	0,07349	**************
610	55	0,08145	***************
611	235	0,12418	***********************
612	290	0,18391	**********************************
613	307	0,43642	**

(a) Número de iteración del proceso de clasificación ascendente. (b) Efectivo de individuos agrupados en la correspondiente iteración. (c) Índice de nivel del correspondiente paso de la clasificación, es decir, la distancia (semejanza) entre los individuos o grupos de individuos a agrupar en ese paso.

Gráfico AV.3. Dendograma de la clasificación jerárquica según índices de nivel.



Conformación de las clases

En las tablas siguientes encontraremos para cada clase una primera tabla que muestra una caracterización por sus variables y modalidades de respuesta asociadas, contemplándose el porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a la clase y el porcentaje de individuos de la clase que presentan una determinada modalidad. También se presentan el valor test (que siendo mayor que 2 en valor absoluto, permite rechazar significativamente la hipótesis de que estos valores para cada modalidad se deban al azar) y la probabilidad de equivocarse frente al rechazo de esta hipótesis. En esta primera tabla sólo se consideran aquellas modalidades con valor test mayor a 2 en valor absoluto. Una segunda tabla con los sujetos más próximos al centro de gravedad (los más representativos de la clase) con su distancia al mismo y una tercera tabla muestra la composición de la clase, dando una lista de los y las estudiantes que la integran, por su etiqueta en la base, según el NEM al que pertenecen y la frecuencia y porcentaje de cada NEM en la clase.

Tablas correspondientes a la Clase 1

Tabla AV.7. Caracterización de la Clase 1 por sus modalidades asociadas (ordenadas de mayor a menor asociación con la clase).

Variable	Modalidades características	PORCENTAJES		V.T.	PROB(c)
		CLA/MOD(a)	MOD/CLA(b)		
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de R	R2.1. Ajenidad (frente a la representación de los reales en la recta).	84,21	59,26	8,29	0,000
R1: Comprensión de la representación de números reales en una recta numérica	R1.1. Grafican sólo los enteros.	63,16	66,67	7,09	0,000
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en R	D2.1: Ajenidad (frente al problema del supremo).	94,74	21,69	6,25	0,000
R3. Modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.	R3.1. Ajenidad en la naturaleza de la recta numérica.	78,95	29,41	6,06	0,000
I2. Comprensión del orden y del infinito actual en la representación de un número periódico	I2.1: Evitan el infinito (número periódico).	63,16	41,38	5,93	0,000
N2. Concepción de número irracional	N2.1. Ajenidad. Inseguridad. Desconocen los Irracionales	84,21	17,78	4,91	0,000
I1. Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables.	I3.1: Evitan el infinito (notación decimal infinita).	63,16	20,69	4,21	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos	I1.1: Evitan el infinito (comparando conjuntos)	73,68	16,28	4,05	0,000
D1. Comprensión del orden y la densidad de R.	D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	52,63	17,86	3,31	0,000
N1. Concepción de número en general (según una tipología)	N1.1. Solo los Enteros son números	42,11	21,62	3,24	0,001
NEM	EFI	31,58	23,08	2,79	0,003

(a) Porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a esta clase. (b) Porcentaje de individuos de esta clase que presentan una determinada modalidad. (c) Probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis de que esta modalidad tome estos valores.

Tabla AV.8. Estudiantes representativos de clase de la Clase 1.

	DISTANCIA(a)	IDENT(b)
1	0,26642	EFA07
2	0,26825	EFI41
3	0,28408	330
4	0,29095	EFI01
5	0,32278	356
6	0,34955	EFI45

(a) Distancia entre el individuo y el centro de gravedad de la clase. (b) Identificador del sujeto en la base.

Tabla AV.9. Estudiantes que conforman la Clase 1.

NEM	ETIQUETAS EN LA BASE	N	% de la clase
3ro	307 – **330** – 339 – 350 – 356 – 359	6	32%
4to	403 – 434	2	10%
5to	539	1	5%
BI	BI11		5%
EFI	EFI01 – EFI03 – **EFI07** – EFI31 – **EFI41** – EFI45	6	32%
MI	MI04,	1	5%
BA	-----	0	
EFA	EFA07 – EFA14	2	10%
MA	------	0	
	TOTAL	19	

Tablas correspondientes a la Clase 2

Tabla AV.10. Caracterización de la Clase 2 por sus modalidades asociadas (ordenadas de mayor a menor asociación con la clase).

Variable	Modalidades características	PORCENTAJES		V.T.	PROB(c)
		CLA/MOD(a)	MOD/CLA(b)		
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de R	R2.2. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada	69,64	62,90	9,12	0,000
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en R	D2.1. Ajenidad (frente al problema del supremo)	66,07	44,58	6,74	0,000
R1: Comprensión de la representación de números reales en una recta numérica	R1.2. Grafican sólo decimales finitos (no ½).	37,50	60,00	5,80	0,000
I1. Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables	I1.3. Finitista explicita (notación decimal infinita)	25,00	73,68	5,30	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de con	I3.1. Evitan el infinito (comparando conjuntos)	57,14	37,21	4,98	0,000
R3. Modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.	R3.1. Ajenidad (frente a la naturaleza de la recta numérica).	37,50	41,18	4,13	0,000
N2. Concepción de número irracional	N2.1. No conocen los irracionales	53,57	33,33	4,10	0,000
I2. Comprensión del orden y del infinito actual en la representación de un número periódico	I2.1: Evitan el infinito (número periódico).	21,43	41,38	2,90	0,002
N1. Concepción de número en general (según una tipología)	N1.3. Identificación del número con su representación.	51,79	27,36	2,80	0,003

(a) Porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a esta clase. (b) Porcentaje de individuos de esta clase que presentan una determinada modalidad. (c) Probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis de que esta modalidad tome estos valores

Tabla AV.11: Estudiantes representativos de Clase 2 (más próximos al centro de gravedad).

	DISTANCIA(a)	IDENT(b)
1	0,23769	448
2	0,24380	BI13
3	0,38871	344
4	0,39521	533
5	0,41229	327
6	0,41991	425
7	0,43024	EFI39
8	0,43848	408
9	0,45561	324
10	0,46012	412

(a) Distancia entre el individuo y el centro de gravedad de la clase. (b) Identificador del sujeto en la base

Tabla AV.12. Estudiantes que conforman la Clase 2.

NEM	ETIQUETAS EN LA BASE	N	% de la clase
3ro	303 – 304 – 324 – 327 – 335 – **344** – 345 – 347 – 348 – 349 – 354 – 357	12	22%
4to	408 – 409 – 412 – 413 – 415 – 418 – 424 – 425 – 440 – 441 – 446 – **448** – 452 – 455	14	25%
5to	506 – 514 – 516 – 525 – 526 – 527 – 530 – 531 – 533 – 538 – 547 – 550	12	21%
BI	BI13		2%
EFI	EFI07 – EFI09 – EFI19 – EFI25 – EFI35 – EFI39 – EFI43 – EFI51	8	14%
MI	MI01 – MI06 – MI27	3	5%
BA	BA13	1	2%
EFA	EFA03 – EFA09 – EFA10 – EFA12 – EFA13	5	9%
MA	------	0	
	TOTAL	56	

Tablas correspondientes a la Clase 3

Tabla AV.13. Caracterización de la Clase 3 por sus modalidades asociadas (ordenadas de mayor a menor asociación con la clase).

Variable	Modalidades características	PORCENTAJES		V.T.	PROB[c]
		CLA/MOD[a]	CLA/MOD[a]		
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos	I3.3. Finitista no justificada.	55,26	48,84	5,75	0,000
D1. Comprensión del orden y la densidad de R.	D1.2. Discretitud. Identifican Pi con su aproximación decimal	59,21	44,55	5,37	0,000
N1. Concepción de número en general (según una tipología)	N1.3. Identificación del número con su representación.	56,58	40,57	4,44	0,000
N2. Concepción de número irracional	N2.3. Confunden irracionales con racionales. Son los decimales, números con coma	31,58	46,15	3,58	0,000
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en	D2.5. Discretitud mediada por la concepción de infinito es todo.	19,74	57,69	3,57	0,000
R1: Comprensión de la representación de números reales en un	R1.3. No grafican infinitos- No explicada	17,11	59,09	3,37	0,000
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en	D2.2: Discretitud - no explicada.	26,32	44,44	2,99	0,001
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de	R2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada.	30,26	41,82	2,95	0,002
NEM	5to	28,95	42,31	2,93	0,002
R3. Modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.	R3.3. Recta de (puntos) discreta.	13,16	58,82	2,85	0,002
R3. Modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.	R3.2: Recta dibujada o material:	28,95	41,51	2,83	0,002
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de	R2.4. La recta es infinitamente densa e infinito es todo.	17,11	50,00	2,73	0,003
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de los racionales.	R2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales.	26,32	41,67	2,67	0,004
I1. Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables	I1.1: Evitan el infinito (notación decimal infinita).	30,26	39,66	2,67	0,004
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en	D2.3. Discretitud finitista (redondeo).	17,11	46,43	2,44	0,007

(a) Porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a esta clase. (b) Porcentaje de individuos de esta clase que presentan una determinada modalidad. (c) Probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis de que esta modalidad tome estos valores.

Tabla AV.14. Estudiantes representativos de Clase 3 (más próximos al centro de gravedad).

	DISTANCIA(a)	IDENT(b)
1	0,31054	BI19
2	0,32955	417
3	0,34351	MI21
4	0,41776	515
5	0,42506	MI17
6	0,43415	551
7	0,46410	540
8	0,47004	411
9	0,48344	MI14

(a) Distancia entre el individuo y el centro de gravedad de la clase. (b) Identificador del sujeto en la base.

Tabla AV.15. Estudiantes que conforman la Clase 3.

NEM	ETIQUETAS EN LA BASE	N	% de la clase
3ro	302 - 306 - 308 - 309 - 316 - 325 - 328 - 329 - 332 - 336 – 355	11	19%
4to	402 - 404 - 405 - 406 - 410 - 411 - 414 - 416 - **417** - 419 - 422 - 427 - 431 - 432 - 435 - 436 - 439 - 451 - 453 – 456	20	36%
5to	501 - 502 - 503 - 504 - 507 - 510 - 512 - 513 - 515 - 521 - 522 - 524 - 528 - 529 - 532 - 540 - 542 - 543 - 544 - 545 - 548 – 551	22	42%
BI	BI03 - BI07 - BI09 - **BI19** - BI23 - BI24 - BI25	7	27%
EFI	EFI21 - EFI33 - EFI37 - EFI4 7- EFI49	5	19%
MI	MI14 - MI17 - MI18 - MI20 - **MI21** - MI22 - MI24 - MI29	8	26%
BA	BA17	1	5%
EFA	EFA05 - EFA08	2	13%
MA	------		
	TOTAL	76	

Tablas correspondientes a la Clase 4

Tabla AV.16. Caracterización de la Clase 4 por sus modalidades asociadas (ordenadas de mayor a menor asociación con la clase).

Variable	Modalidades características	PORCENTAJES		V.T.	PROB(c)
		CLA/MOD(a)	CLA/MOD(a)		
R3. Modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.	R3.5: Densidad numérica potencialmente infinita.	56,14	43,24	5,73	0,000
R1: Comprensión de la representación de números reales en un	R1.5. Grafican sólo racionales.	54,39	41,89	5,42	0,000
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de	R2.3. La recta representa a los enteros y es infinito-potencialmente densa de fracciones (no enteras).	45,61	45,61	5,21	0,000
I2. Comprensión del orden y del infinito actual en la repres	I2.5. Infinito potencial (número periódico).	64,91	32,17	4,53	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de con	I3.2. Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos).	38,60	41,51	4,21	0,000
N2. Concepción de número irraciona	N2.6. Definición literal no-fracción. No se pueden escribir como fracción	26,32	50,00	3,99	0,000
D1. Comprensión del orden y la densidad de R.	D1.1: Inseguridad (respecto a la densidad y el orden de R).	38,60	39,29	3,95	0,000
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en	D2.6. Densidad potencialmente infinita.	29,82	37,78	3,17	0,001
NEM	3ro	33,33	32,20	2,69	0,004
N1. Concepción de número en general (según una tipología)	N1.4. Números son los elementos de los conjuntos numéricos escolares	52,63	27,03	2,68	0,004
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en	D2.2. Discretitud no explicada.	26,32	33,33	2,43	0,008

(a) Porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a esta clase. (b) Porcentaje de individuos de esta clase que presentan una determinada modalidad. (c) Probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis de que esta modalidad tome estos valores

Tabla AV.17: Estudiantes representativos de Clase 4 (más próximos al centro de gravedad)

	DISTANCIA(a)	IDENT(b)
1	0,37780	450
2	0,41882	EFA06
3	0,43409	BI12
4	0,44884	311
5	0,47736	517
6	0,50534	BA19
7	0,52171	433
8	0,52304	353
9	0,54133	426
10	0,57069	523

Tabla AV.18. Estudiantes que conforman la Clase 4.

NEM	ETIQUETAS EN LA BASE	N	% de la clase
3ro	305 - 311 - 312 - 314 - 315 - 318 - 319 - 320 - 321 - 326 - 331 - 333 - 334 - 337 - 340 - 341 - 351 - 352 – 353	19	33%
4to	401 - 421 - 423 - 426 - 433 - 437 - 445 - 447 - **450** – 454	10	18%
5to	509 - 511 - 517 - 518 - 519 - 523 - 536 – 541	8	14%
BI	BI02 - BI08 - **BI12** - BI18 - BI21 - BI22	6	11%
EFI	EFI29	1	2%
MI	MI07 - MI11 - MI12 - MI13 - MI15 - MI28 - MI41	7	12%
BA	BA10 - BA14 - BA18 - BA19	4	7%
EFA	EFA02 - **EFA06**	2	4%
MA	------	0	
	TOTAL	57	

Tablas correspondientes a la Clase 5

Tabla AV.19. Caracterización de la Clase 5 por sus modalidades asociadas (ordenadas de mayor a menor asociación con la clase).

Variable	Modalidades características	PORCENTAJES		V.T.	PROB[c]
		CLA/MOD[a]	CLA/MOD[a]		
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en R	D2.4. Discretitud explícita con notación infinita	54,90	59,57	7,39	0,000
N2. Concepción de número irracional	N2.4. Centrada en la noción de infinito. Infinitos decimales después de la coma	50,98	55,32	6,67	0,000
R3. Modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.	R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada.	33,33	47,22	4,48	0,000
NEM	BA	23,53	57,14	4,22	0,000
R1: Comprensión de la representación de números reales en una recta numé-rica	R1.6. Grafican todos. Aproxi-mación decimal	45,10	35,38	4,12	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos numéricos.	I3.4. Finitista explícita.	31,37	40,00	3,69	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos numéricos.	I3.5. Infinito como indefinido	11,76	66,67	3,12	0,001
N1. Concepción de número en general (según una tipología)	N1.2. Los enteros como mode-lo de número.	19,61	40,00	2,74	0,003
D1. Comprensión del orden y la densi-dad de R.	D1.3. Discretitud	35,29	28,57	2,56	0,005
I2. Comprensión del orden y del infinito actual en la repres	I2.4. Discretitud explicita o redondeo (número periódico).	27,45	31,11	2,47	0,007
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de con	I3.6. Único infinito (comparando conjuntos numéricos)	17,65	37,50	2,38	0,009

(a) Porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a esta clase. (b) Porcentaje de individuos de esta clase que presentan una determinada modalidad. (c) Probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis de que esta modalidad tome estos valores

Tabla AV.20: Estudiantes representativos de Clase 5 (más próximos al centro de gravedad).

	DISTANCIA(a)	IDENT(b)
1	0,27588	444
2	0,29704	BA02
3	0,34625	BA04
4	0,40500	343
5	0,46042	BA15
6	0,60029	BI04
7	0,60680	MI02
8	0,64652	BI06
9	0,64974	BA01
10	0,69193	443

Tabla AV.21. Estudiantes que conforman la Clase 5.

NEM	ETIQUETAS EN LA BASE	N	% de la clase
3ro	301 - 323 – 343	3	6%
4to	420 - 428 - 429 - 438 - 442 - 443 - 444 – 449	8	16%
5to	505 - 508 - 534 - 535 - 546 - 549 – 552	7	14%
BI	BI04 - BI06 - BI10 - BI15 - BI16 - BI17 - BI26	7	14%
EFI	EFI11 - EFI13 - EFI15 - EFI17 - EFI23 - EFI27	6	12%
MI	MI02 - MI05 - MI16	3	6%
BA	BA01 - BA02 - BA03 - BA04 - BA05 - BA06 - BA08 - BA11 - BA12 - BA15 - BA16 - BA21	12	24%
EFA	EFA01 - EFA04 - EFA11 - EFA15 - EFA16	5	10%
MA	------	0	0%
	TOTAL	51	

Tablas correspondientes a la Clase 6

Tabla AV.22. Caracterización de la Clase 6 por sus modalidades asociadas (ordenadas de mayor a menor asociación con la clase).

Variable	Modalidades características	PORCENTAJES		V.T.	PROB[c]
		CLA/MOD[a]	CLA/MOD[a]		
N2. Concepción de número irracional	N2.5. Definición notacional. Infinitos decimales no-periódicos.	43,75	70,00	6,58	0,000
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de R	R2.7. La recta representa a los reales completos.	37,50	37,50	4,24	0,000
N1. Concepción de número en general (según una tipología)	N1.5. Conjuntos convenciona-les con estructura	34,38	39,29	4,14	0,000
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en R.	D2.6. Densidad potencialmen-te infinita.	43,75	31,11	4,10	0,000
D1. Comprensión del orden y la densi-dad de R.	D1.5: Densidad infinita. Com-prenden el orden de Q.	43,75	28,00	3,77	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos numéricos.	I3.2. Los enteros como modelo de inclusión (comparando conjuntos).	43,75	26,42	3,58	0,000
D1. Comprensión del orden y la densi-dad de R.	D1.4. Densidad infinita. Com-prenden el orden de Q.	34,38	29,73	3,37	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos numéricos	I3.4. Finitista explícita (comparando conjuntos).	34,38	27,50	3,15	0,001
R1: Comprensión de la representación de números reales en una recta numé-rica	R1.7 Grafican todos en forma aproximada-exacta.	28,13	26,47	2,66	0,004
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de conjuntos numéricos	I3.6: Único infinito	21,88	29,17	2,48	0,007
NEM	MI	25,00	25,81	2,40	0,008

(a) Porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a esta clase. (b) Porcentaje de individuos de esta clase que presentan una determinada modalidad. (c) Probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis de que esta modalidad tome estos valores.

Tabla AV.23: Estudiantes representativos de Clase 6 (más próximos al centro de gravedad).

	DISTANCIA(a)	IDENT(b)
1	0,53626	MI10
2	0,73778	BI05
3	0,76484	313
4	0,82438	430
5	0,82701	338
6	0,97930	BA07
7	0,99195	BI14
8	0,99846	407
9	1,08444	310
10	1,10046	BI20

Tabla AV.24. Estudiantes que conforman la Clase 6.

NEM	ETIQUETAS EN LA BASE	N	% de la clase
3ro	310 - 313 - 317 - 322 - 338 - 342 – 346 – 358	8	25%
4to	407 – 430	2	6%
5to	520 – 537	2	6%
BI	BI01 - BI05 - BI14 - BI20	4	13%
EFI	------		
MI	MI03 - MI08 - MI09 - MI10 - MI23 - MI25 - MI26 - MI30	8	25%
BA	BA07 - BA09 - BA20	3	9%
EFA	------		
MA	MA05 - MA10 - MA11 - MA14 - MA20	5	16%
	TOTAL	32	

Tablas correspondientes a la Clase 7

Tabla AV.25. Caracterización de la Clase 7 por sus modalidades asociadas (ordenadas de mayor a menor asociación con la clase).

Variable	Modalidades características	PORCENTAJES		V.T.	PROB[c]
		CLA/MOD[a]	CLA/MOD[a]		
NEM	MA	93,75	75,00	9,18	0,000
I2. Comprensión del orden y del infinito actual en la representaqción	I2.7. Infinito actual	75,00	92,31	8,41	0,000
D2. Comprensión de la densidad y supremo de un intervalo en	D2.8. Comprenden la densidad y completitud de los reales.	81,25	68,42	8,02	0,000
N2. Concepción de número irracional	N2.7. Definición experta.	75,00	80,00	7,99	0,000
R2. Comprensión de la recta numérica como representación de	R2.7. La recta representa a los reales completos.	93,75	46,88	7,97	0,000
R3. Modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.	R3.7. Continuidad	68,75	73,33	7,33	0,000
D1. Comprensión del orden y la densidad de R.	D1.5: Densidad Infinita. Comprenden el orden de Q	93,75	30,00	6,88	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de con	I3.7. Infinito cardinal	50,00	88,89	6,43	0,000
N1. Concepción de número en general (según una tipología)	N1.5. Conjuntos convencionales con estructura.	68,75	39,29	5,93	0,000
R1: Comprensión de la representación de números reales en un	R1.8. Grafican todos en forma exacta.	37,50	66,67	4,87	0,000
R1: Comprensión de la representación de números reales en un	R1.7. Grafican todos en forma aproximada-exacta	56,25	26,47	4,38	0,000
I1. Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables	I1.6. Infinito Cardinal.	31,25	62,50	4,26	0,000
I3. Infinito cardinal. Comparación de la cardinalidad de con	I3.6. Único infinito	37,50	25,00	3,25	0,001
I1. Infinito cardinal. Comparación de colecciones numerables	I1.5. Único infinito	62,50	13,70	3,16	0,001

(a) Porcentaje de individuos de una determinada modalidad que pertenecen a esta clase. (b) Porcentaje de individuos de esta clase que presentan una determinada modalidad. (c) Probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis de que esta modalidad tome estos valores

Tabla AV.26: Estudiantes representativos de Clase 7 (más próximos al centro de gravedad).

	DISTANCIA(a)	IDENT(b)
1	0,47963	MI19
2	0,63331	MA08
3	0,64941	MA02
4	0,79498	MA01
5	0,94975	MA15
6	0,99472	MA19
7	1,07211	MA04
8	1,21174	MA18
9	1,40924	MA16
10	1,69445	MA06

Tabla AV.27. Estudiantes que conforman la Clase 7.

NEM	ETIQUETAS EN LA BASE	N	% de la clase
3ro	----	0	
4to	---	0	
5to	---	0	
BI	---	0	
EFI	---	0	
MI	MI19	1	6%
BA	----	0	
EFA	----	0	
MA	MA01 - MA02 - MA03 - MA04 - MA06 - MA07 - MA08 - MA09 - MA12 - MA13 - MA15 - MA16 - MA17 - MA18 - MA19	15	94%
	TOTAL	16	

Síntesis de las clases de respuestas

En la Tabla AV.28 encontraremos una síntesis de cada clase de respuestas encontrada al considerar las diez tareas conjuntamente, con una etiqueta que sintetiza la concepción sobre los números reales que pudimos distinguir en los y las estudiantes de cada clase. La cantidad de estudiantes en cada clase y el porcentaje que representa de la población. También encontraremos a que NEM se encuentra especialmente asociada cada clase.

Tabla AV.28. Síntesis de las clases de respuestas encontrada al considerar todas las tareas conjuntamente. Etiqueta relacionada con la concepción sobre los números reales, cantidad de estudiantes, porcentaje y NEM asociada cada clase.

ETIQUETA DE LA CLASE		SINTESIS DE LAS IDEAS PRESENTES EN LA CLASE	NEM ASOCIADO
CLASE 1 N=19 (6%)	**Solo enteros.** Ajenidad frente a la densidad, continuidad-completitud, la naturaleza de la recta numérica y al infinito**.**	Estudiantes que sólo consideran como números a los enteros, presentan inseguridad frente al orden y la densidad de los reales, la recta sólo sostiene a los enteros y los conceptos de densidad, completitud-continuidad, la naturaleza de la recta numérica e infinito se le presentan como ajenos.	EFI -EFA
CLASE 2 N=56 (18%)	**Los enteros y sus fracciones (finitas).** Inseguridad frente al orden y densidad. Finitistas. Ajenidad frente a la naturaleza de la recta y la cardinalidad.	Estudiantes que consideran que números son los enteros y finitas fracciones. Presentan inseguridad frente al orden y la densidad y la recta representa los enteros, sus fracciones (no enteras) y a decimales finitos. Son explícitamente finitistas en la notación decimal y no se apropian de la naturaleza de la recta ni de la cardinalidad de conjuntos numéricos como problemas	
CLASE 3 N=76 (25%)	**Decimales (finitos).** Discretitud Explícita. Visión Finitista. Traslado de los enteros a los décimos	Estudiantes que consideran que números son los enteros y los decimales finitos. Poseen una visión discreta explícita de los números. La recta se presenta como discreta, representando las fracciones de enteros (discretas) y decimales finitos y la ven como material o dibujada. Poseen una visión finitista (no explícita) y ajenidad frente a la cardinalidad.	5TO (mayormente estudiantes de secundaria)
CLASE 4 N=57 (19%)	**Enteros e infinitas (potencialmente) densas fracciones**, **decimales o racionales**. Los enteros como modelo de inclusión e infinito potencial	Estudiantes que consideran que números son los conjuntos numéricos escolares (naturales, enteros, decimales, fracciones, racionales). La recta es potencialmente densa de números enteros y fracciones. Comparan por inclusión. Poseen una visión de infinito potencial	3ro (Es notable la presencia de BI y MI)

CLASE 5 N=51 (17%)	**Racionales por su aproximación decimal finita mediada por la utilidad.** Densidad finitista (mediante redondeo). Recta como regla graduada.	Estudiantes que consideran que números son los enteros, decimales, fracciones y racionales. A los irracionales los describen como los que pueden tener infinitos decimales. Poseen una visión finitamente densa o potencialmente densa de los números y recurriendo a la aproximación decimal finita por redondeo. Comparando cardinalidades tienen una visión finitista explicita, de infinito como indefinido o de único infinito. Ven a la recta como una regla graduada, una recta de magnitudes con la aproximación que consideren necesaria.	BA
CLASE 6 N=32 (10%)	**Comprensión cercana de los reales.** Densidad potencialmente Infinita. Infinito Potencial - Único infinito.	Estudiantes que consideran que número es elemento de un conjunto numérico. Definición notacional de los irracionales. Comprenden el orden de los reales y la densidad (como potencialmente infinita). Comprenden a la recta representando a los reales como la unión de racionales e irracionales, conciben la recta como continua. Comparando cardinalidades tienen una visión finitista o de único infinito	MI - MA
CLASE 7 N=16 (5%)	**Comprensión consolidada de los Reales**: Reales completos - Recta continua - Infinito Actual	Estudiantes que consideran que número es un elemento de un conjunto numérico. Dan una definición experta de los irracionales. Comprenden el orden y la densidad actual de los reales. Conciben los reales completos. Comparando cardinalidades tienen una visión de infinito actual. Algunos plantean una única cardinalidad infinita.	MA

Complemento de las asociaciones de perfiles de respuesta según NEM

Tablas de las salidas del AFC de la Tabla 10.4 (Capítulo 10)

A continuación, presentamos las tablas de contribuciones de las modalidades de clases de concepción y de NEM respectivamente, a los tres primeros factores los del AFC realizado sobre la tabla de contingencia de distribución de las siete clases de concepciones cruzadas con los nueve niveles de estudio.

Tabla AV.29. Etiquetas de cada modalidad activa del AFC, distancia al origen de coordenadas. Las contribuciones de cada modalidad a cada uno de los 3 primeros ejes del AFC. Las modalidades en negrita poseen una contribución mayor a la media en los primeros ejes.

		CONTRIBUCIÓN DE LAS CLASES DE RESPUESTAS		
ETIQUETA	Distancia al origen	EJE 1	EJE 2	EJE 3
C1.Sólo los enteros, ajenidad e inseguridad, evasión del infinito.	1,04624	0,76	3,06	**19,75**
C2.Los enteros y sus fracciones, ajenidad respecto de la recta y finitistas (no explicado)	0,28344	2,27	**13,94**	**12,57**
C3.Traslado de los enteros a los décimos, discretitud explícita e infinito potencial.	0,26019	2,52	**13,33**	2,25
C4.Identifican a los reales con los decimales	0,24262	1,41	0,00	**20,93**
C5.Magnitudes, Mediada por la utilidad (redondeo)	0,67804	1,72	**64,20**	**12,90**
C6.Comprensión relativa de los reales, único infinito y la recta representa los decimales	0,67638	2,91	5,03	**28,95**
C7.Los reales completos, la recta continua e infinito actual	12,52990	**88,40**	0,44	2,64

Tabla AV.30: Etiquetas de los individuos activos del AFC, distancia al origen de coordenadas. Las contribuciones de cada modalidad a cada uno de los 3 primeros ejes del AFC. Las modalidades en negrita poseen una contribución mayor a la media en los primeros ejes.

		CONTRIBUCIÓN DE LAS MODALIDADES DE NEM		
ETIQUETA	Distancia al origen	EJE 1	EJE 2	EJE 3
3ro	0,28480	1,05	**5,42**	**9,08**
4to	0,18532	2,11	**5,63**	0,27
5to	0,27172	1,92	**7,19**	0,02
BI	0,27504	0,38	**9,45**	**4,58**
EFI	0,85743	1,30	0,93	**45,59**
MI	0,32706	0,03	0,33	**22,92**
BA	1,37838	0,35	**69,90**	0,48
EFA	0,52296	0,77	1,06	**16,25**
MA	10,39260	**92,09**	0,10	0,81