ISSN – 0325 – 6308

CUADERNOS UNIVERSITARIOS

Universidad Nacional del Comahue

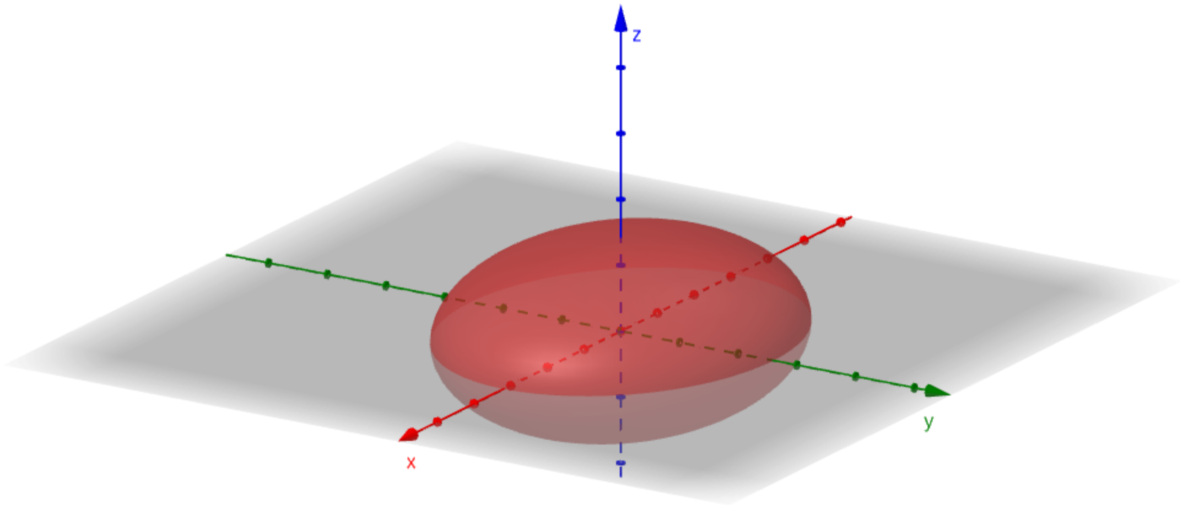
Centro Regional Universitario Bariloche

N°63-2022

Álgebra Lineal 1.

Viviana Analia Ramirez

Álgebra Lineal 1



Viviana Analia Ramirez

Cuaderno Universitario
CRUB - UNComa - 2022

Notación	**Significado**
V	Espacio vectorial.
F	Cuerpo.
e.v.	Espacio vectorial.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
F^n	Espacio vectorial de n-úplas sobre F.
l.d.	Linealmente dependiente.
l.i.	Linealmente independiente.
Letras griegas	Vectores de V.
A	Matriz $m \times n$.
a_{ij}	Elemento i, j de la matriz A.
$k,\ n,\ m,\ p$	Números naturales.
$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$	Vector de $\mathbb{R}^n$.
t.l.	Transformación lineal.

Índice general

Introducción

Este cuadernillo es el resultado de notas de clase que fui realizando y modificando a lo largo de varios años y tienen como objetivo ser una guía en el estudio del primer acercamiento al Álgebra Lineal para estudiantes del Profesorado y la Licenciatura en Matemática.

Quiero agradecer de manera especial, la cuidadosa lectura y los valiosos aportes de la Dra. María Laura Schuverdt y el Dr. Leandro M. Salomone, que hicieron a la primera versión de este trabajo, los cuales permitieron mejorarlo sustancialmente.

Los temas desarrollados fueron extraídos de diversos libros de esta área, reordenándolos para dar continuidad al programa de la materia. Se recomienda reforzar los diferentes temas, con los libros de cabecera detallados al final de este material.

Este cuadernillo está dividido en seis capítulos. Se comienza definiendo espacios vectoriales, subespacios, bases y dimensiones. En el capítulo dos, se tratan los espacios vectoriales con producto interno. El tercer y cuarto capítulo se refiere a las transformaciones lineales, el álgebra de transformaciones lineales y la representación matricial de transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita. En el capítulo cinco se estudian los autovalores y autovectores de transformaciones lineales y matrices y operadores diagonalizables. En el capítulo seis, se tratan las formas bilineales simétricas y por medio de los temas estudiados en el capítulo cinco, se busca identificar las diferentes cónicas y cuádricas.

Capítulo 1

Espacio Vectorial

1.1. Definición y propiedades

Definición 1.1 *Sean F un cuerpo, V un conjunto no vacío, $+$ una operación llamada adición, que asocia a cada par de elementos α, β de V el elemento $\alpha+\beta$ en V, llamada suma de α y β y $\cdot$ una operación, llamada multiplicación escalar, que asocia a cada elemento c de F y a cada elemento α de V un elemento $c\cdot\alpha$ en V, llamado producto de c y α. Se dice que $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre F si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$(V,+)$ es un grupo abeliano, esto es:*
   a) *La suma es **conmutativa**: $\alpha+\beta=\beta+\alpha \;\; \forall\,\alpha,\beta\in V$.*
   b) *La suma es **asociativa**: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \;\; \forall\,\alpha,\beta,\gamma\in V$*
   c) *Existe un único elemento en V llamado **neutro** que denotaremos por $\mathbf{0}$, tal que $\alpha+\mathbf{0}=\alpha \quad \forall\,\alpha\in V$.*
   d) *Para cada elemento α de V, existe un único elemento en V que llamaremos* **opuesto** *y denotaremos por $-\alpha$ tal que $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$.*
2. *La operación $\cdot : F\times V\longrightarrow V$ satisface:*
   a) *$c\cdot(\alpha+\beta)=c\cdot\alpha+c\cdot\beta \;\; \forall\,c\in F,\ \forall\,\alpha,\beta\in V$.*
   b) *$(c_1+c_2)\cdot\alpha=c_1\cdot\alpha+c_2\cdot\alpha \;\; \forall\,c_1,c_2\in F,\ \forall\,\alpha\in V$.*
   c) *$1\cdot\alpha=\alpha, \quad \forall\,\alpha\in V$.*
   d) *$(c_1c_2)\cdot\alpha=c_1\cdot(c_2\cdot\alpha), \;\; \forall\,\alpha\in V,\ \forall\,c_1,c_2\in F$.*

Observar que la definición establece que un espacio vectorial es un objeto compuesto que está formado por un cuerpo F, cuyos elementos llamaremos **escalares**, un conjunto V cuyos elementos llamaremos **vectores** y dos operaciones $+$ y $\cdot$ con propiedades especiales. El mismo conjunto de vectores puede ser parte de distintos espacios vectoriales.

Cabe aclarar que si bien esta definición se refiere a cualquier cuerpo, en este cuadernillo los cuerpos considerados serán $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.1: El espacio de n-úplas F^n. Sea F cualquier cuerpo y sea V el conjunto de todas las n-úplas $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de escalares $\alpha_i \in F$. Si $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ con $\beta_i \in F$, la suma de α y β se define por:

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

El producto de un escalar c y el vector α se define por:

$$c \cdot \alpha = (c\,\alpha_1, \ldots, c\,\alpha_n).$$

Veamos que se cumplen las condiciones para ser espacio vectorial: Sean α, β, $\gamma \in F^n$, c, $c_1, c_2 \in F$.

1.a)

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) \\
&\overset{\text{def.} +}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \\
&\overset{\text{prop.}\, F}{=} (\beta_1 + \alpha_1, \ldots, \beta_n + \alpha_n) \\
&\overset{\text{def.} +}{=} \beta + \alpha
\end{aligned}$$

Luego $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

1.b)

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) + \gamma &\overset{\text{def.} +}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) + (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \\
&\overset{\text{def.} +}{=} ((\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1, \ldots, (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n) \\
&\overset{\text{prop.}\, F}{=} (\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \ldots, \alpha_n + (\beta_n + \gamma_n)) \\
&\overset{\text{def.} +}{=} (\alpha_1, , \ldots, \alpha_n) + (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n) \\
&\overset{\text{def.} +}{=} \alpha + (\beta + \gamma)
\end{aligned}$$

Luego $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

1.c) Definimos $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, es decir, cada componente de $\mathbf{0}$ corresponde al neutro respecto a la suma en F. Veamos que $\mathbf{0}$ cumple con la condición de neutro. Sea $\alpha \in F^n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} + \alpha &= (0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\
&= (0 + \alpha_1, \ldots, 0 + \alpha_n) \\
&= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{0}$ cumple la propiedad del neutro, veamos que es único. Suponemos que existe $\ell \in F^n$ tal que también cumple la propiedad de neutro. Ahora como $\mathbf{0}$ cumple con la propiedad, entonces

$$\mathbf{0} + \ell = \ell. \tag{1.1}$$

Por otro lado ℓ también la cumple y $\mathbf{0} \in F^n$, por lo que:

$$\mathbf{0} + \ell = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

Luego de las ecuaciones (1.1) y (1.2) resulta que

$$\mathbf{0} = \ell.$$

Así $\mathbf{0}$ es el neutro y es único.

1.d) Dado $\alpha \in F^n$ definimos $-\alpha = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$, veamos que $-\alpha$ cumple con la condición del opuesto:

$$\begin{aligned}
\alpha + (-\alpha) =& (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n) \\
=& (\alpha_1 + (-\alpha_1), \ldots, \alpha_n + (-\alpha_n)) \qquad (1.3) \\
=& (0, \ldots, 0) = \mathbf{0} \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

luego uniendo los extremos de estas igualdades obtenemos que

$$\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}.$$

Observar que la igualdad (1.3) se cumple por la definición de la suma en F^n y, la igualdad (1.4) se verifica pues como cada componente pertenece a F es posible aplicar las propiedades de cuerpo, en este caso particular la propiedad del opuesto.
Unicidad: Sean α, $\beta \in F^n$ tal que β cumple la propiedad del opuesto de α, entonces

$$\beta = \beta + \mathbf{0} = \beta + (\alpha + (-\alpha)) = (\beta + \alpha) + (-\alpha) = \mathbf{0} + (-\alpha) = -\alpha$$

por lo tanto

$$\beta = -\alpha.$$

Luego $-\alpha$ es el opuesto de α y es único.

2.a) Sean $c \in F$, $\alpha, \beta \in F^n$

$$\begin{aligned}
c \cdot (\alpha + \beta) &\overset{\text{def.}+}{=} c \cdot (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \\
&\overset{\text{def.}\cdot}{=} (\, c(\alpha_1 + \beta_1), \ldots, c(\alpha_n + \beta_n)\,) \\
&\overset{\text{en } F}{=} (\, c\alpha_1 + c\beta_1, \ldots, c\alpha_n + c\beta_n) \\
&\overset{\text{def.}+}{=} c \cdot \alpha + c \cdot \beta
\end{aligned}$$

luego

$$c \cdot (\alpha + \beta) = c \cdot \alpha + c \cdot \beta.$$

2.b) Sean c_1, $c_2 \in F$, $\alpha, \in F^n$

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2) \cdot \alpha &\overset{\text{def.}\cdot}{=} (\,(c_1 + c_2)\alpha_1, \ldots, (c_1 + c_2)\alpha_n) \\
&\overset{\text{en } F}{=} (\, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1, \ldots, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_n) \\
&\overset{\text{def.}+\text{ y }\cdot}{=} c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \alpha
\end{aligned}$$

luego

$$(c_1 + c_2) \cdot \alpha = c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \alpha.$$

2.c) Sea $\alpha \in F^n$

$$1 \cdot \alpha \overset{\text{def.}\,\cdot}{=} (\,1\alpha_1, \ldots, 1\alpha_n) \overset{\text{prop.}\,F}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha$$

luego

$$1 \cdot \alpha = \alpha.$$

2.d) Sean c_1, $c_2 \in F$, $\alpha \in F^n$

$$\begin{aligned}(c_1c_2) \cdot \alpha = (c_1c_2) \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &\overset{\text{def.}\,\cdot}{=} (\,(c_1c_2)\alpha_1, \ldots, (c_1c_2)\alpha_n) \\ &\overset{\text{prop.}\,F}{=} (c_1(c_2\alpha_1), \ldots, c_1(c_2\alpha_n)\,) \\ &\overset{\text{def.}\,\cdot}{=} c_1 \cdot (c_2\alpha_1, \ldots, c_2\alpha_n) \\ &\overset{\text{def.}\,\cdot}{=} c_1 \cdot (c_2\alpha_1, \ldots, c_2\alpha_n) \\ &\overset{\text{def.}\,\cdot}{=} c_1 \cdot (c_2 \cdot \alpha)\end{aligned}$$

luego

$$(c_1c_2) \cdot \alpha = c_1 \cdot (c_2 \cdot \alpha). \square$$

Notar que en este cuadernillo, cuando se mencione el espacio F^n daremos por entendido que el cuerpo considerado es F, salvo que se explicite otro cuerpo.

Ejemplo 1.2: Sea $V = \{0\}$, V está formado únicamente por el número real 0, este elemento es un vector en V, por lo que V es no vacío. Así, V con las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{R}$ y siendo $F = \mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

- $0 + 0 = 0$.
- $c \cdot 0 = c0 = 0 \;\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Es posible verificar que V con estas operaciones es un espacio vectorial. $\square$

Ejemplo 1.3: Sea $V = \{1\}$, el conjunto formado únicamente por el escalar 1. V con las operaciones de suma y producto heredadas de $\mathbb{R}$ no es un espacio vectorial, pues $1 + 1 = 2 \notin V$. $\square$

Ejemplo 1.4: Sea $V = \{f : S \subseteq F \longrightarrow F\}$, con F cuerpo y S no vacío. V es el conjunto formado por las funciones cuyo dominio es S y su conjunto imagen está contenido en F. Definimos

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t),\; \forall\, f, g \in V,\, t \in S,\;\; f + g : S \longrightarrow F$$

$$(c \cdot f)(t) = cf(t),\; \forall\, f \in V,\, t \in S,\, c \in F,\;\; c \cdot f : S \longrightarrow F$$

Veamos que V con las propiedades de suma y producto es un espacio vectorial.

Propiedades de la suma:

1.a) Sean $f, g \in V$,

$$(f+g)(t) \overset{\text{def.}+}{=} f(t)+g(t) \overset{\text{conm.}\,F}{=} g(t)+f(t) \overset{\text{def.}+}{=} (g+f)(t)$$

$$\Longrightarrow (f+g)(t) = (g+f)(t),\ \forall\, t \in S,$$

$$\therefore f+g = g+f.$$

1.b) Sean $f, g, h \in V$,

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(t) &\overset{\text{def.}+}{=} (f+g)(t)+h(t) \overset{\text{def.}+}{=} (f(t)+g(t))+h(t)\\ &\overset{\text{asoc.}\,F}{=} f(t)+(g(t)+h(t)\,) \overset{\text{def.}+}{=} f(t)+(g+h)(t)\\ &\overset{\text{def.}+}{=} (f+(g+h))(t)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow ((f+g)+h)(t) = (f+(g+h))(t),\ \forall\, t \in S,$$

$$\therefore (f+g)+h = f+(g+h).$$

1.c) Sea $f \in V$, se define la función $\mathbf{0}(t) = 0,\ \forall\, t \in S$

$$(f+\mathbf{0})(t) \overset{\text{def.}+}{=} f(t)+\mathbf{0}(t)) \overset{\text{def.}\,\mathbf{0}}{=} f(t)+0 \overset{\text{en}\,F}{=} f(t)$$

$$\Longrightarrow (f+\mathbf{0})(t) = f(t),\ \ \forall\, t \in S$$

$$\therefore f+\mathbf{0} = f$$

luego $\mathbf{0}$ es neutro en V. Unicidad: suponemos que existe $h \in V$ con la propiedad de neutro entonces:

$$(\mathbf{0}+h)(t) \overset{\text{def.}+}{=} \mathbf{0}(t)+h(t) \overset{\text{prop.}\,h}{=} \mathbf{0}(t) \tag{1.5}$$

y por $\mathbf{0}$ cumplir la propiedad de neutro resulta

$$(\mathbf{0}+h)(t) \overset{\text{def.}+}{=} \mathbf{0}(t)+h(t) \overset{\text{prop.}\,\mathbf{0}}{=} h(t) \tag{1.6}$$

luego de (1.5) y (1.6) se cumple

$$\mathbf{0}(t) = h(t),\ \forall\, t \in S$$

por lo que se demuestra la unicidad.

1.d) Sea $f \in V$, se define $(-f)(t) = -f(t),\ \forall\, t \in S$

$$(f+(-f))(t) \overset{\text{def.}+}{=} f(t)+(-f)(t) \overset{\text{def.}\,(-f)(t)}{=} f(t)+(-f(t)) \overset{\text{en}\,F}{=} 0$$

$$\Longrightarrow (f+(-f))(t) = 0 = \mathbf{0}(t),\ \forall\, t \in S,$$

$$\therefore\ \ f+(-f) = \mathbf{0}.$$

La unicidad es análoga a lo que hicimos en el Ejemplo 1.1.

2.a) Sean $c \in F,\ f, g \in V$

$$(c\cdot(f+g))(t) \overset{\text{def.}\,\cdot}{=} c(f+g)(t) \overset{\text{def.}+}{=} c(f(t)+g(t)) \overset{\text{prop.}\,F}{=} cf(t)+cg(t) \overset{\text{def.}+\text{y}\,\cdot}{=} (c\cdot f+c\cdot g)(t)$$

$$\Longrightarrow (c \cdot (f+g))(t) = (cf+cg)(t),\ \forall\, t \in S,$$
$$\therefore\ c \cdot (f+g) = c \cdot f + c \cdot g.$$

2.b) Sean $c_1, c_2 \in F,\ f \in V$

$$((c_1+c_2)\cdot f)(t) \overset{\text{def.}\,\cdot}{=} (c_1+c_2)\, f(t) \overset{\text{en}\,F}{=} c_1 f(t) + c_2 f(t) \overset{\text{def.}+\text{y}\,\cdot}{=} (c_1 \cdot f + c_2 \cdot f)(t)$$
$$\Longrightarrow\ ((c_1+c_2)\cdot f)(t) = (c_1 \cdot f + c_2 \cdot f)(t),\ \forall\, t \in S,$$
$$\therefore (c_1+c_2)\cdot f = c_1 \cdot f + c_2 \cdot f.$$

2.c) Consideremos el elemento neutro respecto del producto en F, esto es 1, entonces

$$(1 \cdot f)(t) \overset{\text{def.}\,\cdot}{=} 1f(t) \overset{\text{en}\,F}{=} f(t)$$
$$\Longrightarrow\ (1 \cdot f)(t) = f(t),\ \forall\, t \in S,$$
$$\therefore\ 1 \cdot f = f.$$

2.d) Sean $c_1, c_2 \in F,\ f \in V$

$$((c_1c_2)\cdot f)(t) \overset{\text{def.}\,\cdot}{=} (c_1c_2)f(t) \overset{\text{asoc.}\,F}{=} (c_1(c_2f(t)) \overset{\text{def.}\,\cdot}{=} c_1 \cdot (c_2 f(t)) \overset{\text{def.}\,\cdot}{=} c_1 \cdot (c_2 \cdot f)(t)$$
$$\Longrightarrow\ ((c_1c_2)\cdot f)(t) = (c_1 \cdot (c_2 \cdot f))(t),\ \forall\, t \in S,$$
$$\therefore (c_1c_2)\cdot f = c_1 \cdot (c_2 \cdot f).\ \square$$

Ejemplo 1.5: Sea V el conjunto de las funciones polinomiales sobre el cuerpo F. Con las operaciones de suma y producto escalar usual para polinomios, V es un espacio vectorial. Queda como ejercicio verificar que cumple con las propiedades de la definición.

En lo que sigue de este cuadernillo, para denotar el producto $c \cdot \alpha$ con c elemento de F y α en V, simplemente escribiremos $c\alpha$, dando por entendido que corresponde a la operación de producto definida entre un escalar y un vector en el espacio vectorial.

Propiedades 1.1 *: Sea V espacio vectorial (e.v.). Entonces:*

1. *Si $c \in F$ y $\mathbf{0} \in V$ (elemento neutro de V), entonces $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.*
2. *Si $\alpha \in V$ y $0 \in F$ (elemento neutro de F), entonces $0\alpha = \mathbf{0}$.*
3. *Sean $c \in F$ y $\alpha \in V$, si $c\alpha = \mathbf{0}$ entonces $c = 0$ ó $\alpha = \mathbf{0}$.*
4. *$(-1)\alpha = -\alpha$, para todo $v \in V$.*

Demostración:
1. Se tiene que

$$c\mathbf{0} = c(\mathbf{0}+\mathbf{0}) \overset{\text{prop. e.v.}}{=} c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$$

entonces

$$c\mathbf{0} = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$$

sumando $(-c\mathbf{0})$ a ambos lados de la última igualdad resulta

$$c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) = c\mathbf{0} + c\,\mathbf{0} + (-c\mathbf{0})$$

por propiedad $(1.d)$ de la Definición 1.1 y asociando convenientemente, tenemos

$$\mathbf{0} = c\mathbf{0} + (c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}))$$

entonces

$$\mathbf{0} = c\mathbf{0}.$$

2. Se tiene que

$$0\alpha = (0+0)\alpha \stackrel{\text{prop. e.v.}}{=} 0\alpha + 0\alpha$$

entonces

$$0\alpha = 0\alpha + 0\alpha$$

sumando (-0α) a ambos lados de la última igualdad resulta

$$0\alpha + (-0\alpha) = 0\alpha + 0\alpha + (-0\alpha)$$

por propiedad $1.d$ de la Definición 1.1 y asociando convenientemente, tenemos

$$\mathbf{0} = 0\alpha + (0\alpha + (-0\alpha))$$

luego

$$\mathbf{0} = 0\alpha.$$

3. Suponemos

$$c\alpha = \mathbf{0} \;\text{ con }\; c \in F,$$

Si $c = 0$ nada que probar, se verifica la propiedad.

Si $c \neq 0$ entonces $\exists\, c^{-1}$ tal que $cc^{-1} = 1$ (neutro en F), entonces multiplicando a ambos lados de esta igualdad por c^{-1} obtenemos

$$\underbrace{c^{-1}c}_{1}\,\alpha = \underbrace{c^{-1}\mathbf{0}}_{\mathbf{0}},$$

el lado derecho de esta última igualdad es $\mathbf{0}$ por el inciso 1 que ya fue probado. Por lo tanto concluimos que

$$\alpha = \mathbf{0}.$$

4. Se tiene que

$$\begin{aligned}(-1)\alpha =&(-1)\alpha + \mathbf{0}\\ =&(-1)\alpha + (\alpha + (-\alpha))\\ =&(-1)\alpha + 1\alpha + (-\alpha)\\ =&(-1+1)\alpha + (-\alpha)\\ =&\,0\alpha + (-\alpha)\\ =&\,\mathbf{0} + (-\alpha)\\ =&-\alpha\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (-1)\alpha = -\alpha. \ \blacksquare$$

1.2. Subespacio

Dentro de los espacios vectoriales, hay conjuntos no vacíos que con las operaciones heredadas del espacio vectorial, se comportan como espacios vectoriales. Estos conjuntos reciben un nombre como lo veremos en la siguiente definición.

Definición 1.2 *Sea V un espacio vectorial sobre F. Un* ***subespacio*** *de V es un subconjunto W de V que, con las operaciones de adición vectorial y multiplicación escalar sobre V, es él mismo un espacio vectorial sobre F.*

Teorema 1.1 *Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio de V si y solo si, para todo $\alpha, \beta \in W$ y para todo $c \in F$ se cumple $c\alpha + \beta \in W$.*

Demostración: Suponemos $c\alpha+\beta \in W \ \forall\, \alpha, \beta \in W$ y $\forall\, c \in F$. Como $W \neq \emptyset$ existe $\rho \in W$, entonces $(-1)\rho + \rho \in W$ (por hipótesis) esto implica que $\mathbf{0} \in W$. Luego por hipótesis $c\alpha + \mathbf{0} \in W \ \forall\, \alpha \in W$ y $\forall\, c \in F$, y por lo tanto, $c\alpha \in W \ \forall\, \alpha \in W$ y $c \in F$ en particular, $(-1)\alpha \in W$. Además $1\alpha+\beta \in W \ \forall\, \alpha, \beta \in W$, o equivalentemente $\alpha+\beta \in W \ \forall\, \alpha, \beta \in W$. Así con las operaciones de suma y producto por escalar en W se obtienen elementos en W. Luego la conmutatividad y asociatividad, así como las propiedades de producto escalar, se verifican por estar en V espacio vectorial. Por lo tanto W, resulta un espacio vectorial. La recíproca del teorema se cumple trivialmente. $\blacksquare$

Ejemplo 1.6: Sea V un espacio vectorial, V es un subespacio de V (Subespacio trivial). $\square$

Ejemplo 1.7: Sea V un espacio vectorial, $W = \{0\}$ es un subespacio de V llamado subespacio *nulo*. $\square$

Ejemplo 1.8: Sea $V = F^n$ ($F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$), el espacio vectorial de las n-úplas con las operaciones de suma y producto escalar usual y sea

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = 0,\, x_i \in F \;\; \forall\, i = 2, \ldots, n\},$$

W es un subespacio vectorial de V. Veamos esto. Por teorema anterior, basta probar que $W \neq \emptyset$ y que $c\alpha + \beta \in W \;\; \forall\, \alpha, \beta \in W$ y $\forall\, c \in F$.

1. $W \neq \emptyset$ pues $\mathbf{0} \in W$.

2. Sean $\alpha, \beta \in W$ y $c \in F$ arbitrarios.

   $\alpha \in W \Longrightarrow \alpha = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in F \;\; \forall\, i = 2, \ldots, n$

   $\beta \in W \Longrightarrow \beta = (0, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ con $\beta_i \in F \;\; \forall\, i = 2, \ldots, n.$

   $\Longrightarrow \; c\alpha + \beta = (0, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n) + (0, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (0, c\alpha_2 + \beta_2, \ldots, c\alpha_n + \beta_n).$

Como la primer componente de $c\alpha+\beta$ es nula, es decir $(c\alpha+\beta)_1 = 0$, resulta $c\alpha+\beta \in W$. Luego por Teorema 1.1, W es subespacio de F^n. $\square$

Ejemplo 1.9: El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo F es un subespacio del espacio de todas las funciones de F en F. $\square$

Ejemplo 1.10: Sea $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, el conjunto de las matrices simétricas es un subespacio de V. Verificar esta afirmación. $\square$

Ejemplo 1.11: Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, A matriz fija perteneciente al espacio de las matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ y $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Veamos esto:

1. Sea $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, entonces $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{0} \in W$. Luego $W \neq \emptyset$.

2. Sea $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ y $c \in \mathbb{R}$ arbitrarios, entonces

$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA\mathbf{x} + A\mathbf{y} \overset{\mathbf{x},\mathbf{y}\in W}{=} c\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Longrightarrow A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Longrightarrow c\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$. Como c, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ son arbitrarios, resulta por Teorema 1.1 que W un subespacio de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ejemplo 1.12: Sea $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_2 = 1 + x_1,\, x_i \in \mathbb{R},\, 1 \leq i \leq n\}$, W no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

1. $(0, 1, 0, \ldots, 0) \in W$, entonces $W \neq \emptyset$.

2. Si $\alpha = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ y $c = -1$, $c\alpha \notin W$, pues

$$c\alpha = (0, -1, 0, \ldots, 0)$$

   y

$$(c\alpha)_2 = -1 \neq (c\alpha)_1 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Luego W no es subespacio de V. $\square$

Veamos el siguiente resultado sobre la intersección de subespacios:

Proposición 1.1 *Sea V un espacio vectorial sobre F. La intersección de cualquier colección de subespacios de V es un subespacio de V.*

Demostración: Sea $\{W_a\}$ una colección de subespacios de V y sea $W = \bigcap_a W_a$. Como W_a es subespacio $\forall\, a$ entonces $0 \in W_a \,\forall\, a \Longrightarrow 0 \in W$, luego $W \neq \emptyset$. Ahora sean $\alpha, \beta \in W$ y $c \in F$ arbitrarios, entonces

$$\alpha, \beta \in W_a \;\; \forall\, a \Longrightarrow c\alpha + \beta \in W_a \;\; \forall\, a \Longrightarrow c\alpha + \beta \in W.$$

Por lo tanto W es subespacio de V. ■

De esta proposición podemos deducir que dada cualquier colección de vectores en un conjunto S, existe un subespacio mínimo que los contiene y que está contenido en cada uno de los otros subespacios que contienen a S.

Definición 1.3 *Sea S un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. El* ***subespacio generado*** *por S se define como la intersección W de todos los subespacios de V que contienen a S. Cuando S es un conjunto finito de vectores $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ se dice simplemente que W es el* ***subespacio generado por los vectores*** *$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y lo denotamos: gen$\{S\}$ ó gen$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.*

Para poder caracterizar el subespacio generado por con conjunto de vectores, primero veremos el concepto de **combinación lineal**:

Definición 1.4 *Un vector $\beta \in V$ se dice que es* ***combinación lineal*** *de los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de V, si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ en F tales que*

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n.$$

Ejemplo 1.13: Sean $V = \mathbb{R}^2$ y los vectores $\alpha_1 = (-2, 3)$ y $\alpha_2 = (4, 0)$. Entonces $\beta = (3, \frac{3}{2})$ es combinación lineal de α_1 y α_2, basta elegir $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 1$. □

Ejemplo 1.14: Sean $V = \mathbb{R}[X]$ el espacio de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ y los vectores $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = x$ y $\alpha_3 = x^2$. El vector $\beta = -2 + 4x - \sqrt{2}x^2$ es una combinación lineal de α_1, α_2 y α_3 con $c_1 = -2$, $c_2 = 4$ y $c_3 = -\sqrt{2}$. □

Ahora podemos ver cómo se caracteriza el subespacio generado por un conjunto de vectores. Esto es lo que nos dice el siguiente teorema:

Teorema 1.2 *El subespacio generado por un subconjunto S no vacío de un espacio vectorial V es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S.*

Demostración: Sea L el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S. Queremos ver que L es el subespacio generado por S al cual llamaremos W. Observar que $S \subset W$.

Sea $\alpha \in L$ arbitrario, entonces existen $c_1, \ldots, c_n \in F$ tal que

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$$

con $\alpha_i \in S \ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Como $S \subset W$ entonces $\alpha_i \in W \ \forall\, i = 1, \ldots, n$ y por ser W subespacio resulta $\alpha \in W$. Por ser α arbitrario tenemos que

$$L \subseteq W. \tag{1.7}$$

Por otro lado como $S \neq \emptyset$ entonces $L \neq \emptyset$. Sean $\alpha, \beta \in L$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \ \text{ con } \ \alpha_i \in S \quad \text{y} \ \ c_i \in F \ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \beta &= b_1\beta_1 + \cdots + b_k\beta_k \ \text{ con } \ \beta_j \in S \quad \text{y} \ \ b_j \in F \ \forall\, i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Sea $c \in F$,

$$c\alpha + \beta = c\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\beta_j = \sum_{i=1}^{n}(cc_i)\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\beta_j$$

esta última expresión es una combinación lineal de elementos de S luego $c\alpha + \beta \in L$, entonces por Teorema 1.1, L es un subespacio de V tal que $S \subset L$, entonces

$$W \subseteq L \tag{1.8}$$

pues W está contenido en todos los subespacios que contienen a S. Luego uniendo (1.7) y (1.8) obtenemos $L = W$ como queríamos probar. ■

Ejemplo 1.15: Sean $V = \mathbb{R}^5$ y W el subespacio generado por los vectores:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, -1, 0, -4, 0) \\ \alpha_2 &= (0, 0, 1, 5, 0) \\ \alpha_3 &= (0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Si $\alpha \in W$, entonces existen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \\ &= (c_1, -c_1, c_2, -4c_1 + 5c_2, c_3), \end{aligned}$$

luego

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_2 = -x_1,\ x_4 = -4x_1 + 5x_3, \ \ \wedge \ x_1,\ x_3,\ x_5 \in \mathbb{R}\}.\square$$

Ejemplo 1.16: Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$. El subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por las filas de A genera un subespacio y se llama el **espacio de filas de** A y el subconjunto de $\mathbb{R}^m$ formado por las columnas de A genera un subespacio llamado **espacio de columnas de** A.

Ejemplo 1.17: Sea $W = gen\{\alpha_1, \alpha_2\}$ con $\alpha_1 = (1, -1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)$, es decir, W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores α_1, α_2. ¿Qué representa W geométricamente?
Sea $\alpha = (x, y, z) \in W \Longrightarrow$ entonces existen c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ talque

$$\begin{aligned} \alpha =& c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \\ (x, y, z) =& (c_1 + c_2, -c_1, c_1 - c_2) \end{aligned}$$

así resulta

$$\begin{aligned} x &= c_1 + c_2 \\ y &= -c_1 \\ z &= c_1 - c_2 \end{aligned}$$

podemos pensar en un sistema de 3 ecuaciones con las incógnitas c_1, c_2. Matricialmente podemos reescribirlo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

¿Cómo lo resolvemos? Para ello utilizamos el recurso de la matriz ampliada y reducimos por fila:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & -2 & z-x \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+2y+z \end{array}\right].$$

Ahora, este sistema tiene solución si

$$0 = x + 2y + z$$

Por lo tanto, si $(x, y, z) \in W$ debe satisfacer la ecuación: $0 = x + 2y + z$. Es decir el punto (x, y, z) pertenece al plano que pasa por el origen y cuyo vector normal es: $(1, 2, 1)$. $\square$

Definición 1.5 *Si $S_1, \ldots, S_k$ son subconjuntos de un espacio vectorial V, el conjunto de todas las sumas $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ de vectores $\alpha_i \in S_i$ para $i = 1, \ldots, k$ se llama **suma** de los subconjuntos $S_1, \ldots, S_k$ y se representa por $S_1 + \cdots + S_k$.*

Proposición 1.2 *Si $W_1, \ldots, W_k$ son subespacios de V, entonces la suma $W_1 + \cdots + W_k$ es un subespacio de V que contiene a cada uno de los W_i con $i = 1, \ldots, k$.*

Demostración: Como $0 \in W_i \ \forall\, i = 1, \ldots, k$ y $0 = 0 + \cdots + 0$ resulta $0 \in W_1 + \cdots + W_k$, luego $W \neq \emptyset$.
Sean α, $\beta \in W_1 + \cdots + W_k$ entonces

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \ \text{ con } \ \alpha_i \in W_i \ \ \forall\, i = 1, \ldots, k$$

$$\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_k \ \text{ con } \ \beta_i \in W_i \ \ \forall\, i = 1, \ldots, k$$

y sea $c \in F$, luego

$$c\alpha + \beta = c\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{i=1}^{k} (c\,\alpha_i + \beta_i)$$

como W_i es subespacio para todo $i = 1, \ldots, k$ tenemos que $c\,\alpha_i + \beta_i \in W_i \ \ \forall\, i = 1, \ldots, k$, luego $c\,\alpha + \beta \in W_1 + \cdots + W_k$. Así, la suma de subespacios es un subespacio de V.

Además $W_i \subseteq \displaystyle\sum_{j=1}^{k} W_j \ \forall\, j = 1, \ldots, k$, pues para cada $1 \leq i \leq k$, si $\alpha \in W_i$ entonces $\alpha = \alpha + 0 + \cdots + 0$ y así $\alpha \in \displaystyle\sum_{j=1}^{k} W_j$ y por lo tanto $W_i \subseteq \displaystyle\sum_{j=1}^{k} W_j \ \forall\, i = 1, \ldots, k$ $\blacksquare$

1.3. Dependencia e independencia lineal. Base y dimensión

Definición 1.6 *Sea V un espacio vectorial sobre F. Un subconjunto S de V se dice* ***linealmente dependiente*** *(l.d.) o simplemente* **dependiente**, *si existen vectores distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de S y escalares $c_1, \ldots, c_n \in F$ no todos nulos, tales que*

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0}.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice ***linealmente inpendiente*** *(l.i.) o* ***independiente***.

Observaciones:

1. Todo conjunto que tiene un subconjunto linealmente dependiente, es linealmente dependiente.
2. Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente, es linealmente independiente.
3. Todo conjunto que contiene el vector nulo, es linealmente dependiente ($c\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall\, c \in F$, en particular para $c \neq 0$).
4. Un conjunto S de vectores es linealmente independiente si y solo si, para vectores diferentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ arbitrariamente elegidos, $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0}$ implica que todo $c_i = 0$.

Ejemplo 1.18: Consideremos los vectores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nos preguntamos ¿v_1 y v_2 son l.i. o l.d.? Para responder esta pregunta debemos encontrar los escalares que permiten escribir al vector nulo como combinación lineal de v_1 y v_2. Si ambos escalares son nulos, entonces los vectores son l.i., en caso contrario son l.d.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} =& c_1v_1 + c_2v_2 \\ =& c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + 4c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

matricialmente

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Este sistema homogéneo tiene única solución si el determinante de la matriz del sistema es diferente de cero. En este caso

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones, es decir existen escalares no nulos tales que

$$c_1v_1 + c_2v_2 = \mathbf{0}$$

basta elegir, por ejemplo, $c_1 = -2$ y $c_2 = 1$. □

Ejemplo 1.19: Consideremos los vectores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vamos a determinar si son l.i. o l.d.:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} =& c_1v_1 + c_2v_2 \\ =& c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + 5c_2 \\ 4c_1 - 3c_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que matricialmente se representa como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos mediante reducción por filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

reescribiendo el sistema homogéneo resulta:

$$\begin{aligned} 0 =& c_1 + 2c_2 \\ 0 =& c_2 \end{aligned}$$

luego

$$c_1 = c_2 = 0$$

$$\therefore \quad v_1,\ v_2 \ \text{son l.i.} \ \square$$

En lo que sigue, vamos a estudiar los conceptos de base y dimensión de espacio vectorial.

Definición 1.7 *Sea V un espacio vectorial. Una **base** de V es un conjunto de vectores linealmente independientes de V que generan el espacio V. El espacio V es de **dimensión finita** si tiene una base finita.*

Observación: Por convención el espacio nulo tiene dimensión cero ya que no tiene un conjunto lineamente independiente.

Ejemplo 1.20: Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (2, 2, -1)$, $\alpha_3 = (0, 1, 3)$ y $\alpha_4 = (-3, -5, -2)$. ¿Son base de V? Veamos si son l.i. o l.d. Para ello escribimos el vector nulo como combinación lineal de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4:

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \mathbf{0}$$

esto nos lleva al siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} c_1 & + & 2c_2 & & & - & 3c_4 & = & 0 \\ & & 2c_2 & + & c_3 & - & 5c_4 & = & 0 \\ -c_1 & - & c_2 & + & 3c_3 & - & 2c_4 & = & 0. \end{array}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este sistema homogéneo tiene mas incógnitas que ecuaciones, por lo tanto existen infinitas soluciones. Así los vectores son linealmente dependientes, luego no pueden ser base de V. □

Ejemplo 1.21: Sea $V = P_3$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sean $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = x$ y $\alpha_3 = x^3$ vectores de V. Queremos ver si son base de este espacio vectorial. Veamos si son l.i. o l.d.

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \mathbf{0},$$

esto es

$$c_1 + c_2x + c_3x^3 = 0.$$

Ahora la única posibilidad que el lado izquierdo sea el polinomio nulo es que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Así la única forma de escribir el polinomio nulo como combinación lineal de los vectores α_1, α_2 y α_3 es que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Luego los vectores son linealmente independientes. A continuación analizaremos si los vectores α_1, α_2 y α_3 generan el espacio de polinomios de grado menor o igual a 3. Para esto nos preguntamos: ¿cualquier polinomio de V puede ser escrito como combinación lineal de ellos?. Si tomamos un polinomio de grado 2, por ejemplo: $p(x) = x^2$, ¿existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $c_1 + c_2x + c_3x^3 = x^2$?. Por la igualdad entre polinomios llegamos a que no existen tales escalares. Luego no pueden generar el espacio y por lo tanto no son base. □

Ejemplo 1.22: Sea F cuerpo y $V = F^n$. Consideremos S el subconjunto de F^n formado por los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ definidos por

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1, 0, \ldots, 0)^T \\ e_2 & = & (0, 1, \ldots, 0)^T \\ & \vdots & \\ e_n & = & (0, 0, \ldots, 1)^T. \end{array}$$

Sea $\alpha \in V$, entonces $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)^T$ con $a_i \in F \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Ahora observemos que a este vector lo podemos expresar como suma de vectores de S multiplicado por escalares convenientes:

$$\alpha = (a_1, \ldots, a_n)^T = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$

es decir que α es combinación lineal de los vectores de S. Así, los vectores de S generan F^n. Para decidir si ellos son una base de V ¿qué nos falta probar?. La respuesta a esta pregunta es ver que ellos son linealmente independientes. Para esto, escribimos el vector nulo como combinación lineal de los vectores de S y vemos qué valores toman los escalares:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + \cdots + c_n\, e_n \\ &= c_1(1, 0, \ldots, 0)^T + c_2(0, 1, \ldots, 0)^T + \ldots + c_n(0, 0, \ldots, 1)^T \\ &= (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T. \end{aligned}$$

Luego por la igualdad componente a componente de n-úplas, resulta $c_i = 0\ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $e_1, \ldots, e_n$ son l.i. y así forman una base de F^n. Esta base se conoce como base *canónica* de F^n. □

Ejemplo 1.23: Sea $V = \mathbb{R}^{n\times 1}$ y sea P una matriz $n \times n$ inversible con elementos en $\mathbb{R}$ fija. Las columnas de P forman una base para V. Debemos verificar que si $P_1, \ldots, P_n$ son las columnas de P, ellas generan V y son lineamente independientes.
Veamos que son linealmente independientes. Para esto consideramos

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

y la siguiente combinación lineal:

$$c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como P es inversible, el sistema homogéneo solo tiene la solución trivial, por lo tanto $c_i = 0\ \forall\, i = 1, \ldots, n$.
Veamos que generan el espacio. Sea $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, queremos ver que existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ tal que

$$y = c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n,$$

matricialmente

$$y = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Es decir $c_1, \ldots, c_n$ son las componentes del vector solución del sistema de ecuaciones lineales $P\mathbf{x} = y$. Como P es inversible, el sistema tiene solución única y la solución es $P^{-1}\mathbf{y}$, es decir

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{y}.$$

Luego $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ existen únicos escalares $c_1, \ldots, c_n$ tal que

$$P \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{y}.$$

Así, las columnas de P forman una base para V, como queríamos probar. $\square$

Teorema 1.3 *Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Entonces todo conjunto de vectores linealmente independientes de V es finito y no contiene más de n elementos.*

Demostración: Para demostrar este teorema, debemos ver que todo subconjunto de V que contenga más de n vectores es linealmente dependendiente. Sea S un tal subconjunto de V. Tomemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ vectores distintos de S con $m > n$. Como $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generan V, entonces para cada $j = 1, \ldots, m$, existen escalares a_{ij} con $i = 1, \ldots, n$ tales que

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i.$$

Ahora, consideremos la siguiente combinación lineal

$$\begin{aligned} c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m &= \sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j \right) \beta_i. \end{aligned}$$

Como $m > n$, el sistema homogéneo $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = 0$ tiene solución no trivial, esto es, existen escalares c_i con $i = 1, \ldots, m$ no todos nulos tales que

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Así, existen escalares no todos nulos $c_1, \ldots, c_m$ tales que $c_1\alpha_1 + \ldots + c_m\alpha_m = \mathbf{0}$, por lo tanto $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son linealmente dependiente, entonces S es linealmente dependiente. De esto concluimos que si tenemos un conjunto de vectores linealmente independientes, es finito y no puede tener más de n elementos. $\blacksquare$

Corolario 1.1 *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número (finito) de elementos.*

Demostración: Como V tiene dimensión finita, entonces tiene una base finita de vectores. Supongo que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son base de V, por lo tanto generan V. Si $\beta_1, \ldots, \beta_m$ es otra base de V, entonces son linealmente independientes, luego por teorema anterior resulta $m \leq n$. Ahora intercambiando los roles entre los α_i $\forall\, i = 1, \ldots, n$ y los β_j $\forall\, j = 1, \ldots, m$ resulta $n \leq m$. Luego obtenemos el resultado del corolario $n = m$. $\blacksquare$

Definición 1.8 *La* ***dimensión*** *de un espacio vectorial de dimensión finita, es la cantidad de elementos de una base cualquiera V. Si V no tiene una base finita, se dice V no tiene dimensión finita.*

Notación 1 *dimensión de $V = dim\ V$.*

Con esta definición podemos reescribir el último teorema de la siguiente manera:

Corolario 1.2 *Sea V un espacio de dimensión finita y sea $n = dimV$. Entonces*

1. *Cualquier subconjunto de V que contenga más de n vectores, es linealmente dependiente.*
2. *Ningún subconjunto de V que contenga menos de n vectores puede generar V.*

Ejemplos

- Si F es un cuerpo, F^n tiene dimensión n, porque la base canónica de F^n tiene n elementos.
- Si $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el espacio de las matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión $m \cdot n$, las matrices que tienen un 1 en el elemento ij y ceros en el resto forman una base para V.
- Si $V = P_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid gr(p(x)) \leq n\} \cup \{0\}$, el espacio de los polinomios que tiene a lo sumo grado n, tiene dimensión $n + 1$. Una base para V es el conjunto de vectores: 1, x, x^2, $\dots, x^n$.

Lema 1.1 *Sea S un subconjunto linealmente independiente de un espacio vecorial V. Supongamos que β es un vector en V que no pertenece al subespacio generado por S. Entonces el conjunto que se obtiene agregando β a S, es linealmente independiente.*

Demostración: Sean $\alpha_1 \dots, \alpha_n$ vectores de S y consideramos la siguiente combinación lineal:

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n + c_{n+1}\beta = \mathbf{0}. \tag{1.9}$$

Si $c_{n+1} \neq 0$ entonces

$$\beta = -\frac{c_1}{c_{n+1}}\alpha_1 - \cdots - \frac{c_n}{c_{n+1}}\alpha_n,$$

entonces $\beta \in gen\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y por lo tanto, β pertenece al espacio generado por S lo cual es un absurdo. Por lo tanto $c_{n+1} = 0$. Siguiendo la ecuación (1.9) obtenemos $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0}$, como $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es l.i. por ser subconjunto de S, resulta $c_i = 0\ \ \forall\, i = 1, \dots, n$. Así, $\{\beta\} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y como son vectores arbitrarios de S resulta que $S \cup \{\beta\}$ es linealmente independendiente. ■

Teorema 1.4 *Si W es un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V, todo subconjunto linealmente independiente de W es finito y es parte de una base (finita) de W.*

Demostración: Sea S_0 un subconjunto l.i. de W. Como S_0 también es un conjunto l.i. de V entonces no tiene más de $dimV$ elementos. Si $W = gen\{S_0\}$, entonces S_0 es la base buscada, si no, existe $\beta_1 \in W - gen\{S_0\}$ tal que $S_0 \cup \{\beta_1\}$ es un conjunto l.i. Sea $S_1 = S_0 \cup \{\beta_1\}$. Si $W = gen\{S_1\}$, entonces S_1 es la base buscada, caso contrario existe $\beta_2 \in W - gen\{S_1\}$ tal que $S_1 \cup \{\beta_2\}$ es un conjunto l.i. Continuando con este proceso y no más de $dim\, V$ pasos, obtendremos una base para W. ■

Corolario 1.3 *Si W es un espacio propio de un espacio vectorial V de dimensión finita (esto es, $W \subsetneq V$), entonces W es de dimensión finita y $dimW < dimV$.*

Demostración: Sea S una base de W, entonces S es un conjunto independiente de V, luego S no tiene más de $dimV$ elementos y por lo tanto $dimW \leq dimV$.
Como $W \subsetneq V$, $\exists\, \beta \in V - W$, y se cumple que $S_1 = \{\beta\} \cup S$ es un conjunto independiente. Ahora $dimW < dim\,(gen\{S_1\}) \leq dimV$, entonces $dimW < dimV$. ■

Corolario 1.4 *En un espacio vectorial V de dimensión finita, todo conjunto independiente es parte de una base de V.*

Corolario 1.5 *Sea A una matriz $n \times n$ sobre F y supongamos que las columnas de A son un conjunto independiente de vectores de F^n, entonces A es inversible.*

Demostración: Sabemos que si una matriz es inversible, el sistema homogéneo asociado a dicha matriz tiene como única solución la trivial. Así, vamos a probar que dada A cumpliendo las hipótesis del teorema, la única solución del sistema $A\mathbf{x} = 0$ es $\mathbf{x} = 0$. Para ver esto llamemos $A_1, \ldots, A_n$ las columnas de A y observemos que

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i.$$

Así el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ equivale a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = \mathbf{0},$$

y como A_i con $i = 1, \ldots, n$ son independientes, resulta $x_i = 0\ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Luego la única solución del sistema es la trivial, por lo tanto A es inversible. ■

Teorema 1.5 *Si W_1 y W_2 son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial V, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V de dimensión finita y*

$$dim\,(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim\,(W_1 \cap W_2)$$

Demostración: Por teoremas anteriores y corolarios $W_1 \cap W_2$ es subespacio de V de dimensión finita y tiene una base finita, llamémosla

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$$

que es parte de una base de W_1, digamos

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$$

y de una base de W_2

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}.$$

Vamos a probar que

$$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$$

es una base de $W_1 + W_2$.
Veamos que este conjunto es independiente, para esto consideramos la siguiente combinación lineal

$$0 = \sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i \tag{1.10}$$

operando algebraicamente

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i = -\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i - \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i$$

entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i \in W_2$ y como $\{\beta_i\}_{i=1}^{m}$ es parte de la base de W_1, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i \in W_1 \cap W_2 \implies \sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i = \sum_{j=1}^{r} d_j\alpha_j \implies \sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i + \sum_{j=1}^{r}(-d_j)\alpha_j = \mathbf{0},$$

lo cual implica $b_i = 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, m$ y $d_j = 0 \; \forall \;\, j = 1, \ldots, r$, por ser los vectores de la base de W_1. Sustituyendo $b_i = 0 \;\, \forall \;\, i = 1, \ldots, m$ en (1.10) resulta

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i = 0 \implies c_i = 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, n, \;\; \text{y} \;\; a_i = 0 \; \forall \;\, i = 1, \ldots, r,$$

por ser los vectores de la base de W_2. Así S es un conjunto independiente. Veamos que este conjunto genera el subespacio suma $W_1 + W_2$. Sea $\eta \in W_1 + W_2$, entonces $\eta = \eta_1 + \eta_2$ con $\eta_i \in W_i$ con $i = 1, 2$, así $\eta_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i + \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i$ y $\eta_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{r} l_i\alpha_i$, luego tenemos

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i + \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} d_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{r} l_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i + \sum_{i=1}^{r}(a_i + l_i)\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} d_i\gamma_i$$

$\Rightarrow \eta \in gen\{S\}$ y como ya probamos que es independiente resulta que es una base de $W_1 + W_2$, por lo que

$$\begin{aligned} dim(W_1 + W_2) &= r + n + m \\ &= (r + m) + (r + n) - r \\ &= dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2). \blacksquare$$

1.4. Núcleo e Imagen de una matriz

Definición 1.9 *Sea A una matriz $m \times n$, se llama **núcleo** de A y se denota $\boldsymbol{Nu}(\boldsymbol{A})$ al conjunto*

$$Nu(A) = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

*Llamamos **nulidad de A** a la dimensión del núcleo de A. Si $Nu(A)$ contiene solo el vector nulo, entonces $\dim Nu(A) = 0$.*

Observación: $Nu(A)$ es un subespacio de F^n y está formado por el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a A.

Ejemplo 1.24: Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vamos a buscar $Nu(A)$, para esto debemos buscar la solución del sistema homogéneo asociado a A. Utilizando operaciones elementales de filas:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Reconstruyendo el sistema homogéneo resulta

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3}x_3, \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{2}{3}x_3. \end{array}$$

Entonces

$$Nu(A) = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 = -\frac{1}{3}x_3,\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R} \right\} = gen\left\{ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)^T \right\},$$

y $dim\ Nu(A) = 1$. $\square$

Teorema 1.6 *Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A es inversible si y solo si $dim\ Nu(A) = 0$.*

Demostración: Asumamos A inversible y consideremos el siguiente sistema homogéneo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

premultiplicando a ambos lados de esta igualdad por A^{-1}

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0}$$

operando matricialmente resulta

$$\begin{aligned} I\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

por lo que $Nu(A) = \{\mathbf{0}\}$. Luego $\dim Nu(A) = 0$.
Recíprocamente, si $dim\ Nu(A) = \mathbf{0}$ entonces la única solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la trivial y por lo tanto A es inversible. $\blacksquare$

Definición 1.10 *Sea A una matriz $m \times n$. Se define* ***imagen*** *de A o* ***recorrido*** *de A y se denota* ***Im(A)*** *al conjunto*

$$Im(A) = \{\mathbf{y} \in F^m \mid \exists\, \mathbf{x} \in F^n \ \ con \ \ A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}\,.$$

Llamaremos ***rango*** *de A y lo denotaremos $rg(A)$ a la dimensión de $Im(A)$.*

Observación: $Im(A)$ es un subespacio de F^m, pues $\mathbf{0} \in Im(A)$ con $\mathbf{0} \in F^m$ ya que si tomamos $\mathbf{0} \in F^n$ se cumple $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ahora sean $c \in F$ e $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2 \in Im(A)$, entonces existen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F^n$ tales que $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$. Para probar que $Im(A)$ es subespacio, debemos ver que $c\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in Im(A)$, esto quiere decir que podemos encontrar $\mathbf{z} \in F^n$ tal que $A\mathbf{z} = c\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Veamos

$$c\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = cA\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(c\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

como $c\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in F^n$, llamando $\mathbf{z} = c\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, encontramos el vector buscado.

Ejemplo 1.25: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, vamos a hallar $Im(A)$. Queremos encontrar bajo que condiciones si elegimos $\mathbf{y} \in Im(A)$ es posible hallar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Para esto hacemos la reducción por filas de la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & y_1 \\ 2 & -1 & 3 & y_2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & y_1 \\ 0 & -5 & 5 & -2y_1 + y_2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & \dfrac{2y_2 + y_1}{5} \\ 0 & -1 & 1 & \dfrac{-2y_1 + y_2}{5} \end{array}\right]$$

luego reconstruyendo el sistema:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & \dfrac{2y_2 + y_1}{5} \\ -x_2 + x_3 & = & \dfrac{-2y_1 + y_2}{5} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_3 + \dfrac{2y_2 + y_1}{5} \\ x_2 & = & x_3 + \dfrac{2y_1 - y_2}{5} \end{array}$$

Así, $\forall\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2\ \exists\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, basta elegir $x_1 = -x_3 + \dfrac{2y_2 + y_1}{5}$ y $x_2 = x_3 + \dfrac{2y_1 - y_2}{5}$ con $x_3 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Luego $Im(A) = \mathbb{R}^2$ y $dim\ Im(A) = 2$ o $rg(A) = 2$.
$\square$

Para el siguiente teorema vamos a usar la siguiente notación: C_A el espacio generado por las columnas de A y F_A el espacio generado por las filas de A.

Teorema 1.7 *Sea A una matriz $m \times n$, entonces*

1. *El espacio generado por las columnas de A es la imagen de A, esto es, $C_A = Im(A)$.*
2. *$dim\, F_A = dim\, C_A$.*

Demostración: (1) Queremos ver que $C_A = Im(A)$, para esto vemos la doble inclusión de conjuntos. Consideremos $A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$, A_i representa la columna i de A. Sea e_i el vector i-ésimo de la base canónica en F^n para $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$Ae_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

entonces $A_i \in Im(A)\ \forall\, i = 1, \dots, n, \implies C_A \subseteq Im(A)$.
Sea $\mathbf{y} \in Im(A) \implies \exists\, \mathbf{x} \in F^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ esto es

$$\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \iff \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots + a_{mn}x_n & = & y_m \end{array}$$

$$\iff A_1x_1 + \ldots + A_nx_n = \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \in C_A \implies Im(A) \subseteq C_A.$$

$$\therefore\ Im(A) = C_A.$$

(2) Supongamos que $dim\, F_A = k$ y sean $s_1, \dots, s_k$ una base para F_A. Si $f_1, \dots, f_m$ son las filas de A, entonces existen escalares tal que

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & c_{11}s_1 + \ldots + c_{1k}s_k \\ \vdots & & \vdots \\ f_m & = & c_{m1}s_1 + \ldots + c_{mk}s_k \end{array}$$

Suponiendo que $s_i = (s_{i1}, \dots, s_{in})$ y $f_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})\ \ \forall\ i = 1, \dots, m$, podemos reescribir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{k} c_{1t}s_{t1} & \dots & \sum_{t=1}^{k} c_{1t}s_{tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{k} c_{mt}s_{t1} & \dots & \sum_{t=1}^{k} c_{mt}s_{tn} \end{bmatrix}.$$

Recordando que la igualdad entre vectores es componente a componente, escribimos la columna j-ésima:

$$\begin{array}{rcl} a_{1j} & = & \sum_{t=1}^{k} c_{1t}s_{tj} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mj} & = & \sum_{t=1}^{k} c_{mt}s_{tj} \end{array} \iff A_j = \sum_{t=1}^{k} s_{tj} \begin{bmatrix} c_{1t} \\ \vdots \\ c_{mt} \end{bmatrix},$$

llamando

$$\beta_t = \begin{bmatrix} c_{1t} \\ \vdots \\ c_{mt} \end{bmatrix} \quad \forall\, t = 1, \ldots, k$$

tenemos que $A_j \in\ gen\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$. Como j es arbitrario, resulta $C_A \subseteq gen\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ $\implies\ dim\, C_A \leq k$, esto es

$$dim\ C_A \leq dim\ F_A.$$

Observar que este resultado vale para cualquier matriz A, por lo tanto también vale para A^T, entonces

$$dim\, C_{A^T} \leq dim\, F_{A^T}$$

y como $C_{A^T} = F_A$ y $F_{A^T} = C_A$, resulta

$$dim\, F_A \leq dim\, C_A,$$

y finalmente

$$dim\, C_A = dim\, F_A. \ \blacksquare$$

Corolario 1.6 *Dada A matriz $m \times n$, entonces el rango de A es igual al rango de A^T.*

Así cuando se hable de rango de una matriz será indistinto buscar la cantidad de filas o columnas independientes.

Ejemplo 1.26: Volvamos al Ejemplo 1.24: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, teniendo presente el teorema que acabamos de probar, ¿cuál es $Im(A)$?. Si observamos en la reducción por filas, la matriz reducida tiene dos filas linealmente independientes, por lo que $rg(A) = 2$, entonces $dim\, Im(A) = 2$. Como $Im(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, entonces $Im(A) = \mathbb{R}^2$. $\square$

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 1.27: Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$, observar que $A_1 + (-3)A_3 = A_2$, y A_1, A_3 son l.i., por lo que $rg(A) = 2$ e $Im(A) = gen\{A_1, A_3\}$. $\square$

Ahora vamos a repasar algunos conceptos básicos. Las operaciones elementales de filas (o columnas) de matrices son 3. A saber: intercambiar filas, sustituir una fila por un múltiplo de ella y la última es sustituir una fila por ella más un múltiplo de otra (de manera análoga se definen las operaciones elementales de columnas). Dadas A y B matrices $m \times n$, se dicen *equivalentes por filas*, si por medio de aplicar una cantidad finita de operaciones elementales de filas a A obtenemos B o viceversa. Con esto es claro que $F_A = F_B$ y $C_A = C_B$. Un resultado conocido para matrices equivalentes por filas, es que si A matriz $m \times n$ es equivalente por filas a B matriz $m \times n$, entonces existe P matriz $m \times m$ inversibles tal que $PA = B$. De manera análoga se define la equivalencia por columna entre matrices. El resultado para matrices equivalentes por columnas dice: Si A matriz

$m \times n$ es equivalente por columnas a B matriz $m \times n$, entonces existe P matriz $n \times n$ inversible tal que $AP = B$.

A continuación vamos a enunciar un teorema donde resumimos lo expresado aquí y establecemos la relación entre la nulidad de las matrices equivalentes. Para la demostración usaremos el siguiente resultado que queda como ejercicio para el lector.

Ejercicio 1.1: Sea $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en F^n y sea H matriz $n \times n$ inversible, entonces $\{H\beta_1, \ldots, H\beta_k\}$ es un conjunto linealmente independiente en F^n.

Teorema 1.8 *Sean A y B matrices $m \times n$. Si A es equivalente por filas a B entonces $F_A = F_B$. Si A es equivalente por columnas a B entonces $C_A = C_B$. Además en ambos casos se cumple $dim\, Nu(A) = dim\, Nu(B)$.*

Demostración: Por lo expuesto antes, la primera y segunda parte del teorema se cumplen, esto es, $F_A = F_B$ en caso que A sea equivalente por filas a B y $C_A = C_B$ en el caso que A sea equivalente por columnas a B. Vamos a probar la relación entre las nulidades.

Supongamos que A es equivalente por filas a B, entonces sabemos que los sistemas homogéneos tienen la misma solución, esto es, $Nu(A) = Nu(B)$, así $dim\ Nu(A) = dim\ Nu(A)$.

Supongamos que A es equivalente por columnas a B, entonces existe P matriz $n \times n$ inversible tal que $AP = B$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ una base para $Nu(A)$, entonces $A\alpha_i = 0\ \forall\, i = 1, \ldots, r$. Ahora para $1 \leq i \leq r$ tenemos

$$0 = A\alpha_i = APP^{-1}\alpha_i = BP^{-1}\alpha_i \implies BP^{-1}\alpha_i = 0$$
$$\implies P^{-1}\alpha_i \in Nu(B)\ \ \forall\, i = 1, \ldots, r.$$

Como $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ es un conjunto linealmente independiente y P^{-1} es una matriz inversible, entonces $P^{-1}\alpha_1, \ldots, P^{-1}\alpha_r$, es un conjunto linealmente independiente (Ejercicio 1.1) que pertenece a $Nu(B)$, entonces

$$dim\ Nu(B) \geq r = dim\ Nu(A).$$

Así hemos probado que si A es equivalente por columnas a B, entonces

$$dim\ Nu(A) \leq dim\ Nu(B).$$

Ahora como A es equivalente por columnas a B entonces B es equivalente por columnas a A y $A = BP^{-1}$, entonces se verifica el resultado probado, esto es,

$$dim\ Nu(B) \leq dim\ Nu(A).$$

Luego

$$dim\ Nu(B) = dim\ Nu(A)$$

como queríamos probar. ■

Ejemplo 1.28: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

vamos a calcular rango y nulidad de A y encontrar una base para el espacio generado por las filas de A. En base a lo que venimos estudiando, ¿podemos determinar cuál es el máximo valor posible para el rango? (queda para pensar). Para determinar rango, nulidad y encontrar la base, aplicamos las operaciones elementales de filas de una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Como podemos ver B tiene dos filas linealmente independientes, por lo que $2 = rg(B) = rg(A)$. Para la nulidad reconstruimos el sistema homogéneo asociado a B y obtenemos:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 2x_3 & = & 0 & \Longrightarrow & x_1 & = & 2x_3, \\ x_2 & - & \dfrac{x_3}{2} & = & 0 & \Longrightarrow & x_2 & = & \dfrac{x_3}{2}. \end{array}$$

Así

$$Nu(A) = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 = 2x_3, x_2 = \frac{x_3}{2}\right\} = \ gen \ \left\{\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)^T\right\},$$

entonces $nulidad(A) = 1$.

¿Cómo encontramos una base para el espacio generado por las filas de A? Cuando aplicamos operaciones elementales de filas, las filas obtenidas en la nueva matriz, son combinaciones lineales de las filas de la matriz original, por lo tanto generan el mismo espacio. Observar que la matriz escalón obtenida, tiene sus filas no nulas linealmente independientes, si no se puede seguir reduciendo, es porque las filas no son combinación lineal una de la otra. Analíticamente podemos comprobarlo, escribiendo el vector nulo como combinación lineal de las filas no nulas. Con un simple sistema homogéneo se obtiene que los escalares son todos nulos, por lo que las filas resultan linealmente independientes. Dicho esto, para encontrar una base para el espacio generado por las filas de A basta realizar una reducción por filas y las filas no nulas obtenidas en la matriz escalón serán la base buscada. En nuestro ejemplo, una base para F_A será: $\{(1, 0, -2); (0, 1, -\frac{1}{2})\}$. Si estamos interesados en hallar una base para el espacio columna, tendremos que realizar la reducción por columnas de la matriz y considerar como base las columnas no nulas de la matriz escalón obtenida al final del proceso. Otra manera, es realizar la reducción por filas de la matriz transpuesta de la original y al final del proceso volver a transponer. $\square$

Continuando observemos lo siguiente: $rg(A) + nulidad(A) = 2 + 1 = 3$ y A es una matriz 4×3, así es que, la suma entre rango y nulidad coincide con la cantidad de columnas de A, ¿será casualidad?. La respuesta es que no y esto es lo que nos dice el siguiente teorema:

Teorema 1.9 *Sea A matriz $m \times n$. Entonces $dim\ Im(A) + dim\ Nu(A) = n$.*

Demostración: Supongamos que $rg(A) = k$, entonces A tiene k filas y k columnas linealmente independientes. Aplicando operaciones elementales de filas y columnas a A

obtendremos la matriz C:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = C$$

Por el resultado anterior $rg(A) = rg(C)$, por lo que si escribimos a C como una matriz en bloques

$$C = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos garantizar que el bloque $k \times k$ representado por la matriz B tiene k filas linealmente independientes, entonces B es una matriz inversible. Ahora si consideramos la base canónica en F^n, resulta

$$Ce_i = 0 \;\; \forall\, i = k+1, \dots, n,$$

$$\Longrightarrow \quad e_i \in Nu(C)\; \forall\, i = k+1, \dots, n \quad \Longrightarrow \quad gen\ \{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subseteq Nu(C).$$

Vamos a ver que $Nu(C) = gen\ \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. Sea $\mathbf{x} \in Nu(C)$, entonces

$$C\mathbf{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = 0.$$

Como B es inversible resulta que $x_i = 0 \;\forall\; i = 1, \dots, k$, entonces si $\mathbf{x} \in Nu(C)$ sus primeras k componentes son nulas, esto es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_{k+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 1 \end{bmatrix} = x_{k+1}e_{k+1} + \cdots + x_n e_n,$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x} \in gen\ \{e_{k+1}, \dots, e_n\}.$$

Como $\mathbf{x}$ es arbitrario, resulta $\quad Nu(C) \subseteq gen\ \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$,

$$\therefore \quad Nu(C) = gen\ \{e_{k+1}, \dots, e_n\}.$$

Así

$$\begin{aligned} dim\, Nu(A) &= dimNu(C) = n - k = n - dim\, Im(A) \\ &\Longrightarrow \quad dim\, Nu(A) + dim\, Im\,(A) = n. \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 1.29: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

por operaciones elementales de filas se obtiene la siguiente matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que B tiene dos filas linealmente independientes por lo que su rango es 2 y por el teorema anterior, deducimos que la nulidad de A es 1. $\square$

Ejemplo 1.30: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
Esta matriz tiene la última columna que es un múltiplo de la primer columna y la segunda es linealmente independiente de las otras dos, por lo que $rg(A) = 2$, entonces por teorema $nulidad(A) = 1$. $\square$

Teorema 1.10 *Sea A matriz $n \times n$. Entonces A es inversible si y solo si $dim\, Im(A) = n$.*

Demostración: Sabemos que A inversible $\Longleftrightarrow$ $dim\, Nu(A) = 0$ (por Teorema 1.6) $\Longleftrightarrow$ $dim\, Im(A) = n$ (por Teorema 1.8). $\blacksquare$

Para finalizar esta sección vamos a estudiar un teorema que nos dará condiciones bajo las cuales un sistema no homogéneo tendrá solución.

Utilizaremos la siguiente notación, dado el sistema no homogéneo $Ax = b$ con A matriz $m \times n$ y $b \in F^m$ denotamos por (A, b) a la matriz $m \times (n+1)$, cuyas primeras n columnas coinciden con las columnas de la matriz A y cuya última columna corresponde al vector b. A esta matriz la llamamos **matriz ampliada del sistema**.

Teorema 1.11 *Sean A matriz $m \times n$ y $b \in F^m$:*

(i) *El sistema $A\mathbf{x} = b$ tiene por lo menos una solución si y solo si $b \in C_A$.*

(ii) *En el sistema $A\mathbf{x} = b$, $b \in C_A$ si y solo si las matrices (A, b) y A tienen el mismo rango.*

Demostración: (i). Supongo $A\mathbf{x} = b$, tiene al menos una solución $\Longleftrightarrow$ $\exists\ \mathbf{x} \in F^n$ tal que $A\mathbf{x} = b \Longleftrightarrow b \in Im(A) \Longleftrightarrow b \in C_A$.
(ii) Si $b \in C_A$ entonces los espacios generados por las columnas de (A, b) y A son los mismos, por lo tanto tienen el mismo rango. Recíprocamente, supongo (A, b) y A tienen el mismo rango. Si $b \notin C_A$ entonces

$$rg(A, b) = dim\, C_A + 1 = rg(A) + 1 \Longrightarrow rg(A, b) = rg(A) + 1.$$

Esto contradice la hipótesis, por lo tanto $b \in C_A$. ■

Ejemplo 1.31: Determinar si el siguiente sistema tiene solución

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 12x_3 & = & 40 \end{array}$$

Basándonos en el teorema anterior, alcanza con encontrar el rango de A y el de la matriz ampliada del sistema. Para ello vamos a hacer reducciones por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right].$$

Como podemos observar en este ejemplo $rg(A) = 2$ y $rg(A, b) = 3,$ por lo tanto los rangos de ambas matrices son distintos, así es que por teorema anterior resulta que el sistema no tiene solución. □

1.5. Coordenadas

En espacios de dimensión finita, un concepto muy útil es poder escribir un vector dado del espacio como combinación lineal de los vectores de una base con un orden predeterminado. Así, si V es un espacio vectorial de dimensión n, vamos a poder establecer una relación biunívoca entre los vectores de V y F^n.

Definición 1.11 *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, una* ***base ordenada*** *de V es una sucesión finita de vectores linealmente independiente y que genera V.*

Observar que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es una base ordenada de V, entonces el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una base de V. La base ordenada es el conjunto, junto con un orden dado. Así $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $\alpha_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son dos bases ordenadas distintas de V, representan el mismo conjunto de vectores pero son dos bases ordenadas diferentes.

A continuación vamos a hacer un abuso de notación y vamos a escribir

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

como una base ordenada.

Proposición 1.3 *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y*

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

una base ordenada para V. Para cada $\alpha \in V$ existen únicos escalares $c_1, \ldots, c_n$ en F tales que $\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n$.

Demostración: Supongamos que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \text{ con } c_i \in F \ \forall \ i = 1, \ldots, n,$$

y

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i \ \text{ con } \ b_i \in \ F \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, n,$$

entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (c_i - b_i)\, \alpha_i,$$

como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, es un conjunto independiente resulta

$$c_i - b_i = 0 \quad \forall \ \ i = 1, \ldots, n, \quad \Longrightarrow \quad c_i = b_i \quad \forall \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto vale la unicidad como queríamos probar. ■

De esta manera, dada una base ordenada $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de un V espacio vectorial de dimensión finita, digamos n, se establece una relación biunívoca entre V y F^n. Si $\alpha \in V$ utilizaremos la notación

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

que llamaremos **matriz de las coordenadas de α respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$** , para representar los escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n.$$

Observar que si se cambia la base ordenada, la matriz de coordenadas cambia.

Ejemplo 1.32: Sea $V = F^n$ y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base ordenada canónica de F^n. Queremos hallar la matriz de coordenadas de un vector en V respecto a la base canónica. Sea $\alpha \in V$, entonces

$$\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \quad \Longrightarrow \quad [\alpha]_{\mathcal{B}} = \alpha.$$

Así, la matriz de coordenadas de un vector en F^n respecto a la base canónica es el mismo vector. □

Ejemplo 1.33: Sean $V = P_3$ el espacio de los polinomios de grado como máximo 3, y $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\mathcal{B}' = \{x^2, x, 1, x^3\}$ dos bases ordenadas de V. Sea $\alpha = -2x^3 + 3 - x$, vamos a encontrar $[\alpha]_{\mathcal{B}}$, $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$. Llamando $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

$$\alpha = -2x^3 + 3 - x = 3\alpha_1 + (-1)\alpha_2 + 0\alpha_3 + (-2)\alpha_4 \quad \Longrightarrow \quad [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Llamando $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$

$$\alpha = -2x^3 + 3 - x = 0\beta_1 + (-1)\beta_2 + 3\beta_3 + (-2)\beta_4 \implies [\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \square$$

Ejercicio 1.2: (**Propiedades de la matriz de coordenadas de un vector**) Sean V espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}$ una base ordenada de V, entonces

1. $[\alpha + \beta]_{\mathcal{B}} = [\alpha]_{\mathcal{B}} + [\beta]_{\mathcal{B}}, \ \ \forall\, \alpha,\, \beta \in V.$
2. $[c\alpha]_{\mathcal{B}} = c[\alpha]_{\mathcal{B}}, \ \ \forall\, \alpha \in V,\, c \in F.$

A continuación daremos un teorema que nos permite relacionar, las matrices de coordenadas en dos bases ordenadas distintas de un vector del espacio.

Teorema 1.12 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F y sean $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ dos bases ordenadas de V. Entonces existe una única matriz A $n \times n$, inversible con elementos en F tal que:*

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}_2} = A\,[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}_1} = A^{-1}\,[\alpha]_{\mathcal{B}_2}$

para todo vector α de V. Las columnas de A están dadas por $A_j = [\alpha_j]_{\mathcal{B}_2}, \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n$.

Demostración: Para cada $j = 1, \ldots, n$ existen únicos escalares $a_{ij} \in F \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n$, tales que

$$\alpha_j = a_{1j}\beta_1 + \cdots + a_{nj}\beta_n \iff [\alpha_j]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

Sea $\alpha \in V$, entonces existen únicos $c_1, \ldots, c_n$ en F tal que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j \iff [\alpha]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

y únicos $b_1, \ldots, b_n$ en F tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i\beta_i \iff [\alpha]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j \right) \beta_i.$$

entonces

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)\beta_i.$$

Así los escalares que permiten escribir a α como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}'$, para cada $i = 1, \ldots, n$, están dados por la sumatoria $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j$. Luego por la unicidad de los escalares resulta

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Si llamamos A a la matriz cuyos elementos son los escalares a_{ij} $\forall\, i, j$ con $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n$, resulta que b_i se obtiene de multiplicar la fila i-ésima de A por el vector cuyas componentes son los escalares $c_1, \ldots, c_n$ en ese orden, es decir, por la matriz de coordenadas de α en la base ordenada $\mathcal{B}_1$, esto es

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\iff \ [\alpha]_{\mathcal{B}_2} = A\,[\alpha]_{\mathcal{B}_1}.$$

Esta matriz es inversible pues si consideramos el sistema homogéneo asociado a A

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

sabemos que existe $\alpha \in V$ tal que $\mathbf{x} = [\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ (por la relación biunívoca que existe entre los espacios). Por otro lado se verifica que $A\,[\alpha]_{\mathcal{B}_1} = [\alpha]_{\mathcal{B}_2}$, entonces

$$\mathbf{0} = A\,\mathbf{x} = A\,[\alpha]_{\mathcal{B}_1} = [\alpha]_{\mathcal{B}_2} \implies [\alpha]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{0} \implies \alpha = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

luego A es inversible.
Veamos la unicidad de la matriz A. Supongamos que existen A y B matrices inversibles tales que $[\alpha]_{\mathcal{B}_2} = A[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ y $[\alpha]_{\mathcal{B}_2} = B[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ entonces

$$(A - B)[\alpha]_{\mathcal{B}_1} = 0\ \forall\, \alpha \in V \tag{1.11}$$

en particular se cumple para los vectores de la base ordenada $\mathcal{B}_1$. Como $[\alpha_i]_{\mathcal{B}_1} = e_i$, si en la ecuación (1.11) reemplazamos α por α_i obtenemos que las columnas i-ésimas de A y B coinciden. Si consideramos todos los vectores de la base ordenada $\mathcal{B}_1$, resulta $A - B = 0$ con lo cual $A = B$. Así, se verifica ($i.$) y ($ii.$) y queda demostrado el teorema. ■

Para terminar esta sección daremos el siguiente teorema que nos ayuda a completar la idea del teorema anterior.

Teorema 1.13 *Supongamos que B es una matriz $n \times n$ inversible sobre F. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre F. Sea $\mathcal{B}_1$ una base ordenada de V. Entonces existe una base ordenada $\mathcal{B}_2$ única de V tal que:*

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}_1} = B\,[\alpha]_{\mathcal{B}_2}$

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}_2} = B^{-1}\,[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$

para todo vector α en V.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Definimos

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i \quad \forall\ j = 1, \ldots, n$$

donde b_{ij} representa el elemento ij-ésimo de la matriz B. Vamos a probar que $\beta_1, \ldots, \beta_n$ es un conjunto linealmente independiente.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} c_j\beta_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_j\right)\alpha_i,$$

como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es un conjunto independiente, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_j = 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n$$

matricialmente

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis B es inversible, entonces $c_j = 0\ \forall\ j = 1, \ldots, n$, entonces $\beta_1, \ldots, \beta_n$ es un conjunto linealmente independiente. Así llamando $\mathcal{B}_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ encontramos la base ordenada buscada. Luego por la definición de $\mathcal{B}_2$ y el Teorema 1.12 son verdaderas (i) y (ii). ■

Así la matriz A que encotramos en el Teorema 1.12 (o la matriz B para el teorema anterior) está bien definida, es única y es inversible. A seguir veremos como se denomina:

Definición 1.12 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n, sobre F y sean $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ dos bases ordenadas de V. Se dice que una matriz $A \in F^{n\times n}$ es la* ***matriz de cambio de base de*** *$\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ si su columna j-ésima es $[\alpha_j]_{\mathcal{B}_2}$ para todo $j = 1, \ldots, n$, es decir*

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n$$

con a_{ij} elemento i, j de A para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$.

Veamos algunos ejemplos de lo desarrollado en esta sección.

Ejemplo 1.34: Sean $V = F^3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, A es inversible y sea $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ con

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Siguiendo la demostración del Teorema 1.13, definiendo

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\alpha_i \quad \text{con} \quad j = 1, 2, 3$$

obtenemos la base ordenada que cumple las propiedades enunciadas en dicho teorema.

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}. \square$$

Ejemplo 1.35: Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ dos bases ordenadas de V, con

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vamos a encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. LLamando A a esta matriz, por definición se cumple que $A_j = [\alpha_j]_{\mathcal{B}_2}$ con $j = 1, 2$, el vector A_j es la columna j-ésima de A. Escribimos cada vector de $\mathcal{B}_1$ como combinación lineal de $\mathcal{B}_2$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} - a_{21} \\ a_{11} + 2a_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= a_{11} - a_{21} \\ -1 &= a_{11} + 2a_{21} \end{aligned}$$

despejando obtenemos $a_{11} = \dfrac{1}{3}$ y $a_{21} = -\dfrac{2}{3}$. Sustituyendo se puede comprobar que $\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2$. Ahora hacemos un razonamiento análogo pero con α_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{12} - a_{22} \\ a_{12} + 2a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= a_{12} - a_{22} \\ 0 &= a_{12} + 2a_{22} \end{aligned}$$

despejando obtenemos $a_{12} = \frac{2}{3}$ y $a_{22} = -\frac{1}{3}$. Sustituyendo nuevamente, se puede comprobar que $\alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2$. Así

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Sea $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, vamos a calcular $[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ y $[\alpha]_{\mathcal{B}_2}$.

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \tag{1.12}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix}$$

igualando componentes

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 + c_2 \\ -1 &= -c_1 \end{aligned}$$

despejando obtenemos $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$, así

$$[\alpha]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

comprobar que se verificar (1.12). Ahora, por teorema sabemos

$$[\alpha]_{\mathcal{B}_2} = A\,[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$$

entonces

$$[\alpha]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

operando algebraicamente

$$[\alpha]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

comprobar que se cumple que $\alpha = 1 \cdot \beta_1 + (-1)\beta_2$. $\square$

Capítulo 2

Espacios con Producto Interno

2.1. Definición

Definición 2.1 *Sea F el cuerpo de los números reales o complejos y sea V un espacio vectorial sobre F. Un* ***producto interno sobre V*** *es una función que asigna a cada par ordenado de vectores α, β de V un escalar $\langle \alpha , \beta \rangle$ de F de modo tal que para cualesquiera α, β, γ de V y todos los escalares c se cumple:*

a. $\langle \alpha + \beta , \gamma \rangle = \langle \alpha , \gamma \rangle + \langle \beta , \gamma \rangle$.

b. $\langle c\alpha , \beta \rangle = c\langle \alpha , \beta \rangle$.

c. $\overline{\langle \alpha , \beta \rangle} = \langle \beta , \alpha \rangle$.

d. $\langle \alpha , \alpha \rangle$ *es un número real y* $\langle \alpha , \alpha \rangle > 0$ *si* $\alpha \neq 0$.

Observaciones:

1. De (a), (b), (c) deducimos que

$$\langle \alpha , c\beta + \gamma \rangle = \bar{c}\langle \alpha , \beta \rangle + \langle \alpha , \gamma \rangle.$$

2. En el caso que $F = \mathbb{R}$, los conjugados están demás, mientras que en el caso que $F = \mathbb{C}$, el conjugado es necesario para la consistencia de las condiciones.

   Ejemplo: $0 < \langle i\alpha , i\alpha \rangle = i^2\langle \alpha , \alpha \rangle = -\langle \alpha , \alpha \rangle$. En este caso tendríamos $-\langle \alpha , \alpha \rangle > 0$ y contradice (d) de la definición.

3. Si $\alpha = \mathbf{0}$ o $\beta = \mathbf{0}$, entonces $\langle \alpha , \beta \rangle = 0$. Pues, supongamos que $\alpha = \mathbf{0}$, entonces

$$\langle \mathbf{0} , \beta \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0} , \beta \rangle = \langle \mathbf{0} , \beta \rangle + \langle \mathbf{0} , \beta \rangle \Longrightarrow \langle \mathbf{0} , \beta \rangle = 0.$$

Ejemplo 2.1: (Producto interno canónico de $\mathbb{C}^n$)
Dados $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, se define $\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$. Si $F = \mathbb{R}$, entonces $\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, conocido como producto escalar o producto punto. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores columna sobre $\mathbb{C}$, este producto podemos escribirlo como: $\mathbf{y}^*\mathbf{x}$, en el caso real es indistinto $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ o $\mathbf{y}^T\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}^*$ es el vector $\mathbf{y}$ transpuesto con todas sus componentes conjugadas).

Veamos que es producto interno, para esto elegimos también $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ y $c \in \mathbb{C}$:

$a.$ $\langle \mathbf{x}+\mathbf{z}\,,\,\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x_i+z_i)\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} + \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{y_i} = \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{z}\,,\,\mathbf{y}\rangle.$

$b.$ $\langle c\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} c\,x_i\overline{y_i} = c\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = c\,\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle.$

$c.$ $\overline{\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i\overline{y_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\,\overline{\overline{y_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\overline{x_i} = \langle \mathbf{y}\,,\,\mathbf{x}\rangle.$

$d.$ $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0 \implies \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle \geq 0.$

$$0 = \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \implies \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \implies x_i = 0\ \forall\, i = 1,\ldots,n, \implies \mathbf{x} = 0.$$

Entonces $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle > 0,\ \forall\, \mathbf{x} \neq 0.$ □

Ejemplo 2.2: Para $V = \mathbb{R}^2$, se define $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2.$

Vamos a probar solo la positividad, es decir la propiedad (d) de la definición 2.1. Las demás propiedades quedan de ejercicio.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle = x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 4x_2^2 &= x_1^2 - 2\,x_1x_2 + 4x_2^2\\ &= x_1^2 - 2\,x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2^2\\ &= (x_1-x_2)^2 + 3x_2^2\end{aligned}$$

$$\implies \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle = (x_1-x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0.$$

Ahora

$$0 = \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle = (x_1-x_2)^2 + 3x_2^2 \implies (x_1-x_2)^2 + 3x_2^2 = 0 \implies x_1 - x_2 = 0, \text{ y } x_2 = 0,$$

entonces $x_1 = 0 = x_2 \implies \mathbf{x} = 0$. Luego $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle > 0$, $\forall\, \mathbf{x} \neq 0.$ □

Ejemplo 2.3: Sea $V = C[a,b]$, el espacio de las funciones continuas a valores reales en $[a,b]$. Se define

$$\langle f\,,\,g\rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$

Esta función, es un producto interno sobre $C[a,b]$.

$a.$ $\langle f+h\,,\,g\rangle = \int_a^b (f(t)+h(t))\ g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,g(t)dt + \int_a^b h(t)\,g(t)\,dt = \langle f\,,\,g\rangle + \langle h\,,\,g\rangle$

$b.$ $\langle cf\,,\,g\rangle = \int_a^b c\,f(t)\,g(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = c\,\langle f\,,\,g\rangle$

$c.$ Se cumple por ser el cuerpo real y por la conmutatividad del producto.

d . $\langle f\,,\,f\rangle = \int_a^b f(t)\,f(t)\,dt = \int_a^b f(t)^2\,dt \geq 0$

$$0 = \langle f\,,\,f\rangle = \int_a^b f(t)^2\,dt \implies f(t) = 0\ \ \forall\, t \in [a,b] \text{ por ser } f \text{ continua en } [a,b].$$

Así $\langle f\,,\,f\rangle > 0,\ \forall\, f \neq 0.$ □

2.2. Espacio producto interno

Definición 2.2 *Un espacio producto interno es un espacio vectorial real o complejo junto con un producto interno definido sobre ese espacio.*

Definición 2.3 *Sea V un espacio producto interno y sean $\alpha, \beta \in V$. Se dice que α y β son ortogonales si $\langle \alpha \, , \, \beta \rangle = 0$. Lo denotamos $\alpha \perp \beta$.*

Definición 2.4 *Sea V un espacio producto interno y sea $\alpha \in V$. Se define la **norma** de α y lo denotamos como $||\alpha||$ al siguiente valor real*

$$||\alpha|| = \sqrt{\langle \alpha \, , \, \alpha \rangle}.$$

*Diremos que el vector α es **unitario** si $||\alpha|| = 1$.*

Observación 1: $\sqrt{\langle \alpha \, , \, \alpha \rangle}$ está bien definido ya que $\langle \alpha \, , \, \alpha \rangle \geq 0$.

Observación 2: Si $\alpha \neq 0$ y $||\alpha|| \neq 1$, llamaremos la *normalización* de α al vector $\frac{\alpha}{||\alpha||}$, pues este vector es unitario (comprobar esto último).

Observación 3: Geométricamente, la norma de un vector representa la distancia del vector al vector nulo, o la longitud del vector.

Ejemplo 2.4: Sea $V = \mathbb{C}^2$, $\alpha = (3, -i)$, $\beta = (2, i6)$, estos vectores son ortogonales con el producto interno canónico, pues

$$\langle \alpha \, , \, \beta \rangle = 3 \cdot \bar{2} - i \cdot \overline{i6} = 6 + i^2 6 = 0. \; \square$$

Ejemplo 2.5: Sea $V = C[0, 1]$ con el producto interno definido en la Sección 2.1, Ejemplo 2.3. Sean $f = 1$ y $g = x - \frac{1}{2}$ vectores de V, ellos son perpendiculares entre sí.

$$\langle f \, , \, g \rangle = \int_0^1 1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^1 = 0.$$

Además, $||f|| = \sqrt{(\langle f \, , \, f \rangle)} = \sqrt{\int_0^1 1 \, dx} = 1 \implies f$ es un vector unitario en V. $\square$

Teorema 2.1 *Si V es un espacio producto interno, entonces para vectores α, β cualesquiera de V y cualquier c escalar se cumple:*

a. $||c \, \alpha|| = |c| ||\alpha||$.

b. $||\alpha|| > 0, \;\; \forall \, \alpha \neq 0$.

c. $|\langle \alpha \, , \, \beta \rangle \,| \leq ||\alpha|| \, ||\beta||$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*

d. $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$ *(Desigualdad triangular).*

Demostración:
a. $||c\alpha|| = \sqrt{\langle c\,\alpha\,,\,c\,\alpha\rangle} = \sqrt{c\,\overline{c}\langle\alpha\,,\,\alpha\rangle} = \sqrt{|c|^2\langle\alpha\,,\,\alpha\rangle} = |c|\sqrt{\langle\alpha\,,\,\alpha\rangle} = |c|||\alpha||.$
b. Sabemos $||\alpha|| \geq 0$, si $||\alpha|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\langle\alpha\,,\,\alpha\rangle} = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle\alpha\,,\,\alpha\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0.$
c. Si $\alpha = 0$, por la observación 3 al comienzo de este capítulo tenemos $\langle\alpha\,,\,\beta\rangle = 0$, entonces $|\langle\alpha\,,\,\beta\rangle\,| \leq ||\alpha||\,||\beta||$.
Si $\alpha \neq 0$, definimos $\gamma = \beta - \dfrac{\langle\,\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha$. Luego,

$$0 \leq ||\gamma||^2 = \langle\,\gamma,\,\gamma\,\rangle = \left\langle\,\beta - \frac{\langle\,\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha,\,\beta - \frac{\langle\,\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha\,\right\rangle =$$

$$\langle\beta,\beta\rangle - \left\langle\,\beta,\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha\right\rangle - \left\langle\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha,\beta\right\rangle + \left\langle\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha,\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha\,\right\rangle = (*)$$

Observar que

$$\left\langle\,\beta,\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha\right\rangle = \frac{\overline{\langle\,\beta,\,\alpha\rangle}}{||\alpha||^2}\langle\,\beta,\alpha\,\rangle = \frac{|\langle\,\beta,\alpha\,\rangle|^2}{||\alpha||^2} \tag{2.1}$$

$$\left\langle\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha,\beta\right\rangle = \frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\langle\alpha,\beta\rangle = \frac{\overline{\langle\,\alpha,\beta\rangle}}{||\alpha||^2}\langle\,\alpha,\beta\,\rangle = \frac{|\langle\,\alpha,\beta\,\rangle|^2}{||\alpha||^2} \tag{2.2}$$

$$\left\langle\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha,\,\frac{\langle\beta,\alpha\,\rangle}{||\alpha||^2}\alpha\right\rangle = \frac{|\langle\,\beta,\alpha\,\rangle|^2}{||\alpha||^4}||\alpha||^2 = \frac{|\langle\,\beta,\alpha\,\rangle|^2}{||\alpha||^2}, \tag{2.3}$$

sustituyendo las expresiones (2.1)-(2.3) en $(*)$ y cancelando términos, obtenemos

$$0 \leq ||\beta||^2 - \frac{|\langle\,\alpha,\beta\,\rangle|^2}{||\alpha||^2} \quad\Longrightarrow\quad |\langle\alpha,\beta\rangle| \leq ||\alpha||||\beta||.$$

d. Desigualdad Triangular

Antes de demostrar esta desigualdad, vamos a recordar una propiedad de los números complejos:

$$\langle\,\alpha,\,\beta\rangle + \langle\beta,\alpha\rangle = \langle\,\alpha,\,\beta\rangle + \overline{\langle\alpha,\beta\rangle} = 2\,Re\langle\alpha,\beta\rangle.$$

Ahora

$$||\alpha+\beta||^2 = \langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle + \langle\,\alpha,\,\beta\rangle + \langle\beta,\alpha\rangle + \langle\beta,\,\beta\rangle,$$

por la propiedad antes mencionada obtenemos:

$$||\alpha+\beta||^2 = ||\alpha||^2 + 2Re\langle\,\alpha,\beta\,\rangle + ||\beta||^2, \tag{2.4}$$

además como

$$Re\langle\alpha,\beta\rangle \leq |\langle\alpha,\beta\rangle|$$

siguiendo (2.4) y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta

$$\begin{aligned} ||\alpha||^2 + 2Re\langle\,\alpha,\beta\,\rangle + ||\beta||^2 &\leq ||\alpha||^2 + 2|\langle\,\alpha,\beta\,\rangle| + ||\beta||^2 \\ &\leq ||\alpha||^2 + 2||\alpha||||\beta|| + ||\beta||^2 \\ &= (||\alpha|| + ||\beta||)^2 \end{aligned}$$

uniendo los extremos de este desarrollo obtenemos

$$||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||. \blacksquare$$

Para pensar: ¿Bajo qué condiciones se verifica la igualdad en Cauchy-Schwarz?

2.3. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición 2.5 *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si S es un conjunto de vectores de V, se dice que S es un* ***conjunto ortogonal*** *siempre que todos los pares de vectores distintos de S sean ortogonales. Un* ***conjunto ortonormal*** *es un conjunto ortogonal S con la propiedad que todo vector de S es unitario, esto es, $||\alpha|| = 1$ para todo α de S.*

Teorema 2.2 *Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.*

Demostración: Sea S un conjunto ortogonal finito o infinito de vectores no nulos en un espacio con producto interno dado. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vectores distintos de S cualesquiera y sea

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,$$

entonces para k con $1 \leq k \leq n$ arbitrario se cumple:

$$\langle\, \beta, \alpha_k \,\rangle \;=\; \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i,\, \alpha_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \,\langle\, \alpha_i,\, \alpha_k\rangle = \; c_k\; \langle\, \alpha_k,\, \alpha_k\rangle \;=\; c_k||\alpha_k||^2,$$

como $\alpha_k \neq 0$ resulta

$$c_k = \frac{\langle\, \beta, \alpha_k \,\rangle}{||\alpha_k||^2}.$$

Ahora si $\beta = 0 \Longrightarrow \langle\, \beta, \alpha_k\rangle = 0 \Longrightarrow c_k = 0$. Por ser k arbitrario, se cumple que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es un conjunto independiente y por ser un conjunto arbitrario en S, tenemos que S es linealmente independiente. $\blacksquare$

Corolario 2.1 *Si un vector β es combinación lineal de una sucesión de vectores ortogonales no nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de V espacio producto interno, entonces β es igual a la combinación particular*

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle\, \beta, \alpha_k\rangle}{||\alpha_k||^2}\alpha_k.$$

Corolario 2.2 *Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en V espacio producto interno de dimensión finita, entonces $n \leq \dim V$.*

Teorema 2.3 *(Proceso de Gram-Schmidt)*

Sea V un espacio con producto interno y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores linealmente independientes cualesquiera en V. Entonces se pueden construir vectores ortonormales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en V tales que para cada $k = 1, \ldots, n$ el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ sea una base para el subespacio generado por $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

Demostración: Vamos a encontrar los $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, de manera constructiva, por un proceso conocido como el **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.**
Primer paso, sea $\alpha_1 = \dfrac{\beta_1}{||\beta_1||}$. Vamos a encontrar α_2 y luego continuaremos la prueba usando inducción.
Segundo paso, se busca α_2 tal que

$$(a)\, gen\,\{\alpha_1, \alpha_2\} = \; gen\,\{\beta_1, \beta_2\} \quad \text{y} \quad (b)\, \alpha_2 \;\perp\; \alpha_1.$$

Por la condición (a) se cumple que $\beta_2 \in gen\{\alpha_1, \alpha_2\}$, entonces

$$\beta_2 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$$

llamando $\widetilde{\alpha}_2 = a_2\,\alpha_2$, resulta

$$\beta_2 = a_1\alpha_1 + \widetilde{\alpha}_2. \tag{2.5}$$

Ahora

$$\langle\, \beta_2, \alpha_1\rangle = a_1\langle\, \alpha_1, \alpha_1\rangle + \langle\, \widetilde{\alpha}_2, \alpha_1\rangle$$

usando que $||\alpha_1|| = 1$ y $\alpha_1 \perp \alpha_2$ tenemos

$$a_1 = \langle\, \beta_2, \alpha_1\rangle,$$

luego sustituyendo en (2.5) y despejando $\widetilde{\alpha}_2$

$$\widetilde{\alpha}_2 = \beta_2 - \langle\, \beta_2, \alpha_1\rangle\alpha_1$$

entonces

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2 - \langle\, \beta_2, \alpha_1\rangle\alpha_1}{||\beta_2 - \langle\, \beta_2, \alpha_1\rangle\alpha_1||}.$$

Notar que el vector α_2 así construído, cumple que es ortogonal a α_1.
Suponemos que los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ con $k < n$ se obtuvieron inductivamente de modo tal que el conjunto

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}, \quad \text{con} \quad 1 \leq t \leq k$$

es una base ortonormal para el subespacio de V generado por los vectores

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_t\},$$

y

$$\alpha_t = \frac{\beta_t - \displaystyle\sum_{j=1}^{t-1}\langle\, \beta_t, \alpha_j\rangle\alpha_j}{\|\beta_t - \displaystyle\sum_{j=1}^{t-1}\langle\, \beta_t, \alpha_j\rangle\alpha_j\|}.$$

Para encontrar α_{k+1} procedemos como sigue. Sabemos que se debe cumplir que

$$gen\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}\} = \; gen\{\beta_1 \ldots, \beta_{k+1}\} \quad \text{y} \quad \alpha_{k+1} \perp \alpha_t \;\; \forall\, t = 1, \ldots, k.$$

Entonces $\beta_{k+1} \in gen\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}\}$, así

$$\beta_{k+1} = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + \widetilde{\alpha}_{k+1} \quad \text{con} \quad \widetilde{\alpha}_{k+1} = a_{k+1}\alpha_{k+1} \tag{2.6}$$

Usando la hipótesis inductiva y la condición que $\alpha_{k+1} \perp \alpha_t \; \forall\, t = 1, \ldots, k$ obtenemos

$$a_t = \langle\, \beta_{k+1}, \alpha_t \rangle \quad \forall\, t = 1, \ldots, k \tag{2.7}$$

Luego sustituyendo (2.7) en (2.6) y despejando $\widetilde{\alpha}_{k+1}$ tenemos

$$\widetilde{\alpha}_{k+1} = \beta_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle\, \beta_{k+1}, \alpha_j \rangle \alpha_j, \tag{2.8}$$

normalizando el vector obtenemos:

$$\alpha_{k+1} = \frac{\beta_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle\, \beta_{k+1}, \alpha_j \rangle \alpha_j}{\left\| \beta_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle\, \beta_{k+1}, \alpha_j \rangle \alpha_j \right\|}. \tag{2.9}$$

Por la construcción el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal y es una base para el subespacio $gen\{\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}\}$. ■

Corolario 2.3 *Todo espacio producto interno de dimensión finita, tiene una base ortonormal.*

Ejemplo 2.6: Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico y sean $\beta_1 = (0, 0, 1)$, $\beta_2 = (0, -1, 1)$, $\beta_3 = (1, 0, 1)$. Se puede verificar fácilmente que estos vectores son linealmente independiente pero no son ortogonales. Por el proceso de Gram-Schmidt vamos a encontrar una base ortonormal para V.

Primer paso: normalizamos β_1, esto es

$\alpha_1 = \dfrac{\beta_1}{||\beta_1||} = (0, 0, 1) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = (0, 0, 1).$

Segundo paso, calculamos α_2:

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2 - \langle \beta_2,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1}{||\beta_2 - \langle \beta_2,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1||},$$

usando un vector auxiliar

$$\widetilde{\alpha}_2 = \beta_2 - \langle \beta_2,\, \alpha_1 \rangle \;\, \alpha_1 = (0, -1, 1) - \langle\, (0, -1, 1),\, (0, 0, 1) \rangle \;\, (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$$

y normalizando este vector tenemos α_2

$$\alpha_2 = \frac{\widetilde{\alpha}_2}{||\widetilde{\alpha}_2||} = (0, -1, 0) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = (0, -1, 0).$$

Tercer paso, calculamos α_3:

$$\alpha_3 = \frac{\beta_3 - \langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1 - \langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle\, \alpha_2}{||\beta_3 - \langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1 - \langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle\, \alpha_2||},$$

hacemos los cáculos auxiliares

$$\begin{array}{rclcl} \langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle & = & (1,0,1)\cdot(0,0,1)) & = & 1 \\ \langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle & = & (1,0,1)\cdot(0,-1,0) & = & 0 \end{array}$$

entonces

$$\widetilde{\alpha}_3 = \beta_3 - \langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1 - \langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle\, \alpha_2 = (1,0,1) - (0,0,1) = (1,0,0)$$

como este es un vector unitario resulta $\alpha_3 = (1,0,0)$.
Luego la base ortonormal buscada es:

$$\{(0,0,1),\ (0,-1,0),\ (1,0,0)\}\,.\square$$

Ejemplo 2.7: Sea $V = P_2[0,1]$ el subespacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 de $C[0,1]$ con el producto interno definido en el Ejemplo 2.3. Vamos a encontrar una base ortonormal para V. Sabemos que $\{1,\, x,\, x^2\}$ es una base para este espacio. Vamos a aplicar el proceso de Gram-Schmidt para ortonormalizar.

$\alpha_1 = \dfrac{\beta_1}{||\beta_1||} = 1,$ pues $\langle \beta_1,\, \beta_1 \rangle = \int_0^1 1\, dx = 1.$

$\alpha_2 = \dfrac{\beta_2 - \langle \beta_2, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1}{||\beta_2 - \langle \beta_2, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1||},$

$$\langle \beta_2,\, \alpha_1 \rangle = \int_0^1 x\; dx = \frac{1}{2} \implies \widetilde{\alpha}_2 = x - \frac{1}{2},$$

calculamos $||\widetilde{\alpha}_2||$

$$\left\| x - \frac{1}{2} \right\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

entonces $\alpha_2 = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right).$

$$\alpha_3 = \frac{\beta_3 - \langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1 - \langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle\, \alpha_2}{\beta_3 - \langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1 - \langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle\, \alpha_2}.$$

Realizamos los cálculos auxiliares:
$\langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3},$
$\langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle = \sqrt{12} \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\widetilde{\alpha}_3 = \beta_3 - \langle \beta_3,\, \alpha_1 \rangle\, \alpha_1 - \langle \beta_3,\, \alpha_2 \rangle\, \alpha_2 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

calculamos $||\widetilde{\alpha}_3||$:

$$\left\| x^2 - x + \frac{1}{6} \right\| = \frac{1}{6\sqrt{5}},$$

entonces $\alpha_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right).$

Luego una base ortonormal para este subespacio es:

$$\left\{1,\ \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.\square$$

2.4. Proyección ortogonal

El proceso de Gram-Schmidt consiste en la aplicación repetida de una operación geométrica básica llamada **proyección ortogonal**.

Definición 2.6 *Sea V un espacio con producto interno y H un subespacio de V. Supongamos que $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es una base ortonormal de H. Si $\beta \in V$, entonces la* ***proyección ortogonal*** *de β sobre H, que denotamos como $proy_H\beta$, está dada por*

$$proy_H\beta = \langle \beta, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle \beta, u_k\rangle u_k$$

Ejemplo 2.8: Sean $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y sea $\beta = (1, 2, 3)$. Hallar $proy_H\, \beta$.

Para encontrar $proy_H\, \beta$, necesitamos una base ortonormal de H. ¿Cómo la encontramos?, primero buscamos una base de H y luego por el proceso de Gram-Schmidt (G-S) ortonormalizamos el conjunto.

Si $\mathbf{x} \in H \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0 \implies x_1 = -x_2 - x_3$

entonces

$$H = gen\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

Luego aplicando G-S obtenemos

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0),\ \frac{2}{\sqrt{6}}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)\right\} = \{u_1, u_2\}$$

$$\begin{aligned} proy_H\beta &= \langle \beta, u_1\rangle u_1 + \langle \beta, u_2\rangle u_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(-1, 1, 0) + \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right) = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

entonces $proy_H\beta = (-1, 0, 1)$. □

Teorema 2.4 *Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita y H un subespacio de V. Supongamos que H tiene dos bases ortonormales $\{u_1, \cdots, u_k\}$ y $\{w_1, \cdots, w_k\}$. Sea β un vector en V, entonces*

$$\langle \beta, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle \beta, u_k\rangle u_k = \langle \beta, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle \beta, w_k\rangle w_k.$$

Demostración: Dado $\{u_1, \cdots, u_k\}$ completamos a una base ortonormal de V, digamos $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_n\}$. Como $gen\{u_1, \cdots, u_k\} = gen\{w_1, \cdots, w_k\} = H$ entonces $u_{k+1}, \cdots, u_n$ son ortogonales a $w_1, \cdots, w_k$, luego el conjunto $\{w_1, \cdots, w_k, u_{k+1}, \cdots, u_n\}$ es una base ortogonal de V, mas aún es una base ortonormal de V. Ahora dado $\beta \in V$ podemos escribirlo como combinación lineal de ambas bases:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i \qquad \text{y} \qquad \beta = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i + \sum_{i=k+1}^{n} d_i u_i$$

por el Corolario 2.1, sabemos que $b_i = \langle \beta, u_i\rangle\ \ \forall\, i = 1, \ldots, n$, $c_i = \langle \beta, w_i\rangle\ \ \forall\, i = 1, \ldots, k$ y $d_i = \langle \beta, u_i\rangle\ \ \forall\, i = k+1, \ldots, n$, entonces

$$\beta = \langle \beta, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle \beta, u_k\rangle u_k + \langle \beta, u_{k+1}\rangle u_{k+1} + \cdots + \langle \beta, u_n\rangle u_n$$

y

$$\beta = \langle \beta,\, w_1\rangle\, w_1 + \cdots + \langle \beta,\, w_k\rangle\, w_k + \langle \beta,\, u_{k+1}\rangle\, u_{k+1} + \cdots + \langle \beta,\, u_n\rangle\, u_n$$

igualando ambas expresiones y cancelando los términos comunes obtenemos

$$\langle \beta,\, u_1\rangle\, u_1 + \cdots + \langle \beta,\, u_k\rangle\, u_k = \langle \beta,\, w_1\rangle\, w_1 + \cdots + \langle \beta,\, w_k\rangle\, w_k. \blacksquare$$

De este teorema concluimos que la proyección ortogonal es independiente de la base ortonormal usada.

2.5. Complemento ortogonal

Definición 2.7 *Sean V un espacio producto interno y H un subconjunto de V. Entonces el* ***complemento ortogonal de H****, denotado por $H^\perp$, está dado por todos los vectores de V ortogonales a todo vector de H. En símbolos:*

$$H^\perp = \{\alpha \in V \mid \langle \alpha,\, h\rangle = 0,\ \forall\, h \in H\}$$

Ejemplo 2.9: Sea $V = \mathbb{R}^2$, $H = \{(1,0)\}$ entonces $H^\perp = \ gen\,\{(0,1)\}$. $\square$

Observación 1: $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$ y $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$.

Observación 2: Si S es un subconjunto de V espacio producto interno, entonces $S^\perp$ es subespacio de V.
Pues, claramente $\mathbf{0} \in S^\perp$ entonces $S^\perp \neq \emptyset$ ($\langle \mathbf{0}, \alpha\rangle = 0\ \forall\ \alpha$), en particular para los vectores de S.
Sean $\alpha, \beta \in S^\perp$, $c \in F$ y $\gamma \in S$ arbitrario, entonces

$$\langle\, c\,\alpha +\, \beta,\, \gamma\rangle =\, c\langle\, \alpha,\, \gamma\rangle + \langle\, \beta,\, \gamma\rangle = 0 \quad \text{pues} \quad \langle\, \alpha,\, \gamma\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle\, \beta,\, \gamma\rangle = 0,$$

como γ es aribtrario se cumple $c\,\alpha +\, \beta \in S^\perp$ como queríamos probar. $\blacksquare$

Notar que con esta última observación, probamos que el complemento ortogonal de todo subconjunto de V es un subespacio, incluso si el subconjunto no es subespacio como es el caso del Ejemplo 2.9.

Teorema 2.5 *Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y H un subespacio de V, entonces*

i. $H^\perp$ *es un subespacio de* V*.*

ii. $H \cap H^\perp = \{0\}$

iii. $dim\, H + dim\, H^\perp = dim\, V$.

Demostración:
i. Probado en la observación 2.

ii. Sea $\alpha \in\ H \cap H^\perp$. Como $\alpha \in H^\perp$ se cumple $\langle\, \alpha,\, h\rangle\ = 0\ \forall\, h \in\ H$. Por otro lado $\alpha \in H$ entonces si $h = \alpha$ resulta $\langle\, \alpha,\, \alpha\rangle\ = 0 \implies \alpha = 0$.

iii. Sea $u_1, \ldots, u_k$ una base ortonormal de H y completamos a una base ortonormal para V, esto es posible por G-S, digamos

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n.$$

Como los u_i son mutuamente ortogonales se cumple que $\forall\, i = k+1, \ldots, n$

$$u_i \perp \; gen\{u_1, \ldots, u_k\} = \; H,$$

entonces $u_i \in H^{\perp}, \;\; \forall\, i = k+1, \ldots, n$. Así son $n-k$ vectores linealmente independientes en $H^{\perp}$ y $gen\,\{u_{k+1}, \ldots, u_n\} \subseteq H^{\perp}$ (¿por qué?). Vamos a ver que ellos son base para $H^{\perp}$. Sea $\beta \in H^{\perp}$ arbitrario, entonces $\beta \in V$. Así, podemos escribir a este vector como combinación lineal de la base ortonormal de V de la siguiente manera:

$$\beta = \langle \beta,\, u_1 \rangle\, u_1 + \cdots + \langle \beta,\, u_k \rangle\, u_k + \langle \beta,\, u_{k+1} \rangle\, u_{k+1} + \cdots + \langle \beta,\, u_n \rangle\, u_n. \tag{2.10}$$

Ahora $\beta \in\; H^{\perp}$, entonces $\langle \beta,\, u_i \rangle \;= 0, \;\; \forall\; i = 1, \ldots, k$, sustituyendo en (2.10) tenemos

$$\beta = \langle \beta,\, u_{k+1} \rangle\, u_{k+1} + \cdots + \langle \beta,\, u_n \rangle\, u_n.$$

Luego $\beta \in gen\,\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$, y como era un vector arbitrario, resulta

$$H^{\perp} \subseteq gen\,\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}.$$

Así $\;\; H^{\perp} = gen\,\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$. Entonces

$$dim\; H^{\perp} = n - k = n - dim\, H \quad \Longrightarrow \quad dim\, H + dim\; H^{\perp} = dim\, V. \; \blacksquare$$

Definición 2.8 *Sean V espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de V. Un subespacio W se dice que es suma directa de W_1 y W_2 y lo denotamos como $W = W_1 \oplus W_2$, si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

i. $\;W = W_1 + W_2$

ii. $\;W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Ejercicio 2.1: Probar que dados V espacio vectorial, W_1 y W_2 subespacios de V, si $V = W_1 \oplus W_2$, entonces para todo $\alpha \in V$ existen únicos $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tal que $\alpha = w_1 + w_2$.

Teorema 2.6 *Sean V espacio producto interno de dimensión finita, H un subespacio de V y $\alpha \in V$, entonces existen únicos $\;h \in H\;$ y $p \in H^{\perp}$ tal que $\;\alpha = h + p,\;$ con $h = proy_H \alpha$ y $\;p = proy_{H^{\perp}} \alpha,\;$ así $\;V = H \oplus H^{\perp}$.*

Demostración: Sea $\{u_1, \ldots, u_k\}$ base ortonormal de H, la extendemos a una base ortonormal de V, digamos $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$. Ahora, $u_{k+1}, \ldots, u_n$ son $n-k$ vectores ortogonales a H entonces pertenecen a $H^{\perp}$. Además por Teorema 2.5 $\;dim\, H^{\perp} = n - k$, entonces $u_{k+1}, \ldots, u_n$ son $n-k$ vectores linealmente independientes (¿por qué?) en $H^{\perp}$, luego son una base para este subespacio.

Continuando, si $\alpha \in V$ entonces $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i$ con $c_i = \langle \alpha, u_i \rangle\ \ \forall\, i = 1, \ldots, n$ (por corolario 2.1). Así

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, u_i \rangle\, u_i = \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, u_i \rangle\, u_i + \sum_{i=k+1}^{n} \langle \alpha, u_i \rangle\, u_i.$$

De la definición de proyección ortogonal tenemos

$$proy_H \alpha = \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, u_i \rangle u_i \qquad \text{y} \qquad proy_{H^\perp} \alpha = \sum_{i=k+1}^{n} \langle \alpha, u_i \rangle\, u_i,$$

luego

$$\alpha = proy_H \alpha + proy_{H^\perp} \alpha.$$

Llamando $h = proy_H \alpha$ y $p = proy_{H^\perp} \alpha$, resulta $\alpha = h + p$ con $h \in H$ y $p \in H^\perp$. Veamos la unicidad. Suponemos que hay dos maneras de escribir α como suma de vectores en H y $H^\perp$, esto es, suponemos que

$$\alpha = h_1 + p_1 \quad \text{con} \quad h_1 \in H,\ p_1 \in H^\perp$$

y

$$\alpha = h_2 + p_2 \quad \text{con} \quad h_2 \in H,\ p_2 \in H^\perp,$$

entonces

$$h_1 + p_1 = h_2 + p_2 \implies h_1 - h_2 = p_2 - p_1 \implies h_1 - h_2,\, p_2 - p_1\ \in H \cap H^\perp$$

$$\implies h_1 - h_2 = 0 \quad \text{y} \quad p_2 - p_1 = 0 \implies h_1 = h_2 \quad \text{y} \quad p_2 = p_1. \blacksquare$$

Ejemplo 2.10: Consideremos el ejemplo: $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $\beta = (1, 2, 3)$. Una base ortonormal para H es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0),\ \frac{2}{\sqrt{6}}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \right\}$$

y $proy_H \beta = (-1, 0, 1)$. Ahora ¿cómo hallamos $proy_{H^\perp} \beta$? Tenemos dos opciones, una es encontrar una base ortonormal para $H^\perp$ que, en este caso, no es difícil ya que este subespacio tiene dimensión 1, por lo que la base tendrá un vector perpendicular a la base de H. La segunda opción, es usando el teorema anterior que es como la hallaremos a continuación. Queda como ejercicio calcular este vector mediante el otro camino.

Sabemos por el teorema anterior que

$$\beta = proy_H \beta + proy_{H^\perp} \beta$$

entonces

$$proy_{H^\perp} \beta = \beta - proy_H \beta$$

así

$$proy_{H^\perp} \beta = (1, 2, 3) - (-1, 0, 1) = (2, 2, 2)$$

luego

$$proy_{H^\perp}\beta = (2,2,2). \ \square$$

Para pensar:

a. Si $\beta \in H$ entonces $proy_H\beta = \beta$.

b. Si $\beta \in H$ entonces $proy_{H^\perp}\beta = \mathbf{0}$.

El teorema dado a continuación nos dice que de todos los vectores de un subespacio H, el vector de este subespacio que está más próximo a un vector α del espacio vectorial, es $proy_H\alpha$.

Teorema 2.7 *Sean V espacio producto interno de dimensión finita, H un subespacio de V y $\alpha \in V$. Entonces $proy_H\alpha$ es la mejor aproximación de α en H, es decir,*

$$||\alpha - proy_H\alpha|| < ||\alpha - h|| \quad \forall\, h \in H, \quad con \quad h \neq proy_H\alpha.$$

Demostración: Sea $h \in H$ arbitrario,

$$\alpha - h = (\alpha - proy_H\alpha) + (proy_H\alpha - h) = u_1 + u_2,$$

observar que $u_1 = \alpha - proy_H\alpha \in H^\perp$ y $u_2 = proy_H\alpha - h \in H$ (¿por qué?). Ahora,

$$||\alpha - h||^2 = ||u_1 + u_2||^2 = \langle u_1 + u_2,\ u_1 + u_2\rangle = ||u_1||^2 + \langle u_1,\ u_2\rangle + \langle u_2,\ u_1\rangle + ||u_2||^2,$$

como $\langle u_1,\ u_2\rangle = 0$, entonces

$$||\alpha - h||^2 = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 = ||\alpha - proy_H\alpha||^2 + ||proy_H\alpha - h||^2 \tag{2.11}$$

si $h \neq proy_H\alpha$, se cumple que

$$||\alpha - proy_H\alpha||^2 + ||proy_H\alpha - h||^2 > ||\alpha - proy_H\alpha||^2$$

luego de (2.11), resulta

$$\Longrightarrow \quad ||\alpha - h|| > ||\alpha - proy_H\alpha|| \ \ \forall\, h \neq proy_H\alpha. \ \blacksquare$$

Ejemplo 2.11: Considerando el teorema que acabamos de probar, la mejor aproximación del vector $\beta = (1,2,3)$ en el subespacio H del Ejemplo 2.10, es la proyección ortogonal de β sobre H. En este caso es el vector $(-1,0,1)$ y la mejor aproximación de β en el complemento ortogonal de H es el vector $(2,2,2)$. $\square$

Capítulo 3

Transformaciones Lineales

3.1. Definición y propiedades

Definición 3.1 *Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo F. Una* ***Transformación Lineal*** *de V en W es una función T de V en W tal que*

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F.

Ejemplo 3.1: Si V es cualquier espacio vectorial, la función llamada *identidad*, que denotamos por I, que asigna a cada vector el mismo vector es una transformación lineal. Veamos

$$I(c\alpha + \beta) = c\alpha + \beta = cI(\alpha) + I(\beta), \ \ \forall\, \alpha, \beta \in V \ \ c \in F.$$

La **transformación cero**, definida como $0\,(\alpha) = \mathbf{0}$ $\forall \alpha \in V$, es una transformación lineal. $\square$

Ejemplo 3.2: Sea $V = \mathbb{R}^2$,

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}.$$

T es transformación lineal, pues: sean $\alpha = (x_1, x_2)^T$, $\beta = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$ arbitrarios:

$$\begin{aligned} T(c\alpha + \beta) &= T\left(c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} cx_1 + y_1 \\ cx_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} cx_1 + y_1 \\ -cx_2 - y_2 \end{bmatrix} \\ &= c\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} \\ &= cT(\alpha) + T(\beta). \square \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3: Sea V el espacio de los polinomios sobre F. Sea $T : V \longrightarrow V$ la aplicación derivación
$$T(c_0 + c_1\,x + \cdots + c_n x^n) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n\,c_n x^{n-1}.$$
T es una transformación lineal. Veamos: sean $p(x)$, $q(x) \in V$ y $c \in F$ arbitrarios
$$T(cp(x) + q(x)) = (cp(x) + q(x))' = c(p(x))' + (q(x))' = cT(p(x)) + T(q(x)).\,\square$$

Ejemplo 3.4: Sean P y Q matrices $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente fijas, con elementos en F. Se define una función $T : F^{m\times n} \longrightarrow F^{m\times n}$ como
$$T(A) = P\,A\,Q$$
entonces T es lineal. Veamos: sean A, $B \in F^{m\times n}$ y $c \in F$ arbitrarios:
$$T(cA + B) = P(cA + B)Q = cPAQ + PBQ = cT(A) + T(B).\,\square$$

Ejemplo 3.5: Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los número reales y V el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
entonces T es lineal. Sean f, $g \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ arbitrarios
$$\begin{aligned} T(cf + g)(x) = \int_0^x (cf(t) + g(t))\,dt =& c\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt \\ =& c(Tf)(x) + (Tg)(x) \\ =& (cTf + Tg)(x).\,\square \end{aligned}$$

Observaciones: Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo y T una transformación lineal de V en W entonces

a. $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

b. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

c. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son vectores en V entonces
$$T\left(\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i T(\alpha_i).$$

Demostración:
a. $T(\alpha + \beta) = T(1\alpha + \beta) = 1T(\alpha) + T(\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$. Luego
$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta).$$
b. $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$ entonces
$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}) \implies T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

c. Vamos a probar por inducción. Si $n = 1$ tenemos

$$T(c_1\alpha_1) = T(c_1\alpha_1 + \mathbf{0}) = c_1T(\alpha_1) + T(\mathbf{0}) = c_1T(\alpha_1),$$

observar que en la tercera igualdad usamos la definición de transformación lineal y luego lo probado en el inciso *b*. Por la hipótesis inductiva suponemos que el resultado se cumple para un conjunto de n vectores, esto es:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_iT(\alpha_i).$$

Vamos a probar que el resultado se cumple para $n+1$ vectores, es decir, queremos probar

$$T\left(\sum_{i=1}^{n+1} c_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} c_iT(\alpha_i).$$

Veamos:

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^{n+1} c_i\alpha_i\right) &= T\left(c_{n+1}\alpha_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) \\ &= c_{n+1}T(\alpha_{n+1}) + T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) \\ &\overset{por H.I.}{=} c_{n+1}T(\alpha_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} c_iT(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} c_iT(\alpha_i). \end{aligned}$$

$$\therefore \quad T\left(\sum_{i=1}^{n+1} c_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} c_iT(\alpha_i). \blacksquare$$

Teorema 3.1 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre F y $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo F y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores cualesquiera de W. Supongamos que T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de V en W tal que $T_1\alpha_i = T_2\alpha_i = \beta_i, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$, entonces $T_1(\gamma) = T_2(\gamma)$ para todo γ vector de V, es decir, $T_1 = T_2$.*

Demostración:

Sea $\gamma \in V$ arbitrario, entonces $\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$. Ahora

$$T_1(\gamma) = T_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_iT_1(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i \implies T_1(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i$$

y

$$T_2(\gamma) = T_2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_iT_2(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i \implies T_2(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i$$

$$\therefore \quad T_1(\gamma) = T_2(\gamma) \ \ \forall\, \gamma \in V. \ \blacksquare$$

Este teorema nos dice que dada una transformación lineal, basta conocer su efecto en la base para que quede unívocamente determinada.

Ejemplo 3.6: Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vamos a calcular $T(\gamma)$ con $\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Observemos que $\gamma = 3\,e_1 + (-4)\,e_2 + 5\,e_3$ entonces

$$\begin{aligned} T(\gamma) &= 3\,T(e_1) + (-4)T(e_2) + 5\,T(e_3) \\ &= 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 35 \\ -22 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego $T(\gamma) = \begin{bmatrix} 35 \\ -22 \end{bmatrix}$. $\square$

Ahora podríamos preguntarnos si, dado V espacio vectorial de dimensión n y W otro espacio vectorial sobre el mismo cuerpo ¿existe una transformación lineal que mande una base de V sobre n vectores cualesquiera de W?. La respuesta es sí bajo ciertas hipótesis como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sea W un espacio vectorial y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores de W, entonces existe una única transformación lineal de V en W tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración: Sea $\gamma \in V$ arbitrario, por Proposición 1.3 existen únicos escalares $c_1, \ldots, c_n$ en F tal que $\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$. Para γ se define

$$T(\gamma) = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n.$$

Es decir, se define

$$T(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i \quad \text{con} \quad [\gamma]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Observar que si $\gamma = \alpha_j$ para algún j con $1 \leq j \leq n$, es decir, es un vector de la base ordenada $\mathcal{B}$, entonces $[\alpha_j]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T = e_j$, luego

$$T(\alpha_j) = \beta_j \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Veamos que T así definida es lineal. Sean α, $\eta \in V$ y $c \in F$ y sean

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\eta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$c\alpha + \eta = \sum_{i=1}^{n} (ca_i + b_i)\alpha_i.$$

Sabemos que $T(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i$ y $T(\eta) = \sum_{i=1}^{n} b_i\beta_i$. Ahora

$$T(c\alpha + \eta) = \sum_{i=1}^{n} (ca_i + b_i)\beta_i = \sum_{i=1}^{n} c\, a_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\beta_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\beta_i = c\,T(\alpha) + T(\eta).$$

Luego T es lineal. Por la definición de T y usando el teorema anterior se cumple que esta transformación lineal es única.

3.2. Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal

Definición 3.2 *Sean V y W espacios vectoriales y T una transformación lineal de V en W. Entonces*

i. *El **Núcleo de T**, denotado por **Nu(T)**, está dado por el conjunto*

$$Nu(T) = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = \mathbf{0}\}.$$

ii. *La **Imagen de T**, denotado por **Im(T)**, está dada por el conjunto*

$$Im(T) = \{\beta \in W \mid \exists\, \alpha \in V \ \text{ con } \ T(\alpha) = \beta\}.$$

*Se llama **Nulidad de T** y se denota **nulidad(T)**, a la dimensión de $Nu(T)$. Se llama **Rango de T** y se denota **rg(T)** o **rango(T)**, a la dimensión de la $Im(T)$.*

Teorema 3.3 *Sean V y W espacios vectoriales y T una transformación lineal de V en W, entonces:*

i. *$Nu(T)$ es un subespacio de V.*

ii. *$Im(T)$ es un subespacio de W.*

Demostración:
i. $Nu(T) \neq \emptyset$, pues $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in Nu(T)$. Ahora sean α, $\beta \in Nu(T)$ y $c \in F$,

$$T(c\,\alpha + \beta) \overset{T\,es\,T.L.}{=} cT(\alpha) + T(\beta) = c\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow c\alpha + \beta \in Nu(T).$$

Luego $Nu(T)$ es subespacio.

ii. $Im(T) \neq \emptyset$, pues $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, esto es, $\mathbf{0} \in Im(T)$. Sean $c \in F$, $\beta_1,\ \beta_2 \in Im(T)$, con $\alpha_1,\ \alpha_2 \in V$ tal que $T(\alpha_1) = \beta_1$ y $T(\alpha_2) = \beta_2$. Ahora

$$c\beta_1 + \beta_2 = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = T(c\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\Longrightarrow \quad c\beta_1 + \beta_2 = T(c\alpha_1 + \alpha_2).$$

Luego $\;c\beta_1 + \beta_2\; Im(T)$.

Ejemplo 3.7: Supongamos que $T(\alpha) = \mathbf{0}\ \forall\ \alpha \in V$, entonces $Nu(T) = V$, $Im(T) = \{\mathbf{0}\}$. $\square$

Ejemplo 3.8: Sea $T : V \longrightarrow V$ tal que $T\alpha = \alpha$, $\forall\ \alpha \in V$, entonces $Im(T) = V$, y $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$ (ver los detalles como ejercicio). $\square$

Ejemplo 3.9: Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Geométricamente T proyecta todo vector del espacio sobre el plano xy. Vamos a encontrar $Nu(T)$ e $Im(T)$.

$Nu(T)$: sea $\alpha \in Nu(T)$ entonces $T(\alpha) = 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0.$$

Luego $Nu(T) = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \in \mathbb{R}\} \subseteq gen \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = S$. Por otro lado el vector $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ cumple que $T(\gamma) = \mathbf{0}$ entonces $\gamma \in Nu(T)$, luego $S \subseteq Nu(T)$. Así, $S = Nu(T)$, como γ es un vector linealmente independiente entonces $\{\gamma\}$ es una base de $Nu(T)$.

$Im(T)$: Sea $\beta = [y_1, y_2, y_3]^T \in Im(T)$, entonces existe $\alpha = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ con $T(\alpha) = \beta$, tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

con lo cual $y_3 = 0$. Por lo tanto $\;Im(T) \subseteq gen \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = L$. Ahora, los vectores

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertenecen a la imagen de T pues

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego $L \subseteq Im(T)$. Finalmente concluimos $Im(T) = L$ y como los generadores del subespacio (e_1 y e_2) son vectores linealmente independientes, ellos son base de $Im(T)$. $\square$

Observar que en el ejemplo anterior $dim\, V = 3$, $dim\, Im(T) = 2$ y $dim\, Nu(T) = 1$, el siguiente teorema nos establece la relación existente, en espacios vectoriales de dimensión finita, entre la dimensión de V y las dimensiones de la imagen y el núcleo de T.

Teorema 3.4 *Sean V y W espacios vectoriales sobre F y sea T una transformación lineal de V en W. Supongamos que V es dimensión finita. Entonces*

$$rango(T) + nulidad(T) = dim\, V.$$

Demostración: Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ una base para $Nu(T)$ y la extendemos a una base de V, digamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$. Vamos a probar que $T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)$ es una base para $Im(T)$. Observemos que estos vectores pertenecen a $Im(T)$, por lo que el subespacio generado por ellos también, es decir

$$gen\,\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\} \subseteq Im(T).$$

Sea $\beta \in Im(T)$ arbitrario entonces existe $\gamma \in V$ tal que $T(\gamma) = \beta$.
Ahora

$$\gamma \in V \implies \gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$$

entonces

$$\begin{aligned} T(\gamma) &= \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} c_i T(\alpha_i) \end{aligned}$$

y se tiene que

$$\beta = \sum_{i=k+1}^{n} c_i T(\alpha_i).$$

Así, $\beta \in gen\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ y como era un vector arbitrario en $Im(T)$ resulta $Im(T) \subseteq gen\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$. Por lo tanto

$$Im(T) = gen\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}.$$

Veamos que este conjunto de vectores es linealmente independiente. Para esto, escribimos al vector nulo como combinación lineal de ellos, esto es,

$$\mathbf{0} = c_{k+1}T(\alpha_{k+1}) + \cdots + c_nT(\alpha_n) = T\left(\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i\right) \implies T\left(\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i\right) = \mathbf{0}$$

$$\implies \sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i \in Nu(T).$$

$$\implies \sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} d_i\alpha_i$$

$$\iff \sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{k}(-d_i)\alpha_i = \mathbf{0},$$

como $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ es base de V tenemos

$$c_i = 0 \ \ \forall\, i = k+1, \ldots, n \ \text{ y } \ d_i = 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots k.$$

En particular se cumple $c_i = 0 \ \ \forall\, i = k+1, \ldots, n$ y por lo tanto $T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)$ es un conjunto linealmente independiente. Así, como este conjunto también genera $Im(T)$ es una base para este subespacio. Por lo tanto

$$dim Im(T) = n - k = n - dim\, Nu(T)$$

$$\therefore \ \ dim Im(T) + dim\, Nu(T) = n. \blacksquare$$

Ejercicio 3.1: Demostrar el Teorema 1.9 usando este resultado.

Capítulo 4

Álgebra de las transformaciones lineales

En el estudio de las transformaciones lineales de un espacio vectorial V sobre otro W, es de gran importancia que el conjunto de estas transformaciones hereda una estructura natural de espacio vectorial. Esta idea es lo que comenzaremos estudiando en este capítulo.

4.1. Espacio de transformaciones lineales

Teorema 4.1 *Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Sean T y U transformaciones lineales de V en W. La función $T+U$ definida por*

$$(T+U)(\alpha) = T(\alpha) + U(\alpha)$$

es una transformación lineal de V en W. Si c es cualquier elemento de F, la función definida por

$$(cT)(\alpha) = cT(\alpha)$$

es una transformación lineal de V en W. El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W, junto con la adición y la multiplicación escalar aquí definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo F.

Demostración: Veamos que $T+U$ es una transformación lineal (t.l.). Sean $\alpha,\ \beta \in V$, $c \in F$,

$$\begin{array}{rcl} (T+U)(c\alpha+\beta) & \overset{por\ def}{=} & T(c\alpha+\beta)+U(c\alpha+\beta) \\ & \overset{T,\,U\ son\ t.l.}{=} & c\,T(\alpha)+T(\beta)+cU(\alpha)+U(\beta) \\ & = & c(T(\alpha)+U(\alpha))+(T(\beta)+U(\beta)) \\ & \overset{por\ def}{=} & c(T+U)(\alpha)+(T+U)(\beta)) \end{array}$$

Luego $T+U$ es transformación lineal.

Veamos que cT es una transformación lineal (t.l:). Sean $\alpha, \beta \in V$, $a \in F$

$$\begin{array}{rcl} (cT)(a\alpha+\beta) & \overset{por\ def}{=} & cT(a\alpha+\beta) \\ & \overset{T\ es\ t.l.}{=} & caT(\alpha)+cT(\beta) \\ & = & acT(\alpha)+cT(\beta) \\ & \overset{por\ def}{=} & a(cT)(\alpha)+(cT)(\beta) \end{array}$$

Luego cT es transformación lineal. ■

Así, con estas operaciones definidas sobre las trasnformaciones lineales, es posible demostrar que el conjunto de transformaciones lineales de V en W junto con estas dos operaciones es un espacio vectorial (Ejercicio: ver los detalles de esta afirmación). El vector nulo en este espacio, es la transformación que a todo vector de V le asigna el vector nulo de W.

Dados V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, el espacio de las transformaciones lineales de V en W se representa como $L(V, W)$, es decir

$$L(V, W) = \{T : V \longrightarrow W \ \text{ tal que } \ T \ \text{ es } \ \text{transformación } \ \text{lineal}\}$$

En este espacio vectorial, los vectores son transformaciones lineales y por lo tanto, una base será un conjunto de transformaciones lineales. Además, si V y W tienen dimensión finita, entonces $L(V, W)$ tiene dimensión finita y su dimensión es el producto de las dimensiones de V y W.

Teorema 4.2 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el cuerpo F y sea W un espacio vectorial de dimensión finita m sobre F. Entonces el espacio $L(V, W)$ es de dimensión finita y tiene dimensión $n \cdot m$.*

Demostración: Sean $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente. Para cada par de enteros (p, q), con $1 \leq p \leq m$ y $1 \leq q \leq n$ definimos la transformación lineal $E^{p,q}$ de V en W de la siguiente manera:

$$E^{p,q}(\alpha_i) = \begin{cases} \mathbf{0} & i \neq q \\ \beta_p & i = q \end{cases}$$

entonces $E^{p,q}(\alpha_i) = \delta_{iq}\beta_p$. ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, conocido como delta de Kronecker). Estas transformaciones lineales están bien definidas por Teorema 3.2. Vamos a probar que $\{E^{p,q}\}$ con $1 \leq p \leq m$ y $1 \leq q \leq n$ es una base para $L(V, W)$ y así $dim\, L(V, W) = m \cdot n$.

Sea $T \in L(V, W)$, como $T(\alpha_j) \in W$ para todo $j = 1, \ldots, n$, existen escalares $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ tal que

$$T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m} a_{pj}\beta_p. \tag{4.1}$$

Vamos a probar que $T = \displaystyle\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{pq}E^{p,q}$.

Sea $U = \displaystyle\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{pq}E^{p,q}$, U es transformación lineal de V en W y veamos cuál es la imagen de α_j por U para todo $j = 1, \ldots, n$. Sea j arbitrario:

$$U(\alpha_j) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{pq}E^{p,q}(\alpha_j) \overset{def. E^{p,q}}{=} \sum_{p=1}^{m} a_{pj}\beta_p \overset{(4.1)}{=} T(\alpha_j)$$

$\Longrightarrow \ U(\alpha_j) = T(\alpha_j) \ \ \forall \ \ j = 1, \ldots, n \ \ \overset{Teo\,3.1}{\Longrightarrow} \ \ U = T$. Como T es arbitraria, $\{E^{p,q}\}$ con $1 \leq p \leq m$ y $1 \leq q \leq n$ genera $L(V, W)$.
Veamos que este conjunto es linealmente independiente:

$$\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{pq}E^{p,q} = \mathbf{0} \ \Longrightarrow \ \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{pq}E^{p,q}(\alpha_j) = \mathbf{0} \ \ \forall \, j = 1, \ldots, n.$$

Ahora

$$\mathbf{0} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{pq}E^{p,q}(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m} b_{pj}\beta_p \ \Longrightarrow \ \sum_{p=1}^{m} b_{pj}\beta_p = \mathbf{0}, \ \ \forall \, j = 1, \ldots, n$$

como $\beta_1, \ldots, \beta_m$ son base de W, resulta $b_{pj} = 0$ para todo $p = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$. Luego $\{E^{p,q}\}$ con $1 \leq p \leq m$ y $1 \leq q \leq n$ es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, como genera el espacio $L(V, W)$ y es un conjunto independiente, concluimos que es base de dicho espacio y $\, dim\, L(V, W) = m \cdot n$. ■

Teorema 4.3 *Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre F. Sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Entonces la función compuesta UT definida por*

$$(UT)(\alpha) = U(T(\alpha))$$

es una transformación lineal de V en Z.

Demostración: Sean α, $\beta \in V$, $c \in F$.

$$\begin{aligned}(UT)(c\alpha + \beta) \overset{def.}{=} U(T(c\alpha + \beta)) &\overset{T\ es\ t.l.}{=} U(cT(\alpha)) + T(\beta)) \\ &\overset{U\ es\ t.l.}{=} cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) \\ &\overset{def.}{=} c(UT)(\alpha) + (UT)(\beta)\end{aligned}$$

Luego UT es transformación lineal. ■

Definición 4.1 *Si V es un espacio vectorial sobre F, un* ***operador lineal*** *sobre V es una transformación lineal de V en V.*

Observaciones:

i. Si $V = W = Z$ en el teorema anterior, UT es un operador lineal de V en V.

ii. $L(V, V)$ representa el espacio de los operadores lineales de V sobre V. En este caso, en general $UT \neq TU$.

iii. Si T es un operador lineal sobre V, denotamos $T^2 = T\,T$ y $T^n = T \ldots T$ (n veces).

Teorema 4.4 *Sea V un espacio vectorial sobre F. Sean U, T_1 y T_2 operadores lineales sobre V y c un elemento de F.*

a. $IU = UI = U$.

b. $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$; $(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$.

c. $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$.

Demostración:
a. Sea $\alpha \in V$ arbitrario

$$(IU)(\alpha) = I(U(\alpha)) = U(\alpha) = U(I(\alpha)) = UI(\alpha) \implies (IU)(\alpha) = (UI)(\alpha).$$

Luego $UI = IU$.
b. Sea $\alpha \in V$ arbitrario

$$\begin{aligned}
[U(T_1 + T_2)](\alpha) &= U[(T_1 + T_2)(\alpha)] \\
&= U(T_1(\alpha) + T_2(\alpha)) \\
&= U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) \\
&= (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha) \\
&= (UT_1 + UT_2)(\alpha)
\end{aligned}$$

Así $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$.

Las demostraciones de la segunda parte de *b.* y del ítem *c.* quedan como ejercicio. ■

Ejemplo 4.1: Sea A matriz $m \times n$ con elementos en F, sea $T : F^{n\times 1} \longrightarrow F^{m\times 1}$, definida por $T(x) = Ax$. Si B es una matriz $p \times m$, se define $U : F^{m\times 1} \longrightarrow F^{p\times 1}$ por $U(y) = By$. Veamos qué aplicación es UT:

$$UT(x) = U(T(x)) = U(Ax) = B(Ax) = BAx$$

Así UT es la transformación: "multiplicación por izquierda por la matriz BA". □

Ejemplo 4.2: Sea F cuerpo, V espacio vectorial de todas las funciones polinomiales de F en F. Sea D el operador de derivación y T el operador lineal "multiplicación por x": $(Tf)(x) = xf(x)$. Entonces $TD \neq DT$ y $DT - TD = I$. Veamos:

$$\begin{aligned}
&((DT)f)(x) = D((Tf)(x))) = D(xf(x)) = f(x) + xf'(x) \\
&((TD)f)(x) = T((Df)(x)) = T(f'(x)) = x\,f'(x)
\end{aligned}$$

luego, $TD \neq DT$. Como ejercicio queda verificar $DT - TD = I$. □

Recordemos el concepto de función inversible.

Definición 4.2 *Una función T de V en W se dice* ***inversible*** *si existe una función U de W en V tal que $UT = I_V$ y $TU = I_W$.*

Sabemos que T es inversible si y solo si T es inyectiva ($T(\alpha) = T(\beta)$ entonces $\alpha = \beta$) y T es sobreyectiva ($ImT = W$). A seguir veremos que si T es una transformación lineal inversible, su inversa también es transformación lineal.

Teorema 4.5 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre F y sea T una transformación lineal de V en W. Si T es inversible, entonces la función inversa T^{-1} es una transformación lineal de W en V.*

Demostración: Sabemos que T es inversible, entonces existe $T^{-1}: W \longrightarrow V$ tal que $TT^{-1} = id_W$ y $T^{-1}T = id_V$. Queremos ver que T^{-1} es transformación lineal. Sean $\beta_1, \beta_2 \in W$, $c \in F$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ tal que $T(\alpha_1) = \beta_1$ y $T(\alpha_2) = \beta_2$. Como T es inversible, $T^{-1}\beta_1 = \alpha_1$ y $T^{-1}\beta_2 = \alpha_2$. Ahora

$$\begin{aligned} T^{-1}(c\,\beta_1 + \beta_2) &= T^{-1}(c\,T(\alpha_1) + T(\alpha_2)) \\ &\overset{T\ es\ t.l.}{=} T^{-1}(T(c\,\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= T^{-1}T(c\,\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= c\,\alpha_1 + \alpha_2 \\ &= c\,T^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad T^{-1}(c\,\beta_1 + \beta_2) = c\,T^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2).\blacksquare$$

Observación: Si $T: V \longrightarrow W$ y $U: W \longrightarrow Z$ son transformaciones lineales inversibles, entonces UT es inversible y $(UT)^{-1} = T^{-1}U^{-1}$. Este es un resultado que tenemos del concepto de funciones, no precisamos la linealidad para este resultado. Tampoco es preciso probar por separado que la función UT es inyectiva ni sobreyectiva, basta comprobar que $T^{-1}U^{-1}$ es inversa por izquierda y derecha de UT.

Definición 4.3 *Sea T transformación lineal, se dice que T es **no singular** si $T(\gamma) = \mathbf{0}$ implica $\gamma = \mathbf{0}$.*

Esta definición nos dice que si T es no singular, entonces el espacio nulo de T está formado únicamente por el vector nulo, esto es, $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Notemos lo siguiente. Si suponemos T inyectiva y se cumple $T(\gamma) = \mathbf{0}$, como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ entonces $\gamma = \mathbf{0}$, luego T es no singular. Ahora suponemos T no singular, si $T(\gamma) = T(\alpha)$ entonces $T(\gamma - \alpha) = \mathbf{0}$, como T es no singular esto implica $\gamma - \alpha = \mathbf{0}$ o $\gamma = \alpha$ y así, T es inyectiva. Luego concluimos que T es inyectiva si y solo si T es no singular.

Con esta última definición vamos a probar que si T es no singular entonces preserva independencia lineal.

Teorema 4.6 *Sea T una transformación lineal de V en W. Entonces T es no singular si y solo si, T aplica cada subconjunto linealmente independiente de V sobre un conjunto linealmente independiente de W.*

Demostración: Sea S un subconjunto linealmente independiente de V arbitrario, queremos ver que $T(S)$ es independiente en W. Sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores distintos arbitrarios de $T(S)$, entonces existen vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en S tal que $T(\alpha_i) = \beta_i \ \ \forall\ i = 1, \ldots, n$. Notar que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son vectores independientes, ya que pertenecen a S que lo es por hipótesis. Ahora escribimos al vector nulo como combinación lineal de los β_i:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n &= c_1T(\alpha_1) + \cdots + c_nT(\alpha_n) \\ &= T(c_1\,\alpha_1 + \cdots + c_n\,\alpha_n) \end{aligned}$$

entonces

$$c_1\,\alpha_1 + \cdots + c_n\,\alpha_n \in Nu(T)$$

como T es no singular resulta

$$c_1\,\alpha_1 + \cdots + c_n\,\alpha_n = \mathbf{0}$$

y como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son linealmente independientes, tenemos que $c_i = 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, n$. Entonces $\beta_1, \ldots, \beta_n$ es un conjunto independiente. Como es un conjunto arbitrario de $T(S)$, entonces se cumple la tesis.

Recíprocamente, sea $\alpha \in V$ tal que $T(\alpha) = \mathbf{0}$, es decir $\alpha \in Nu(T)$, queremos ver que $\alpha = \mathbf{0}$. Probamos por el absurdo, suponemos $\alpha \neq \mathbf{0}$. Por hipótesis T aplica cada subconjunto linealmente independiente de V sobre un conjunto linealmente independiente de W, ahora si $\alpha \neq \mathbf{0}$ entonces $\{\alpha\}$ es un conjunto independiente, luego $\{T(\alpha)\}$ es un conjunto independiente y como $T(\alpha) = \mathbf{0}$, entonces $\{\mathbf{0}\}$ es un conjunto independiente, lo cual es absurdo. El absurdo provino de suponer que $\alpha \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$, así T es no singular. ■

En general, de lo estudiado en cursos anteriores, sabemos que una función puede ser inyectiva sin ser sobreyectiva o ser sobreyectiva sin ser inyectiva. Vamos a ver que en el caso de transformaciones lineales sobre espacios de dimensión finita, si el espacio de partida y el de llegada tienen igual dimensión, estos conceptos son equivalentes por lo que podremos garantizar que la transformación lineal es inversible.

Teorema 4.7 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo F tal que $dimV = dimW$. Si T es una transformación lineal de V en W, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. *T es inversible*

ii. *T es no singular*

iii. *T es sobreyectiva*

Demostración: Supongamos $n = dim\,V = dim\,W$. Si T es no singular, entonces $dim\,Nu(T) = \mathbf{0}$. Por Teorema 3.4

$$dim\,Im(T) + dim\,Nu(T) = dim\,V \implies dim\,Im(T) = dim\,V = dim\,W$$

entonces $dim\,Im(T) = dim\,W$, luego $Im(T) = W$ y por lo tanto T es sobreyectiva. Recíprocamente, si T es sobreyectiva entonces $Im(T) = W$, entonces por Teorema 3.4 resulta $dim\,Nu(T) = 0$, luego T es no singular. Así, hemos probado la equivalencia entre los ítems (*ii.*) y (*iii.*) del teorema, esto es, T no singular equivale a T sobreyectiva. Sabemos que una función es inversible si y solo si ella es inyectiva y sobreyectiva. Como T inyectiva equivale a T no singunlar, queda probado el teorema. ■

Teorema 4.8 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre F tal que $dim\,V = dim\,W$. Si T es una transformación lineal de V en W entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i. T es inversible

ii. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ en una base de V, entonces $\{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es una base de W.

Demostración: Suponemos T inversible, esto equivale por teorema anterior, a que T es no singular. Así si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es base de V entonces es un conjunto linealmente independiente y por Teorema 4.6, tenemos que $\{T(\alpha_1),\ldots,T(\alpha_n)\}$ es un conjunto con n vectores independientes en W, entonces son una base para este espacio.

Ahora suponemos que $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ en una base de V, entonces $\{T(\alpha_1),\ldots,T(\alpha_n)\}$ es una base de W, así $dim\, Im(T) = dim\, W$, por lo tanto T es sobreyectiva, esto equivale a T inversible. ■

4.2. Representación de transformaciones lineales por matrices

Sean V y W espacios vectoriales sobre F de dimensión n y m respectivamente. Sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ base ordenada de V y $\mathcal{B}' = \{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ base ordenada de W. Si T es una transformación lineal de V en W, entonces T queda unívocamente determinada por su efecto en la base. Ahora, como $T(\alpha_j) \in W\ \forall\, j = 1,\ldots,n$, existen únicos escalares a_{ij} tal que

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i \quad \forall\, j = 1,\ldots,n$$

esto es

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Definición 4.4 *Sea A matriz $m \times n$ cuyas columnas de la primera a la última en ese orden están dadas por los vectores $[T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'}$, $[T(\alpha_2)]_{\mathcal{B}'},\ldots,[T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'}$. Llamaremos a la matriz A* ***matriz de T respecto al par de bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$*** *y la denotaremos como $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.*

A seguir, vamos a estudiar cómo la matriz A determina la transformación T. Sea $\alpha \in V$, entonces existen únicos $x_1,\ldots,x_n \in F$ tal que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j, \tag{4.2}$$

esto es,

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Aplicando T en (4.2) obtenemos:

$$T(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\beta_i,$$

notemos que si

$$T(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i \quad \text{con } \ c_i \in F \ \ \forall\, i = 1,\ldots,m,$$

por la unicidad de los escalares $c_1, \ldots, c_m$ obtenemos

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ \ \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Así, el elemento i-ésimo de la matriz de coordenadas de $T(\alpha)$ en la base $\mathcal{B}'$ es el escalar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Observar que esta sumatoria representa el producto matricial de la fila i-ésima de la matriz A por el vector columna $[\alpha]_{\mathcal{B}}$, por lo que podemos escribir

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = A\,[\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\,[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

Enunciamos lo desarrollado aquí en el siguiente teorema:

Teorema 4.9 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente sobre F. Sea $\mathcal{B}$ base ordenada de V y $\mathcal{B}'$ base ordenada de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una única matriz $m \times n$, cuyos elementos pertenecen a F, tal que*

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\,[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

para todo $\alpha \in V$.

Demostración: La existencia de la matriz ya lo desarrollamos, falta ver la unicidad. Para esto suponemos existe C matriz $m \times n$ con elementos en F tal que

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = C[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad \forall\, \alpha \in V$$

como

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad \forall\, \alpha \in V$$

restando ambas expresiones obtenemos

$$(C - [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})[\alpha]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \quad \forall\, \alpha \in V$$

entonces

$$C = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

y se verifica la unicidad.$\blacksquare$

Observación 1: Si $V = W$ podemos tomar $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ y en tal caso la matriz de respecto a las bases ordenadas se denota $[T]_{\mathcal{B}}$.

Observación 2: Si se cambia la base, la matriz de T respecto a las bases ordenadas cambia.

Ejemplo 4.3: Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, 0)$. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, queremos hallar $[T]_{\mathcal{B}}$.
Primero encontramos los escalares para escribir la imagen de e_1 como combinación lineal de la base $\mathcal{B}'$.

$$T(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (a_{11}, a_{21})$$

aplicando T al vector

$$T(e_1) = (1, 0)$$

entonces $a_{11} = 1,\ a_{21} = 0$. Buscamos los escalares para escribir la imagen de e_2 como combinación lineal de la base $\mathcal{B}'$.

$$T(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 = (a_{12}, a_{22})$$

aplicando T al vector

$$T(e_2) = (0, 0)$$

entonces $a_{12} = 0,\ a_{22} = 0$.

Finalmente

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \ \square$$

Teorema 4.10 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, $T, U \in L(V, W)$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V y W respectivamente y $c \in F$. Entonces $[cT + U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = c[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.*

Demostración: Veamos la columna j-ésima de la matriz $[cT+U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, para esto usaremos el Ejercicio 1.2 (Propiedad de matriz de coordenadas)

$$\begin{aligned}
([cT + U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})_j = [(cT + U)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} &= [cT(\alpha_j) + U(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} \\
&= [cT(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} + [U(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} \\
&= c[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} + [U(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} \\
&= c([T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})_j + ([U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})_j \\
&= c([T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})_j
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $j = 1, \ldots, n$, entonces

$$[cT + U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = c\,[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}. \blacksquare$$

Ejemplo 4.4: Sea $V = P_3$ el espacio formado por los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3, junto con el polinomio nulo y D el operador derivación, $\mathcal{B} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ una base ordenada de V. Vamos a hallar $[D]_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{array}{rcccl}
D(1) & = & 0 & = & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 \\
D(x) & = & 1 & = & 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 \\
D(x^2) & = & 2\,x & = & 0\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 \\
D(x^3) & = & 3\,x^2 & = & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 3\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad [D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \square$$

Ejemplo 4.5: Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como en el Ejemplo 4.3, $T(x, y) = (x, 0)$. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (2, 1)\}$. Vamos a calcular $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$:

$$T(e_1) = a_{11}(1, 1) + a_{21}(2, 1) = (a_{11} + 2a_{21}, a_{11} + a_{21}).$$

Aplicando T al vector e_1 obtenemos

$$T(e_1) = (1, 0)$$

entonces $(1, 0) = (a_{11} + 2a_{21}, a_{11} + a_{21})$. Operando algebraicamente resulta $a_{11} = -1$ y $a_{21} = 1$. Por otro lado

$$T(e_2) = a_{12}(1, 1) + a_{22}(2, 1) = (a_{12} + 2\, a_{22}, a_{12} + a_{22})$$

Aplicando T al vector e_2 obtenemos

$$T(e_2) = (0, 0)$$

entonces $(a_{12} + 2\, a_{22}, a_{12} + a_{22}) = (0, 0)$. Operando algebraicamente resulta $a_{12} = 0$ y $a_{22} = 0$,

$$\Longrightarrow \qquad [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \square$$

Vimos que cuando dos transformaciones lineales se suman, la matriz que la representa es la suma de las matrices que representa a cada una. ¿Qué pasará cuando se componen transformaciones lineales? Esto es lo que nos dice el siguiente teorema:

Teorema 4.11 *Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo F. Sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, y $\mathcal{B}''$ son bases ordenadas de V, W y Z respectivamente entonces*

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Demostración: Sea $\alpha \in V$, entonces por Teorema 4.9

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}} \tag{4.3}$$

$$[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}. \tag{4.4}$$

Comparando los extremos de esta igualdad resulta

$$[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}} \;\; \forall\, \alpha \in V.$$

Luego por la unicidad de la matriz se tiene que

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}. \blacksquare$$

Supongamos que T y U son operadores lineales sobre V. Sea $\mathcal{B}$ una base ordenada de V, representaremos T y U matricialmente en esta base ordenada. Por teorema anterior tenemos

$$[UT]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} \tag{4.5}$$

Si asumimos que T es inversible y $U = T^{-1}$, entonces $UT = id = TU$ es el operador identidad en V y

$$[UT]_{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B}} = I \ \text{ (matriz identidad } n \times n), \tag{4.6}$$

entonces de las igualdades (4.5) y (4.6) obtenemos

$$\begin{array}{rrcl} & [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} & = & I \\ \Longrightarrow & [U]_{\mathcal{B}} & = & ([T]_{\mathcal{B}})^{-1} \end{array}$$

Como $U = T^{-1}$ resulta

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^{-1}. \blacksquare$$

A seguir estudiaremos la relación existente entre las matrices que representan a una transformación lineal en distintas bases.

Teorema 4.12 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F y sean $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ bases ordenadas de V. Supongamos que T es un operador lineal sobre V. Si $P = [P_1 \ldots P_n]$ es la matriz $n \times n$ de columnas $P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$, entonces*

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P.$$

Más aún, si U es el operador lineal sobre V definido por $U(\alpha_j) = \alpha'_j, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$ entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [U]_{\mathcal{B}}^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,[U]_{\mathcal{B}}.$$

Demostración: Sea $\alpha \in V$, por Teorema 1.12 existe A matriz $n \times n$ inversible tal que

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = A\,[\alpha]_{\mathcal{B}} \tag{4.7}$$

donde A es la matriz cuya columna j-ésima es $[\alpha_j]_{\mathcal{B}'}$. Como $T(\alpha) \in V$, tenemos el mismo resultado

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = A\,[T(\alpha)]_{\mathcal{B}}. \tag{4.8}$$

Por otro lado por Teorema 4.9

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}'}\,[\alpha]_{\mathcal{B}'} \tag{4.9}$$

igualando las ecuaciones (4.8) y (4.9) resulta

$$[T]_{\mathcal{B}'}\,[\alpha]_{\mathcal{B}'} = A\,[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} \tag{4.10}$$

y por (4.7) y el análogo a (4.9) con la base $\mathcal{B}$ tenemos

$$[T]_{\mathcal{B}'}\,A\,[\alpha]_{\mathcal{B}} = A\,[T]_{\mathcal{B}}\,[\alpha]_{\mathcal{B}} \tag{4.11}$$

entonces

$$A^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}'}\,A[\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}} \;\; \forall\, \alpha \in V$$

$$\therefore \quad A^{-1}[T]_{\mathcal{B}'}A = [T]_{\mathcal{B}},$$

llamando $P = A^{-1}$ y operando algebraicamente obtenemos

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P.$$

Sea ahora U tal que $U(\alpha_j) = \alpha'_j \;\; \forall\, j = 1, \ldots, n$. Sabemos que $\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i$ entonces $U(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\alpha_i$. Por lo tanto, $[U]_{\mathcal{B}} = P$ y finalmente se cumple

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [U]_{\mathcal{B}}^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,[U]_{\mathcal{B}}. \blacksquare$$

Ejemplo 4.6: Volviendo al Ejemplo 4.3, en el cual T es el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ con $\mathcal{B}$ la base ordenada canónica, vimos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que $\mathcal{B}' = \{(1,1), (2,1)\}$, la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cumple $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$, entonces por teorema anterior

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P.$$

Así, como

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tenemos

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos comprobar que esto es correcto, pues:

$$\begin{aligned} T(1,1) &= (1,0) &= (-1)\cdot(1,1) + 1\cdot(2,1) \\ T(2,1) &= (2,0) &= (-2)\cdot(1,1) + 2\cdot(2,1). \square \end{aligned}$$

Definición 4.5 *Sean A y B dos matrices cuadradas $n \times n$ sobre F. Se dice que B es* ***semejante a A sobre F*** *si existe una matriz inversible P $n \times n$ sobre F tal que $B = PAP^{-1}$.*

Observación: Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre F, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son dos bases ordenadas de V, entonces para todo operador lineal T en V se cumple que las matrices $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{B}'}$ son semejantes.

Ejercicio 4.1: Probar que la semejanza entre matrices $n \times n$ sobre F es una relación de equivalencia.

4.3. Isomorfismo

Definición 4.6 *Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal $T : V \to W$ es un* ***isomorfismo*** *si T es biyectiva. Si existe un isomorfismo T de V en W, se dice que V y W son isomorfos y se escribe como $V \cong W$.*

Los espacios isomorfos son muy útiles, pues es como si fueran "*iguales*" algebraicamente, a pesar de que sus elementos y las operaciones definidas en ellos sean muy diferentes. Así, es posible estudiar propiedades en algunos espacios que luego se cumplirán en los espacios isomorfos.

Ejercicio 4.2: Probar que el isomorfismo entre espacios vectoriales es una relación de equivalencia.

Ejemplo 4.7: Los espacios vectoriales $V = \mathbb{R}^3$ y $W = P_2$ son isomorfos. Para probar que esta afirmación es verdadera, debemos encontrar una transformación lineal biyectiva de $\mathbb{R}^3$ en P_2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2$ la transformación lineal definida por: dado $\alpha = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(\alpha) = ax^2 + bx + c.$$

Es fácil ver que T es lineal (ejercicio). Para ver que es biyectiva (o inversible), basta ver que es no singular o sobreyectiva pues V y W tienen dimensión finita y se cumple $dim\, V = dim\, W$ (por Teorema 4.7). Veamos que es no singular, sea $\alpha \in Nu(T)$ con $\alpha = (a, b, c)$ entonces

$$T(\alpha) = \mathbf{0} = ax^2 + bx + c,$$

así $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$. Luego $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$ y por lo tanto T es no singular. Así, queda probado que T es un isomorfismo. $\square$

El siguiente teorema nos dice que cuando dos espacios vectoriales tienen la misma dimensión, ellos son isomorfos y esto fue justamente lo que vimos en el ejemplo anterior.

Teorema 4.13 *Sean V y W espacios vectoriales sobre F de dimensión finita con $dim\, V = dim\, W$. Entonces V y W son isomorfos.*

Demostración: Sean $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ bases de V y W respectivamente, entonces por Teorema 3.2 existe un única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(\alpha_i) = \beta_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Falta probar que T es biyectiva y para ello es suficiente probar que es no singular (por Teorema 4.7). Sea $\alpha \in Nu(T)$, esto es $T(\alpha) = \mathbf{0}$. Por otro lado como $\alpha \in V$ existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha_i \implies T(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i),$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\,\beta_i$$

y como $T(\alpha) = \mathbf{0}$ resulta

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\beta_i.$$

Ahora $\beta_1, \ldots, \beta_n$ es un conjunto linealmente independientes por lo que

$$c_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Luego $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$. Así T es un isomorfismo entre V y W y se cumple que V y W son isomorfos. ■

Estudiaremos ahora transformaciones lineales que tienen la propiedad de preservar longitud de vectores.

Definición 4.7 *Sean V y W espacios con producto interno, una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ recibe el nombre de* ***isometría****, si*

$$||T(\alpha)|| = ||\alpha|| \;\; \forall \;\; \alpha \in V$$

Observar que en la definición anterior, la norma usada depende de la definición de producto interno definido en cada espacio. Utilizamos la misma notación por simplicidad, pero no necesariamente corresponde a la misma norma.

Observación: Si T es una isometría de V en W, entonces

$$||T(\alpha) - T(\beta)|| = ||T(\alpha - \beta)|| = ||\alpha - \beta||, \;\; \forall\, \alpha, \beta \in V$$

por lo tanto

$$||T(\alpha) - T(\beta)|| = ||\alpha - \beta||, \;\; \forall\, \alpha, \beta \in V$$

es decir, una isometría preserva la distancia entre vectores.

Teorema 4.14 *Sean V y W espacios con producto interno sobre $\mathbb{R}$, α, $\beta \in V$ y $T : V \longrightarrow W$ una isometría, entonces*

$$\langle T(\alpha),\, T(\beta)\rangle = \langle \alpha,\, \beta\rangle,$$

es decir, una isometría preserva el producto interno.

Demostración: Por observación anterior sabemos que

$$||T(\alpha) - T(\beta)|| = ||\alpha - \beta|| \tag{4.12}$$

Ahora

$$\begin{aligned} ||T(\alpha) - T(\beta)||^2 &= \langle T(\alpha) - T(\beta),\, T(\alpha) - T(\beta)\rangle \\ &= ||T(\alpha)||^2 - 2\,\langle T(\alpha),\, T(\beta)\rangle + ||T(\beta)||^2 \\ &= ||\alpha||^2 - 2\,\langle T(\alpha),\, T(\beta)\rangle + ||\beta||^2 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ||\alpha - \beta||^2 &= \langle \alpha - \beta,\, \alpha - \beta\rangle \\ &= ||\alpha||^2 - 2\,\langle \alpha,\, \beta\rangle + ||\beta||^2 \end{aligned}$$

y como se cumple (4.12), igualamos ambas expresiones y obtenemos

$$||\alpha||^2 - 2\,\langle T(\alpha),\, T(\beta)\rangle + ||\beta||^2 = ||\alpha||^2 - 2\,\langle \alpha,\, \beta\rangle + ||\beta||^2.$$

Finalmente se cumple

$$\langle T(\alpha),\, T(\beta)\rangle = \langle \alpha,\, \beta\rangle\,. \blacksquare$$

Capítulo 5

Autovalores y Autovectores

5.1. Autovalores y Autovectores

Probablemente unas de las matrices más sencillas para trabajar, además de las que son múltiplos de la identidad, son las matrices diagonales. Una matriz diagonal tiene la siguiente estructura:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sea $T \in L(V, V)$ con V espacio vectorial de dimensión n. Si podemos encontrar una base ordenada $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}} = D$, podríamos obtener información respecto de T de manera muy simple. Por ejemplo su núcleo, imagen, si la transformación es inversible, entre otras.

Entonces surge una pregunta ¿será que todo operador se puede representar en alguna base como una matriz diagonal?. Si esto no es así, ¿para qué operadores existe esta base?, ¿cómo se encuentra?. Vamos a ir respondiendo estas preguntas a lo largo de este Capítulo.

Comenzamos con algunos conceptos que serán fundamentales para el desarrollo de los temas que abordaremos.

Definición 5.1 *Sea V un espacio vectorial sobre F y T un operador lineal sobre V. Un* ***autovalor de T*** *o* ***valor propio de T*** *es un escalar $\lambda \in F$ tal que existe un vector no nulo $\alpha \in V$ con $T(\alpha) = \lambda\alpha$. Si λ es un autovalor de T entonces:*

i) Cualquier $\alpha \in V$ no nulo tal que $T(\alpha) = \lambda\alpha$, se llama ***autovector de T*** *o* ***vector propio de T*** *asociado al autovalor λ.*

ii) La colección de todos los α tales que $T(\alpha) = \lambda\alpha$ se llama ***espacio propio de*** *T o* ***autoespacio de*** *T.*

iii) El par (λ, α) se llama ***autopar de*** *T.*

Observación 1: Si T es cualquier operador lineal y λ un autovalor de T entonces el conjunto

$$S_\lambda = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = \lambda\alpha\}$$

es un subespacio de V. Veamos esto: $S_\lambda \neq \emptyset$, pues $\mathbf{0} \in S_\lambda$. Ahora, si $\alpha, \beta \in S_\lambda$ y $c \in F$, entonces

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta) = c\lambda\alpha + \lambda\beta = \lambda(c\alpha + \beta)$$

luego $c\alpha + \beta \in S_\lambda$.

Observación 2: Si (λ, α) es un autopar de T, se dice que λ es autovalor de T con autovector asociado α y que α es autovector de T con autovalor asociado λ.

Ejemplo 5.1: Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, entonces $T(1,0) = (1,0)$. Así, $(1,0)$ es autovector de T con valor propio asociado $\lambda = 1$. El vector $(0,1)$ ¿será autovector de T?

$$T(0,1) = (0,-1) = (-1)(0,1)$$

entonces $(0,1)$ es autovector de T con autovalor asociado $\lambda = -1$. $\square$

Teorema 5.1 *Sea T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita sobre F y sea λ un escalar en F. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) λ es un autovalor de T.

ii) El operador $T - \lambda id$ es singular. (No inversible)

Demostración: Veamos que *i)* implica *ii)*. Suponemos λ autovalor de T, entonces existe $\alpha \in V$ con $\alpha \neq 0$ tal que

$$T(\alpha) = \lambda\alpha.$$

Ahora

$$\begin{array}{rclcl} T(\alpha) = \lambda\alpha & \Longleftrightarrow & T(\alpha) - \lambda\alpha & = & \mathbf{0} \\ & \Longleftrightarrow & (T - \lambda id)(\alpha) & = & \mathbf{0} \\ & \Longrightarrow & \alpha \in Nu(T - \lambda id) & & \end{array}$$

Así $T - \lambda id$ es singular.

Recíprocamente, suponemos que el operador $T - \lambda id$ es singular, entones existe un vector α no nulo en V tal que $(T - \lambda id)(\alpha) = \mathbf{0}$, pero esto equivale a que $T(\alpha) = \lambda\alpha$, luego λ es autovalor de T. $\blacksquare$

Sabemos que dado T operador lineal sobre V espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}$ una base ordenada de V, existe la matriz $[T]_{\mathcal{B}} = A$ que representa a T en la base ordenada $\mathcal{B}$. Ahora $T - \lambda id$ es inversible si y solo si $A - \lambda I$ es inversible, o equivalentemente $T - \lambda id$ no inversible si y solo si $A - \lambda I$ es no inversible, entonces existe $\mathbf{x}$ vector no nulo que es solución del sistema homogéneo asociado a la matriz $A - \lambda I$. Así podemos definir el concepto de autovalor y autovector en matrices.

Definición 5.2 *Si A es una matriz $n \times n$ sobre F, un* ***autovalor de A*** *o* ***valor propio de A*** *es un escalar $\lambda \in F$ tal que existe un vector no nulo $\alpha \in F^n$ con $A\alpha = \lambda\alpha$. El vector α se llama* ***autovector de A*** *o* ***vector propio de A****.*

Ejemplo 5.2: Sea $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ahora

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así $A\alpha = \alpha$, entonces α es un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = 1$. □

Ahora, volviendo a nuestra discusión sobre T y la matriz que la representa en una base ordenada, observemos lo siguiente: si (λ, α) es autopar de T entonces

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [\lambda\alpha]_{\mathcal{B}} = \lambda[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

además

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

siendo $A = [T]_{\mathcal{B}}$, luego

$$A[\alpha]_{\mathcal{B}} = \lambda[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Así, si λ es autovalor de T, también lo es de la matriz que representa a T en la base $\mathcal{B}$, por lo tanto vamos a concentrarnos en encontrar los autovalores de las matrices. Ahora nos preguntamos ¿cómo encontramos los autovalores de A?, esto lo vemos en el siguiente teorema.

Teorema 5.2 *Sea A matriz $n \times n$. Entonces λ es autovalor de A si y solo si $det(\lambda I - A) = 0$.*

Demostración: λ es autovalor de A si y solo si existe $\alpha \in F^n$ no nulo tal que $A\alpha = \lambda\alpha \iff A\alpha - \lambda I\alpha = \mathbf{0} \iff (A - \lambda I)\alpha = \mathbf{0} \iff \exists\, \alpha \neq \mathbf{0}$ con $\alpha \in Nu(A - \lambda I) \iff A - \lambda I$ es no inversible $\iff det(A - \lambda I) = 0 \iff det(\lambda I - A) = 0$. ■

Observar que de la demostración del teorema anterior tenemos que si λ es autovalor de A, entonces existe un vector no nulo α tal que $\alpha \in Nu(A - \lambda I)$. Así este subespacio no está formado solo por el vector nulo.

Definición 5.3 *Sea A matriz $n \times n$,*

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

recibe el nombre de ***polinomio característico de** A.*

Volvamos al Teorema 5.2 considerando esta definición. Este teorema nos dice que, λ es autovalor de A si y solo el polinomio característico evaluado en ese valor de λ se anula, es decir, es raíz del polinomio característico. Por esto, un autovalor también es llamado *raíz característica.*

Sabemos que dada $T \in L(V, V)$ con V espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases ordenadas distintas de V, las matrices $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{B}'}$ son semejantes. Ahora, ¿cuál de ellas nos permite hallar los autovalores de T? La respuesta nos la da el siguiente teorema:

Teorema 5.3 *Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración: Sean A y B matrices $n \times n$ y supongamos que son semejantes, entonces existe P matriz $n \times n$ inversible tal que $A = PBP^{-1}$. Ahora

$$\begin{array}{rcl} p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) & = & det(\lambda I - PBP^{-1}) \\ & = & det\,(P(\lambda I - B)P^{-1}) \\ & = & detP\,det\,(\lambda I - B)\,detP^{-1} \\ & = & det\,(\lambda I - B) \\ & = & p_B(\lambda) \end{array}$$

$$\therefore \quad p_A(\lambda) = p_B(\lambda). \blacksquare$$

Ejemplo 5.3: Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ representado en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Esta matriz A tiene autovalores? ¿Cómo los encontramos? De acuerdo al Teorema 5.2, debemos encontrar las raíces del polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + 1$$

Ahora $\lambda^2 + 1 \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, así este polinomio no se anula en $\mathbb{R}$. Luego A no tiene autovalores sobre $\mathbb{R}$.

Por otro lado si U es el operador lineal sobre $\mathbb{C}^2$ representado en la base canónica por la matriz A, entonces $p_A(\lambda)$ tiene raíces en $\mathbb{C}$ y son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. ¿Cómo encontramos los autovectores asociados a estos autovalores?.

Comenzamos con λ_1. Sabemos que si λ_1 es autovalor de A entonces existe un vector α no nulo tal que $\alpha \in Nu(\lambda_1 I - A)$, así, lo que debemos buscar es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a la matriz $\lambda_1 I - A$. Recordemos que por definición llamamos a este subespacio *autoespacio de* λ_1 y lo denotamos S_{λ_1}.

$S_{\lambda_1} = \{\alpha \mid (\lambda_1 I - A)\alpha = \mathbf{0}\}$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

así

$$(\lambda_1 I - A)\alpha = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

entonces

$$ix + y = 0 \implies y = -ix.$$

Luego

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{C} \right\} = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

Veamos ahora el caso con λ_2. Aquí buscamos el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a la matriz $\lambda_2 I - A$, es decir, buscamos el *autoespacio de* λ_2 el cual denotamos S_{λ_2}.

$S_{\lambda_2} = \{\alpha \mid (\lambda_2 I - A)\alpha = \mathbf{0}\}$

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

así

$$(\lambda_2 - A)\alpha = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

entonces

$$-ix + y = 0 \implies y = ix.$$

Luego

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{C} \right\} = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}. \ \square$$

Ejemplo 5.4: Vamos a hallar los autovalores y autovectores de A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

entonces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

$S_{\lambda_1} = \{\alpha \mid (\lambda_1 I - A)\alpha = \mathbf{0}\}$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \implies z = 2x \\ y & = & 0 \end{array}$$

$$S_{\lambda_1} = \left\{ (x,\, 0,\, 2x)^T \mid x \in \mathbb{C} \right\} = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

$S_{\lambda_2} = \{\alpha \mid (\lambda_2 I - A)\alpha = \mathbf{0}\}$

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} -x-y+z &=& 0 \implies y=x \\ -2\,x+z &=& 0 \implies z=2\,x \end{array}$$

$$S_{\lambda_2}=\left\{(x,\,x,\,2\,x)^T \;\mid\; x\in\mathbb{C}\right\}=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}.\;\square$$

Ejercicio 5.1: Sea $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ el operador lineal definido por $T(x,y)=(x,2y)$. Hallar los autovalores de T y sus respectivos autoespacios.

Resumiendo: ¿cómo encontramos los autovalores y autovectores de una matriz A?

i. Hallamos $p_A(\lambda)=det(\lambda\,I-A)$.

ii. Calculamos las raíces de $p_A(\lambda)$.

iii. Resolvemos el sistema $(\lambda\,I-A)\alpha=\mathbf{0}$, para cada λ raíz de $p_A(\lambda)$.

El siguiente teorema nos da información respecto a cómo es el conjunto formado por autovectores asociados autovalores distintos.

Teorema 5.4 *Sea A matriz $n\times n$ y sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ autovalores distintos de A con $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ sus respectivos autovectores. Entonces $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración: La prueba será hecha por inducción sobre m. Si $m=1$, el conjunto formado por α_1 es independiente ya que por ser autovector es no nulo. Suponemos que se verifica la hipótesis inductiva, esto es, suponemos el teorema se cumple para $m-1$, así si $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$ son autovalores distintos de A, entonces $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}$ es un conjunto linealmente independiente. Vamos a probar que el teorema se cumple para m autovectores $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ asociados a autovalores diferentes. Consideremos la siguiente combinación lineal

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m=\mathbf{0} \tag{5.1}$$

entonces premultiplicando a ambos lados de la igualdad por la matriz A obtenemos

$$A(c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m)=\mathbf{0}$$

distribuyendo resulta

$$c_1A\alpha_1+\cdots+c_mA\alpha_m=\mathbf{0} \tag{5.2}$$

como $(\lambda_i,\,\alpha_i)$ es autopar de A $\forall\,i=1,\ldots,m$, tenemos

$$c_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+c_m\lambda_m\alpha_m=\mathbf{0}. \tag{5.3}$$

Ahora, multiplicando (5.1) por λ_m

$$c_1\lambda_m\alpha_1+\cdots+c_m\lambda_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

y restando la última igualdad a (5.3) resulta:

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i(\lambda_m - \lambda_i)\,\alpha_i = \mathbf{0},$$

como $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ son autovectores asociados, cada uno, a autovalores diferentes, por H.I. son linealmente independientes, luego

$$c_i(\lambda_m - \lambda_i) = 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, m-1.$$

Además los autovalores son todos distintos, por lo tanto $\lambda_m \neq \lambda_i \ \forall\ i = 1, \ldots, m-1$, entonces

$$c_i = 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, m-1.$$

Sustituyendo el valor de cada c_i para $i = 1, \ldots, m-1$ en (5.1) resulta

$$c_m \alpha_m = 0,$$

como $\alpha_m \neq 0$ por ser autovector, entonces $c_m = 0$. Por lo tanto $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ es un conjunto independiente como queríamos probar. ■

Vamos a considerar el polinomio característico de una matriz. Dada A matriz $n \times n$,

$$p_A(\lambda) = det(\lambda\, I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \right|.$$

Desarrollando y agrupando convenientemente este determinante, obtenemos el siguiente polinomio en λ:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_0.$$

Teorema 5.5 *Toda matriz A $n \times n$ tiene exactamente n autovalores en $\mathbb{C}$ y a lo sumo n autovalores sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración: Por lo desarrollado, sabemos que

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_0.$$

Luego $p_A(\lambda)$ es un polinomio de grado n, así sabemos que tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$ y a lo sumo n raíces sobre $\mathbb{R}$, por lo tanto A tiene exactamente n autovalores en $\mathbb{C}$ y a lo sumo n autovalores sobre $\mathbb{R}$. ■

Definición 5.4 *Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son todas las raíces distintas de $p_A(\lambda)$ con multiplicidad $r_1, \ldots, r_m$, tal que $p_A(\lambda)$ puede factorizarse como*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$$

Los números naturales $r_1 \ldots, r_m$, se llaman ***multiplicidad algebraica*** *de los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ respectivamente y los denotamos $ma_A(\lambda_i) = r_i \ \ \forall\, i = 1, \ldots, m$.*

Ejercicio 5.2: Probar que dada A matriz $n \times n$ triangular superior (ó inferior), entonces sus autovalores son los elementos de la diagonal. (Notar que la multiplicidad algebraica de un autovalor determina la cantidad de veces que dicho autovalor aparece en la digonal).

5.2. Diagonalización

Definición 5.5 *Una matriz A $n \times n$ se dice* ***diagonalizable*** *si es semejante a una matriz diagonal, esto es, existe P matriz $n \times n$ inversible y D matriz $n \times n$ diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.*

Definición 5.6 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un operador lineal T sobre V se dice* ***diagonalizable****, si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es* ***diagonalizable****.*

En lo que sigue a esta sección estudiaremos condiciones bajo las cuales una matriz es diagonalizable, ya que de la definición anterior, para decidir si un operador es diagonalizable basta realizar el estudio en su representación matricial.

Definición 5.7 *Decimos que A matriz $n \times n$ tiene un* ***conjunto completo de autovectores*** *si ella tiene n autovectores linealmente independientes.*

Teorema 5.6 *Una matriz A es diagonalizable si y solo si tiene un conjunto completo de autovectores.*

Demostración: Suponemos A diagonalizable, entonces existe P matriz inversible y D matriz diagonal tal que $A = PDP^{-1}$, esto es, $AP = PD$. Consideremos $P = [P_1 \dots P_n]$, con P_i columna i-ésima de P, notar que $P_i \neq \mathbf{0}$ para todo $i = 1, \dots, n$ por ser columnas de P. Ahora

$$AP = [AP_1 \dots AP_n] \tag{5.4}$$

además se cumple

$$AP = PD = [P_1 \dots P_n] \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} = [d_{11}P_1 \dots d_{nn}P_n]. \tag{5.5}$$

De las ecuaciones (5.4) y (5.5) obtenemos

$$AP_i = d_{ii}P_i \quad i = 1, \dots, n,$$

por lo tanto P_i es un autovector de A asociado al autovalor d_{ii} $\forall\, i = 1, \dots, n$. Como $P_1, \dots, P_n$ es un conjunto linealmente independiente (pues corresponden a las columnas de una matriz inversible), se cumple que A tiene un conjunto completo de autovectores.

Recíprocamente, supongamos que $P_1, \dots, P_n$ es un conjunto completo de autovectores de A con autovalores asociados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Sea P una matriz cuyas columnas corresponden a los vectores $P_1, \dots, P_n$ en ese orden, esto es, la columna i-ésima de P es P_i $\forall\, i = 1, \dots, n$. Observar que P es inversible pues sus columnas son linealmente independientes. Además sea D una matriz diagonal tal que para todo $i = 1, \dots, n$ el elemento situado en la posición ii, corresponde al autovalor λ_i, es decir, $d_{ii} = \lambda_i$ $\forall\, i = 1, \dots, n$. Ahora

$$AP_i = \lambda_i P_i \;\forall\, i = 1, \dots, n$$

luego

$$AP = A[P_1 \dots P_n] = [AP_1 \dots AP_n] = [\lambda_1 P_1 \dots \lambda_n P_n] = [P_1 \dots P_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$AP = PD \iff A = PDP^{-1}$$

Luego A es diagonalizable. ■

Ejemplo 5.5: Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos a ver si A es diagonalizable,

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 4 & 4 \\ -8 & \lambda + 11 & 8 \\ 8 & -8 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$$

así $\lambda_1 = 1$ con $ma_A(\lambda_1) = 1$ y $\lambda_2 = -3$ con $ma_A(\lambda_2) = 2$.

Ahora

$$S_{\lambda_1} = Nu(\lambda_1 I - A) = Nu(I - A) = \{\alpha \,|\, (I - A)\alpha = \mathbf{0}\}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -8 & 12 & 8 \\ 8 & -8 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 8 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 8 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$Nu(\lambda_1 I - A) = Nu(I - A) = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

El otro autoespacio:

$$S_{\lambda_2} = Nu(\lambda_2 I - A) = Nu(-3I - A) = \{\alpha \,|\, (-3I - A)\alpha = \mathbf{0}\}$$

$$-3I - A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & -8 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$Nu(\lambda_2 I - A) = Nu(-3I - A) = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Luego, uniendo los vectores de ambos autoespacios, podemos afirmar que encontramos 3 autovectores de A que son linealmente independientes, por lo tanto A es digonalizable. Construyamos P y D,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Realizando las operaciones correspondientes se comprueba que $A = PDP^{-1}$. $\square$

Para el siguiente teorema necesitamos la siguiente definición. Dada A matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ se define la matriz **transpuesta conjugada de** A y la denotamos A^*, a la matriz cuyo elemento ij satisface: $(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$. Diremos que A es unitaria si $A^*A = I = AA^*$, es decir, A^* es la matriz inversa de A.

Teorema 5.7 *(**triangulación de Schur**) Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es semejante a una matriz triangular superior. Más aún, existe U matriz unitaria $n \times n$ (no única) y T matriz triangular superior (no única) tal que $U^*AU = T$ con t_{ii} autovalor de A para todo $i = 1, \ldots, n$, donde t_{ii} es el elemento $i-$ésimo de la diagonal de T.*

Demostración: Probamos este teorema usando inducción sobre n. Suponemos $n = 1$, entonces $A = [a_{11}]$, si tomamos $U = [1]$, entonces $U^* = [1]$, así $U^*AU = [a_{11}] = T$, se verifica trivialmente. Por hipótesis inductiva suponemos que el teorema se verifica para matrices de dimensión $(n-1) \times (n-1)$. Vamos a probar para matrices de dimensión $n \times n$. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces podemos garantizar que tiene al menos un autovalor, en particular en este cuerpo tiene exactamente n (contando multiplicidades). Sea (λ, α) un autopar de A y sin pérdida de generalidad suponemos α unitario (dado un vector no nulo, lo dividimos por su norma y encontramos un vector unitario). Como $\alpha \neq \mathbf{0}$ (es autovector), podemos extenderlo a una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, digamos $\alpha, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Definimos $V = [v_1 \ \ldots \ v_{n-1}]$, es decir V es una matriz $n \times (n-1)$ cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_{n-1}$ y sea $U_1 = [\alpha \ V]$ matriz $n \times n$ cuyas columnas son α, $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Notar que la matriz U_1 es unitaria (verificar). Ahora

$$U_1^*AU_1 = \begin{bmatrix} \alpha^* \\ V^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \alpha & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^*A \\ V^*A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^*A\alpha & \alpha^*AV \\ V^*A\alpha & V^*AV \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Analicemos las componentes de la matriz en bloque obtenida:

✓. $\alpha^*A\alpha = \alpha^*(\lambda\,\alpha) = \lambda\,\alpha^*\alpha = \lambda||\alpha||^2 = \lambda$

✓. $V^*A\alpha = V^*(\lambda\,\alpha) = \lambda V^*\alpha = \lambda \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_{n-1}^* \end{bmatrix} \alpha = \lambda \begin{bmatrix} v_1^*\alpha \\ \vdots \\ v_{n-1}^*\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{0}]$

✓. $V^*AV \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$, entonces se cumple la hipótesis inductiva, $\exists\ \tilde{U}, \tilde{T} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ con $\tilde{U}^*\tilde{U} = I$ y $\tilde{T}$ matriz triangular superior con $\tilde{t}_{ii}$ autovalor de V^*AV tal que

$$\tilde{U}^*V^*AV\tilde{U} = \tilde{T}.$$

Así, reemplazando en (5.6) tenemos

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha^* A V \\ \mathbf{0} & \tilde{U}\tilde{T}\tilde{U}^* \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Ahora definimos la siguiente matriz en bloque

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{U} \end{bmatrix},$$

$U_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y cumple que $U_2^* U_2 = I$ (verificar). Premultiplicando $U_1^* A U_1$ por U_2^* y posmultiplicando por U_2, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \alpha^* A V \\ \mathbf{0} & \tilde{U}\tilde{T}\tilde{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha^* A V \\ \mathbf{0} & \tilde{T}\tilde{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha^* A V \tilde{U} \\ \mathbf{0} & \tilde{T} \end{bmatrix}.$$

Luego

$$U_2^* U_1^* A U_1 U_2 = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha^* A V \tilde{U} \\ \mathbf{0} & \tilde{T} \end{bmatrix}$$

Llamando $U = U_1 U_2$ y $T = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha^* A V \tilde{U} \\ \mathbf{0} & \tilde{T} \end{bmatrix}$, tenemos que $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria, pues

$$UU^* = U_1 U_2 U_2^* U_1^* = I \implies UU^* = I$$

y T es una matriz triangular superior en $\mathbb{C}^{n\times n}$. Así, existe U unitaria tal que $U^* A U = T$, como A y T son semejantes tienen los mismos autovalores y por ser T matriz triangular, sus autovalores son los elementos de la diagonal (ver Ejercicio 5.2), por lo tanto, t_{ii} es autovalor de A para todo $i = 1, \ldots, n$. ■

Al finalizar la sección anterior, definimos el concepto de multiplicidad algebraica del autovalor de una matriz, como la multiplicidad del autovalor como raíz del polinomio característico. A seguir vamos a definir otro concepto asociado a los autovalores y luego estableceremos la relación entre ellos usando el teorema anterior.

Definición 5.8 *Sea A matriz $n\times n$ y λ autovalor de A, se llama* ***multiplicidad geométrica del autovalor*** *λ y la denotaremos $mg_A(\lambda)$, a la dimensión del autoespacio asociado a λ. Simbólicamente $mg_A(\lambda) = dim\, Nu(\lambda I - A)$.*

Observación: Para todo λ autovalor de A se cumple $1 \le mg_A(\lambda) \le n$ y $1 \le ma_A(\lambda) \le n$.

A continuación queda este ejercicio para pensar, que usaremos en la demostración del siguiente Teorema:

Ejercicio 5.3: Dada A matriz $m \times n$, P y Q matrices inversibles $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente, entonces $rg(A) = rg(AP) = rg(QA) = rg(QAP)$.

Teorema 5.8 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ autovalor de A, entonces $ma_A(\lambda) \ge mg_A(\lambda)$.*

Demostración: Sea λ autovalor de A y supongamos que $ma_A(\lambda) = k$. Por Teorema 5.7, dada A existe T matriz triangular superior $n \times n$ y U matriz unitaria $n \times n$ tal que $U^*AU = T$. Como T no es única, en particular podemos asumir que tiene la siguiente estructura en bloque:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \mathbf{0} & T_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad T_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}, \quad T_{11} = \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$T_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$ triangular superior, $T_{12} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times k}$ y $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$. Así, λ es autovalor de T_{11} y por lo tanto no puede ser autovalor de T_{22}, entonces es distinto a todos los elementos de la diagonal de T_{22}. Ahora

$$rg(\lambda I - A) = rg(\lambda I - UTU^*) = rg\left(U(\lambda I - T)U^*\right) = rg(\lambda I - T)$$

observar que para la última igualdad usamos el ejercicio anterior.
Por otro lado

$$\lambda\, I - T = \begin{bmatrix} \lambda I - T_{11} & -T_{12} \\ \mathbf{0} & \lambda I - T_{22} \end{bmatrix}$$

como λ no es autovalor de T_{22} entonces $\lambda I - T_{22}$ es una matriz inversible, ya que ningún elemento de su diagonal es nulo. Recordar que los autovalores de las matrices triangulares, son los elementos de la diagonal (Ejercicio 5.1). Así, $rg(\lambda I - T_{22}) = n - k = n - ma_A(\lambda)$. Además $\lambda I - T$ como mínimo tiene la cantidad de filas linealmente independientes que tiene $\lambda I - T_{22}$, por lo cual

$$rg(\lambda I - T) \geq rg(\lambda\, I - T_{22}).$$

Así tenemos

$$rg(\lambda\, I - A) = rg(\lambda\, I - T) \geq rg(\lambda\, I - T_{22}) = n - k = n - ma_A(\lambda)$$

$$\therefore \quad rg(\lambda\, I - A) \geq n - ma_A(\lambda). \tag{5.8}$$

Por otro lado

$$dim\, Im(\lambda\, I - A) + dim\, Nu(\lambda\, I - A) = n, \tag{5.9}$$

como $rg(\lambda I - A) = dim\, Im(\lambda I - A)$ y $dim\, Nu(\lambda I - A) = mg_A(\lambda)$, sustituyendo en la igualdad (5.9) tenemos

$$rg(\lambda I - A) + mg_A(\lambda) = n$$

despejando y usando la desigualdad (5.8) resulta

$$mg_A(\lambda) = n - rg(\lambda I - A) \leq n - n + ma_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$$

$$\therefore \quad mg_A(\lambda) \leq ma_A(\lambda). \blacksquare$$

La igualdad de estas multiplicidades, se verifica bajo ciertas hipótesis. A seguir vamos a estudiar algunos resultados que necesitaremos para su demostración.

Lema 5.1 *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalores distintos de A y $W_1, \ldots, W_k$ los autoespacios asociados a λ_i para $i = 1, \ldots, k$, entonces $W_j \cap \sum_{i=1}^{j-1} W_i = \{\mathbf{0}\}$ para $j = 2, \ldots, k$.*

Demostración: Usaremos inducción sobre k. Si $k = 2$ tenemos que ver que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Sea $\alpha \in W_1 \cap W_2$ entonces $\alpha \in W_1$ y $\alpha \in W_2$, como $W_i = Nu(\lambda_i I - A)\ \forall\, i = 1, 2$, entonces $A\alpha = \lambda_1\alpha$ y $A\alpha = \lambda_2\alpha$, así

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha = \mathbf{0}$$

como por hipótesis $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\alpha = \mathbf{0}$. Luego $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$
Asumimos que se cumple la hipótesis inductiva, esto es, suponemos que el lema vale para $W_1, \ldots, W_t$ autoespacios con $t \leq k - 1$. Resta ver que se cumple para k autoespacios. Sea α en la intersección, esto es

$$\alpha \in W_k \cap \sum_{i=1}^{k-1} W_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in W_k \ \text{ y } \ \alpha \in \sum_{i=1}^{k-1} W_i.$$

Como $\alpha \in W_k$ se cumple

$$A\alpha = \lambda_k\alpha \tag{5.10}$$

como $\alpha \in \sum_{i=1}^{k-1} W_i$ tenemos

$$\alpha = w_1 + \cdots + w_{k-1}, \quad \text{con} \quad w_i \in W_i \ \ \forall\, i = 1, \ldots, k-1 \tag{5.11}$$

premultiplicando por A ambos lados de esta última igualdad resulta

$$A\alpha = Aw_1 + \cdots + Aw_{k-1}$$

entonces usando (5.10) y que $w_i \in W_i$ para $i = 1, \ldots, k-1$, se sigue

$$\lambda_k\alpha = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1}w_{k-1}. \tag{5.12}$$

Ahora multiplicando (5.11) por λ_k y restando a (5.12) resulta

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k)w_i$$

sacando el último término de la sumatoria y despejando, obtenemos

$$(\lambda_k - \lambda_{k-1})w_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-2}(\lambda_i - \lambda_k)w_i. \tag{5.13}$$

como $\lambda_j \neq \lambda_i \ \ \forall i \neq j$ se cumple

$$w_{k-1} \in \ W_{k-1} \cap \sum_{i=1}^{k-2} W_i$$

luego por hipótesis inductiva concluimos que $w_{k-1} = \mathbf{0}$, sustituyendo este valor en (5.13) tenemos la siguiente igualdad

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k-2} (\lambda_i - \lambda_k) w_i, \tag{5.14}$$

despejando w_{k-2} de esta sumatoria por el mismo desarrollo anterior resulta $w_{k-2} = \mathbf{0}$. Continuando con este proceso, llegaremos a que $w_i = \mathbf{0}\ \forall\ i = 1, \ldots, k-1$, entonces $\alpha = \mathbf{0}$ y queda demostrado el lema. ■

Lema 5.2 *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalores distintos de A y $W_1, \ldots, W_k$ los respectivos autoespacios. Si $W = W_1 + \cdots + W_k$ entonces $dim\, W = dim\, W_1 + \cdots + dim\, W_k$. Más aún, si $\mathcal{B}_i$ es una base de W_i para todo $i = 1, \ldots, k$ entonces $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ es una base de W.*

Demostración: Como antes, probaremos este lema usando inducción sobre k. Si $k = 1$, nada que probar, se verifica trivialmente. Suponemos que el lema vale para $k-1$ autoespacios, esto es $dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) = dim(W_1) + \cdots + dim(W_{k-1})$ y $\cup_{i=1}^{k-1} \mathcal{B}_i$ es una base para $W_1 + \cdots + W_{k-1}$. Vamos a probar para k autoespacios. Como $W = W_1 + \cdots + W_k$ entonces

$$\begin{aligned} dim(W) = dim\left(\sum_{i=1}^{k} W_i\right) &= dim\left(\sum_{i=1}^{k-1} W_i + W_k\right) \\ &= dim\left(\sum_{i=1}^{k-1} W_i\right) + dim\,(W_k) - dim\left(\sum_{i=1}^{k-1} W_i \cap W_k\right) \end{aligned}$$

usando la hipótesis inductiva y el Lema 5.1 obtenemos

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{k-1} dim\,(W_i) + dim(W_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} dim\,(W_i)\,. \end{aligned}$$

Así concluimos que

$$dim(W) = \sum_{i=1}^{k} dim\,(W_i)\,.$$

Veamos ahora que $\cup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ es base para W. Por hipótesis inductiva $\cup_{i=1}^{k-1} \mathcal{B}_i$ es base para $W_1 + \cdots + W_{k-1}$. Ahora

$$\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i \;=\; \cup_{i=1}^{k-1} \mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_k.$$

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ y $\beta_1, \ldots, \beta_t$ vectores arbitrarios de $\cup_{i=1}^{k-1} \mathcal{B}_i$ y $\mathcal{B}_k$ respectivamente, vamos a probar que el conjunto formado por $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_t$ es un conjunto linealmente independiente. Así,

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{t} d_i \beta_i = \mathbf{0}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{t} d_i\beta_i = -\sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i. \tag{5.15}$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{t} d_i\beta_i \in W_k \cap \sum_{i=1}^{k-1} W_i = \{\mathbf{0}\}$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{t} d_i\beta_i = \mathbf{0} \implies d_i = 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, t,$$

sustituyendo en (5.15) tenemos

$$\sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i = \mathbf{0} \implies c_i = 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, r.$$

Finalmente, concluimos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_t$ son independientes. Como son vectores arbitrarios, resulta que $\cup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ es un conjunto linealmente independiente en W. Además por tener $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} dim(W_i) = dim\, W$ elementos, este conjunto es una base de W. ■

Ahora sí estamos en condiciones de estudiar bajo qué condiciones se cumple la igualdad entre las multiplicidades de un autovalor.

Teorema 5.9 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable si y solo si $ma_A(\lambda) = mg_A(\lambda)$, para todo λ autovalor de A.*

Demostración: Supongamos que A es diagonalizable y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ todos los autovalores distintos de A con $W_1, \ldots, W_k$ sus respectivos autoespacios. Queremos ver que para todo autovalor las multiplicidades coinciden. Por Teorema (5.8) sabemos que

$$mg_A(\lambda_i) \leq ma_A(\lambda_i) \; \forall\, i = 1, \ldots, k.$$

Como A es diagonalizable tiene un conjunto completo de autovectores, esto es, podemos encontrar un conjunto de autovectores de A que son base para $\mathbb{C}^n$, entonces si $\mathcal{B}_i$ es base de W_i para todo $i = 1, \ldots, k$, $\cup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ es base para $\mathbb{C}^n$. Así

$$\begin{aligned} n &= dim\, Nu(\lambda_1 I - A) + \cdots + dim Nu\,(\lambda_k I - A) \\ &= mg_A(\lambda_1) + \cdots + mg_A(\lambda_k) \\ &\leq ma_A(\lambda_1) + \cdots + ma_A(\lambda_k) = n, \end{aligned} \tag{5.16}$$

observar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} ma_A(\lambda_i) = n$, pues es la suma de las multiplicidades como raíces del polinomio característico. Volviendo a la expresión obtenida en (5.16) obtenemos

$$mg_A(\lambda_1) + \cdots + mg_A(\lambda_k) = ma_A(\lambda_1) + \cdots + ma_A(\lambda_k)$$

entonces
$$\sum_{i=1}^{k}(ma_A(\lambda_i) - mg_A(\lambda_i)) = 0.$$
Como cada término de la sumatoria es no negativo, se cumple
$$ma_A(\lambda_i) - mg_A(\lambda_i) = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, k.$$
Así finalmente tenemos
$$ma_A(\lambda_i) = mg_A(\lambda_i), \quad \forall\, i = 1, \ldots, k.$$
Recíprocamente, suponemos $ma_A(\lambda_i) = mg_A(\lambda_i)$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$. Por Lema 5.2, sabemos que si $\mathcal{B}_i$ es base de $Nu(\lambda_i I - A)$ para todo $i = 1, \ldots, k$, entonces $\cup_{i=1}^{k}\mathcal{B}_i$ es base de $\sum_{i=1}^{k} Nu(\lambda_i I - A)$ y por el mismo lema, se cumple que
$$dim\left(\sum_{i=1}^{k} Nu(\lambda_i I - A)\right) = \sum_{i=1}^{k} mg_A(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} ma_A(\lambda_i) = n$$
entonces $\cup_{i=1}^{k}\mathcal{B}_i$ es base para $\mathbb{C}^n$. Así encontramos una base para $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A. Luego A es diagonalizable. ■

Ejemplo 5.6: Sean
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 8 & -11 & -8 \\ -10 & 11 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$
Si calculamos los polinomios característicos de cada una de ellas, observamos que coinciden, esto es:
$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2.$$
Luego los autovalores son dos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Sus multiplicidades algebraicas son: $ma_A(\lambda_1) = ma_B(\lambda_1) = 1$ y $ma_A(\lambda_2) = ma_B(\lambda_2) = 2$.

Nos preguntamos ahora si estas matrices son diagonalizables. Para esto, de acuerdo al teorema anterior, debemos ver la multiplicidad algebraica y geométrica para cada autovalor. Si coinciden para todos los autovalores, entonces la matriz es diagonalizable. Sin hacer ninguna cuenta, ¿cuál es $mg_A(\lambda_1)$ y $mg_B(\lambda_1)$? Encontrando los autoespacios para cada caso se observa que
$$\begin{array}{llcll} mg_A(\lambda_1) = 1 & ma_A(\lambda_1) = 1, & & mg_B(\lambda_1) = 1 & ma_B(\lambda_1) = 1 \\ mg_A(\lambda_2) = 1 & ma_A(\lambda_2) = 2, & & mg_B(\lambda_2) = 2 & ma_B(\lambda_2) = 2 \end{array}$$
entonces, podemos decir que A no es diagonalizable y B sí es diagonalizable. □

Pregunta para pensar: Si una matriz sobre $\mathbb{C}$ tiene todos sus autovalores distintos. ¿Es diagonalizable o no?

A continuación estudiaremos algunas propiedades que se cumplen en matrices hermitianas. Recordamos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es *hermitiana* si $A^* = A$. Para las demostraciones de los dos teoremas que siguen necesitaremos el siguiente resultado y consideraremos el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}$:

Proposición 5.1 *Sea A matriz hermitiana $n \times n$. entonces*

$$\langle A\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, A\beta\rangle \ \ \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{C}^n.$$

Demostración: Sean $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}^n$ arbitrarios

$$\langle\, A\alpha,\, \beta\rangle = \beta^* A\alpha = \beta^* A^* \alpha = (A\beta)^*\alpha = \langle\, \alpha,\, A\beta\rangle. \blacksquare$$

Teorema 5.10 *Sea A matriz hermitiana $n\times n$, entonces todos sus autovalores son reales.*

Demostración: Sea λ autovalor de A con autovector asociado α, entonces

$$\langle\, A\alpha,\, \alpha\rangle = \langle\, \lambda\alpha,\, \alpha\rangle = \lambda\langle\, \alpha,\, \alpha\rangle = \lambda||\alpha||^2 \tag{5.17}$$

$$\langle\, \alpha,\, A\alpha\rangle = \langle\, \alpha,\, \lambda\alpha\rangle = \overline{\lambda}\langle\, \alpha,\, \alpha\rangle = \overline{\lambda}||\alpha||^2. \tag{5.18}$$

De la Proposición 5.1, tenemos que las expresiones obtenidas en (5.17) y (5.18) son las mismas, por lo tanto se verifica la siguiente igualdad

$$\lambda||\alpha||^2 = \overline{\lambda}||\alpha||^2,$$

como $\alpha \neq 0$ por ser autovector, resulta $\lambda = \overline{\lambda}$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$. Como λ es un autovalor arbitrario, queda probado el teorema. $\blacksquare$

Teorema 5.11 *Sea A matriz hermitiana $n\times n$. Si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos de A, entonces $Nu(\lambda_1 I - A) \perp Nu(\lambda_2 I - A)$, es decir, los autoespacios asociados a autovalores diferentes son ortogonales.*

Demostración: Sean $\alpha \in Nu(\lambda_1 I - A)$ y $\beta \in Nu(\lambda_2 I - A)$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos asumir $\lambda_1 \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}\langle\, \alpha,\, \beta\rangle \ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1}\langle\, \alpha,\, \beta\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle\, \lambda_1\alpha,\, \beta\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle\, A\alpha,\, \beta\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\langle\, \alpha,\, A\beta\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle\, \alpha,\, \lambda_2\beta\rangle = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\langle\, \alpha,\, \beta\rangle\end{aligned}$$

juntando los extremos de esta igualdad obtenemos

$$\langle\, \alpha,\, \beta\rangle = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\langle\, \alpha,\, \beta\rangle \tag{5.19}$$

si suponemos que $\langle\, \alpha,\, \beta\rangle \neq 0$ de (5.19) resulta que $\lambda_1 = \lambda_2$, lo cual es absurdo pues contradice la hipótesis. Por lo tanto $\langle\, \alpha,\, \beta\rangle = 0$. Como α y β son arbitrarios queda probado el teorema. $\blacksquare$

Definición 5.9 *Sea A matriz real $n\times n$, A se dice **ortogonalmente diagonalizable** si existe Q matriz ortogonal $n\times n$ ($QQ^T = I$) y D matriz diagonal $n\times n$ tal que $A = QDQ^T$.*

Ahora sí vamos a enunciar la propiedad que cumplen las matrices simétricas, que es el objeto de estudio de esta sección.

Teorema 5.12 *Sea A matriz real $n \times n$. La matriz A es simétrica si y solo si es ortogonalmente diagonalizable.*

Demostración: Supongamos que A es ortogonalmente diagonalizable, entonces $A = QDQ^T$ con Q matriz ortogonal $n \times n$ y D matriz diagonal $n \times n$. Entonces

$$A^T = (QDQ^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = QDQ^T = A$$

luego A es simétrica.
Recíprocamente, asumamos que A es simétrica. Para la demostración usaremos inducción sobre n. Para $n = 1$, se verifica trivialmente, basta tomar $Q = [\,1\,]$ y $D = A$. Por hipótesis inductiva suponemos que el teorema se cumple para $n-1$, es decir que si una matriz $(n-1)\times(n-1)$ es simétrica, entonces es ortogonalmente diagonalizable. Vamos a probar el teorema para matrices simétricas $n \times n$. Sea $(\lambda,\, u_1)$ un autopar de A con u_1 unitario (¿por qué podemos garantizar la existencia de λ?). Dado u_1 completamos a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, digamos $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Este conjunto cumple $u_i^T u_j = 0$ para todo $i \neq j$ y $u_i^T u_i = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Definimos V matriz $n \times (n-1)$ cuyas columnas están formadas por los vectores $u_2,\, u_3, \ldots, u_n$ en ese orden y Q_1 matriz $n \times n$ cuyas columnas están formadas por los vectores $u_1,\, u_2, \ldots, u_n$ en ese orden, esto es $Q_1 = [u_1\, V]$. Observar que $Q_1^T Q_1 = I$, así Q_1 es ortogonal. Operamos matricialmente

$$\begin{aligned}
Q_1^T A Q_1 &= \begin{bmatrix} u_1^T \\ V^T \end{bmatrix} A\,[u_1\, V] \\
&= \begin{bmatrix} u_1^T \\ V^T \end{bmatrix} [Au_1\; AV] \\
&= \begin{bmatrix} u_1^T \\ V^T \end{bmatrix} [\lambda u_1\; AV] \\
&= \begin{bmatrix} \lambda u_1^T u_1 & u_1^T AV \\ \lambda V^T u_1 & V^T AV \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Notar que $Q_1^T AQ_1$ es una matriz simétrica, además $u_1^T u_1 = 1$, $V^T u_1 = \mathbf{0}$ y $u_1^T AV = u_1^T A^T V = (Au_1)^T V = \lambda u_1^T V = \mathbf{0}$. Así, uniendo los extremos de estas igualdades y sustituyendo convenientemente tenemos

$$Q_1^T AQ_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^T AV \end{bmatrix}.$$

Ahora $V^T AV$ es una matriz simétrica $(n-1)\times(n-1)$, por lo tanto se cumple la hipótesis inductiva, entonces existe $\tilde{Q}$ matriz ortogonal $(n-1)\times(n-1)$ y $\tilde{D}$ matriz diagonal $(n-1)\times(n-1)$ tal que $V^T AV = \tilde{Q}\tilde{D}\tilde{Q}^T$, sustituyendo en la expresión matricial anterior resulta

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{Q}\tilde{D}\tilde{Q}^T \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{Q}\tilde{D}\tilde{Q}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{Q}^T \end{bmatrix}$$

llamando

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{Q} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{D} \end{bmatrix}$$

resulta

$$Q_1^T A Q_1 = Q_2 D Q_2^T \iff Q_2^T Q_1^T A Q_1 Q_2 = D.$$

Observar que $Q_2 Q_2^T = I$ y tomando $Q = Q_1 Q_2$, tenemos que $QQ^T = Q_1 Q_2 Q_2^T Q_1^T = I$, así Q es una matriz ortogonal. Luego existe Q matriz ortogonal y D matriz diagonal tal que $Q^T A Q = D$, o equivalentemente $A = QDQ^T$. ■

Observación: Si A es simétrica entonces por teorema anterior tenemos

$$Q^T A Q = D$$

o lo que es equivalente

$$AQ = QD \tag{5.20}$$

Si llamamos q_i para $i = 1, \ldots, n$ las columnas de Q y λ_i para $i = 1, \ldots, n$, los elementos de la diagonal de D

$$A\,[q_1 \ldots q_n] = [q_1 \ldots q_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

entonces como hicimos en el Teorema 5.6, resulta $Aq_i = \lambda_i q_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego las columnas de Q corresponden a autovectores de A con los elementos de la diagonal de D sus respectivos autovalores asociados.

Ejemplo 5.7: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, A es simétrica. Usando la observación anterior, vamos a buscar las matrices Q y D garantizadas por el teorema. Para esto debemos hallar los autovalores de A y las bases para los respectivos autespacios.

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$$

Así $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Ahora

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\} &&= gen\{(1,1)^T\} \\ S_{\lambda_2} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\} &&= gen\{(1,-1)^T\} \end{aligned}$$

Por Teorema 5.11, sabemos que los autoespacios son ortogonales entre sí, por lo tanto, si tomamos los vectores de la base de cada autoespacio entre ellos son ortogonales. Para construir Q solo falta que cada uno sea unitario, por lo que normalizamos los vectores,

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

luego

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Para construir la matriz D, se debe cumplir que el primer elemento de la diagonal corresponda al autovalor asociado a q_1 y el segundo elemento de la diagonal corresponda al autovalor asociado a q_2, así

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \square$$

Capítulo 6

Formas Bilineales: Formas Cuadráticas

6.1. Formas Bilineales

El tema central de este capítulo son las formas cuadráticas. Antes de abordar su estudio haremos una breve introducción sobre las formas bilineales, que son soporte de nuestro objeto de estudio.

Definición 6.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y f una función que a cada par de vectores α, β de V le asigna un escalar $f(\alpha,\beta)$ de F. Se dice que f es una **forma bilineal** sobre V si se verifica:*

i. $f(c\alpha_1+\alpha_2,\beta)=cf(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)$, $\forall\,\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V$, $c\in F$.

ii. $f(\alpha,d\beta_1+\beta_2)=df(\alpha,\beta_1)+f(\alpha,\beta_2)$, $\forall\,\alpha,\beta_1,\beta_2\in V$, $d\in F$.

Observaciones:

1. Podemos decir que f es una forma bilineal en V si para cualesquiera α_1, α_2, β_1, $\beta_2\in V$ y c, $d\in F$ se cumple

$$f(c\alpha_1+\alpha_2,d\beta_1+\beta_2)=cdf(\alpha_1,\beta_1)+cf(\alpha_1,\beta_2)+df(\alpha_2,\beta_1)+f(\alpha_2,\beta_2).$$

2. Si f es una forma bilineal entonces

   - $f(\mathbf{0},\beta)=0=f(\alpha,\mathbf{0})$, pues

   $$f(\mathbf{0},\beta)=f(\mathbf{0}+\mathbf{0},\beta)=f(\mathbf{0},\beta)+f(\mathbf{0},\beta)=2f(\mathbf{0},\beta)\Longrightarrow f(\mathbf{0},\beta)=0.$$

   De manera análoga se prueba $f(\alpha,\mathbf{0})=0$.

   - $f(-\alpha,\beta)=(-1)f(\alpha,\beta)=f(\alpha,-\beta)$.

3. El conjunto de todas las formas bilineales, que denotaremos $\mathcal{B}(V)$, es un espacio vectorial sobre F respecto a las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función.

Ejemplo 6.1: Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada par de vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ le asigna el valor

$$f(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 - 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2,$$

f es una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$.
Veamos, sean $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$, además suponemos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, así $c\,\mathbf{x} + \mathbf{z} = (c\,x_1 + z_1,\, c\,x_2 + z_2)$

$$\begin{aligned} f(c\,\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) &= f((c\,x_1 + z_1,\, c\,x_2 + z_2),\, \mathbf{y}) \\ &= 3(c\,x_1 + z_1)y_1 - 6(c\,x_1 + z_1)y_2 + 5(c\,x_2 + z_2)y_1 + 4(c\,x_2 + z_2)y_2 \\ &= c(3x_1y_1 - 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2) + 3z_1y_1 - 6z_1y_2 + 5z_2y_1 + 4z_2y_2 \\ &= c\,f(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) + f(\mathbf{z},\, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ y $d \in \mathbb{R}$ y suponemos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, así $d\,\mathbf{y} + \mathbf{w} = (d\,y_1 + w_1,\, d\,y_2 + w_2)$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\, d\,\mathbf{y} + \mathbf{w}) &= f(\mathbf{x},\, (d\,y_1 + w_1,\, d\,y_2 + w_2)) \\ &= 3\,x_1(d\,y_1 + w_1) - 6x_1(d\,y_2 + w_2) + 5\,x_2(d\,y_1 + w_1) + 4\,x_2(d\,y_2 + w_2) \\ &= d(3x_1y_1 - 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2) + 3x_1w_1 - 6x_1w_2 + 5x_2w_1 + 4x_2w_2 \\ &= d\,f(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x},\, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2: Los productos internos sobre $\mathbb{R}$ son formas bilineales sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.3: Sea $A \in F^{n\times n}$. Entonces $f : F^n \times F^n \longrightarrow F$, $f(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ es una forma bilineal sobre F^n.

6.2. Expresión analítica de una forma bilineal

Definición 6.2 *Sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V espacio vectorial de dimensión n. Sea $a_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$ para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$. La matriz A cuyos elementos son los escalares a_{ij} se llama* ***matriz de f respecto a la base*** *$\mathcal{B}$ y se denota $[f]_{\mathcal{B}}$.*

Ejemplo 6.4: Sea f la forma bilineal dada en el Ejemplo 6.1. Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$f(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 - 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2,$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= f(e_1, e_1) = 3 \\ a_{12} &= f(e_1, e_2) = -6 \\ a_{21} &= f(e_2, e_1) = 5 \\ a_{22} &= f(e_2, e_2) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observación: Si se cambia la base, la matriz de f respecto a $\mathcal{B}$, esto es $[f]_{\mathcal{B}}$, también cambia.

Teorema 6.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y sea $f : V \times V \longrightarrow F$ una forma bilineal. Si V tiene dimensión n y $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una base de V entonces para todo $\gamma, \beta \in V$*

$$f(\gamma, \beta) = [\gamma]_{\mathcal{B}}^T [f]_{\mathcal{B}} [\beta]_{\mathcal{B}}.$$

Demostración: Dados $\gamma, \beta \in V$ sean

$$[\gamma]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Luego por ser f una forma bilineal

$$\begin{aligned} f(\gamma, \beta) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j\alpha_j\right) &= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j\alpha_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\alpha_i, \alpha_j) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(\gamma, \beta) = [\gamma]_{\mathcal{B}}^T [f]_{\mathcal{B}} [\beta]_{\mathcal{B}}. \blacksquare$$

Definición 6.3 *Dado V espacio vectorial sobre el cuerpo F, $f : V \times V \longrightarrow F$ una forma bilineal y $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V, la expresión $f(\gamma, \beta) = [\gamma]_{\mathcal{B}}^T [f]_{\mathcal{B}} [\beta]_{\mathcal{B}}$ se llama* ***expresión analítica de*** *f.*

Ejemplo 6.5: Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 6x_1y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$$

para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Tomemos $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}, \quad [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y} \quad \text{y} \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

luego, siguiendo el teorema, la expresión analítica de f está dada por: $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}^T [f]_{\mathcal{B}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}^T [f]_{\mathcal{B}} \mathbf{y}$.

Observación: Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ es una matriz tal que para todo $\gamma, \beta \in V$ se cumple $f(\gamma, \beta) = [\gamma]_{\mathcal{B}}^T A [\beta]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base ordenada de F^n, entonces $a_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$, esto es $[f]_{\mathcal{B}} = A$. Veamos esto:

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = ([f]_{\mathcal{B}})_{ij}$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha_i, \alpha_j) =& [\alpha_i]_{\mathcal{B}}^T A [\alpha_j]_{\mathcal{B}} = e_i^T A e_j \\
=& [0 \cdots \underbrace{1}_{i} \cdots 0] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} e_j \\
=& [a_{i1}\, a_{i2} \cdots a_{in}]\, e_j \\
=& a_{ij}
\end{aligned}$$

luego $[f]_{\mathcal{B}} = A$.

En el siguiente teorema veremos la relación que existe entre las matrices que representan una forma bilineal en distintas bases.

Teorema 6.2 *Sea V un espacio vectorial sobre F de dimensión finita y sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases ordenadas de V. Sea $f : V \times V \longrightarrow F$ una forma bilineal, si A es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ entonces*

$$[f]_{\mathcal{B}_2} = A^T\, [f]_{\mathcal{B}_1}\, A.$$

Demostración: Por la observación anterior, basta ver que $f(\alpha, \beta) = [\alpha]_{\mathcal{B}_2}^T \left(A^T\, [f]_{\mathcal{B}_1}\, A\right) [\beta]_{\mathcal{B}_2}$ para todo $\alpha,\, \beta \in V$. Recordando, del Capítulo 1 sección 4 se cumple $A\, [\alpha]_{\mathcal{B}_2} = [\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ y $A\, [\beta]_{\mathcal{B}_2} = [\beta]_{\mathcal{B}_1}$. Ahora

$$\begin{aligned}
[\alpha]_{\mathcal{B}_2}^T \left(A^T\, [f]_{\mathcal{B}_1}\, A\right) [\beta]_{\mathcal{B}_2} &= \left(A\, [\alpha]_{\mathcal{B}_2}\right)^T\, [f]_{\mathcal{B}_1}\, \left(A\, [\beta]_{\mathcal{B}_2}\right) \\
&= [\alpha]_{\mathcal{B}_1}^T\, [f]_{\mathcal{B}_1} [\beta]_{\mathcal{B}_1} \\
&= f(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(\alpha, \beta) = [\alpha]_{\mathcal{B}_2}^T \left(A^T\, [f]_{\mathcal{B}_1}\, A\right) [\beta]_{\mathcal{B}_2}\ \forall\, \alpha,\, \beta \in V$$

luego $[f]_{\mathcal{B}_2} = A^T\, [f]_{\mathcal{B}_1}\, A$. ■

Corolario 6.1 *La expresión analítica de una forma bilineal es independiente de la base del espacio vectorial considerada.*

6.2.1. Formas bilineales simétricas y antisimétricas

Definición 6.4 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y $f : V \times V \longrightarrow F$ una forma bilineal. Se dice que f es* ***simétrica*** *si $f(\alpha,\, \beta) = f(\beta,\, \alpha)$ para todo $\alpha,\, \beta \in V$. Se dice que f es* ***antisimétrica*** *si $f(\alpha,\, \beta) = -f(\beta,\, \alpha)$ para todo $\alpha,\, \beta \in V$.*

Observación 1: Toda forma bilineal se puede escribir como la suma entre una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica. Pues

$$f(\alpha, \beta) = \frac{f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)}{2} + \frac{f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)}{2}$$

llamando $f_1(\alpha, \beta) = \dfrac{f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)}{2}$ y $f_2(\alpha, \beta) = \dfrac{f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)}{2}$, resulta

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha, \beta) = \frac{f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)}{2} &= \frac{f(\beta, \alpha) + f(\alpha, \beta)}{2} &= f_1(\beta, \alpha), \\
f_2(\alpha, \beta) = \frac{f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)}{2} &= -\frac{f(\beta, \alpha) - f(\alpha, \beta)}{2} &= -f_2(\beta, \alpha).
\end{aligned}$$

Así $f_1(\alpha,\beta) = f_1(\beta,\alpha)$ y $f_2(\alpha,\beta) = -f_2(\beta,\alpha)$. Luego f_1 es simétrica y f_2 antisimétrtica.

Observación 2: Los conjuntos de las formas bilineales simétricas y antisimétricas son subespacios del espacio $\mathcal{B}(V)$. (Ejercicio)

Observación 3: Sea V espacio vectorial de dimensión finita, $f : V \times V \longrightarrow F$ una forma bilineal y A la matriz de f respecto a alguna base de V, entonces

1. f es simétrica si y solo si A es simétrica. (Ejercicio)

2. f es antisimétrica si y solo si A es antisimétrica. (Ejercicio)

6.3. Formas cuadráticas

Definición 6.5 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Se llaman **formas cuadráticas** definidas en V a las funciones $\mathcal{Q} : V \longrightarrow F$ tal que $\mathcal{Q}(\alpha) = f(\alpha,\alpha)$ $\forall\, \alpha \in V$, donde $f : V \times V \longrightarrow F$ es una forma bilineal simétrica.*

Ejemplo 6.6: Si V es el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0,1]$ sobre $\mathbb{R}$, la función $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(g(t),\, h(t)) = \int_0^1 g(t)h(t)dt,$$

con $g(t),\, h(t) \in V$, es una forma bilineal simétrica. La forma cuadrática asociada a f es la aplicación

$$\mathcal{Q}(g(t)) = \int_0^1 (g(t))^2\, dt.$$

Ejemplo 6.7: Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica definida mediante la expresión

$$f(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 8x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

La forma cuadrática asociada a f es la aplicación $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 8x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2.$$

En el Teorema 6.1, vimos que si f es una forma bilineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita, podemos representarla por una expresión analítica.

$$f(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

con $\mathcal{B}$ una base ordenada del espacio vectorial, $[f]_{\mathcal{B}} = A$, $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, $(\mathbf{x})_i = x_i$, $[\beta]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$, $(\mathbf{y})_j = y_j$, para todo $i = 1,\ldots,n$ y $j = 1,\ldots,n$.

En lo que sigue estamos interesados en las formas cuadráticas definidas sobre $\mathbb{R}^n$. Así, si f es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^n$, la forma cuadrática asociada está dada por la expresión

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

o equivalentemente
$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\, \mathbf{x},$$
donde $A = [f]_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ahora como f es simétrica entonces A es simétrica; luego volviendo a lo estudiado en el Capítulo 5, Teorema 5.12 tenemos que existe $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matriz ortogonal y $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matriz diagonal tal que
$$A = QDQ^T,$$
así,
$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T QDQ^T \mathbf{x} \tag{6.1}$$
y llamando $\mathbf{v} = Q^T\mathbf{x}$ y sustituyendo en la expresión anterior tenemos
$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T D\mathbf{v}. \tag{6.2}$$
Como D es diagonal y sus elementos de la diagonal son los autovalores de A, llamando
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$
podemos reescribir (6.2)
$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T D\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_n v_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 \end{aligned}$$
$$\therefore \quad \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2. \tag{6.3}$$

En lo que sigue, vamos a aplicar lo que desarrollamos para formas cuadráticas para estudiar ecuaciones cuadráticas.

Primero recordemos que una ecuación cuadrática en varias variables, es una expresión de la forma
$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c = 0 \tag{6.4}$$
con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $c \in \mathbb{R}$. Ahora, en nuestro desarrollo vamos a considerar la ecuación cuadrática sin término lineal, pues del análisis a este término y realizando operaciones algebraicas convenientes, podremos tranformar la expresión (6.4) en una ecuación más simple de resolver. Se deja como ejercicio, realizar este desarrollo.

Así, una ecuación cuadrática sin término lineal, es una expresión de la forma

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = d, \tag{6.5}$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = d. \tag{6.6}$$

Si A es simétrica, al término de la izquierda de la ecuación anterior, podemos interpretarlo como la forma cuadrática de una forma bilineal simétrica. Así hallando Q matriz ortogonal $n \times n$, D matriz diagonal $n \times n$ tal que $A = QDQ^T$ y haciendo el cambio de variable $\mathbf{v} = Q^T\mathbf{x}$, es posible reescribir la ecuación cuadrática (6.6) como

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 = d. \tag{6.7}$$

Luego dependiendo de los valores de $\lambda_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n$ y de d es posible estudiar y describir el conjunto solución de esta ecuación en las variables $v_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n$.

Para ejemplificar esto último vamos a considerar el caso $n = 2$. Tomando $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ la ecuación (6.7) puede ser escrita como:

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 = d \tag{6.8}$$

¿Qué representa esta ecuación? Dependiendo de los valores de λ_1, λ_2 y d quedan determinadas las distintas **cuádricas** en $\mathbb{R}^2$ respecto a las variables v_1 y v_2, es decir, podemos determinar cuál es la naturaleza de la cónica. Por ejemplo, si λ_1, λ_2 y d son todas constantes positivas (mayores estrictas a cero) o todas constantes negativas (menores estrictas a cero), la ecuación anterior representa una elipse o un círculo. Si λ_1 y λ_2 son ambas no nulas y tienen signos distintos signo, representa una hipérbola. Así, variando estas constantes, obtenemos los distintos conjuntos solución para la ecuación (6.8), que pueden ser las diferentes cuádricas o también el conjunto vacío.

Veamos algunas observaciones de lo desarrollado hasta aquí:

Observación 1: En la ecuación (6.6) las variables del problema están representadas por los $x_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n$. Allí aparecen los productos cruzados de las incógnitas, esto es, los términos $x_i x_j$ con $i \neq j$, mientras que en la ecuación (6.7) las variables están dadas por los $v_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n$, y en esta nueva expresión no aparecen los productos cruzados de las variables, es decir, los términos de la forma $v_i v_j$ con $i \neq j$, por lo que resulta menos complejo analizar este nuevo problema.

Observación 2: El cambio de variables que hacemos está dado por $\mathbf{v} = Q^T\mathbf{x}$, o equivalentemente, $\mathbf{x} = Q\mathbf{v}$. Si $q_1, \ldots, q_n$ corresponden a las columnas de Q de la primera a la última en ese orden, podemos escribir el cambio de variables anterior como

$$\mathbf{x} = [q_1 \cdots q_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 q_1 + \cdots + v_n q_n$$

entonces

$$\mathbf{x} = v_1 q_1 + \cdots + v_n q_n. \tag{6.9}$$

Ahora como $q_1, \ldots, q_n$ forman una base para $\mathbb{R}^n$ (pues son n vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes), si llamamos $\mathcal{B}'$ la base ordenada formada por los vectores $q_1, \ldots, q_n$ en ese orden, de la expresión (6.9) resulta

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

es decir, los escalares $v_1, \ldots, v_n$ son las componentes de $\mathbf{x}$ en el nuevo sistema de coordenadas formado por la base ordenada $\mathcal{B}'$.

6.3.1. Ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^2$

En lo que sigue estudiaremos ecuaciones cuadráticas para el caso $n = 2$. Por lo desarrollado antes, debemos hallar la matriz simétrica asociada a dicha ecuación, veamos esto: Una ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^2$ es una expresión de la forma

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = d. \tag{6.10}$$

Sabemos que la expresión analítica de una forma cuadrática es

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

como A es simétrica $A_{12} = A_{21}$ entonces:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Volviendo a (6.10) e interpretando el lado izquierdo como la forma cuadrática, podemos igualar esa expresión con esta última y así obtenemos

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a_{11} &= a \\ a_{12} &= \frac{b}{2} \\ a_{22} &= c. \end{aligned}$$

Luego la matriz simétrica asociada a la ecuación cuadrática (6.10) es:

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.8: Considerar la ecuación cuadrática: $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$. Determinar el lugar geométrico que ocupan los puntos que satisfacen esta ecuación.

Debemos encontrar la cónica representada por esta ecuación. Por lo desarrollado hasta aquí, lo primero que debemos hacer, es hallar la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Por lo que acabamos de analizar resulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora debemos hallar los autovalores y los autovectores para encontrar las matrices D y Q.

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2),$$

entonces $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Ahora por el Ejemplo 5.7

$$S_{\lambda_1} = Nu(\,0I - A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\} = gen\{(1,1)^T\}$$
$$S_{\lambda_2} = Nu(\,2I - A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\} = gen\{(-1,1)^T\}$$

entonces

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ahora llamando $\mathbf{v} = Q^T\mathbf{x}$, la ecuación en el nuevo sistema es

$$0v_1^2 + 2v_2^2 = 1$$

o equivalentemente

$$2v_2^2 = 1 \Longleftrightarrow |v_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

esta ecuación representa una cónica degenerada: dos rectas paralelas al eje v_1 por $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Analicemos ahora qué representa el nuevo sistema de variables v_1, v_2 respecto al sistema original de variables x_1, x_2. Por lo desarrollado en la observación 2 de esta sección, la base para el nuevo sistema está dada por la columnas de Q y esta matriz es una matriz de rotación en sentido antihorario por un ángulo de $\pi/4$ radianes, por lo que el nuevo sistema corresponde a una rotación de $\pi/4$ radianes en sentido antihorario respecto al sistema original.

A continuación representamos gráficamente el conjunto solución. En la figura están dibujados en línea continua negra los ejes cartesianos en las variables x_1, x_2 en línea punteada verde los ejes del sistema en las variables v_1, v_2 en azul las rectas paralelas con ecuaciones $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ que corresponden a las rectas $x_2 = x_1 - 1$ y $x_2 = x_1 + 1$ respectivamente. Observar que la ecuación cuadrática

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$$

puede ser pensada también como la ecuación cuadrática

$$(x_1 - x_2)^2 = 1,$$

despejando de esta última expresión, obtenemos las ecuaciones de las rectas $x_2 = x_1 - 1$ y $x_2 = x_1 + 1$. Gráficamente:

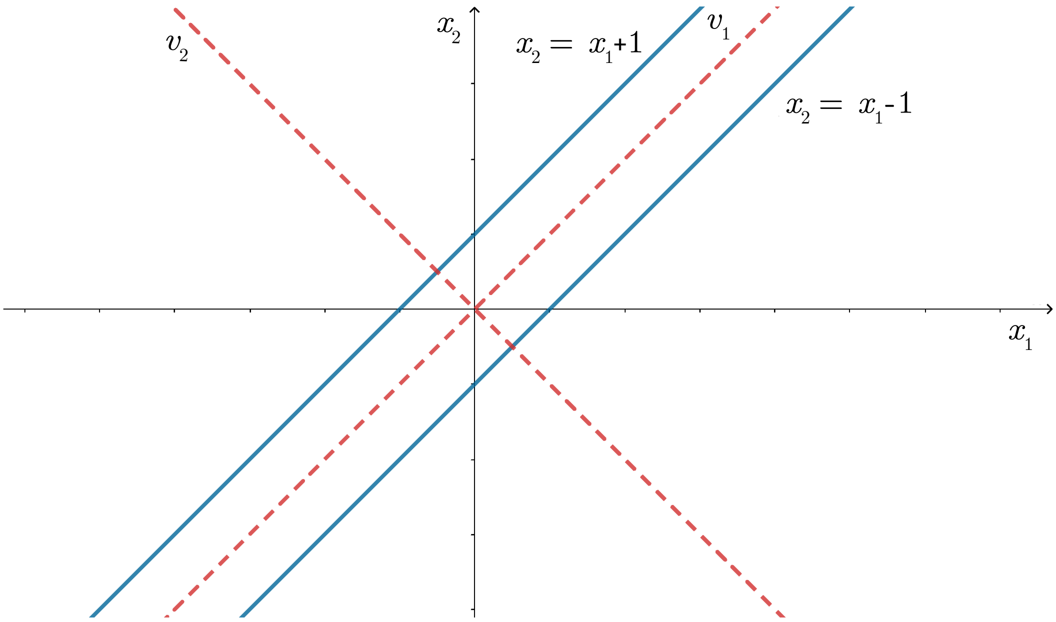


Figura 6.1: *Ejemplo 6.8*

Volvamos a la matriz ortogonal Q para el caso 2×2. Sabemos que debe cumplirse $QQ^T = I$. Así si

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces

$$QQ^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $det(Q) = 1$ ó $det(Q) = -1$ y además resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$ con la condición que $ab = -cd$ y $ac = -bd$. Surgen varias posibilidades pero agregamos una condición: pedimos que Q tenga determinante positivo, así $det(Q) = 1$. Eligiendo la siguiente matriz

$$Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

(la otra posibilidad para Q es una matriz semejante a esta) como $a^2 + b^2 = 1$, tenemos que (a, b) pertenece a la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas, entonces existe un único $\theta \in [0,\, 2\pi)$ tal que $a = \cos(\theta)$ y $b = \mathrm{sen}(\theta)$, luego

$$Q = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es conocida como **matriz de rotación de ángulo** θ y representa una rotación de ángulo θ en el plano en sentido antihorario.

Resumimos lo desarrollado aquí en el siguiente teorema:

Teorema 6.3 *Sea $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = d$ una ecuación cuadrática en las variables x_1, x_2. Entonces existe un único $\theta \in [0,\, 2\pi)$ tal que dicha ecuación puede escribirse en la forma*

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 = d$$

donde v_1, v_2 son los ejes que se obtienen al rotar los ejes x_1, x_2 un ángulo θ en sentido antihorario y los valores λ_1, λ_2 corresponden a los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.9: Consideremos la ecuación cuadrática

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 4.$$

Queremos identificar la cónica que representa. Primero debemos identificar la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda - 5)^2 - 1 = (\lambda - 4)(\lambda - 6).$$

Como $d > 0$ y los autovalores de A son positivos y distintos, entonces la ecuación representa una elipse. Veamos el ángulo de rotación, para ello buscamos los autovectores de la matriz.

$$\begin{array}{lclclcl} S_{\lambda_1} & = & Nu(4I - A) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\} & = & gen\{(1,1)^T\} \\ S_{\lambda_2} & = & Nu(6I - A) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\} & = & gen\{(-1,1)^T\} \end{array}$$

entonces

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

observar que la matriz Q debe tener determinante positvo, es por esto que elegimos este orden para ubicar los autovectores. Además es una matriz de rotación de ángulo $\pi/4$ radianes ¿Cómo encontramos el ángulo?, para ello debemos igualar los elementos componente a componente de esta matriz con los de la matriz de rotación definida anteriormente, así obtenemos

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y el único θ en $[0, 2\pi)$ que satisface estas ecuaciones es $\theta = \pi/4$. Por lo tanto Q representa una rotación de ángulo $\pi/4$ en sentido antihorario. La matriz D debe ser construida tal que el primer elemento de la diagonal corresponda al autovalor asociado a la primer columna de Q y el segundo elemento de la diagonal corresponda con el autovalor asociado a la segunda columna de Q. Con ese orden establecido, llamamos λ_1 al primer elemento de la diagonal y λ_2 al segundo elemento de la diagonal. Ahora sabemos que la ecuación de la cónica en el nuevo sistema está dada por

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 = d,$$

sustituyendo los valores de λ_1, λ_2 y d de este problema obtenemos:

$$4v_1^2 + 6v_2^2 = 4$$

o equivalentemente

$$v_1^2 + \frac{v_2^2}{\frac{2}{3}} = 1,$$

esta cónica representa una elipse de radio mayor 1 sobre el eje v_1 y radio menor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ sobre el eje v_2. El sistema v_1, v_2 corresponde a una rotación de $\pi/4$ radianes respecto al sistema original que se obtuvo por el cambio de variables: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Gráficamente:

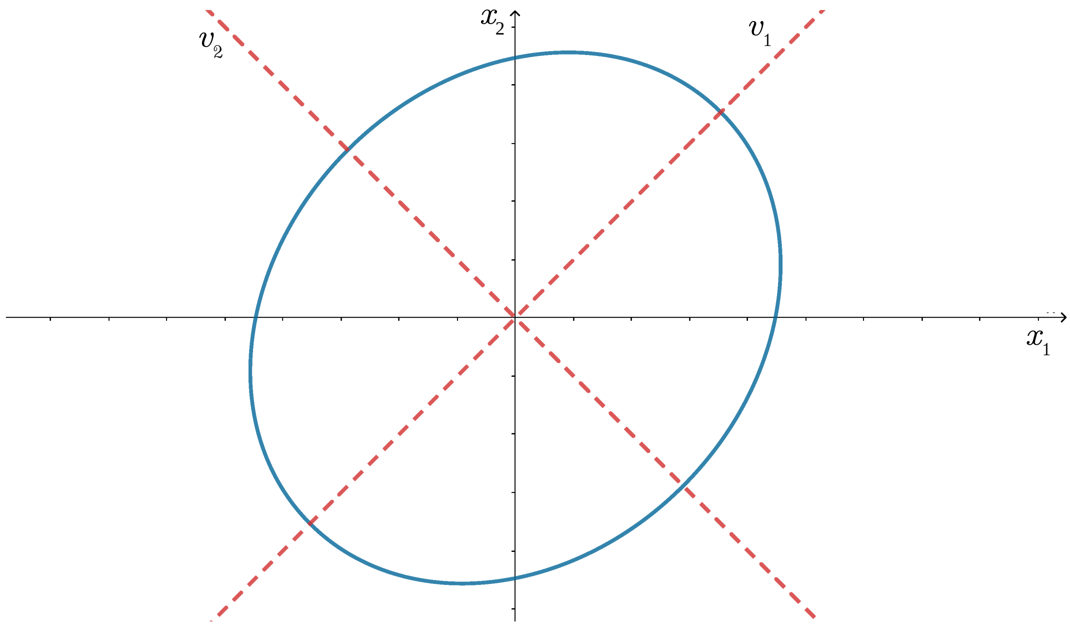


Figura 6.2: *Ejemplo: 6.9*

Ejemplo 6.10: Consideremos la ecuación cuadrática

$$x_1 x_2 = 1.$$

Queremos identificar la cónica que representa. Si despejamos la variable y de la ecuación anterior deducimos que la gráfica que describen los puntos que satisfacen esa ecuación corresponde a la gráfica de una hipérbola, vamos a encontrar esos puntos usando lo estudiado en este capítulo. Primero debemos identificar la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática y calcular su polinomio característico:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \frac{1}{4} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right).$$

Así, A tiene dos autovalores con distinto signo y como $d \neq 0$ entonces la cónica representa una hipérbola. Busquemos la base para el nuevo sistema, para eso debemos hallar los autovectores asociados a cada autovalor:

$$\begin{array}{lllllll} S_{\lambda_1} & = & Nu(\frac{1}{2}I - A) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\} & = & gen\{(1,1)^T\} \\ S_{\lambda_2} & = & Nu(-\frac{1}{2}I - A) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\} & = & gen\{(-1,1)^T\} \end{array}$$

entonces

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Como en el ejemplo anterior, el nuevo sistema se obtiene de una rotación en sentido antihorario de $\pi/4$ radianes respecto al sistema original y la base ordenada para este nuevo sistema está dada por los vectores q_1, q_2 que son las columnas de la matriz Q. La cónica en este nuevo sistema está dada por la ecuación:

$$\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 = 1$$

equivalentemente

$$\frac{v_1^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{v_2^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola centrada en el origen con vértices en $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$ en el sistema v_1, v_2 como se muestra en la siguiente figura:

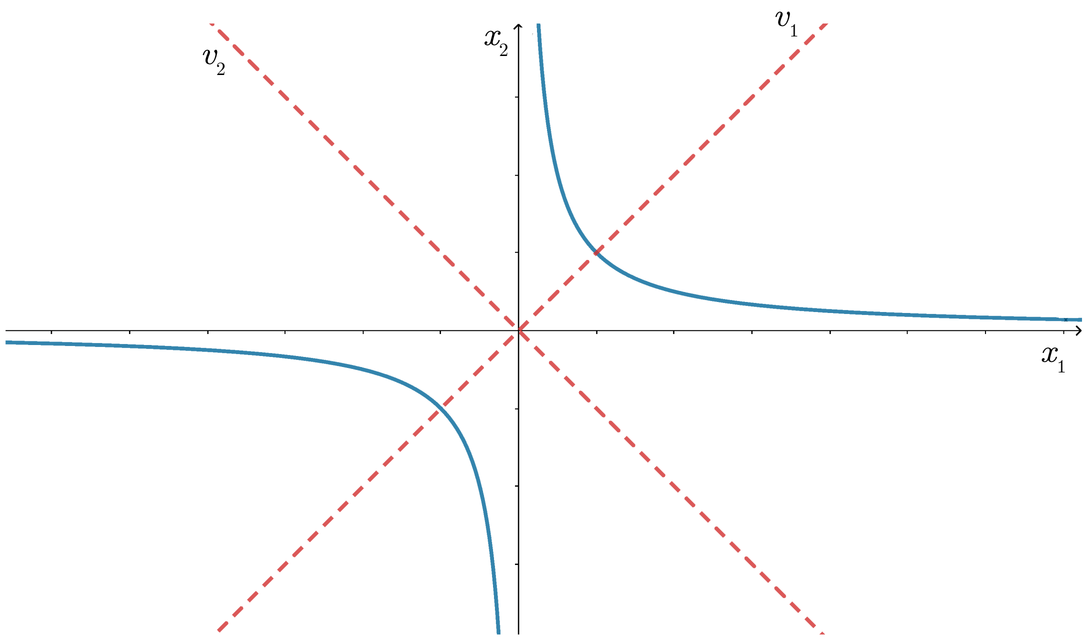


Figura 6.3: *Ejemplo: 6.10*

Analicemos un último ejemplo para el caso $n = 2$:

Ejemplo 6.11: Determinar el conjunto de puntos que satisfacen la siguiente ecuación cuadrática

$$13x_1^2 - 6\sqrt{3}\,x_1x_2 + 7x_2^2 - 16 = 0.$$

Buscamos la matriz simétrica asociada y hallamos su polinomio característico:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda - 13)(\lambda - 7) - 27 = (\lambda - 4)(\lambda - 16).$$

Así, A tiene dos autovalores distintos con mismo signo y como $d > 0$ entonces la cónica representa una elipse. Busquemos la base para el nuevo sistema, para eso debemos hallar los autovectores asociados a cada autovalor:

$$\begin{array}{rclclcl} S_{\lambda_1} & = & Nu(\,4I - A) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \sqrt{3}\,x_1\} & = & gen\{(1, \sqrt{3})^T\} \\ S_{\lambda_2} & = & Nu(\,16I - A) & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -\sqrt{3}\,x_2\} & = & gen\{(-\sqrt{3}, 1)^T\} \end{array}$$

entonces

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

La base para el nuevo sistema son las columnas q_1 y q_2 de Q y esta matriz es una matriz de rotación tal que:

$$cos(\theta) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

entonces $\theta = \pi/3$ radianes, por lo que el nuevo sistema corresponde a una rotación de ángulo $\pi/3$ radianes respecto al sistema original. La ecuación de la cónica en este nuevo sistema es:

$$4v_1^2 + 16v_2^2 = 16$$

equivalentemente

$$\frac{v_1^2}{2^2} + v_2^2 = 1$$

que es la ecuación de una elipse centrada en el origen con vértices en $(\pm 2, 0)$ y en $(0, \pm 1)$ en el sistema v_1, v_2 como se muestra en la siguiente figura:

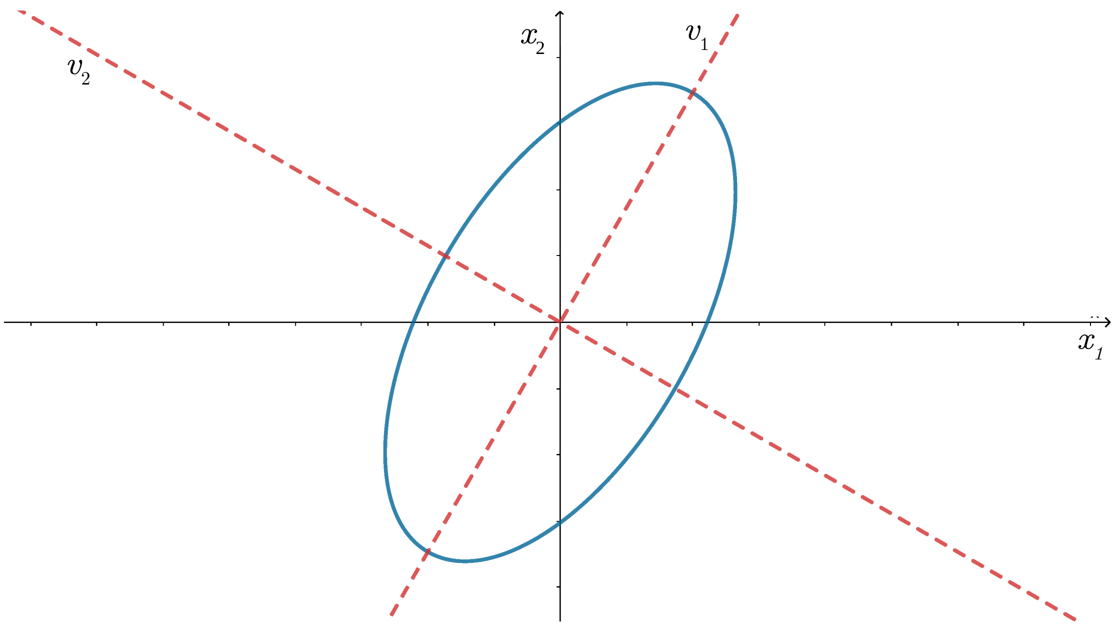


Figura 6.4: *Ejemplo: 6.11*

6.3.2. Ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^3$

Para finalizar este cuadernillo, vamos a analizar las formas cuadráticas definidas en $\mathbb{R}^3$. Para esto caso solo nos limitaremos a identificar la superficie cuádrica que represente la ecuación cuadrática dada sin término lineal. Los detalles del análisis con término lineal se dejan como ejercicio. Primero vamos a encontrar la matriz simétrica asociada a la siguiente ecuación:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1x_3 + dx_2^2 + ex_2x_3 + fx_3^2 = g. \tag{6.11}$$

La matriz buscada es simétrica y de tamaño 3×3. Por otro lado sabemos que la expresión analítica de una forma cuadrática es

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

como A es simétrica $a_{ij} = a_{ji}$ para $i, j = 1, 2, 3$, entonces reagrupando resulta:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

Volviendo a (6.11) e interpretando el lado izquierdo como la forma cuadrática, podemos igualar esa expresión con esta última y despejando obtenemos:

$$\begin{array}{rclcrcl} a_{11} & = & a & \qquad & a_{22} & = & d \\ a_{12} & = & \dfrac{b}{2} & & a_{23} & = & \dfrac{e}{2} \\ a_{13} & = & \dfrac{c}{2} & & a_{33} & = & f \end{array}$$

luego la matriz simétrica asociada a la ecuación cuadrática (6.11) es:

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & d & \frac{e}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}.$$

Una vez identificada la matriz simétrica asociada, haciendo el cambio de variables correspondientes y teniendo en cuenta la expresión (6.7) para $n = 3$, la ecuación (6.11) se transforma en

$$\lambda_1v_1^2 + \lambda_2v_2^2 + \lambda_3v_3^2 = g.$$

Dependiendo de los valores de λ_1, λ_2, λ_3 y g es posible identificar las diferentes cuádricas.

Ejemplo 6.12: Consideremos la ecuación cuadrática

$$5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 = 100.$$

Queremos identificar la superficie cuádrica que representa. Primero determinamos la matriz simétrica asociada. Por lo antes desarrollado resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10),$$

llamando

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 \;\text{ y }\; \lambda_3 = 10$$

y escribiendo la expresión (6.7) para $n = 3$ resulta

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 = d.$$

Si sustituimos $d = 100$ y los valores obtenidos de los autovalores en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación cuadrática en el nuevo sistema

$$v_1^2 + v_2^2 + 10v_3^2 = 100$$

que representa un elipsoide. La figura dada a continuación corresponde a esta cuádrica en este sistema, es decir en el sistema de coordenadas $v_1\, v_2\, v_3$.

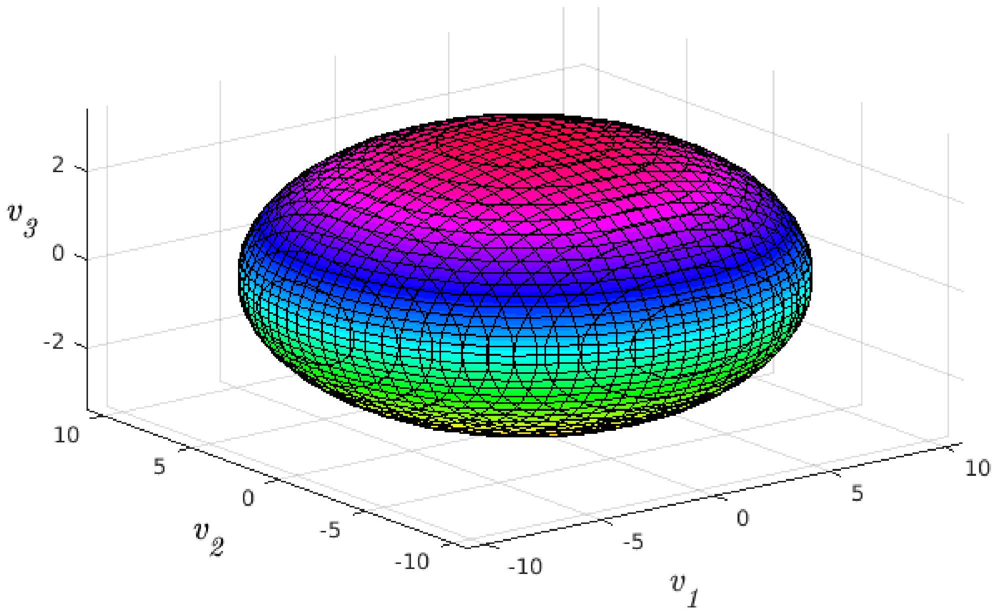


Figura 6.5: *Ejemplo: 6.12*

Con este último tema, abarcamos los contenidos del programa de estudio. En el siguiente curso, a partir de los conceptos desarrollados en este texto, se dará continuidad al estudio de algunos temas como por ejemplo, en el caso de espacio de transfomaciones lineales, se estudiarán funcionales lineales, espacio dual y además de desarrollarán otros temas del álgebra lineal avanzada.

Bibliografía

[1] Hoffman K, Kunze R., *Álgebra lineal*, Printce Hall, 1973.

[2] Jerónimo G., Sabia J., Tesauri S., *Álgebra Lineal*, Fascículo 2, de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA 2008.

[3] Grossman S., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Hill, 1991.

[4] Meyer C. D., *Matrix Analysis anda Applied Linear Algebra*, Siam, Philadelphia 2000.

[5] De Burgos J., *Álgebra lineal* MacGraw Hill, 1996.

[6] Rojo A., *Álgebra II*, Ateneo, 1984.

ISSN – 0325 – 6308

CUADERNOS UNIVERSITARIOS CRUB

01- Nudler, Oscar: Introducción al problema de la fundamentación de la Aritmética. Setiembre 1974

02- Buch, Tomás: Los carbones. Noviembre 1974

03- Buch, Tomás: Uniones químicas: La teoría electrónica de la valencia. Diciembre 1974

04- Barreiro, Telma: Etica, individuo y sociedad. Febrero 1975

05- Hernández, Enrique: Positivismo y cientificismo en la Argentina. Diciembre 1975

06- Porta de Bressan, Ana María: Sistemas y Bases de numeración. Algunas propiedades numéricas en distintas bases. Febrero 1976

07- Sanchez y Juliá, Enrique: Sociedad indígena y conquista del desierto. Norpatagonia. Etnohistoria. Abril 1976

08- Guala, Jorge y Angel Bastiancіq: Las cantidades y sus medidas. Abril 1977

09- Daleo, Gustavo Raúl: Mecanismos moleculares en memoria y aprendizaje. Agosto 1977

10- Bressan, Ana y Monserrat de la Cruz: Piaget y la enseñanza del tiempo en nuestra escuela. Noviembre 1977

11- de la Cruz, Monserrat; Telma Barreiro y Ana M. Sorocinschi: Una experiencia del perfeccionamiento docente universitario centrada en el factor humano y la dinámica grupal. Octubre 1982

12- Barreiro, Telma: Escuela, aprendizaje y afectividad. Marzo 1983

13- Lopardo, Gabriel: Socioecología del mono aullador negro *Alquatta caraya*: un diseño para investigación. Noviembre 1984

14- Grigera, Dora y Sigfrido Rubulis: Aves de la cuenca del Río Manso Superior (Prov. de Río Negro). Abril 1985

15- Grigera, Dora; Claudio Romero y Adriana Ramassotto: Los problemas ambientales de Bariloche: su detección por medio de una encuesta a un sector de la comunidad. Enero 1986

16- El ADN: su descubrimiento, organización y manipulación. *Conferencia dada por el Dr. James Watson en el Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue.* Julio 1986

17- Panorama actual de la Acuicultura en la Argentina. Primera Reunión Argentina de Acuicultura, Bariloche, 19 al 24 de abril de 1987. Secretaría de Investigación, CRUB - UNC. Abril 1987

18- Bianchi, Elena: Estudio Ecológico de la Pampa de Huenuleo (San Carlos de Bariloche, Prov. Río Negro) Parte 1: Geomorfología. Octubre 1987

19- de la Cruz, Monserrat y M. Susana Lolich: Confrontación cultural y fracaso escolar. 1987

20- Ferraris, Cristina: Orientación en el plano y en el espacio. 1993

21- de Torres Curth, Mónica y V. Montoro: Teoría de Matrices, aplicación a la Biología. 1993

22- Siñeriz, Liliana: Métodos y heurísticas de resolución de problemas. 1994

23- Ferraris, Cristina: Construcciones con regla y compás. 1995

24- Bello, M. Teresa; Marcelo F. Alonso y Miguel de Lourdes Baiz: Rendimiento en peso de los ejemplares de tamaño comercial del pejerrey patagónico. Agosto 1996

25- Montoro, Virginia: Elementos de lógica proposicional. 1997

26- Ferraris, Cristina y Virginia Montoro: Los primos de Fermat y otros parientes aritméticos (taller). 1997

27- Ferraris, Cristina: Una definición geométrica de ángulos. Ordenamiento - suma - aplicación a retaciones. 1997

28- Ferraris, Cristina: Espacios vectoriales y transformaciones lineales. 1997

29- Baiz, Miguel de Lourdes y M. Teresa Bello: Desplazamientos de *Oncorhynchus mykiss (Walb.)* y de *Salmo trutta L.*(Pisces, Salmonidae) en el Lago Nahuel Huapi. 1997

30- Crivelli, Ernesto: Aportes para el conocimiento del comportamiento hídrico de la cuenca del Río Manso Superior. 1998

31- Riestra, Dora: La reenseñanza de la escritura como problema multidisciplinario.1998

32- de Torres Curth, Mónica: Cálculo diferencial: Teoría y aplicaciones. 1998

33- Montoro, Virginia: La teoría de conjuntos. Una mirada histórica y epistemológica. 1999

34- Santinelli, Raquel: Los números reales. Racionales e irracionales. Una mirada histórica y epistemológica. 1999

35- Di Pasquale, Cristina: Modelos matemáticos en poblaciones dinámicas. Diciembre 1999

36- de Torres Curth, Mónica: El concepto de límite, una mirada histórico – epistemológica. 2000

37- Montoro, Virginia y María Teresa Juan: Números complejos. 2000

38- Montoro, Virginia: Anillo de Polinomios. 2000

39- Biscayart, Carolina y Marta Ferrero: Particularidades sobre la estructura algebraica de módulo. 2000.

40- Crivelli, Ernesto: Cálculo del nivel del Lago Nahuel Huapi a partir de datos meteorológicos del Aeropuerto Bariloche. 2000.

41- Di Pasquale, C. y C. Biscayart.: Un camino a la optimización. La programación dinámica. 2001.

42- Grigera Dora y M. Palacio: La percepción de los problemas ambientales de las ciudades de S. C. de Bariloche y de Neuquén por parte de un sector social de su población. 2002.

43- Bello, María Teresa: Los peces autóctonos de la Patagonia Argentina. Distribución natural. 2002.

44- Núñez , Martín y Carolina Quintero: ¿Qué hacer con las especies exóticas invasoras?. Problemática y técnicas de manejo. Algunos ejemplos de especies exóticas en la Patagonia argentina. 2002.

45- Ferraris, Cristina: Siempre hay un espacio para un problema. 2002.

46- Montoro, Virginia y María Teresa Juan: Introducción a la teoría de grafos. 2003.

47- Ferraris, Cristina y Martha Ferrero: Geometría para armar. 2003.

48- Siñeriz, Liliana y Raquel Santinelli: Transformaciones rígidas con Cabri Géomètre II: una aproximación a la teoría axiomática. 2003.

49- de Torres Curth, Mónica; Carolina Biscayart y Ana María Fernández: Lógica informal. 2006

50- Secretaría de Investigación y Extensión CRUB-UNC: Jornadas de Divulgación de las actividades de Extensión Universitaria. “16 años de extensión en el CRUB”, 23-25 de octubre de 2006.

51- Baccalá, Nora y Virginia Montoro: Introducción al análisis multivariado. 2008.

52- Juan, María Teresa y Martha Ferrero: Estudio de cónicas. 2008.

53- Grigera, Dora y Ana Trejo: Aves continentales de las provincias del Neuquén, Río Negro y Chubut; distribución y estado de conservación. 2009.

54- Montoro, Virginia: Estructuras algebraicas: grupos finitos. 2010

55- Siñeriz, Liliana; Cristina Ferraris y Martha Ferrero: Aspectos heurísticos en el proceso de demostración. La trastienda de la matemática. 2010

56- de la Cruz, Montserrat; Nora Scheuer y Ana Pedrazzini: Asesoramiento y capacitación a distancia para investigadores en Ciencias Sociales en el uso de análisis multivariados. Volumen 1: La lexicometría. 2012

57- Baccalá, Nora y Virginia Montoro: Lexicometría; técnicas y estadísticas para análisis de textos escritos, orales y pregintas abiertas. 2013

58- Montoro, Virginia y María de la Trinidad Quijano: Estructura algebraica de grupo, guías de estudio. 2014

59- Garibotti, Gilda: Probabilidad y estadística. 2016

60- Garibotti, Gilda: Introducción al paquete estadístico R. 2016

61- de Torres Curth, Mónica y Astrid Koennecke: Matrices y ecuaciones diferenciales ordinarias con R. Operaciones, cálculos y aplicaciones. 2017

62- de Torres Curth, Mónica; Astrid Koennecke y Claudio Padra: Sucesiones de funciones y el Teorema de Arzelá-Ascoli, una presentación elemental y algunas aplicaciones. 2021

63- Ramirez, Viviana Analía. “Álgebra lineal I”.2022