Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Orientación: Matemática

Tesis de Maestría

Concepciones iniciales de estudiantes de nivel superior sobre la aleatoriedad y la probabilidad

Prof. Mario Álvarez

Maestrando

Dr. Marcel David Pochulu

Director de Tesis

Mgter. Gabriela Pilar Cabrera

Mgter. Silvia Leonor Boché

Co-Directores de Tesis

Concordia, Diciembre de 2019

Dedicatoria

A mi familia por estar siempre y enseñarme con el ejemplo

el valor de la entrega hacia el otro

A Carolina, Joaquín y Martín por ser alimento para mi alma en el día a día

Agradecimientos

En primer lugar, al director de este trabajo Marcel Pochulu, en el desarrollo de la investigación y el paso del tiempo se transformó no sólo en guía académico sino también en amigo. Le agradezco enormemente su gran predisposición y el tiempo que ha dedicado. Lo que más valoro y guardo es la enseñanza que deja a través de su ejemplo. Es una gran persona, muy generosa y de espíritu noble.

A Mabel Rodríguez y a mis co-directoras Gabriela Pilar Cabrera y Silvia Boche.

A mis compañeros de trabajo del Instituto Profesorado Concordia, de la Facultad Regional Concordia de la UTN, de la Facultad de Ciencias de la Alimentación de la UNER (que incluso me han ayudado con una Beca de cuarto nivel) y del Departamento de Matemática y Estadística del Litoral de la UdelaR. En particular al grupo de alumnos ingresantes a la FRCON-UTN y los alumnos de primer año del Profesorado de Matemática. También a Federico Dalmao, Leandro Franchisquini, Cecilia Niez, y Federico De Olivera.

A un montón de personas más, que directa o indirectamente me han ayudado (varios aún muy posiblemente no se han enterado…) y sobre todas las cosas gracias a Dios.

Resumen

La tesis tuvo por finalidad caracterizar las concepciones iniciales de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos “aleatoriedad” y “probabilidad”. Como marco teórico y metodológico se utilizaron herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Como contexto de investigación se realizó una caracterización de las concepciones que tienen los estudiantes ingresantes a la Facultad Regional Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional y de los estudiantes de primer año del Profesorado de Matemática del Instituto Profesorado Concordia D-54 durante el año 2019.

Para la investigación se diseñó e implementó un instrumento teniendo en cuenta el análisis didáctico realizado previamente, sobre las tareas y actividades que proponen 7 libros escolares de matemática del nivel secundario, que son utilizados frecuentemente por los profesores.

La caracterización realizada permitió identificar grupos de estudiantes en los que se detectaron ciertos sesgos y heurísticas en común, lo que contribuiría a una mejor organización en el diseño, tanto de clases como de unidades didácticas referidas a estos temas.

Abstract

The thesis had as a specification to characterize the initial conceptions of the students regarding the mathematical objects "randomness" and "probability". As a theoretical-methodological framework, tools of the Ontosemiotic Approach to knowledge and mathematical instruction were used.

As a research context, a characterization of the conceptions of the students admitted to the Concordia Regional Faculty of the National Technological University and the first year students of the Mathematics Faculty of the Concordia D-54 Teaching Institute during the year 2019 was carried out.

For the investigation, an instrument was designed and implemented taking into account the didactic analysis carried out previously, on the tasks and activities proposed by 7 Mathematics schoolbooks of the secondary level, which are used by teachers.

The characterization carried out identifies the groups of students in which they detect certain biases and heuristics in common, which contributes to a better organization in the design of classes as didactic units referred to these topics.

Un rayo de luz no vuelve a caer en el mismo lugar…

Abel Pintos

Índice

Introducción y delimitación del problema

1.1. Introducción

En el nivel superior los cursos de probabilidad y estadística tienen algunos tópicos que son transversales, tales como las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Estos conceptos fundamentan tanto los procedimientos algorítmicos y de cálculo, como así también, la interpretación de los resultados obtenidos. Una posible dificultad que suelen tener los estudiantes de los primeros años del nivel superior, en el estudio de la estocástica, es carecer de cierta concepción intuitiva que los ayude en la comprensión e interpretación de los resultados que obtienen en las construcciones de objetos centrales de esta rama de la matemática. Este aspecto puede ser menos conflictivo en los modelos deterministas, estudiados por ejemplo en álgebra y geometría analítica, pues si entendemos un experimento como un conjunto de condiciones determinadas que al verificarse producen un resultado (Petrov y Mordecky, 2012), es posible conocer la solución, al menos con suficiente precisión, incluso si el experimento se repite. Por ejemplo, esto se presenta cuando se aplica algún método de resolución de sistemas de ecuaciones para estimar las cantidades en un vector cuyas componentes representen distintos tipos de insumos. Esta situación no ocurre con los modelos probabilísticos, en tanto los resultados obtenidos se suelen vincular a la medida de la posibilidad de que las variables se encuentren en determinados conjuntos de valores.

En este contexto, nuestro foco de estudio está centrado en las concepciones iniciales que tienen los estudiantes sobre los conceptos de aleatoriedad y probabilidad. La noción de **concepción** la entendemos de la siguiente manera:

> Una concepción está determinada por un conjunto relativamente organizado de conocimientos utilizados con bastante frecuencia, y conjuntamente, sobre un conjunto de situaciones (para el cual son pertinentes, adecuados, útiles, etc.), y que se manifiestan mediante un repertorio relativamente estable y limitado de comportamientos, lenguajes, técnicas, etc. (Antibi et Brousseau, 2000, p. 20).

En este sentido, investigadores como Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares (2001) muestran que, para el caso de la aleatoriedad como punto de partida de la teoría de la probabilidad, se la suele considerar como un concepto simple, pero que al ser analizada con detalle surgen múltiples modelos matemáticos asociados a ella. Aún más, Batanero, Gómez, Serrano y Contreras (2012, p. 223) expresan que "la aleatoriedad se ha interpretado de forma diferente en distintos momentos históricos e incluso en la actualidad se resiste a una definición sencilla". Por su parte, Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998) plantean que suele ocurrir que el concepto de aleatoriedad es considerado habitualmente como "obvio" y su significado no es analizado con profundidad durante el desarrollo de los cursos. Además, advierten que se puede suponer que determinados tipos de concepciones sobre la aleatoriedad, resultan ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad. Esto último se relaciona con los aportes de Garfield (1995) quien indica que la enseñanza efectiva de la probabilidad debe apoyarse en el conocimiento previo sobre estas concepciones de los estudiantes, ya que, cuando se enseña algo nuevo, los estudiantes construyen este nuevo conocimiento conectando la nueva información con la que ellos habían asumido previamente como correcta.

Pero más allá de estos planteos, se podría pensar que el estudiante no tiene la obligación de iniciar los estudios con concepciones iniciales correctas sobre estos dos tópicos, puesto que el cursado de la materia debería constituirlas en forma satisfactoria. Sin embargo, esto no necesariamente se cumple de esta manera. Se tiene al menos el antecedente de Lavalle, Micheli y Boché (2003) en el cual analizaron las respuestas a un conjunto de situaciones problemáticas vinculadas a la asignación de probabilidades en alumnas de profesorado de matemática, pero con la particularidad que ya habían cursado la materia Probabilidad y Estadística. En estas producciones, detectaron razonamientos inapropiados en los problemas relacionados con el descuido del tamaño de la muestra y la falacia de la proporción baja, entre otros.

En la misma línea, Díaz (2003) analizó el efecto de la instrucción sobre los sesgos en el razonamiento probabilístico. Concluye que la instrucción en la teoría de probabilidades no es suficiente para superar los errores que se comenten, y postula la necesidad de confrontar los razonamientos intuitivos realizando los experimentos estocásticos, como así también, sugiere el uso de simulaciones.

La problemática planteada anteriormente no escapa a lo que acontece en otras instituciones y con diferentes estudiantes. En particular, se ha manifestado en reiteradas oportunidades en instancias de evaluación continua y de exámenes finales en los estudiantes de las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional (FRCON-UTN) de la ciudad de Concordia, provincia de Entre Ríos, Argentina, y con estudiantes del segundo año del Profesorado de Matemática del Instituto Profesorado Concordia D-54. Por esta razón, surge la motivación indagar acerca de las concepciones iniciales que tienen los estudiantes, pertenecientes a estas carreras e instituciones, respecto a los conceptos de aleatoriedad y probabilidad cuando cursan Probabilidad y Estadística. Como preguntas que dirigen la investigación surgen las siguientes: ¿Cuáles son las concepciones iniciales sobre aleatoriedad y probabilidad de los estudiantes que inician un curso de Probabilidad y Estadística en el nivel superior?, ¿qué prácticas matemáticas caracterizan a estas concepciones?, *¿qué dificultades generarían estas concepciones para la construcción de nuevos objetos matemáticos estocásticos?*

1.2. Relevancia e importancia del estudio

El estudio propuesto se justifica en el sentido de que permite conocer las concepciones iniciales que tienen los estudiantes sobre los conceptos de aleatoriedad y de probabilidad, previo al cursado de la materia o de la unidad didáctica referida a probabilidad, intentando explicar las dificultades que tienen en la resolución de situaciones problemáticas de naturaleza estocástica.

Además, se ofrecen algunos aportes teóricos orientados a la reflexión y al análisis crítico de las prácticas áulicas que actualmente se implementan en el desarrollo de los cursos. Estos aportes permitirían las siguientes acciones:

(a) Facilitar el diseño de actividades de clases de naturaleza estocástica, adecuadas no solo desde el punto de vista didáctico, sino también, epistemológico;

(b) Contar con referencias acerca de las características de las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes cuando resuelven problemas vinculados a la aleatoriedad y a la asignación de probabilidades;

(c) Repensar y sugerir las propuestas de capacitación en las que el diseño de problemas y situaciones de enseñanza que involucran a la probabilidad y la estadística se establezcan como tópicos centrales.

1.3. Objetivos

Para el contexto descripto y considerando el marco teórico presentado, planteamos el siguiente objetivo general y específicos de la investigación.

<u>Objetivo general</u>

- Describir y caracterizar las concepciones iniciales acerca de los objetos matemáticos aleatoriedad y probabilidad en estudiantes de un primer curso de probabilidad y estadística en instancias previas al cursado.

<u>Objetivos específicos</u>

- Identificar componentes del significado, en términos de prácticas operativas, que tienen las concepciones iniciales de los estudiantes sobre aleatoriedad y probabilidad.
- Determinar los conceptos y propiedades que ponen en práctica los estudiantes cuando resuelven problemas de índole estocástica.
- Especificar los procedimientos y técnicas que emplean habitualmente los estudiantes en contextos de resolución de problemas.

1.4. Organización de la memoria de la investigación

En el primer capítulo presentamos la descripción del problema de investigación, los objetivos y la justificación del estudio realizado.

En el segundo capítulo realizamos una revisión bibliográfica de los antecedentes considerados para este trabajo. A su vez, llevamos a cabo una descripción de aspectos, teóricos, metodológicos sobre los resultados obtenidos. Por último, realizamos algunas reflexiones en el marco del problema de investigación y con la intención de resaltar similitudes y diferencias con nuestra investigación.

En el tercer capítulo se tiene el marco teórico que adopta la tesis. En particular, describimos constructos y herramientas centrales del Enfoque Ontosemótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero & Font (2007).

En el cuarto capítulo brindamos detalles sobre el diseño de la investigación mediante la descripción de la metodología empleada, las características de los individuos participantes, el instrumento diseñado y utilizado para la recolección y el análisis de los datos.

En el capítulo 5 presentamos un estudio sobre el significado global o experto de referencia de los objetos aleatoriedad y probabilidad, a través del análisis de documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales, y el análisis didáctico de las tareas y actividades que proponen siete libros de textos escolares utilizados en el nivel medio sobre estos objetos matemáticos en estudio, utilizando herramientas teóricas provenientes del EOS.

En el capítulo 6 analizamos cualitativamente las prácticas operativas de 43 estudiantes (19 ingresantes a la Facultad Regional Concordia de la UTN y 24 del Instituto Profesorado Concordia D-54) que resolvieron las actividades propuestas en el instrumento elaborado y utilizado para el desarrollo de la investigación.

En el capítulo 7 presentamos las conclusiones a las que llegamos con la realización de esta investigación, dando énfasis a los puntos más relevantes y que brindan respuestas a las preguntas que nos formulamos, acordes a los objetivos propuestos. Finalmente, dejamos algunas recomendaciones que a través de reflexiones didácticas hemos podido elaborar en el recorrido de la tesis.

Estado del arte y revisión bibliográfica

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos algunos trabajos de investigación relacionados con nuestro problema de estudio, los cuales aportan elementos centrales para aspectos metodológicos. La descripción la realizamos focalizando aspectos centrales de cada uno de ellos, como el marco teórico utilizado, y los aspectos metodológicos, los resultados que se obtuvieron. Cerramos cada trabajo con una reflexión enmarcada en el problema de investigación de la tesis. También se destacamos los puntos en común y las diferencias con nuestra investigación, deviniendo en los aportes que realizaríamos para ampliar el conocimiento actual sobre las concepciones de aleatoriedad y probabilidad.

Las diferentes investigaciones y reportes los ordenamos de acuerdo al siguiente criterio:

- Trabajos con individuos que no recibieron una formación previa sobre aleatoriedad y probabilidad;
- Trabajos con estudiantes y/o individuos en general que tuvieron una primera formación terciaria y/o universitaria en probabilidad y estadística;
- Trabajos que no necesariamente consistieron en la aplicación de algún instrumento, pero dejan recursos teóricos que fueron de gran importancia para nuestra investigación.

2.2. Investigaciones con individuos sin formación previa sobre aleatoriedad y probabilidad

2.2.1. Concepciones y formas de razonamiento sobre probabilidad en estudiantes de biología y matemática

Rodríguez y Agnelli (2009) realizaron una encuesta a estudiantes de ciencias biológicas y de profesorado de matemática con el fin de indagar acerca de las concepciones y formas de razonamiento desde los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo del objeto matemático probabilidad que tenían estos individuos antes de iniciar un primer curso de estadística.

El instrumento de recolección fue una encuesta realizada el primer día de clases con nueve situaciones problemáticas a resolver, la cual contenía tres planteos para cada uno de los enfoques antes mencionados.

El primer aspecto que destacan del grupo de estudiantes es que menos del 8% confirmó haber recibido nociones de probabilidad en el nivel secundario. A esto agregan que en la bibliografía usual de este nivel, se presentan los desarrollos desde el enfoque clásico y frecuencial, pero no desde el subjetivo.

En cuanto a los resultados de la investigación, encontraron que, en general, no tuvieron inconvenientes en las asignaciones de probabilidad desde el enfoque clásico, pero sostienen que han tomado automáticamente válido el principio de razón insuficiente, es decir, han considerado sin objeción que el espacio muestral es equiprobable. Ante esta cuestión, los autores sugieren la necesidad de dedicar tiempo durante las clases a estas discusiones, pues puede llevar a interpretaciones y cálculos erróneos cuando se pasa de espacios equiprobables a espacios de probabilidad que no lo sean.

Reconocen, además, un déficit importante en las soluciones de los estudiantes para las asignaciones desde el enfoque frecuencial. Concluyen en la necesidad de enfrentar al estudiante a situaciones problemáticas donde sea necesario este tipo de asignaciones, pues son la base para interpretar las distribuciones muestrales, intervalos de confianza y valores p en las pruebas de significación.

Por último, respecto a las asignaciones bayesianas, postulan la necesidad de ser utilizadas en el nivel medio debido al creciente uso en distintas ciencias aplicadas, habiendo encontrado en las producciones de los estudiantes serias dificultades para traducir sus apreciaciones a valores numéricos.

Esta investigación presenta varias coincidencias con nuestro trabajo, puesto que se interesa por las concepciones previas que tienen los estudiantes antes de iniciar un curso introductorio de estadística, diseñan un instrumento y analizan las producciones realizadas por los estudiantes. En nuestro trabajo buscamos ampliar el conjunto de concepciones iniciales debido a que se incluyen también las concepciones acerca del objeto aleatoriedad. Asimismo, se profundiza el estudio respecto a los sesgos y heurísticas que pueden llevar a concepciones deficientes.

Este antecedente es importante para nuestra investigación pues permite reconocer la presencia de ciertos sesgos, creencias y heurísticas en estudiantes que inician un curso de estadística, brindando evidencias que han sido de consideración para el diseño de nuestro instrumento, pues podríamos pensar que las poblaciones a las que se aplicó deberían tener rasgos en común.

Nuestro trabajo ampliaría el aporte que realizan Rodríguez y Agnelli (2009) en el sentido de que se toma un objeto de estudio más amplio (probabilidad y aleatoriedad) y también se permiten realizar las configuraciones epistémicas y cognitivas de los estudiantes. Este conocimiento permitiría el diseño de actividades didácticamente idóneas tomando como puntos de referencias las concepciones iniciales que traen los estudiantes desde el nivel medio.

2.2.2. Conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial en futuros docentes de educación primaria

Gómez, Batanero y Contreras (2013) realizaron un estudio en futuros docentes de nivel primario, pertenecientes al primer año de la carrera, con el fin de indagar sobre los conocimientos tanto didácticos como matemáticos para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial.

La investigación toma como referencia la noción de “conocimiento matemático para la enseñanza”, entendiendo así al conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el estudiante” (Hill, Ball, Schilling, 2008, p. 374), y que está conformado por el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido.

El instrumento consistió en la resolución de una situación problemática que inicialmente implicaba un número grande de repeticiones independientes de un experimento aleatorio (vaciar una caja de 100 chinchetas dejándolas caer aleatoriamente y observar la cantidad que caían de punta y cuáles de costado). En una segunda instancia se les brindaban soluciones realizadas supuestamente por estudiantes, y se formulaban preguntas, por ejemplo, acerca de los conocimientos que consideraban necesarios en sus estudiantes para haber resuelto tal situación.

Los resultados de la investigación muestran, respecto a las intuiciones iniciales sobre probabilidad, que la tercera parte de un total de 150 estudiantes (aproximadamente) evidenciaron una buena intuición simultánea de la convergencia al valor esperado y de la variabilidad muestral. En el resto de los estudiantes se encontraron diferentes sesgos, como el de equiprobabilidad, la heurística de la representatividad o no consideraban posible hacer una predicción.

En estos grupos, luego de la primera instancia de aplicación del instrumento, le siguieron dos instancias más de trabajo grupal con el fin de trabajar aspectos incorrectos en sus soluciones, obteniendo resultados satisfactorios.

Para nuestro trabajo resulta de interés que se hayan puntualizado los razonamientos erróneos mejor identificados: ausencia de variabilidad en los valores dados y la cercanía al 50% de los valores dados. Este aspecto se consideró en una de las situaciones problemáticas del instrumento que diseñamos. A su vez, la investigación se diferencia de la que realizamos en el marco teórico utilizado, como así también, en las etapas metodológicas y en los objetivos. Si bien comparte el estudio de sesgos y errores en el estudio probabilístico de muestras grandes, para nuestra tesis es solo un aspecto más.

Nuestro principal aporte a la investigación es brindar elementos acerca de las concepciones de aleatoriedad, precisamente porque es otro pilar en la formación de futuros profesores, indistintamente del nivel educativo o de formación, pues tanto la probabilidad como la estadística lo tienen como concepto central.

2.2.3. Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería

Por su parte, Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo (2018) evaluaron las intuiciones y heurísticas sobre probabilidad en un grupo de estudiantes de ingeniería de diferentes especialidades antes de iniciar un curso de estadística a través de un cuestionario de ítems cerrados. Posteriormente al desarrollo del curso, continuaron con otro estudio con el mismo grupo con el fin de comparar si hubo cambios en sus argumentaciones y estrategias de razonamiento.

Las referencias de sustento teórico han sido los aportes de Batanero (2005) y Díaz (2003). En particular, en el diseño del instrumento se tomaron varios ítems que evalúan puntualmente el uso de las heurísticas de representatividad y disponibilidad.

La aplicación del instrumento se realizó vía online y las respuestas de los estudiantes se realizaron a través de mediciones numéricas de 0 a 100 para la asignación de probabilidades a eventos aleatorios. En términos generales, encontraron el sesgo de la equiprobabilidad, la presencia de la heurística tanto de disponibilidad como de representatividad.

En una segunda etapa de la investigación, al finalizar el cursado de la materia, se les dio una situación problemática a resolver donde, en distintas formas, se retomaban estos sesgos y heurísticas que habían encontrado. Como resultado global observaron mejoras en cuanto a una menor presencia de estos elementos de concepciones deficientes, pero no fueron en la totalidad de los estudiantes. Estos resultados nos advierten que la instrucción formal no necesariamente alcanza para corregir los elementos incorrectos de las concepciones de los estudiantes sobre aspectos probabilísticos.

Compartimos con esta investigación los referentes teóricos considerados y la validación del instrumento mediante pares expertos, tanto del campo de la didáctica específica como de la disciplina. A su vez, se diferencia en varios aspectos. Algunos de ellos tiene que ver con el marco teórico utilizado, la aplicación del instrumento que fue *on-line* y sobre el tipo de respuesta brindada, pues se utilizó una escala numérica de 0 a 100 (en nuestro instrumento se deja para todas las consignas las respuestas abiertas).

Es un antecedente muy importante, no solo por lo ya mencionado acerca de la insuficiencia de la instrucción para la corrección de las concepciones deficientes, sino también porque se aplicó a un perfil de estudiantes similar a uno de los grupos en los cuales aplicamos el instrumento (estudiantes de ingeniería) con lo que nos permitió comparar los resultados aún en forma muy general.

2.3. Investigaciones con individuos con formación previa en el estudio de la aleatoriedad y la probabilidad

2.3.1. Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnas de un taller de enseñanza de la probabilidad

En el trabajo de Lavalle, Micheli y Boché (2003) se indagó el uso de heurísticas, en el sentido de Díaz (2003), en un grupo de alumnas del profesorado de

Matemática que ya habían tenido la materia Probabilidad y Estadística de su currícula.

Las autoras implementaron un taller sobre enseñanza de la probabilidad sustentado en una metodología que versa sobre el análisis didáctico del contenido, en el marco del Enfoque Ontosemiótico. En el taller las asistentes resolvieron una secuencia de situaciones problemáticas con el fin de observar si prevalecía un razonamiento normativo o si existía evidencia del uso de determinadas heurísticas, las formas de representaciones que utilizaban y los contenidos que estaban disponibles.

Tenemos en común con esta investigación antecedentes teóricos que reporta Díaz (2003) respecto a los sesgos, por ejemplo de equiprobabilidad, y el uso de las heurísticas de disponibilidad, de representatividad, entre otros.

Un aspecto a destacar es que encontraron razonamientos incorrectos manifestados en el descuido del tamaño muestral, la falacia de la proporción baja y sesgo de la equiprobabilidad. Asimismo, hallaron que en algunos casos no justificaron sus respuestas y que ninguna alumna pudo resolver todos los ítems.

Este trabajo nos resulta de gran importancia para la tesis porque una vez más se muestra que los elementos deficientes en las concepciones de aleatoriedad y probabilidad no necesariamente se corrigen luego de tener la materia en la carrera.

También compartimos con este trabajo, entre otras cosas, el perfil del grupo al que se aplicó el instrumento (estudiantes de un profesorado de matemática), y los objetos aleatoriedad y probabilidad que se encuentran en las situaciones problemáticas a resolver. Se diferencia en el alcance de los contenidos, ya que ellos han incluido probabilidad condicional, independencia de sucesos, teorema de Bayes, entre otros más.

Nuestro trabajo aportaría a esta investigación en mayores elementos categorizados para las concepciones (explicitación de distintos significados de probabilidad y de aleatoriedad) y las herramientas que se han utilizado del Enfoque Ontosemiótico para el análisis didáctico de las producciones de los estudiantes.

2.3.2. Significado de probabilidad en estudiantes de profesorado

De Olivera, Olesker y Pagés (2017) han realizado un estudio sobre concepciones de aleatoriedad en estudiantes de profesorado de matemática. En una primera parte presentan un repaso de los diferentes significados de aleatoriedad según Batanero (2005), y a partir de ello y de otros antecedentes, diseñaron un instrumento que se aplicó vía *on-line* a estudiantes de la materia Didáctica III de los profesorados de matemática de todo Uruguay. El cuestionario indaga, principalmente, la presencia del componente subjetivo en las respuestas del estudiante.

De los 38 estudiantes que hicieron el cuestionario, 24 ya habían cursado Probabilidad y Estadística, 2 se encontraban cursando y el resto aún no lo había hecho. En un resumen global, detectaron una fuerte presencia del significado de aleatoriedad desde el enfoque clásico y dificultades en algunos estudiantes para el reconocimiento de la aleatoriedad en determinados experimentos (por ejemplo, doblar un poco una moneda, lanzarla al aire y observar la cara superior cuando cae, o la germinación de una semilla de naranjo). También encontraron el sesgo de la equiprobabilidad y la heurística de la representatividad en términos de Díaz (2003). En las conclusiones finales plantean la necesidad de trabajar con más énfasis en los institutos de formación docente con el enfoque subjetivo de la probabilidad.

Este antecedente es muy importante para nuestra investigación. Por un lado, se tomaron dos de las situaciones problemáticas planteadas, con algunas modificaciones, para conformar el instrumento que diseñamos. También se constituyó en un antecedente de investigación que tiene como foco el enfoque subjetivo para la estimación de probabilidades y reconocimiento de la aleatoriedad, aspecto que en general no ha sido el fuerte de estudio y discusión en los otros reportes que hemos considerado.

Además de la metodología utilizada para la recolección de datos, nuestra investigación difiere al tener un segundo grupo de aplicación para poder comparar concepciones no solo de futuros docentes de matemática, sino también, de futuros estudiantes de carreras de ingeniería.

Nuestra investigación aportaría a este trabajo, además de las herramientas de un marco teórico para el análisis didáctico de las respuestas, el complemento de evaluar también el enfoque frecuencial.

2.3.3. Significado intuitivo de probabilidad en profesores de matemática

Bastias, Alvarado y Retamal (2017) realizaron un estudio sobre las concepciones de profesores de matemática del nivel medio de una región de Chile sobre la asignación de probabilidades a eventos aleatorios de situaciones cotidianas.

Este trabajo comparte con nuestra investigación el uso del Enfoque Ontosemiótico como marco teórico y metodológico de referencia. Su objetivo fue analizar el significado institucional del objeto probabilidad a través de las intuiciones de profesores del nivel medio. Para ello, diseñaron un instrumento con situaciones problemáticas obtenidas de antecedentes y reportes de investigación que consistieron en la asignación de probabilidad que, a diferencia de nuestro instrumento, se materializaban en una escala dada de 0% a 100% en incrementos de diez puntos porcentuales.

En el contexto de una muestra donde todos los individuos tenían una primera formación sobre probabilidad y estadística, encontraron elementos que hacen a concepciones deficientes sobre el objeto probabilidad. Reportan el sesgo de la equiprobabilidad (por ejemplo, al evaluar el sexo de un bebé recién nacido elegido al azar en un hospital) y la presencia de la heurística de representatividad.

Este antecedente refuerza la importancia de analizar las concepciones iniciales de los estudiantes, puesto que se evidencia que una formación inicial en probabilidad y estadística no necesariamente alcanza para consolidar concepciones adecuadas sobre estos objetos matemáticos de estudio. Observaron, que esto aconteció incluso en una muestra que estuvo formada por profesores de matemática, por lo que se supone deberían tener no solo un primer estudio de aleatoriedad y probabilidad sino también, una primera formación en la enseñanza de la probabilidad y estadística (o al menos el estudio de recursos didáctico-metodológicos que orientan la enseñanza de la matemática en general).

El trabajo es importante para nuestra investigación, y por tal razón, tomamos una situación problema de las planteadas y, con modificaciones, la incluimos en el instrumento diseñado.

Nuestra investigación se diferencia porque amplía el estudio de las concepciones sobre el objeto aleatoriedad, compara los contextos tanto cotidianos como los lúdicos y utiliza otras herramientas del marco teórico, como lo son las funciones semióticas para el análisis didáctico de las producciones.

2.4. Investigaciones centradas en aportes a la enseñanza de la probabilidad y/o la estadística

2.4.1. Significados de aleatoriedad

Batanero y Serrano (1995) se propusieron realizar una revisión histórica de los distintos significados del objeto aleatoriedad, como así también, un resumen de las investigaciones sobre la percepción de la aleatoriedad en niños y adolescentes. En el reporte evidencian que en distintos momentos históricos se ha interpretado la noción de aleatoriedad de forma diferente y que aún hoy en día no se permite determinar con nitidez si un suceso o una secuencia de sucesos es o no aleatoria.

Cronológicamente presentan las siguientes acepciones:

- Aleatoriedad como lo contrapuesto de aquello de lo que se conoce sus causas;
- Aleatoriedad asociada a la equiprobabilidad;
- Aleatoriedad analizada desde dos aspectos: el proceso de generación y la secuencia generada por dicho proceso;
- Aleatoriedad asociada al convencimiento de la imposibilidad de reconstruir una secuencia dada o entendida como altamente irregular o compleja.

La primera acepción correspondería desde la antigüedad hasta el comienzo de la Edad Media. En esta época se usaban los dados, por ejemplo, para impedir dar ventaja a alguna de las partes interesadas, puesto que se suponía que lo aleatorio no podía ser controlado humanamente. Poincaré (1936) indicó que, para esta época, se distinguían los fenómenos que respondían a leyes armónicas, de aquellos que se atribuían al azar, rebelándose ante toda ley. Pero además, esta determinación era objetiva: lo que era aleatorio lo era para cualquier persona.

La segunda acepción se corresponde con el surgimiento del cálculo de probabilidades, de aquí que se relacione la aleatoriedad con la equiprobabilidad. Es decir, primaba la validez del principio de indiferencia limitado a experimentos con una cantidad de posibilidades finita. Por lo tanto, la determinación del carácter aleatorio de un objeto solo sería posible para clases tipo finitas. Se concuerda con Kyburg (1975) en que si la población fuese infinita la probabilidad de cada miembro sería nula aunque el método de selección fuese sesgado. Sin embargo, la idea de equiprobabilidad es usada para definir cuándo una muestra es aleatoria o en la asignación de sujetos a los experimentos.

Mas allá de la asociación de la aleatoriedad con el enfoque clásico de la probabilidad, también es posible asociarlo desde otros enfoques como el frecuencial. Por ejemplo, un objeto sería aleatorio si tiene asignada una probabilidad la cual se correspondería a un valor que se ha estabilizado para un número grande de extracciones. Claro que esta forma presenta un problema sustancial: obliga a tener información previa o a decidir la cantidad de experimentos necesarios para pensar que la frecuencia relativa de dicha clase se estabilizó.

En la tercera acepción, desde Zadell (1992), se considera que la aleatoriedad tiene dos aspectos que no siempre pueden coincidir, a saber: el proceso de generación y el patrón de la secuencia obtenida como consecuencia del experimento. Por ejemplo, la secuencia 32823066470938446095 tiene aspecto de ser calificada como aleatoria, sin embargo no lo es, ya que son las cifras decimales 111 a 130 del número pi. El proceso que lo genera no es aleatorio, pues al tomar los valores de esos lugares decimales, siempre serán los mismos. Por otro lado, la secuencia 100100100 puede obtenerse como resultado de un experimento aleatorio binomial, es más, dicho elemento tiene una probabilidad asignada de ocurrencia, y al repetirlo no se esperaría que se repita hasta un número muy grande de repeticiones.

Los autores observan que a finales del siglo XIX empieza el interés por encontrar modelos de procesos que aseguren la presencia de aleatoriedad en largas secuencias de números aleatorios, pues se iniciaban los estudios inferenciales con trabajos como los de Galton, Fischer, Pearson, entre otros. Por lo tanto, se pretendería, para poder calificar como aleatoria una secuencia, conocer el método que la generó, por ejemplo, si se la obtuvo con dispositivos físicos (como dados, monedas), mediante una tabla de números aleatorios o con un método de algún software reconocido (más allá que serían números pseudoaleatorios).

En la última acepción que presentan, la idea intuitiva es que el carácter de aleatorio para una sucesión dada se debería asociar a dos situaciones: la primera podría ser el convencimiento de que sea imposible inventar un método que permita replicarla, y la segunda sería poder considerar la secuencia como altamente irregular o compleja. La primera situación lleva a entender una secuencia como aleatoria si no es posible hallar algún algoritmo por el cual seleccionar una subsecuencia que se corresponda con alguna frecuencia relativa diferente para alguno de los resultados. Por ejemplo, en una secuencia de lanzamientos de una moneda, encontrar alguna subsecuencia con cierto patrón en la cual la probabilidad de obtener cara sea diferente a 1/2, ya que permitiría para un jugador obtener alguna ventaja al apostar sobre dichos elementos. A modo de ilustración de esta situación, se observa que esta lógica es la que se aplica para testear las tablas de números aleatorios, aunque al ser test de hipótesis, siempre se cuenta con una probabilidad de error.

El enfoque de la llamada “complejidad absoluta” se debe a Kolmogorov y se vincula a aspectos computacionales. Sin tecnicismos, dada una secuencia se la considera aleatoria si solo se la puede describir listando uno a uno sus elementos. De esta forma se puede pensar en distintos grados de aleatoriedad, tomando el concepto en sí como un concepto límite de naturaleza teórica.

Finalmente, los autores concluyen en la recomendación de una aproximación gradual a partir de experiencias con juegos y simulaciones, hasta llegar a la formalización progresiva. Recomiendan materiales manipulativos con propiedades de simetrías como dados o monedas y progresivamente pasarse a materiales que carezcan de estas propiedades (como ruletas con áreas desiguales, entre otros). En interés de este trabajo reside en que presenta un conjunto de características a las que se pretendería llegar, con las recomendaciones enunciadas, para caracterizar los fenómenos aleatorios, a saber:

- En condiciones fijadas de antemano hay más de un resultado posible;

> - Con los conocimientos que posee el sujeto que emite el juicio, el resultado concreto que ocurrirá es impredecible.
>
> - Hay posibilidad -al menos imaginada- de repetir indefinidamente la observación o producción del fenómeno.
>
> - Las secuencias de resultados obtenidas en esta repetición carecen de un patrón que el sujeto pueda controlar o predecir.
>
> - En este aparente desorden, pueden descubrirse una multitud de regularidades globales, comenzando por la estabilización de las frecuencias relativas de cada uno de los resultados posibles. Esta regularidad global es el fundamento que nos permite estudio de estos fenómenos aleatorios mediante el cálculo de probabilidades. (Batanero y Serrano, 1995, p. 11).

Una primera diferencia del trabajo de Batanero y Serrano (1995) con nuestra investigación es que se pretende ampliar el estudio a posibles concepciones sobre probabilidad, además de diseñar un instrumento *ad hoc* y aplicarlo. Por otra parte, es un antecedente importante porque brindó elementos centrales para el diseño de actividades en el instrumento acerca de posibles formas de entender la idea de aleatoriedad. Esto permitió reconocer algunos de los elementos que ofrece este antecedente como posibles componentes del conjunto de concepciones previas que tienen los estudiantes a los que se aplicó el instrumento diseñado para el estudio.

2.4.2. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico

Díaz (2003) realiza una revisión de la bibliografía sobre el estudio de los errores que cometen las personas al emitir un juicio de probabilidad, refiriéndose así a la asignación que realiza un individuo de un número a una creencia. Respecto a ello dice que:

> Las personas, en general, no tienen un razonamiento estadístico correcto cuando hacen inferencias intuitivas sobre acontecimientos inciertos, bien porque no han aprendido nunca estas leyes, bien porque superan sus capacidades de cálculo mental. En lugar de esto, confían en reglas relativamente simples llamadas *heurísticas* que son las que guían sus juicios. (Díaz, 2003, p.3).

El concepto de heurística lo toma de los autores Kahneman, Slovic y Tversky (1982), quienes desarrollan los procedimientos heurísticos de Representatividad, Disponibilidad y Ajuste – anclaje.

Por la heurística de representatividad, Tversky y Kahneman (1983) aluden a la evaluación que realiza una persona respecto al grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría o, en general, un resultado y un modelo. Díaz sugiere que si solo se fija en la similitud de la muestra con la población, puede llevar a ignorar otros elementos esenciales de la información, generando alguno de los siguientes posibles errores:

- Insensibilidad al tamaño de la muestra: pensando que muestras pequeñas serían representativas en todas las características estadísticas poblacionales correspondientes.
- Concepciones erróneas sobre el azar: en cuanto a creer que una secuencia pequeña debería representar fielmente las características del modelo teórico o poblacional. De esta forma “el azar se ve como un proceso autocorrector, en el que una desviación en una dirección induce una desviación en la otra dirección para restablecer el equilibrio”. (Díaz, 2003, p. 4)
- Falacia de la tasa base: aludiendo a aquellos problemas que vinculan tasas bases de referencia (como ocurre en la hipótesis del teorema de Bayes) y las personas omiten aquella información, confiando en las probabilidades condicionales solamente.
- Falacia de la conjunción: cuando se cree más probable que ocurra la conjunción de dos eventos antes de la unión de los mismos.

Respecto a la heurística de Disponibilidad, Tversky y Kahneman (1974) la asocian a la falta de capacidad combinatoria, en el sentido de que la evaluación de una probabilidad se realiza según la facilidad con que puedan recuperarse ejemplos de la misma. Plantean que pueden aparecer algunos sesgos en los juicios de probabilidad debido a:

- La facilidad para recuperar ejemplos más fácilmente respecto a una categoría cuyos ejemplos sean menos recuperables.

- La efectividad de un proceso de búsqueda (citan como ejemplo comparar las probabilidad de encontrar una palabra que comience con la letra A contra el evento de encontrar palabras con la letra A en segunda posición.

La última heurística que Díaz cita de estos dos autores es la de “Ajuste – anclaje”, en la cual los juicios de probabilidad se inician con un valor inicial y luego se van haciendo modificaciones, que no siempre concluyen exitosamente, precisamente por haber tomado una cantidad inicial insuficiente. Plantean el ejemplo de estimar en un intervalo muy corto de tiempo el producto 1x2x3x4x5x6x7x8 versus el producto 8x7x6x5x4x3x2x1, dando como referencias que los valores medios de las estimaciones han sido 512 y 2250, cuando el número correcto es 40320.

Díaz continúa revisando otros tipos posibles de errores en los juicios probabilísticos y recurre a los reportes de Lecoutre (1992) describiendo la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. Esto puede llevar a entender que las probabilidades de ciertos eventos es siempre la misma pues “dependen del azar”, aun cuando prevalezcan diferencias de naturaleza combinatoria a favor de algún suceso en particular.

Otra investigación que considera Díaz son los trabajos de Konold (1989) vinculados a la dificultad para comprender la probabilidad frecuencial (que lo llama “enfoque en el resultado aislado”), y consiste en considerar cada una de las repeticiones de un experimento como si fuese aislado, sin guardar relación con las anteriores. Esto puede llevar al error de pensar que el fin del estudio de situaciones de incertidumbre no es llegar a la probabilidad de ocurrencia de un evento, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo simple.

Su trabajo comparte con nuestra investigación el estudio de investigaciones previas acerca de elementos que puedan constituir las concepciones previas de los estudiantes acerca del objeto probabilidad. Una diferencia que tenemos con e trabajo de Díaz (2003) es que indagamos acerca de elementos asociados al objeto aleatoriedad, y compartimos el objetivo de explorar las concepciones en un determinado grupo de estudiantes utilizando un instrumento diseñado para tal fin.

El trabajo de Díaz (2003) aporta significativamente información a nuestra investigación sobre potenciales errores que pueden cometer los estudiantes al realizar sus juicios de probabilidad, particularmente el tipo de heurística que podrían utilizar, entre otros. Además de ello, se tienen los enunciados de las situaciones problemáticas de los investigadores citados, lo cual brinda significativos elementos que se consideraron para el diseño de nuestro instrumento.

Nuestra investigación agrega nuevos elementos a la investigación de Díaz (2003), pues complementa con otros posibles tipos de errores que cometen los estudiantes según las concepciones previas que tienen sobre el objeto aleatoriedad. Es decir, con los resultados de nuestro trabajo se ponen en evidencia los posibles errores en la realización de juicios de probabilidad que pueden tener algún vínculo con el tipo de concepción que sustentan los estudiantes sobre la aleatoriedad.

2.4.3. Significados de probabilidad

En el trabajo de Batanero (2005) se toman las herramientas “significado de un objeto matemático” (en sus facetas institucional y personal) y “funciones semióticas” del EOS (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002) para analizar los significados históricos del objeto matemático probabilidad.

Destaca las componentes o elementos del significado de un objeto, en particular para la probabilidad:

- Campo de problemas de los que emerge el objeto: hace referencia a uno de los problemas vinculados a juegos de azar del S.XVII que dieron origen al estudio de la probabilidad.
- Las representaciones del concepto: aludiendo a los símbolos, palabras o gráficos para representar los datos y soluciones a los problemas.
- Procedimientos y algoritmos (como el cálculo combinatorio, la enumeración, recolección de datos).
- Las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos.
- Los argumentos y demostraciones de estas propiedades.

La autora presenta esta enumeración con el objeto de evidenciar la naturaleza compleja de los conceptos matemáticos y la necesidad de tener en cuenta estos diferentes componentes al momento de la enseñanza.

Luego presenta una taxonomía de los distintos tipos de significados que históricamente se le dio al objeto matemático probabilidad, la cual se resume en la siguiente tabla:

Tabla Nº 1: Significados de probabilidad (adaptado de Batanero (2005))

Significado	Período	Descripción
Intuitivo	Como idea matemática se inicia a mediados del S XVII	Las primeras ideas intuitivas surgen ligadas a las apuestas, esperanza y ganancia en un juego, así como al concepto de juego equitativo y no se precisaron hasta que se trató de asignar números a estos grados de creencia para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos.
Laplaciano	Fermat, Pascal, De Moivre, Laplace Fines del S.XVII a inicios del S.XVIII	Laplace dio la definición que hoy se enseña con el nombre de "regla de Laplace" para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades, como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles. Coincidiendo con Godino, Batanero y Cañizares (1987), Laplace no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; solo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos.
Frecuencial	Bernoullí – Ley de los grandes números Inicio S. XVIII	Bernoulli sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento. En esta visión se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, asumiendo la existencia teórica de dicho límite, del cual la frecuencia relativa observada es un valor aproximado.
Subjetivo	Bayes (inicio S. XVIII), Ramsey H (1926) y De Finetti (1937)	Las probabilidades de tales causas podrían entonces revisarse (pasar de probabilidades a priori a probabilidades a posteriori) y pierden de este modo el carácter objetivo que les asigna la concepción frecuencial. En el enfoque subjetivo, ya no es necesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones, para dar sentido a la probabilidad y ello amplía el campo de aplicación.
Matemático	Primera mitad S. XX	Borel contempla la probabilidad como un tipo especial de medida, y Kolmogorov usa esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida para deducir una axiomática, que se acepta por todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad. La probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios

Este antecedente es muy importante para nuestra investigación, pues presenta una primera taxonomía para categorizar posibles significados que atribuyen los estudiantes al objeto probabilidad, además de explicitar los elementos que componen cada significado. Estos elementos fueron utilizados en el análisis didáctico de las producciones de los estudiantes. Más allá de esto, también permitió dimensionar el significado polifacético del objeto probabilidad sugiriendo que su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, ya que están ligadas dialécticamente y también en la experiencia cotidiana.

Nuestra investigación aportaría al trabajo de Batanero (2005) en el sentido que considera una posible categorización del objeto matemático aleatoriedad, con lo cual será posible realizar una descripción más amplia de las concepciones de los estudiantes que inician un curso de probabilidad y estadística.

2.4.4. Concepciones sobre aleatoriedad y probabilidad de futuros profesores de biología

En el trabajo de Moreno, Cardeñoso y González-García (2014) se presenta una investigación para conocer las concepciones que tienen estudiantes del profesorado de biología de institutos de formación docente de la provincia de Mendoza durante el período 2011 – 2012, sobre los objetos aleatoriedad y estimación de la probabilidad.

El trabajo se ha focalizado en saber si los estudiantes lograban reconocer la aleatoriedad en un experimento y además caracterizar su justificación. Por otro lado, conocer la estimación que hacen de la probabilidad de un evento y qué argumentaciones utilizan.

Para la recolección de los datos diseñaron un cuestionario con dos secciones (una referida al reconocimiento de la aleatoriedad y otra a la estimación de probabilidades). Estos ítems se encuadraron en tres tipologías de contextos: juego, cotidiano y físico natural. Para cada ítem se presentaron opciones para la justificación de la elección, dejando una abierta para el caso de que el estudiante lo necesite. La validación del instrumento se realizó desde la aplicación de distintos índices (como por ejemplo, el de dificultad y discriminación de los ítems).

En el análisis de los resultados se obtuvieron diferencias significativas en la aplicación de un ANOVA al tomar como variable la cantidad de sucesos reconocidos como aleatorios, tomando como factor el contexto de la situación problemática (juego, cotidiano y físico natural). En el mismo factor, agregaron las categorías de respuesta, tomaron como variable la cantidad de estudiantes según sus argumentaciones, y hubo diferencias significativas en la aplicación de un MANOVA (Análisis de la Varianza Multivariado).

Encontraron que, en general, la mayoría reconocieron satisfactoriamente la aleatoriedad pero que tuvieron resultados deficientes en lo que concierne a la estimación de probabilidades. Respecto a las argumentaciones, prima el modelo clásico y en menor medida el frecuencial, concluyendo que se usan en menor medida las argumentaciones laplacianas en el contexto físico natural al compararse con el contexto cotidiano.

A partir de estos resultados determinaron cuatro tendencias de pensamiento probabilístico: Contingente, Determinista, Incertidumbre, y Personalista.

Los estudiantes en la categoría de “Contingencia” reconocen la aleatoriedad de una cantidad aceptable de fenómenos, argumentan desde la multiplicidad (variación de los resultados en cada realización del experimento) principalmente y tienen en general una buena estimación de las probabilidades.

El segundo grupo que determinaron, en importancia numérica, es el de “Incertidumbre”, caracterizado por estudiantes con un alto reconocimiento de la aleatoriedad y una principal justificación de cálculos probabilísticos a partir de la equiprobabilidad.

El tercer grupo es el “Determinista” donde no se reconoce la aleatoriedad en el mundo real (tienden a buscar las causas que lo producen y se resisten a dar explicaciones de tipo indeterminista) y tienen una estimación de las probabilidades desde la equiprobabilidad.

El grupo más pequeño ha sido el “Personalista” el cual se caracteriza por argumentos de tipo más subjetivos.

Los autores destacan en sus conclusiones dos aspectos particulares para nuestra investigación: el máximo reconocimiento de la aleatoriedad corresponde a los ítems relativos al contexto de juegos y el mínimo se presenta en los relativos al contexto físico natural, y que no han encontrado relación de dependencia entre el reconocimiento de la aleatoriedad y el nivel de formación.

En común con nuestro trabajo, además de enfocar en los dos objetos aleatoriedad y probabilidad, distinguen también los contextos de las situaciones problemáticas y se proponen realizar una caracterización de las concepciones de los estudiantes. Las diferencias con este trabajo se encuentran, principalmente, sobre el perfil de los grupos en los cuales se aplicó el instrumento y el marco teórico de referencia utilizado. Pero también, en que las preguntas de nuestro instrumento no presentan opciones, pues se dio total libertad a los estudiantes para responder.

Creemos que nuestra investigación puede aportar a esta investigación un análisis didáctico complementario a partir del uso de herramientas didáctico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico, como los son las configuraciones epistémico-cognitivas y las funciones semióticas, con el fin de describir y analizar los errores en las producciones de los estudiantes.

Asimismo, este antecedente es importante para nuestra investigación ya que la caracterización propuesta de las concepciones fue utilizada en el análisis didáctico de los resultados obtenidos, y en el diseño del instrumento se incluyeron distintos contextos para las situaciones problemáticas, tal como lo recomiendan los autores.

2.4.5. Concepciones de aleatoriedad en secuencias de resultados de experimentos aleatorios en estudiantes de nivel secundario

En el trabajo de Esteban, Batanero, Serrano y Contreras (2016) se presentan los resultados de un estudio exploratorio en estudiantes de nivel secundario con edades entre 13 y 17 años, con el fin de analizar los significados que asignan a secuencias obtenidas desde experimentos aleatorios.

El cuestionario consistió en tres tareas en las que se les daban algunas secuencias de resultados. Se les pedía que indicaran si las consideraban aleatorias o no y que explicitaran los criterios de sus respuestas. Tales experimentos se limitaron a espacios muestrales finitos y equiprobables (por lo tanto se centraban en el enfoque laplaciano). Este instrumento se aplicó a estudiantes entre 13 y 17 años de tres niveles diferentes dentro de la educación secundaria. Cabe destacar que estos grupos de estudiantes tenían como temáticas, en el currículo escolar, los conocimientos básicos de probabilidad y estadística.

El primer ítem consistió en una secuencia de cuatro sucesiones de 20 resultados posibles al lanzar una moneda legal, sobre los cuales se les preguntaba si era posible determinar si alguno de ellos era inventado. Para el estudio de secuencias aleatorias proponen prestar atención a tres aspectos:

- No existencia de patrones entre caras y cruces.
- Que existe una regularidad global para muestras grandes.
- Atender a la presencia de rachas.

El segundo y tercer ítem tiene características similares al primero pero la longitud de las secuencias es de 5 elementos (en este caso varones y mujeres en una fila) y de 10 elementos respetivamente (para la segunda tomaron posibles resultados en una prueba de opción múltiple).

Respecto a los resultados, en los ítems donde debían evaluar las secuencias de caras y cruces, se puntualizaron argumentaciones prevalecientes: observar las frecuencias si eran iguales o diferentes, si existían patrones muy evidentes, si había rachas largas o cortas y la impredecibilidad (diciendo que todos los listados eran válidos pues todo depende del azar). Para los ítems donde las longitudes eran pequeñas, destacaron un sesgo al suponer que eran más probables aquellas disposiciones que presentaban alternancias.

De este trabajo se tomó una de las situaciones problemáticas planteadas y, con modificaciones, se la incluyó en el diseño del instrumento. También aportó convincentes elementos procedimentales y teóricos para analizar secuencias de experimentos aleatorios.

Con nuestra investigación este trabajo tiene en común que se tomó la misma categorización de significados para la aleatoriedad propuestos por Batanero (2005). No obstante, se diferencia por incluir el objeto matemático aleatoriedad y el perfil de los individuos a los que se les aplicó el instrumento. Si bien se tomó la idea de una situación problemática en la que se debía reconocer si podría ser aleatoria, se decidió ampliar a 100 lanzamientos (en lugar de 20) con la intención de suponer una fluctuación de la variable cantidad de caras más cercana al 50%.

Creemos que el aporte de nuestra investigación incrementa las concepciones para indagar sobre el reconocimiento de la aleatoriedad, estudia las concepciones para el cálculo de probabilidades y en particular, para el análisis de las rachas consideramos el teorema de Erdös y Renyi, que precisa la longitud que se esperaría tener en una secuencia de un experimento dicotómico que se realiza n veces.

Marco Teórico

3.1. Introducción

Para esta investigación se adoptó el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) como línea teórica y metodológica dentro de la Didáctica de la Matemática, la cual es propuesta por Godino (2000, 2002, 2003), Godino, Batanero & Font (2007) y colaboradores. En esta sección se presentan los constructos y herramientas que fueron utilizados en las distintas etapas del trabajo, sin pretender convertir el capítulo en un curso sobre el EOS.

La connotación ontológica del enfoque hace referencia al análisis de la existencia o inexistencia de entidades u objetos, mientras que el aspecto semiótico se refiere al descubrimiento y análisis de la significación que se le otorga a esos objetos o entidades, su relevancia, vínculos que los interrelacionan, y otras características que los hacen diferenciables entre ellos, aún cuando pareciera que esas diferencias no debieran o pudieran manifestarse.

La elección del EOS como marco teórico de la investigación nos orientó sobre lo que se debía observar y de qué manera hacerlo, condicionando de esta manera a usar las herramientas y constructos desarrollados para tal fin.

Este enfoque tiene como característica propia dos dimensiones de estudio interdependientes: personal e institucional, y tiene a su vez, definiciones particulares para conceptos teóricos tales como el de práctica, objeto (en sus facetas personal e institucional) y el de significado de un objeto, así como el estudio de su relaciones mutuas, que se explicarán a lo largo del capítulo.

Las herramientas del EOS se desarrollaron (y lo siguen haciendo en forma permanente) en diferentes etapas y se fueron refinando progresivamente. Para este trabajo nos centraremos en lo que Godino (2003) llama Teoría de Funciones Semióticas.

3.2. Objetos matemáticos

El EOS considera como objeto (o entidad) matemático a “todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia”

(Godino, 2003, p. 147) cuando se hace, se comunica o se aprende matemática. Es decir, por “objeto matemático” se entiende todo aquello que se pueda individualizar en matemática (como un símbolo, una expresión, una definición, un procedimiento, etc.), por lo tanto, al describir una actividad matemática en el contexto de una clase, se puede aludir a muchos y diversos objetos, que se pueden agrupar según distintos criterios, constituyendo categorías y/o tipologías diversas.

Más allá de esto, considerando que toda actividad matemática está centrada en la resolución de problemas (en el sentido más amplio de su acepción, es decir desde ejercicios sencillos hasta la formulación de modelos matemáticos), se puede definir una primera tipología de “objetos matemáticos primarios”, como se representan en la Figura 1:

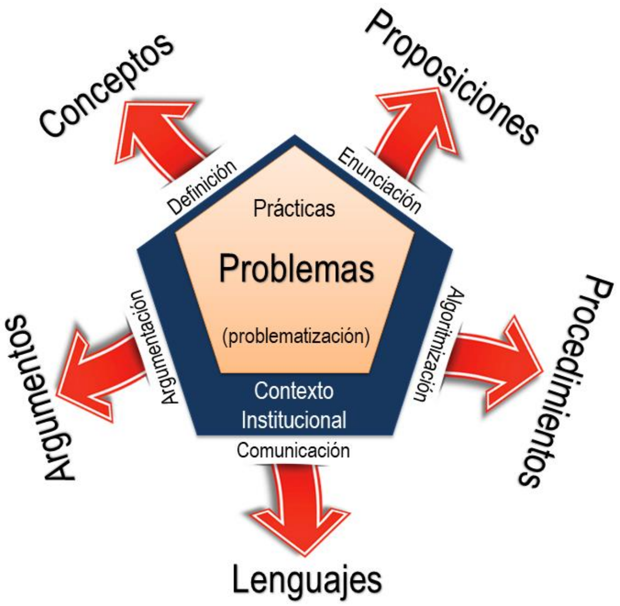


Figura 1: Objetos y procesos primarios (Godino, Batanero & Font, 2007)

Situaciones problemas: constituyen las tareas que inducen la actividad matemática (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc.

Conceptos: están dados mediante definiciones o descripciones (por ejemplo conjunto, cociente, probabilidad, límite, frecuencia relativa, etc.).

Propiedades o proposiciones: comprenden atributos de los objetos matemáticos, los que generalmente suelen darse como enunciados o reglas de validez (por ejemplo los axiomas de probabilidad, la ley débil de los grandes números).

Procedimientos: comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones (por ejemplo la construcción de una tabla de frecuencias, la aplicación de alguna técnica de conteo).

Argumentaciones: se usan para validar y explicar la resolución que se hizo de la situación problema. Pueden ser deductivas o de otro tipo, e involucran conceptos, propiedades, procedimientos o combinaciones de estos elementos.

Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. Si bien en un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, el trabajo matemático puede usar otros registros como el oral, corporal o gestual. Además, mediante el lenguaje, sea este ordinario o específico matemático, también se describen otros objetos no lingüísticos.

Se considera al lenguaje, en sus diversas manifestaciones, en el centro de la atención didáctica, sin perder de vista la actividad matemática y los objetos culturales no lingüísticos emergentes de esa actividad.

Estos seis tipos de objetos antes descriptos son calificados como matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, y se les llama "objetos matemáticos primarios" porque son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas. Se pueden agrupar en entidades secundarias que poseen una cierta organización o estructura, como por ejemplo campos conceptuales, geometría, topología, aritmética.

Se postula que los objetos tienen una faceta ostensiva o perceptible y otra no ostensiva. La primera faceta hace referencia a que es reconocido por una institución, llevando a que se hable de dicho objeto, se lo pueda nombrar y se pueda comunicar sus características a otras personas por medio del lenguaje (oral, escrito, gráfico o simbólico). La faceta no ostensiva se manifiesta en que un sujeto es capaz de pensar e imaginarlos sin necesidad de mostrarlo externamente. Si bien las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente (por escritura, sonido, gestos), el resto de las entidades no son directamente perceptibles, sino que precisan de los elementos lingüísticos para su comunicación a otras personas y para su funcionamiento en la actividad matemática. El lenguaje es, por tanto, no solo el medio por el cual se expresan los objetos no ostensivos, sino también el instrumento para su constitución y desarrollo, y considerado como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

La Teoría de las Funciones Semióticas considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas, por lo tanto se los considera como derivados de dichas prácticas. En síntesis, a la práctica se le otorga un estatus privilegiado y al objeto matemático un estatus derivado. Godino (2003, pp. 91-92) define a una práctica como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas".

Para el EOS no es posible reducir el significado de un objeto matemático a una mera definición matemática, porque se los considera como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan y/o realizaron ciertos grupos de personas. Por lo tanto, el análisis del significado de los objetos matemáticos se encuentra directamente relacionado con el problema de las representaciones externas e internas de estos objetos.

Al tomar un punto de vista pragmático y definir el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir en el EOS dos términos que resultan difíciles de diferenciar: sentido y significado. Así el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, entre otros, para dar lugar a diferentes prácticas. En consecuencia, el sentido se entiende como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto, en el sentido que cierta situación problemática que se puede resolver con el objeto en estudio, genera una forma de construir su significado. Por ejemplo, en el enfoque laplaciano, el cálculo de probabilidades es a-priori de la experimentación, sin embargo esta familia de situaciones problemas asociada no contiene otras situaciones en la cuales el principio de razón insuficiente (equiprobabilidad) no se cumple.

A su vez, el significado de un objeto matemático, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto (como se hizo referencia en el ejemplo del enfoque laplaciano) y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Godino (2003) propone, apoyado en las ideas de triángulo epistemológico y la Teoría de Campos Conceptuales, una primera clasificación del *significado sistémico* de un objeto matemático, que incluye los siguientes tipos de elementos:

- Situaciones–problema, aplicaciones, tareas, que inducen actividades matemáticas.
- Lenguaje, incluyendo en el mismo todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas).
- Generalizaciones, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías).

Además de estos elementos, es menester considerar las acciones que realiza el sujeto al resolver un problema (estrategias, procedimientos, algoritmos) y los argumentos empleados para justificar tanto las acciones como las propiedades de los objetos y la solución de los problemas.

Estos tipos de elementos se constituyen en objetos explícitos de enseñanza para cada objeto matemático y como tal, no alcanza con analizar su naturaleza y características sino que también se pueden encontrar dificultades y errores de los estudiantes para cada uno de ellos.

3.3. Significado institucional y personal

Si una expresión en la clase de matemática es manifestada por un sujeto individual (como la respuesta a una prueba de un examen, la realización de una tarea o actividad por un estudiante, o una defensa coloquial, etc.) hablamos de objetos personales, los que son portadores, al menos potencialmente, de rasgos característicos de conocimientos de la persona.

En cambio, si la referencia es a documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante una clase, etc.; podemos considerar que están en juego objetos institucionales, pues tienen connotaciones normativas o convencionales, y se destaca que son usados como una referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Siguiendo a Godino y Batanero (1994), una institución está formada por un conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemas. El compromiso mutuo con una misma problemática lleva a la realización de unas prácticas sociales que son compartidas; las cuales están, en consecuencia, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. Por ejemplo, una institución particularmente importante es la institución matemática, la cual está formada por las personas comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos (compuesta por matemáticos, físicos, estadísticos, etc.). Son los productores del "saber matemático" y en particular puede incluirse en ella a todos aquellos que están realizando investigaciones dirigidas a la producción de nuevo conocimiento matemático.

Las instituciones se suelen considerar desde dos perspectivas: la primera, tendría que ver con un conjunto de prácticas compartidas por personas y, la segunda, como una organización compuesta por un cuerpo directivo, edificio y trabajadores, destinada a servir algún fin socialmente reconocido y autorizado. Cabe observar que las instituciones educativas encajan claramente en estas dos maneras de entender las instituciones; pero, en el EOS interesa, principalmente, la primera manera de entender la institución, aunque esto no lleva a ignorar el otro punto de vista. Esta primera manera de entender la institución permite, por una parte, pensar en varias instituciones en el interior de un centro escolar y, por otra parte, en instituciones diferentes de las escolares. La segunda acepción lleva a pensar que las instituciones de interés son aquellas que tienen como fin el aprendizaje de las personas.

No obstante, es de destacar que si bien en el seno de cada una de estas instituciones se realizan prácticas diferentes, las mismas pueden variar de una institución a otra, cambiar a lo largo del tiempo, o ser dotadas de significados diversos (por ejemplo, como ha ocurrido en las discusiones académicas acerca de la preferencia de métodos estadísticos clásicos a los métodos bayesianos). Godino (2003) afirma que la distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos es fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En una clase de matemática los objetos matemáticos son nombrados y se describen mediante sus definiciones y enunciado de propiedades, por lo que, a veces, son identificados a través de las mismas, y en ocasiones ocurre que se designa una cosa con el nombre de otra y se toma el efecto por la causa, o viceversa. Por esta situación, Godino (2003) advierte que un concepto no puede reducirse a su definición, más aún si nos interesamos en su aprendizaje y enseñanza. Un objeto en su faceta personal se constituye como un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. Entendiendo por práctica significativa a una forma expresiva situada, por tanto implica una situación – problema, un contexto institucional, una persona (o una institución) y los instrumentos que mediatizan la acción.

Es importante destacar que la emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje. Por lo tanto, la conformación del conocimiento personal se presenta como una consecuencia de la interacción del sujeto con tipos de problemas, mediatizada por los contextos institucionales en que tiene lugar dicha actividad.

3.4. Configuración epistémica y configuración cognitiva

Para este enfoque teórico, los seis objetos primarios de toda práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones (Figura 2) se las entiende como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular.

Cuando las configuraciones son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), se dice que son epistémicas o instruccionales. Y se las llama cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes).

Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

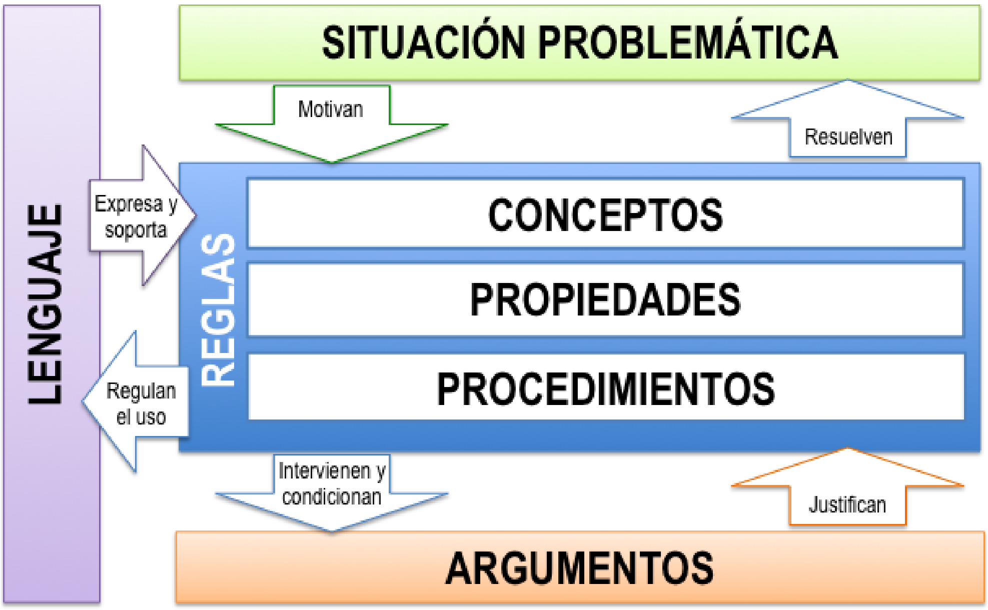


Figura 2: Configuración Epistémica/Cognitiva adaptada de D'Amore, Font y Godino (2007)

Se observa que en ambas configuraciones, el origen de la propia actividad matemática son las situaciones problemas, e incluso motivan el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos, en tanto, los entendemos como prácticas que vienen a justificar las definiciones, procedimientos y proposiciones, las que están reguladas por el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

Se destaca que cada objeto matemático, según sea el nivel de análisis que se quiera hacer, puede estar formado por entidades de los tipos restantes. Un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, o combinaciones entre ellos y obviamente, soportado por el lenguaje.

3.5. Funciones semióticas

La idea de función semiótica que plantea Godino (2003) la concibe como un par formado por el significante (expresión) y el significado (contenido), e implica también un acto de interpretación. Ligada a esta idea se encuentra la de código, que se concibe como la regla de correspondencia entre los planos de expresión y de contenido de las funciones semióticas.

Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes (significante, significado e interpretación), quedando los otros dos implícitamente establecidos. Hablar de significado supone que hay, además, una expresión y un código interpretativo. El signo, por tanto, no supone mera correspondencia entre expresión y contenido; o de algo que está en un lugar con otra cosa, sino que alguien debe hacer una posible interpretación.

La noción de función semiótica permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto matemático cualquiera –por parte de un sujeto, persona o institución– en términos de las funciones semióticas que pueden establecerse –en unas circunstancias fijadas– en las que interviene el objeto. Puesto que cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante, constituye, un conocimiento. Entonces, hablar de conocimiento equivaldrá a hablar de significado, esto es, de función semiótica.

En una función semiótica, tanto el objeto inicial como final, pueden estar constituidos por uno o varios de los elementos primarios del significado. Las entidades primarias consideradas pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, resultando entonces, diferentes tipos de tales funciones, algunas de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.).

Godino (2003) clasifica los tipos de funciones semióticas que aparecen en la actividad matemática atendiendo al contenido (significado) puesto en juego, en seis tipos:

- Significado lingüístico: cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico.
- Significado situacional: cuando el objeto final es una situación – problema;

- Significado conceptual: una correspondencia semiótica será de tipo conceptual cuando su contenido es un concepto – definición.
- Significado proposicional: cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto.
- Significado actuativo: una función semiótica será de tipo actuativa cuando su contenido es una acción u operación, tal como un algoritmo o procedimiento.
- Significado argumentativo: Cuando el contenido de la función semiótica es una argumentación. Esto se pone en juego, por ejemplo, al justificar un procedimiento y/o validación de una propiedad.

En síntesis, cuando un sujeto realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto (lenguaje, situaciones–problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), los que a su vez se agrupan formando una configuración (epistémica, instruccional o cognitiva). En consecuencia, el significado de un objeto matemático es para el EOS el par "Configuración epistémica-cognitiva / prácticas que posibilita", siendo la definición (explícita o implícita) del concepto matemático solo uno de los componentes de la configuración epistémica. Así, cada par constituye diferentes sentidos del concepto, mientras que el significado se lo entiende como el conjunto de todos los pares "Configuración epistémica-cognitiva /prácticas que posibilita" obtenidos.

3.6. La comprensión matemática en el EOS

Si bien nuestra investigación no focaliza en la comprensión en los estudiantes de nivel superior sobre los objetos matemáticos probabilidad y aleatoriedad, el concepto de comprensión de un objeto nos será de utilidad para el análisis de las tareas de los estudiantes.

Desde el EOS, en una situación ideal y en una institución dada, se concibe que un sujeto "comprende" el significado del objeto –o se "ha apropiado del significado" de un concepto– si es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente (Godino, 2003).

Por lo tanto, la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente llegue a ser total, o por el contrario, sea nula; sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. El reconocimiento de la complejidad sistémica del significado del objeto implica, además, que su apropiación por el sujeto se deriva de un proceso dinámico, progresivo y no lineal, como consecuencia de los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que participa. Finalmente, la comprensión de un concepto por un sujeto en un momento y circunstancias dadas, conlleva a la apropiación de los distintos elementos que componen los significados epistémicos/institucionales correspondientes.

3.7. El análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados

Este análisis consiste básicamente en estudiar sistemáticamente los objetos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática. Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas en el curso.

Siguiendo a Godino (2003), se entiende por análisis ontológico-semiótico (o simplemente, análisis semiótico) de un texto matemático / registro de clase, a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos.

El análisis ontológico-semiótico se constituye, en consecuencia, en la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la trascripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori).

En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos. Algunos de estos conflictos pueden pasar desapercibidos por el profesor y, por tanto, no tenidos en cuenta en el proceso de estudio.

El análisis semiótico ayuda a formular hipótesis sobre puntos sensibles de la interacción o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de reformulación de significados y cambios en el proceso de estudio.

El criterio para definir las unidades de análisis (unidades semióticas) será cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una acción, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, se debe tener en cuenta, para delimitar las unidades de análisis, los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis tipos de elementos introducidos en el modelo teórico de la Teoría de las Funciones Semióticas, o también entidades mixtas derivadas.

Aspectos metodológicos

4.1. Introducción

Es este capítulo se presentan los aspectos metodológicos que sustentaron la investigación, desarrollada bajo el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) que propone Godino (2000, 2002, 2003) y Godino, Batanero y Font (2007), como línea teórica y metodológica de la didáctica de la matemática.

A continuación se tienen las características de la investigación:

- Exploratoria: en tanto se pretendió recoger y analizar información que pudiera servir para orientar futuras investigaciones.
- Diagnóstica: pues supone el análisis de situaciones. Es decir intenta conocer lo que está sucediendo en una determinada representación de la realidad que denominamos situación.
- Descriptiva: ya que se generaron informes narrativos a partir de la investigación de campo realizada.
- De campo: debido a que se realizó mayoritariamente en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.
- Interpretativa, ya que se tuvo en cuenta el sentido de las acciones de los sujetos.
- Cualitativa, puesto que el objeto de estudio no fue algo que se pudiera cuantificar.
- Hermenéutica, dado que se hicieron interpretaciones de las interpretaciones que hacían los sujetos investigados
- Etnográfica, en el sentido de que se pretendió comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, mediante una inmersión en su pensamiento y en su práctica, evitando en la medida de lo posible alterar la realidad estudiada. A su vez, la información también se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.

4.2. Fases de la investigación

La investigación se organizó en seis fases diferenciadas que se describen a continuación:

Primera fase: Se analizaron las actividades vinculadas a los tópicos de aleatoriedad y probabilidad que proponen los libros escolares de matemática del nivel medio, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales. Este análisis permitió estructurar una configuración epistémica del tema, la cual está compuesta por:

- Tipo de tareas o ejercicios, tanto extra-matemáticas como intra-matemáticas que se proponen,
- Conceptos y definiciones que son necesarios para resolver la actividad,
- Propiedades que se requieren conocer y dominar,
- Procedimientos, algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones,
- Argumentos y razonamientos necesarios para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema, los cuales pueden ser deductivos o de otro tipo,
- Los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.; que pueden aparecen en la resolución de la actividad.

Segunda fase: Teniendo en cuenta la configuración epistémica elaborada en la primera fase, se diseñó un instrumento que puso en juego la red de relaciones que activa un individuo que ha comprendido los objetos matemáticos en cuestión (aleatoriedad y probabilidad) y que se manifiesta a través de las prácticas operativas que lleva a cabo. Este instrumento consta de una serie de actividades que los estudiantes resolvieron por escrito.

Tercera fase: Se analizó la validez, en términos de los criterios de idoneidad didáctica formuladas según el EOS, y la confiabilidad de contenido del instrumento creado en la fase anterior por juicio de pares expertos. Se lo aplicó a un grupo reducido de estudiantes para evaluar posibles ajustes y reformulaciones de acuerdo a los resultados preliminares obtenidos.

Cuarta fase: Se administró el instrumento diseñado en la segunda fase a un grupo de estudiantes ingresantes a las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional, y a los estudiantes del segundo año del Profesorado de matemática del Instituto de Profesorado Concordia D-54, ambas instituciones de Argentina.

Posteriormente se analizaron las producciones enfocándonos en el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes ante las situaciones–problemas planteadas, intentando establecer la relación entre el conglomerado de prácticas que los estudiantes son capaces de realizar con estos objetos matemáticos y el significado (en el sentido del EOS) que pudieron construir acerca del mismo.

Quinta fase: Teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la fase anterior, se armaron las configuraciones cognitivas de los estudiantes. Esto es, el modo en que se articulan los elementos primarios recuperados en la primera fase y que se evidenciaron en las prácticas operativas que llevó a cabo el estudiante. Esto permitió realizar una valoración individual de las concepciones iniciales de cada estudiante.

Sexta fase: Se realizaron comparaciones entre las configuraciones cognitivas (obtenidas de la cuarta fase) con la configuración epistémica (construida en la primera fase) a fin de valorar la concepción global alcanzada por los estudiantes. Estos actos de semiosis dieron como resultado final una aproximación a la configuración cognitiva de los estudiantes como también a una caracterización del tipo de tareas operativas realizadas y de las posibles dificultades en la resolución de los problemas. Esta fase permitió, además, proponer mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje que se implementen sobre el tema.

4.3. Documentos curriculares, textos escolares y estudiantes participantes

A continuación se describen los documentos curriculares, los textos escolares que se utilizaron para la determinación de la configuración epistémica de referencia y una descripción de la población de estudiantes cuyas prácticas operativas y discursivas fueron objeto de estudio. En todos los casos se brindan características generales con la finalidad de contextualizar la investigación.

4.3.1. Los documentos curriculares analizados

En la primera fase de la investigación, los documentos curriculares que consideramos son:

- Diseño Curricular para el Nivel Secundario de Entre Ríos del Ciclo Básico y del Ciclo Orientado del año 2008.
- Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ministerio de Educación. Consejo Federal de Educación del año 2006.

La justificación de la selección es que los estudiantes que se consideraron para esta investigación, son egresados del sistema educativo de Entre Ríos y posiblemente de otras provincias de la República Argentina durante los años 2018, 2019 o en años anteriores próximos, por lo tanto cursaron su escuela secundaria estando vigentes los diseños curriculares jurisdiccionales y/o nacionales correspondientes a la Ley Federal de Educación N°26206/06 y la Ley Provincial de Educación N° 9890/2008.

A partir del análisis de estos documentos se elaboró una configuración epistémica de referencia conformada por un significado institucional global de expertos.

4.3.2. Los textos escolares analizados

Continuando en la primera fase del trabajo, se analizaron las situaciones problemáticas de los textos escolares de matemática del nivel medio, utilizados frecuentemente por profesores, centrando la atención en las unidades didácticas focalizadas en la aleatoriedad y la probabilidad. La selección de los libros se determinó a través de encuestas informales a colegas docentes, profesores de matemática que se desempeñan actualmente en escuelas secundarias en la provincia de Entre Ríos y tienen a su cargo cursos de matemática donde se desarrollan, directa o indirectamente, los objetos de estudio de esta investigación.

Este proceso nos llevó a seleccionar 7 textos escolares que son los que mayoritariamente mencionaron en las entrevistas. En cada libro se tomó como unidad de análisis el capítulo o unidad didáctica correspondiente al desarrollo de nuestros objetos de interés.

Los libros analizados fueron los siguiente:

- Boccioni, M.; Tabaj, A.; Vigione, Y. y Cabral, G. (2018). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Puerto de Palos.
- Kurzrok, L.; Altman, S.; Arnejo, M. y Comparatore, C. (2017). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Tinta Fresca.
- Jallier, A. y Pérez, M. (2016). *Entre números III*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.
- Kaczor, P. (2016). *Entre números II*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.
- Berman, A.; Dacunti, D; Pérez, M.; Veltri, A. y Moledo, L. (2007). *Matemática II*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.
- Lloberas, M y Rubbo; A. (2007). *Matemática 8*. Buenos Aires, Argentina: A & L Editores.
- Kaczor, P.; Schaposchnik, R.; Franco, E.; Cicala, R. y Díaz, B. (1999). *Matemática 1*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.

Para cada libro se realizó una resolución experta de las actividades para caracterizar las distintas situaciones problemas presentadas (extra e intramatemáticas), los conceptos o definiciones (previos y emergentes), propiedades o proposiciones (previas o emergentes), procedimientos, técnicas o algoritmos (previos y emergentes), argumentos y lenguaje (discriminado en natural, gráfico o simbólico).

A su vez, teniendo la configuración epistémica de cada texto y considerando como referencia los criterios de idoneidad del EOS, se analizó la idoneidad didáctica del capítulo, catalogándola en alta, media o baja, de acuerdo a indicadores que proponen Font, Planas y Godino (2010) para tal fin. Esta idoneidad didáctica se analizó con base en la configuración epistémica de referencia elaborada sobre el significado institucional global/experto establecido a partir de los documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales.

Nos centramos principalmente en las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica, dado que nos resulta poco viable valorar en las actividades de los textos la idoneidad mediacional y emocional pues la primera se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje y la segunda, refiere al grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio.

Con respecto a la idoneidad interaccional, si bien no se puede observar exhaustivamente en los textos, pues refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje, la analizamos considerando, por ejemplo, si un texto propone actividades a realizar en forma cooperativa o actividades que implican el análisis de lo que realizó otro resolutor, le asignamos una idoneidad interaccional alta.

A modo de resumen, detallamos estos indicadores:

- *Idoneidad epistémica:* asegurar que se considere una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); tipología de tareas variadas que generen procesos matemáticos relevantes como la argumentación, modelización, etc.
- *Idoneidad cognitiva:* asegurar que los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema; incluir actividades de ampliación y de refuerzo.
- *Idoneidad interaccional:* reconocer y resolver los conflictos de significado de los estudiantes (interpretando correctamente los silencios de los estudiantes, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); contemplar momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
- *Idoneidad mediacional:* usar materiales manipulativos e informáticos; invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema.
- *Idoneidad emocional:* seleccionar tareas de interés para los estudiantes; promover la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.
- *Idoneidad ecológica:* asegurar que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; relacionar los contenidos que se enseñan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas.

Este análisis permitió realizar una agrupación de los textos en tres grupos o bloques, de los cuales se determinó una configuración epistémica general de ellos, por tener características comunes. Posteriormente se elaboró una configuración epistémica de referencia de los textos tomando como base la configuración epistémica de referencia del significado institucional global/experto, y se la utilizó para la elaboración del instrumento.

4.3.3. Los estudiantes cuyas producciones se analizaron

Para la tercera fase de la investigación se realizó una valoración de las concepciones que tienen 43 estudiantes: 19 de ellos son ingresantes a las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, y 24 son estudiantes del primer año del Profesorado de matemática del Profesorado Concordia D-54, también de Argentina.

Estos grupos fueron seleccionados por la accesibilidad de poder realizar la actividad para la investigación, ya que el investigador principal dicta clases en estos cursos. Este fue el único motivo por el cual se seleccionaron los grupos y no de otras carreras o instituciones.

La actividad la llevamos a cabo un día previamente pautado; se les entregó el instrumento en formato papel y se les dio un tiempo máximo de una hora (la mayoría lo terminó en 40 minutos aproximadamente, como se había observado en el pre-test).

Los estudiantes provenían de distintas escuelas secundarias (públicas, particulares y de gestión privada) y de diferentes orientaciones, tanto de Entre Ríos como de otras provincias.

Una vez que contamos con la resolución del instrumento (todos los participantes lograron dar respuesta a la mayoría de las consignas) y se analizaron las prácticas operativas realizadas con el fin de determinar configuraciones cognitivas de los estudiantes.

4.4.4. El diseño del instrumento

Teniendo en cuenta la configuración epistémica del análisis de los libros de textos elaborada en la primera fase, se diseñó un instrumento que puso en juego la red de relaciones que activa un individuo al resolver situaciones problemáticas vinculadas a los objetos matemáticos en estudio.

El instrumento consistió en una serie de 5 actividades, referidas a situaciones problemas extra-matemáticas donde los estudiantes debían poner en juego conceptos, procedimientos, propiedades, lenguajes y argumentos vinculados a los objetos aleatoriedad y probabilidad. Estas actividades se diseñaron a través de la configuración epistémica de referencia realizada en la fase 1 y de los trabajos de investigación que se consideraron como antecedentes de nuestro problema de estudio. Con relación a los libros de textos, se consideraron actividades de los que calificamos con alta idoneidad didáctica, con base en el significado institucional global/experto elaborado de los documentos curriculares nacionales y jurisdiccionales y teniendo en cuenta los seis tipos de objetos primarios que se ponen en juego en la actividad matemática.

Previo a la administración del instrumento, se puso a prueba con un reducido número de estudiantes de segundo año del Profesorado de matemática a fin de realizar los ajustes correspondientes (mejorar la narración de alguna consigna, estimar tiempos de resolución, entre otras). En una etapa posterior, el instrumento se puso a discusión entre pares expertos para analizar su validez y confiabilidad. Entendemos a la validez en el sentido de qué tan bien mide el instrumento lo que se pretende valorar (en nuestro caso las concepciones y no los errores y dificultades que pudieran tener los estudiantes) y la capacidad que tiene el propio instrumento para proporcionar la misma medición en diferentes ocasiones.

Ambos criterios fueron trabajados buscando el consenso entre la comunidad de pares expertos, y no mediante pruebas estadísticas. No obstante, los pares expertos consideraron que no eran necesarias las pruebas pues las consignas fueron tomadas de otras investigaciones donde fueron validadas.

Respeto a los pares expertos, hemos recurrido a tres docentes e investigadores con formaciones disciplinares en educación matemática y/o en el área de probabilidad y la estadística. El primero de ellos es la Magister en Estadística Ana María Ruíz. Es docente e investigadora en el área de Educación Matemática con amplia trayectoria en trabajos de la temática. Actualmente es coordinadora del Sector Educativo Permanente del área de Posgrado de la Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina. En el Anexo I se dispone de la planilla de su evaluación.

El segundo es el Doctor en Matemática Federico De Olivera Lamas de la Universidad de la República, Uruguay. Es docente e investigador en el Centro Regional de Profesores en Artigas, en el Profesorado de Matemática. Ha realizado trabajos de investigación en educación matemática relacionados a la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Particularmente tomamos como antecedente uno de sus trabajos. En el Anexo II se dispone de la planilla con su evaluación.

El tercer par experto es el Doctor en Matemática Federico Dalmao de la Universidad de la República, Uruguay. Tiene por especialidad el área de procesos estocásticos. Es docente investigador en el Departamento de Matemática y Estadística del Litoral en Salto, Uruguay, responsable de los cursos vinculados a la Probabilidad y la Estadística. En el Anexo III se dispone de la planilla con su evaluación.

A continuación se resume la composición de los grupos a los que se les administró este instrumento:

	Cantidad de estudiantes	Carreras y/o especialidades
Facultad Regional Concordia (UTN)	19	Ingenierías Civil, Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Industrial
Profesorado Concordia D-54	24	Profesorado de Matemática

4.4.5. Análisis de los datos obtenidos de las respuestas de los estudiantes participantes

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes, en primera instancia estudiamos las prácticas operativas que quedaron registradas en las evaluaciones realizadas, las cuales estaban condicionadas por el instrumento que administramos.

Este análisis llevó a determinar posibles vínculos que estarían realizando para la resolución de la actividad, lo cual no necesariamente es así, pues es una interpretación que hacemos de lo que otra persona ha realizado. Esta correspondencia se realiza a través de una función semiótica, la cual es un constructo que propone el EOS, y que tiene por antecedente a un objeto matemático, y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por un estudiante ante una cierta clase de situaciones–problemas que se les presentó en el instrumento.

Si bien cuando un estudiante realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto (lenguaje, situaciones–problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), no necesariamente lo realizan como el profesor o intérprete lo está pensando.

Este acto de semiosis dio lugar a una primera agrupación de los elementos de significado, lo que constituye la "Configuración Cognitiva" obtenida para cada estudiante.

Dadas las similitudes encontradas en las configuraciones cognitivas de los 43 estudiantes, se logró considerar 3 configuraciones cognitivas grupales. Esto permitió realizar comparaciones con la Configuración Epistémica de referencia obtenida del análisis de los textos escolares.

Por último se han considerado representaciones gráficas generales y comparativas entre los dos grupos de estudiantes (ingresantes a las carreras de ingeniería y estudiantes del profesorado de matemática). A su vez, se acompaña con una valoración en porcentajes respecto a las concepciones que se han encontrado.

Configuración epistémica de libros escolares y textos curriculares

5.1. Los objetos aleatoriedad y probabilidad en los documentos curriculares

5.1.1. Introducción

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales (extraídas de documentos curriculares, un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). En las configuraciones epistémicas (obtenidas de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante una clase, etc.), podemos considerar que están en juego objetos institucionales, en tanto tienen connotaciones normativas o convencionales, y son usados como una referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este capítulo, a partir del Diseño Curricular de Educación Secundaria de la Provincia de Entre Ríos, se determina una configuración epistémica global de referencia que tomamos como "significado institucional de referencia" o "significado institucional global o experto" para los objetos aleatoriedad y probabilidad. Esta configuración la expresamos discriminando los seis objetos primarios: situaciones problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguajes.

Esto se justifica en que los estudiantes que fueron considerados para esta investigación son egresados del sistema educativo de la Provincia de Entre Ríos durante el año 2018 aproximadamente, y por lo tanto, cursaron el secundario estando en vigencia los diseños curriculares jurisdiccionales.

Los Contenidos Básicos Comunes (CBC) forman parte de los acuerdos federales para la transformación curricular y se constituyen en el conjunto de saberes relevantes que integrarán el proceso de enseñanza de todo el país.

Según a Ley de Educación Nacional (26206/2006) en el artículo 31° como en la Ley de Educación Provincial (9890/2008) en el Artículo 22° inciso c, la Provincia de Entre Ríos establece la duración de la escuela secundaria en 6 años, comprendida en dos Ciclos: Básico Común y Orientado.

Para nuestra investigación se analizaron, del Diseño Curricular para el Nivel Secundario de Entre Ríos, los bloques correspondientes al área de matemática para el Ciclo Básico Común (primer, segundo y tercer año) y para el Ciclo Orientado. Se han tomado los recorridos “Contribución al pensamiento estadístico y probabilístico para la formación de una cultura científica” con especial atención a las temáticas vinculados a nuestro objeto de estudio. También se han revisado los contenidos propuestos, a nivel nacional, de los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP) para ambos ciclos.

5.1.2. Configuración epistémica de referencia para aleatoriedad y probabilidad

De los documentos curriculares surgen las siguientes consideraciones para cada uno de los objetos primarios intervinientes, acorde al marco teórico y metodológico utilizado en esta investigación:

Situaciones problemáticas

Situaciones problemáticas contextualizadas (extramatemáticas). Problemas de introducción, de desarrollo, de aplicación y de consolidación que incentiven:

- La construcción de nuevos conocimientos y exploración de distintas estrategias.
- La utilización de conocimientos ya adquiridos, en situaciones de dentro y fuera de la matemática misma.
- La investigación, apuntando al desarrollo de competencias metodológicas.

Situaciones no contextualizadas (intramatemáticas). Ejercicios de introducción como ejemplificación y de aplicación en contextos de incertidumbre.

Lenguaje

Verbal: enunciados coloquial de situaciones problemáticas, argumentación de procedimientos. Denominación, explicación y/o definición de conceptos, relaciones y propiedades.

Simbólico: utilización de la notación simbólica para:

- Expresión de definiciones y propiedades.
- Traducción de las condiciones de un fenómeno o problema en términos de igualdades, ecuaciones o desigualdades.
- Utilización del lenguaje simbólico para describir el enunciado de un problema, para describir gráficas, diagramas o tablas.

Gráfico: Representación de situaciones problemáticas a través de diagramas de Venn, tablas de doble entrada. Construcción de gráficos para resumir información. Interpretación de enunciados a través de tablas y gráficos. Utilización del lenguaje gráfico para describir el enunciado de un problema o la relación entre variables.

Pasaje del lenguaje verbal al gráfico y simbólico y viceversa

Conceptos. Experimentos aleatorios. Espacio muestral. Espacios muestrales equiprobables. Enfoque clásico y frecuencial. Sucesos, sucesos disjuntos. Unión, intersección y complemento. Técnicas de combinatoria. Frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Tablas de doble entrada y diagramas de árbol.

Propiedades. Acotación de la probabilidad entre 0 y 1. Cálculo de una probabilidad a partir del evento complementario. Ley de los grandes números. Regla de la suma para eventos cualquiera. Ley de los grandes números.

Procedimientos. Construcción de tablas, diagramas y gráficos. Conteo de casos en espacios muestrales con y sin uso de técnicas combinatorias básicas. Comparación de estrategias y conjuntos. Reconocimiento y aplicación de propiedades y algoritmos.

Argumentos. Formulación de argumentos matemático-estadísticos lógicos que avalen o desaprueben razonamientos o toma de decisiones. Exposición oral y escrita de los procedimientos de resolución de problemas usando el lenguaje matemático adecuado. Denominación, explicación y/o definición de conceptos, relaciones y propiedades usando el vocabulario adecuado.

La configuración epistémica de referencia, obtenida de los documentos curriculares para aleatoriedad y probabilidad, la exponemos a continuación.

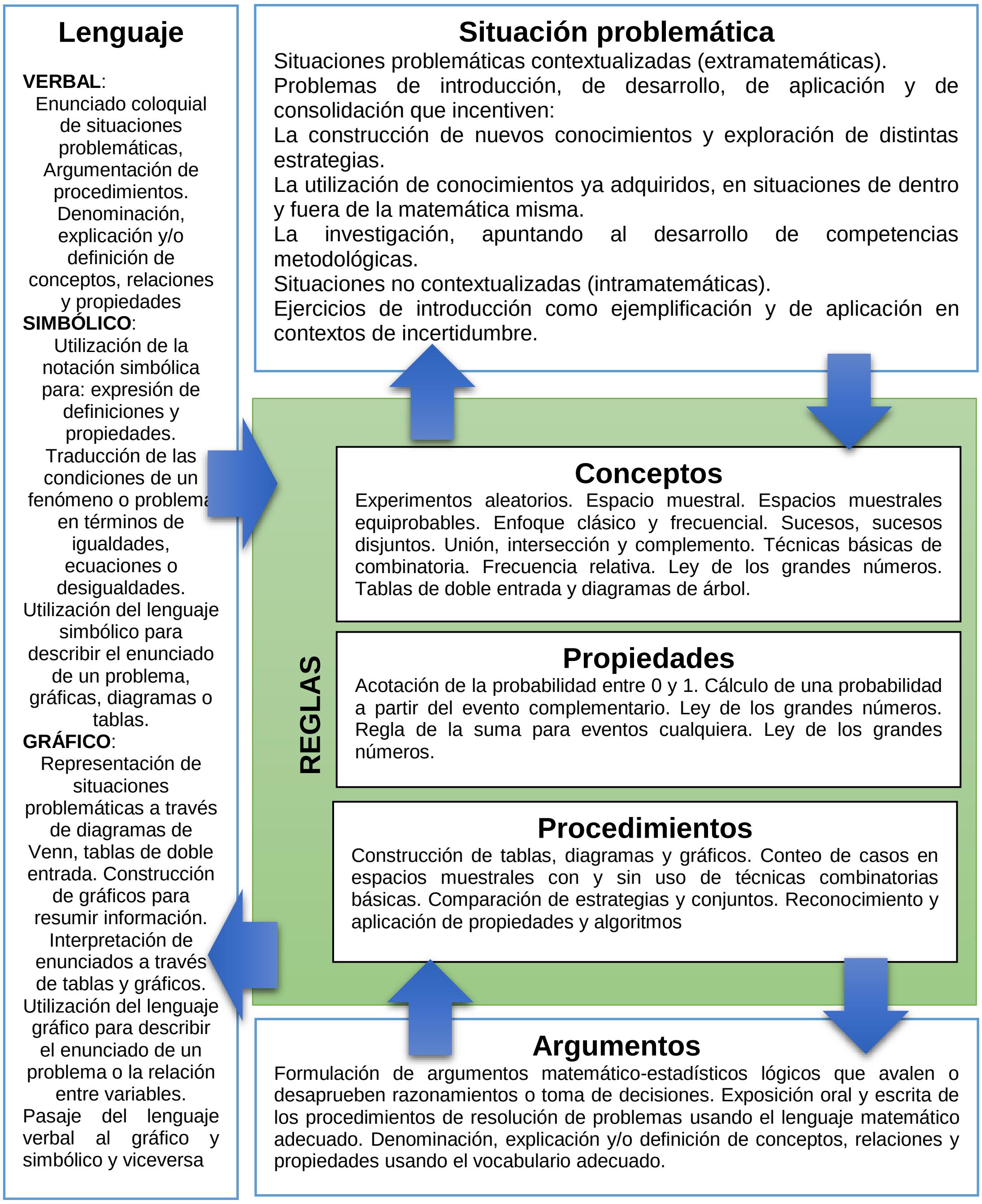


Figura 3: Configuración epistémica de referencia (significado institucional global/ experto)

5.2. Aleatoriedad y probabilidad en los textos escolares

5.2.1. Introducción

Una fuente de consulta de referencia de los docentes para la preparación de las clases son los libros escolares. Por lo tanto, se constituyen como influyentes, en forma directa o indirecta, en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las instituciones escolares.

El presente capítulo tiene por objetivo realizar un análisis didáctico de las tareas y actividades que se encuentran en los textos escolares de nivel secundario de matemática sobre los objetos aleatoriedad y probabilidad. Este análisis se realiza utilizando herramientas teóricas del EOS como línea teórica y metodológica de la didáctica de la matemática. El mismo es importante porque nos permite contar con información acerca de la idoneidad didáctica que tienen las tareas que proponen estos libros sobre los objetos matemáticos de interés para el estudio.

Analizamos 7 libros de textos escolares de matemática del nivel secundario, tomando como referencia los años donde aparece la temática de estudio. La selección se realizó a través de las entrevistas informales realizadas a profesores del nivel de distintos tipos de escuelas (particulares, estatales y de gestión privada) de la ciudad de Concordia, Argentina.

El análisis de los libros permitió establecer el significado institucional pretendido para la aleatoriedad y la probabilidad, como así también, establecer una configuración epistémica que se utilizó como referencia para el diseño de instrumento, y luego, para realizar comparaciones con las configuraciones cognitivas de los estudiantes.

Para cada uno de estos textos se valoró a priori la idoneidad didáctica de los procesos potenciales de estudio. La descripción se basó en la clasificación y agrupación de los objetos primarios (situaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y lenguaje) que permitió determinar configuraciones epistémicas que resaltan el valor contextual y funcional de los elementos primarios que conforman los objetos de estudio de nuestro interés. Una ventaja de la construcción de estas configuraciones es que nos dan la “anatomía del texto matemático”, pudiendo así describir las características más allá de las orientaciones epistemológicas y didácticas.

Para esta instancia fue necesario imaginar posibles desarrollos que realizarían los estudiantes, con el fin de determinar la utilización de los conceptos, propiedades y procedimientos previos y emergentes.

Para la valoración de las propuestas de tareas y actividades plasmadas en los textos analizados se utilizaron los indicadores de idoneidad didáctica proporcionados por el EOS. Nos centramos, principalmente, en las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica, dado que resulta poco viable valorar en las actividades las idoneidades mediacional y emocional, debido a que refieren, la primera, al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y la segunda, al grado de implicación, manifestado desde el interés y la motivación de los estudiantes en el proceso de estudio.

Respecto a la idoneidad interaccional, referida al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje, si bien no es posible observarla exhaustivamente en los textos, se analizó considerando la propuesta de actividades a realizar en forma cooperativa, o aquellas que impliquen el análisis de lo que realizó otro compañero. Para estos últimos casos se asignó una idoneidad interaccional alta.

5.2.2. Configuraciones epistémicas para aleatoriedad y probabilidad en los textos escolares

5.2.2.1 Configuración epistémica del Libro 1

Boccioni, M.; Tabaj, A.; Vigione Y. y Cabral G. (2018). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Puerto de Palos

Situaciones problemas. Se presentan situaciones contextualizadas únicamente vinculadas a juegos de azar (dados, naipes, monedas), tanto para la introducción como para el afianzamiento del cálculo de probabilidades. Implican la determinación del espacio muestral y luego el cálculo se hace solamente desde el enfoque clásico. No se presentan situaciones intramatemáticas.

Lenguaje. Predomina el lenguaje coloquial para el enunciado de los problemas y el lenguaje simbólico para la solución de los mismos.

Conceptos. Aparecen como previos y necesarios para interpretar los enunciados los conceptos de números naturales y racionales, múltiplos, desigualdades y propiedad conmutativa en la suma y el producto. Como emergentes, el concepto de espacio muestral, suceso, probabilidad restringido al cociente de dos números naturales, eventos disjuntos e intersección de sucesos.

Propiedades. Se presentan muy pocas. Se las aplica implícitamente en situaciones vinculadas al azar. Por ejemplo, la conmutatividad de eventos bajo independencia y la no conmutatividad para eventos dependientes.

Procedimientos. Como previos y necesarios se destacan la interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos y ejemplificación. Como emergentes, el conteo de espacios muestrales, la construcción de un diagrama de árbol, la construcción de tablas de doble entrada.

Argumentos. Los procesos de argumentación y validación están ausentes en las situaciones problemáticas planteadas.

La Configuración epistémica asociada al Libro 1 es la siguiente:

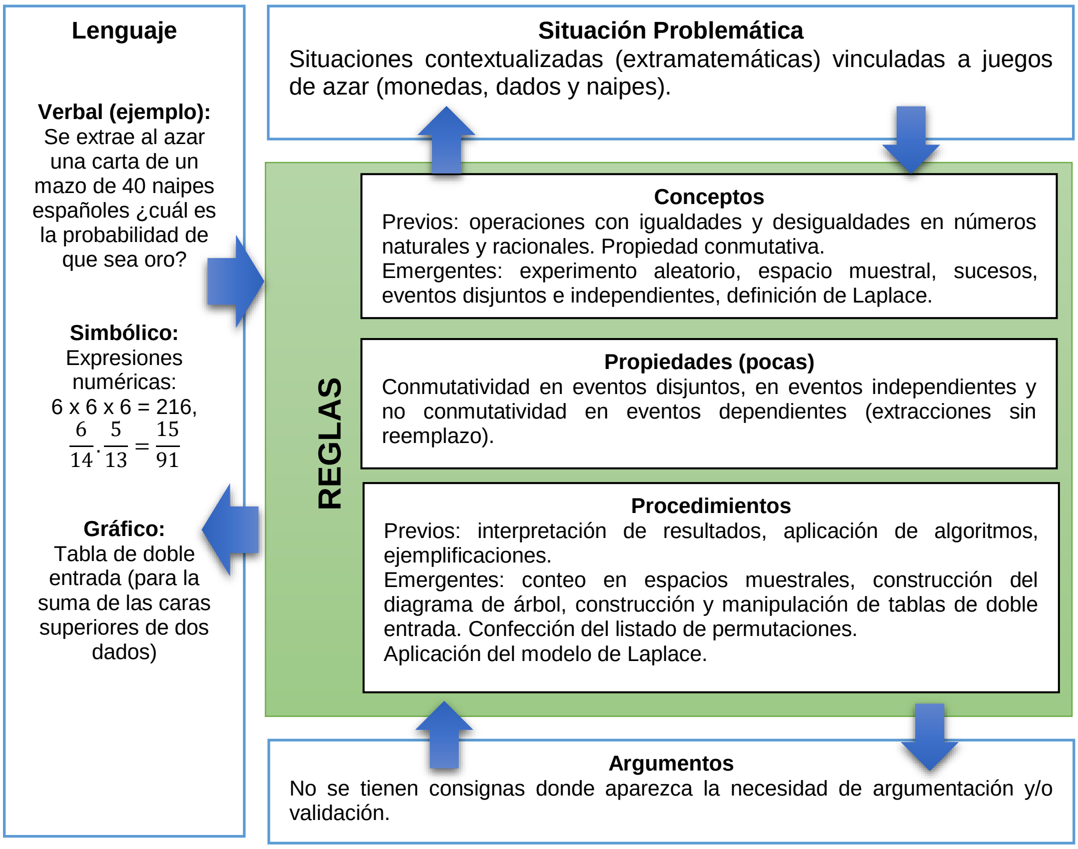
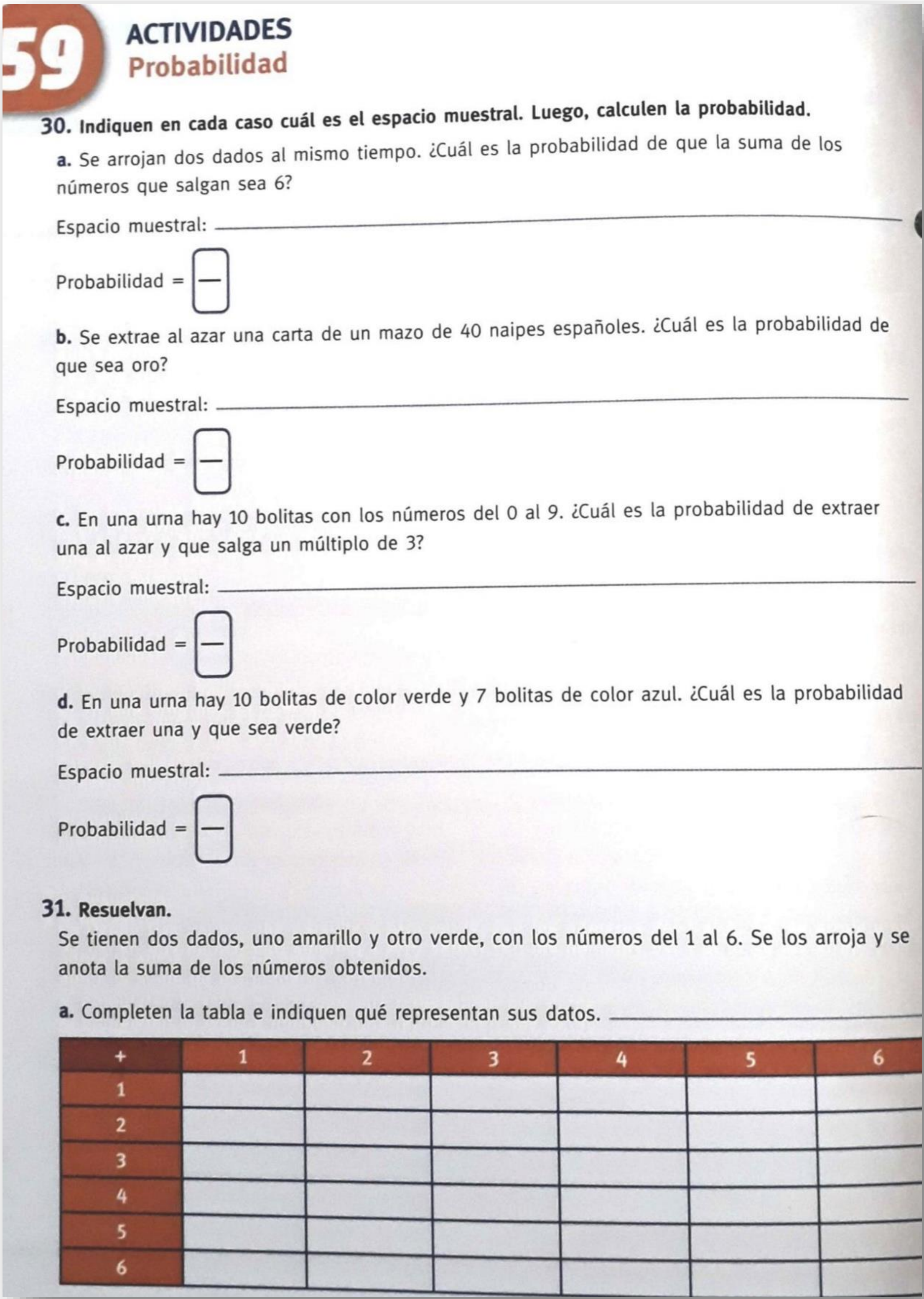


Figura 4: Configuración epistémica del Libro 1

Un ejemplo de las actividades que propone el Libro 1 se encuentra en la Figura 5.



59

ACTIVIDADES
Probabilidad

30. Indiquen en cada caso cuál es el espacio muestral. Luego, calculen la probabilidad.

a. Se arrojan dos dados al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que salgan sea 6?

Espacio muestral: ______

Probabilidad = —

b. Se extrae al azar una carta de un mazo de 40 naipes españoles. ¿Cuál es la probabilidad de que sea oro?

Espacio muestral: ______

Probabilidad = —

c. En una urna hay 10 bolitas con los números del 0 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una al azar y que salga un múltiplo de 3?

Espacio muestral: ______

Probabilidad = —

d. En una urna hay 10 bolitas de color verde y 7 bolitas de color azul. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una y que sea verde?

Espacio muestral: ______

Probabilidad = —

31. Resuelvan.

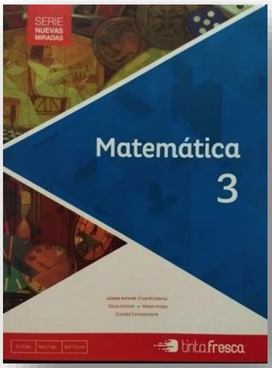
Se tienen dos dados, uno amarillo y otro verde, con los números del 1 al 6. Se los arroja y se anota la suma de los números obtenidos.

a. Completen la tabla e indiquen qué representan sus datos. ______

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Figura 5: Ejemplo de actividades del Libro 1 (Baccioni, Tabaj y Vigione, 2018, p. 222)

5.2.2.2. Configuración epistémica del Libro 2



Kurzrok, L.; Altman, S.; Arnejo, M. y Comparatore, C. (2017). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Tinta Fresca.

Situaciones problemas. Se presentan situaciones contextualizadas intra y extra-matemáticas de diversos contextos (no se limitan a los juegos de azar), tanto de la vida diaria como situaciones ficticias. Esto se observa tanto para la introducción como para el afianzamiento del cálculo de probabilidades. Predominan las situaciones contextualizadas. Implican la determinación del espacio muestral, necesidad del uso de alguna técnica para el conteo de resultados. El cálculo se hace solamente desde el enfoque clásico.

Lenguaje. Predomina el lenguaje coloquial para el enunciado de los problemas. Se utiliza el lenguaje simbólico y el gráfico ilustrar los enunciados, representar esquemas, entre otros.

Conceptos. Aparecen como previos y necesarios para interpretar los enunciados los conceptos de números naturales y racionales, par ordenado, desigualdades y propiedad conmutativa en la suma y el producto, fracciones equivalentes y técnicas básicas de combinatoria. Y como emergentes el concepto espacio muestral, suceso, probabilidad, eventos disjuntos, complemento, unión e intersección de sucesos.

Propiedades. Se presentan pocas, se las aplica implícitamente en situaciones vinculadas al azar. Por ejemplo la conmutatividad de eventos bajo independencia y la no conmutatividad para eventos dependientes. También que la probabilidad es un número comprendido de 0 a 1.

Procedimientos. Como previos y necesarios se destacan la interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos (por ejemplo comparación de fracciones) y ejemplificación. Como emergentes, el conteo en espacios muestrales, la construcción de un diagrama de árbol, la construcción de tablas de doble entrada.

Argumentos. Los procesos de argumentación y validación que surgen a través de la fundamentación y justificación de procedimientos, de respuestas y de enunciados.

La configuración epistémica asociada al Libro 2 es la siguiente:

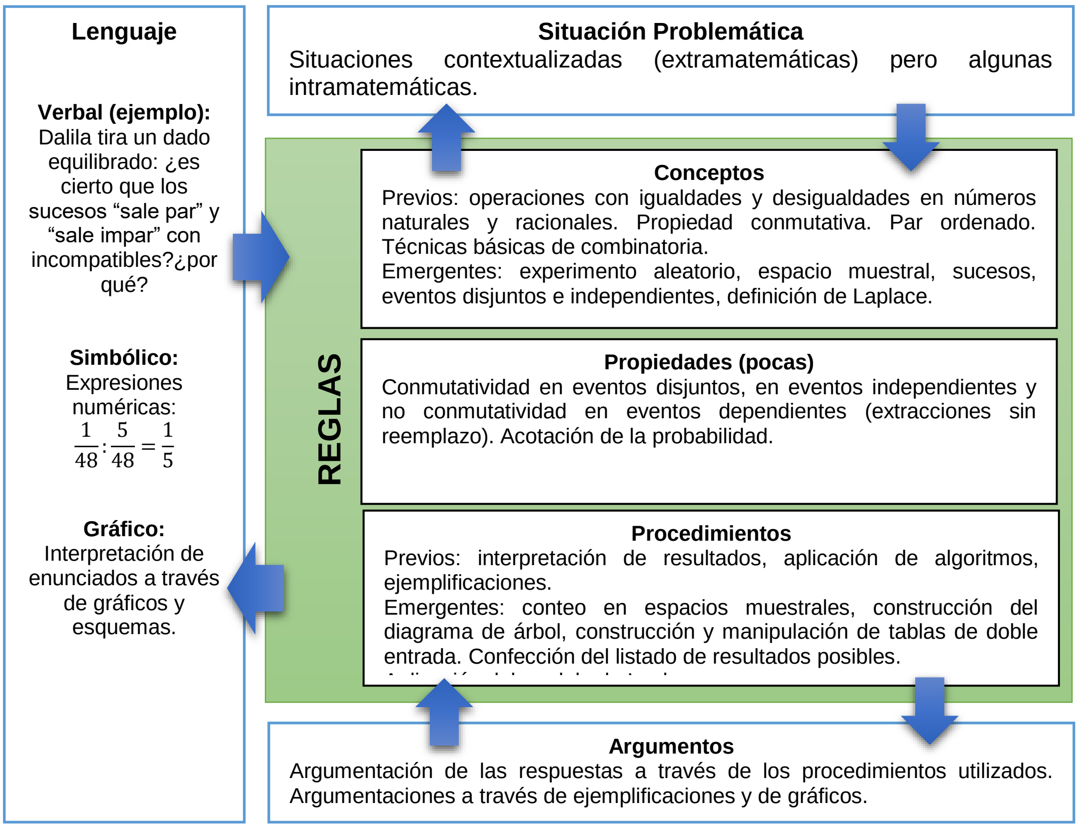
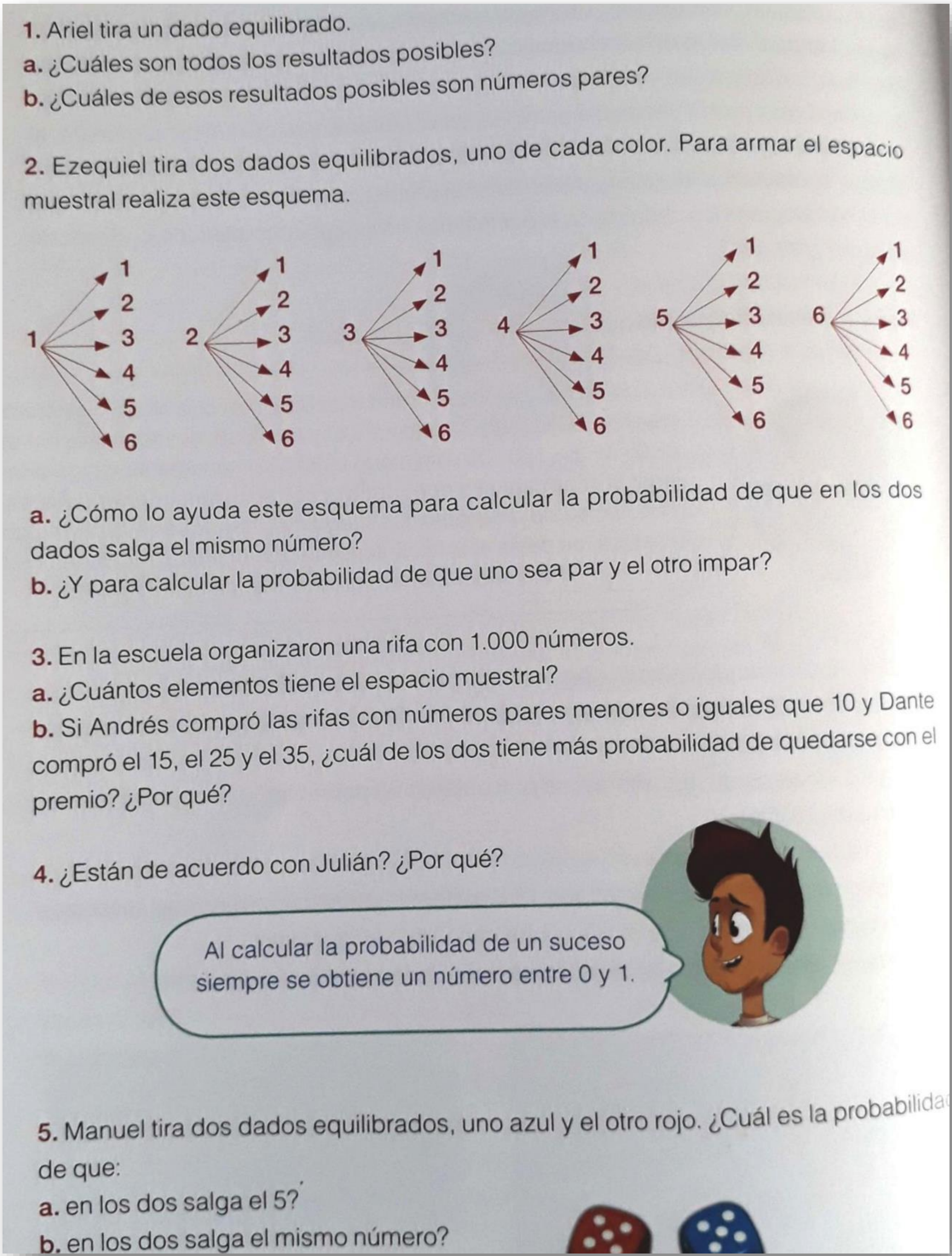


Figura 6: Configuración epistémica del Libro 2

Ejemplos de las actividades que propone el Libro 2 pueden contemplarse en la Figura 7.



1. Ariel tira un dado equilibrado.
a. ¿Cuáles son todos los resultados posibles?
b. ¿Cuáles de esos resultados posibles son números pares?

2. Ezequiel tira dos dados equilibrados, uno de cada color. Para armar el espacio muestral realiza este esquema.

a. ¿Cómo lo ayuda este esquema para calcular la probabilidad de que en los dos dados salga el mismo número?
b. ¿Y para calcular la probabilidad de que uno sea par y el otro impar?

3. En la escuela organizaron una rifa con 1.000 números.
a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
b. Si Andrés compró las rifas con números pares menores o iguales que 10 y Dante compró el 15, el 25 y el 35, ¿cuál de los dos tiene más probabilidad de quedarse con el premio? ¿Por qué?

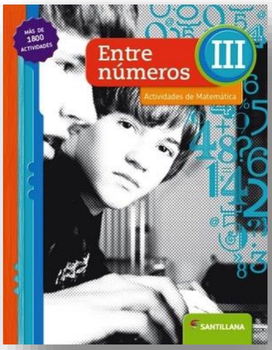
4. ¿Están de acuerdo con Julián? ¿Por qué?

Al calcular la probabilidad de un suceso siempre se obtiene un número entre 0 y 1.

5. Manuel tira dos dados equilibrados, uno azul y el otro rojo. ¿Cuál es la probabilida[d] de que:
a. en los dos salga el 5?
b. en los dos salga el mismo número?

Figura 7: Ejemplo de actividades del Libro 2 (Kurzrok *et al*.; 2017, p. 170)

5.2.2.3. Configuración epistémica del Libro 3



Jallier, A. y Pérez, M. (2016). *Entre números III*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.

Situaciones problemas. Se presentan situaciones contextualizadas (extra-matemáticas) de diversos contextos (no se limitan a los juegos de azar), tanto de la vida diaria como situaciones ficticias. Esto se observa tanto para la introducción, el desarrollo y para el afianzamiento del cálculo de probabilidades. Implican la determinación del espacio muestral, necesidad del uso de alguna técnica para el conteo de resultados. El cálculo se hace solamente desde el enfoque clásico.

Lenguaje. Predomina el lenguaje coloquial para el enunciado de los problemas. Se utiliza el lenguaje simbólico, numérico y gráfico para ilustrar los enunciados, representar situaciones, tablas de doble entrada.

Conceptos. Aparecen como previos y necesarios para interpretar los enunciados los conceptos de números naturales y racionales, par ordenado, desigualdades y propiedad conmutativa en la suma y el producto, fracciones equivalentes y técnicas básicas de combinatoria. Y como emergentes el concepto espacio muestral, suceso, probabilidad, eventos disjuntos, complemento.

Propiedades. Se presentan pocas, se las aplica implícitamente en situaciones vinculadas al azar, por ejemplo, que la probabilidad es un número comprendido de 0 a 1 y que una probabilidad se puede calcular utilizando el evento complementario.

Procedimientos. Como previos y necesarios se destacan la interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos (por ejemplo, comparación de fracciones) y ejemplificación. Como emergentes, el conteo en espacios muestrales, la construcción de un diagrama de árbol, la construcción de tablas de doble entrada, la comparación de distintas soluciones.

Argumentos. Los procesos de argumentación y validación surgen a través de la fundamentación y justificación de procedimientos, de respuestas y de enunciados.

La configuración epistémica del Libro 3 se contempla en la Figura 8.

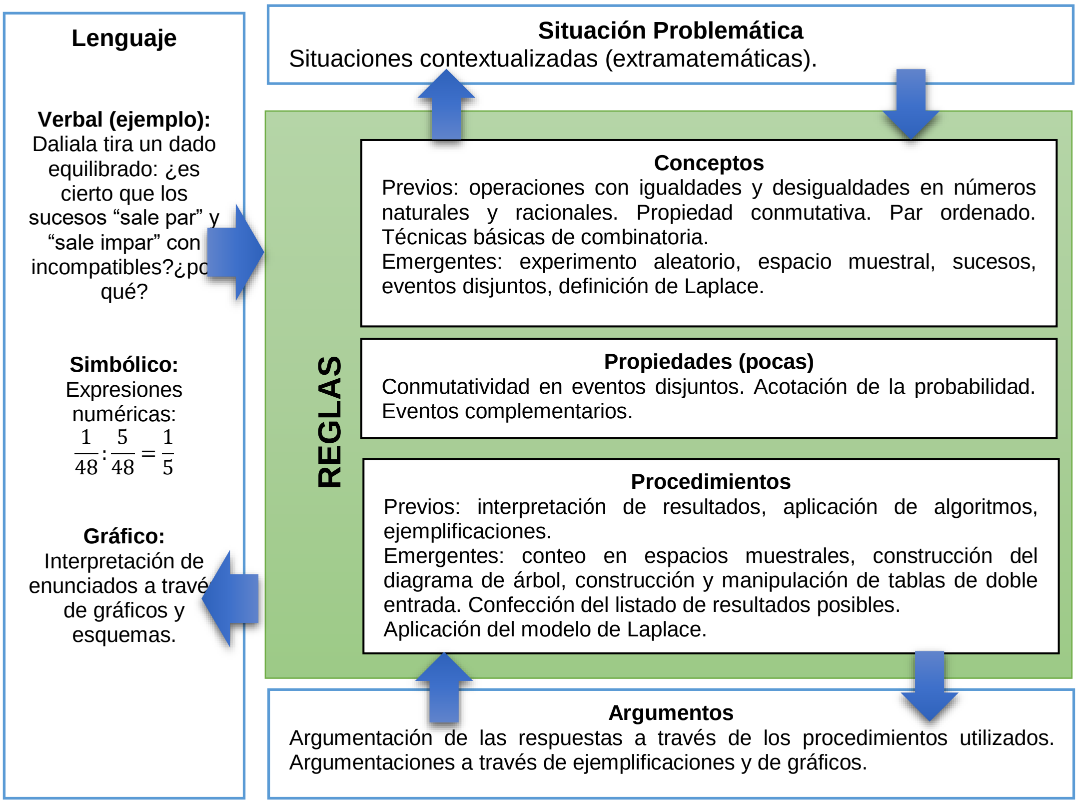
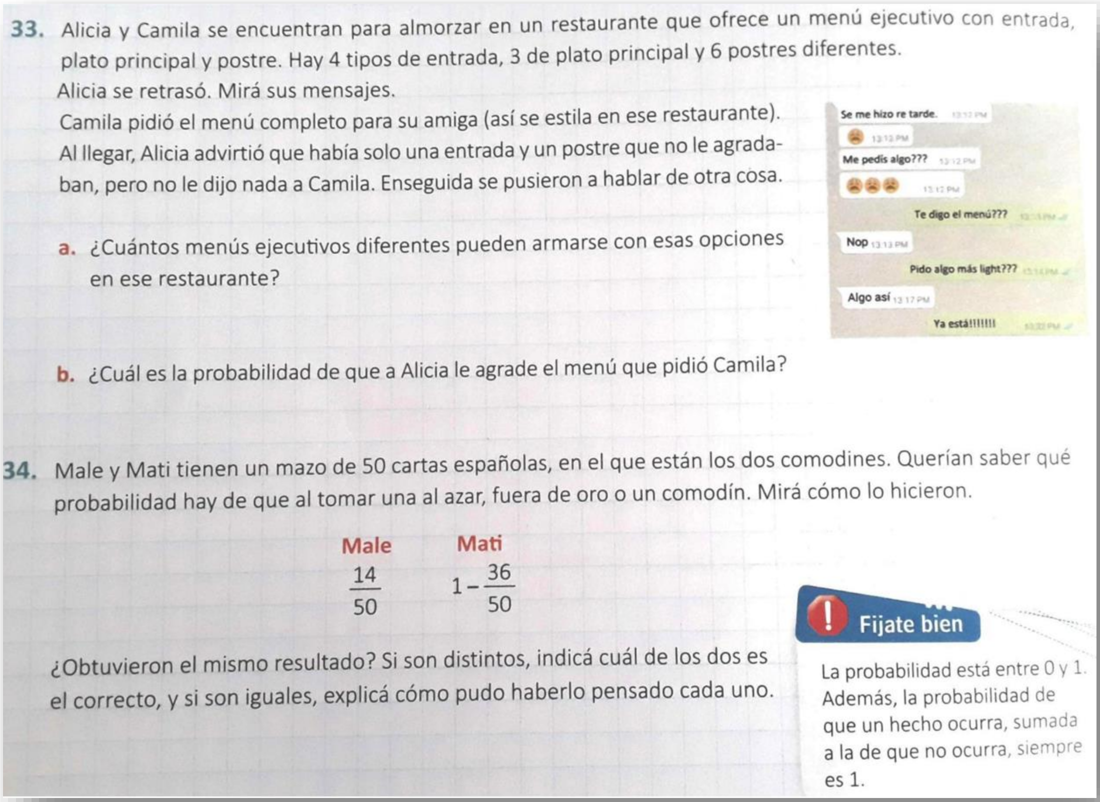


Figura 8: Configuración epistémica del Libro 3

Un ejemplo de actividades que propone el Libro 3 se encuentran en la Figura 9.



33. Alicia y Camila se encuentran para almorzar en un restaurante que ofrece un menú ejecutivo con entrada, plato principal y postre. Hay 4 tipos de entrada, 3 de plato principal y 6 postres diferentes.
Alicia se retrasó. Mirá sus mensajes.
Camila pidió el menú completo para su amiga (así se estila en ese restaurante).
Al llegar, Alicia advirtió que había solo una entrada y un postre que no le agradaban, pero no le dijo nada a Camila. Enseguida se pusieron a hablar de otra cosa.

a. ¿Cuántos menús ejecutivos diferentes pueden armarse con esas opciones en ese restaurante?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que a Alicia le agrade el menú que pidió Camila?

34. Male y Mati tienen un mazo de 50 cartas españolas, en el que están los dos comodines. Querían saber qué probabilidad hay de que al tomar una al azar, fuera de oro o un comodín. Mirá cómo lo hicieron.

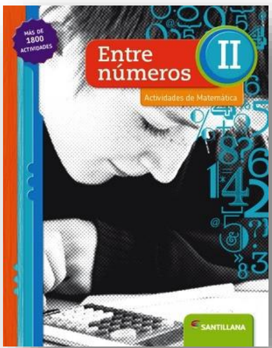
Male	Mati
$\frac{14}{50}$	$1 - \frac{36}{50}$

¿Obtuvieron el mismo resultado? Si son distintos, indicá cuál de los dos es el correcto, y si son iguales, explicá cómo pudo haberlo pensado cada uno.

Fijate bien
La probabilidad está entre 0 y 1. Además, la probabilidad de que un hecho ocurra, sumada a la de que no ocurra, siempre es 1.

Figura 9: Ejemplo de actividades del Libro 3 extraído de Jaller y Pérez (2016, p. 154)

5.2.2.4. Configuración epistémica del Libro 4



Kaczor, P. (2016). *Entre números II*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.

Situaciones problemas. Se presentan situaciones contextualizadas (extra-matemáticas) de diversos contextos (no se limitan a los juegos de azar), tanto de la vida diaria como ficticias. Esto se observa tanto para la introducción, el desarrollo y para el afianzamiento del cálculo de probabilidades. Implican la determinación del espacio muestral, recursos como un diagrama de árbol (principio multiplicativo), conteo de casos en espacios discretos. Se tiene la aclaración explícita de que los espacios son equiprobables. El cálculo se hace solamente desde el enfoque clásico.

Lenguaje. Predomina el lenguaje coloquial para el enunciado de los problemas. Se utiliza el lenguaje simbólico, numérico y gráfico para ilustrar los enunciados, representar situaciones y confeccionar tablas de doble entrada.

Conceptos. Aparecen como previos y necesarios para interpretar los enunciados los conceptos de números naturales y racionales, par ordenado, desigualdades y propiedad conmutativa en la suma y el producto, fracciones equivalentes, diagrama de árbol y principio del producto (como técnica de conteo). Como emergentes, el concepto espacio muestral, suceso, probabilidad, eventos disjuntos y complemento.

Propiedades. Se presentan pocas, por ejemplo, que la probabilidad es un número comprendido de 0 a 1 y que se puede calcular utilizando el evento complementario.

Procedimientos. Como previos y necesarios se destacan la interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos (por ejemplo, comparación de fracciones) y ejemplificación. Como emergentes, el conteo en espacios muestrales a través del uso del principio del producto, la construcción de un diagrama de árbol, la construcción de tablas de doble entrada, la comparación de distintas soluciones.

Argumentos. Los procesos de argumentación y validación surgen a través de la fundamentación y justificación de procedimientos, de respuestas y de enunciados.

La configuración epistémica del Libro 4 se contempla en la Figura 10.

. Lenguaje

Verbal (ejemplo):
En una caja hay 100 tarjetas, cada una de un color. Hay 7 colores de tarjeta…

Simbólico:
Expresiones numéricas:
$\frac{26}{200} = 0.13$

Gráfico:
Interpretación de enunciados a través de gráficos, tablas y diagramas.

Situación Problemática
Situaciones contextualizadas (extramatemáticas).

REGLAS

Conceptos
Previos: operaciones con igualdades y desigualdades en números naturales y racionales. Propiedad conmutativa. Par ordenado.
Emergentes: experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, eventos disjuntos, definición de Laplace, principio de multiplicación.

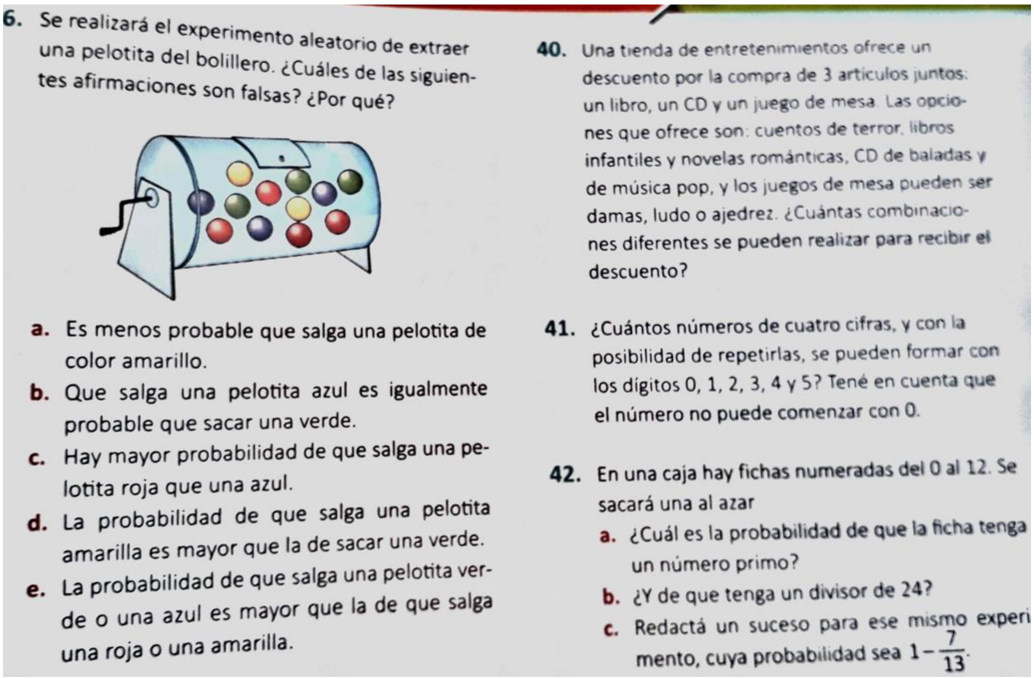
Propiedades (pocas)
Conmutatividad en eventos disjuntos. Acotación de la probabilidad. Eventos complementarios.

Procedimientos
Previos: interpretación de resultados, aplicación de algoritmos, ejemplificaciones.
Emergentes: conteo en espacios muestrales, construcción del diagrama de árbol, construcción y manipulación de tablas de doble entrada. Confección del listado de resultados posibles.
Aplicación del modelo de Laplace.

Argumentos
Argumentación de las respuestas a través de los procedimientos utilizados. Argumentaciones a través de ejemplificaciones y de gráficos.

Figura 10: Configuración epistémica del Libro 4

Un ejemplo de actividades que propone el Libro 4 se encuentra en la Figura 11.



6. Se realizará el experimento aleatorio de extraer una pelotita del bolillero. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas? ¿Por qué?

a. Es menos probable que salga una pelotita de color amarillo.
b. Que salga una pelotita azul es igualmente probable que sacar una verde.
c. Hay mayor probabilidad de que salga una pelotita roja que una azul.
d. La probabilidad de que salga una pelotita amarilla es mayor que la de sacar una verde.
e. La probabilidad de que salga una pelotita verde o una azul es mayor que la de que salga una roja o una amarilla.

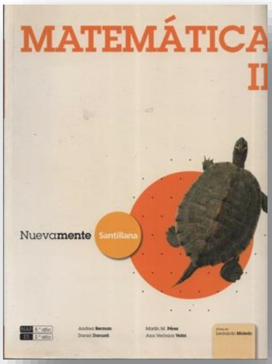
40. Una tienda de entretenimientos ofrece un descuento por la compra de 3 artículos juntos: un libro, un CD y un juego de mesa. Las opciones que ofrece son: cuentos de terror, libros infantiles y novelas románticas, CD de baladas y de música pop, y los juegos de mesa pueden ser damas, ludo o ajedrez. ¿Cuántas combinaciones diferentes se pueden realizar para recibir el descuento?

41. ¿Cuántos números de cuatro cifras, y con la posibilidad de repetirlas, se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5? Tené en cuenta que el número no puede comenzar con 0.

42. En una caja hay fichas numeradas del 0 al 12. Se sacará una al azar.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha tenga un número primo?
b. ¿Y de que tenga un divisor de 24?
c. Redactá un suceso para ese mismo experimento, cuya probabilidad sea $1-\frac{7}{13}$.

Figura 11: Ejemplo de actividades del Libro 4 extraído de Kaczor (2016, p. 153)

5.2.2.5. Configuración epistémica del Libro 5



Berman, A.; Dacunti, D.; Pérez, M.; Veltri, A. y Moledo, L. (2007). *Matemática II*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.

Situaciones problemas. Se presentan situaciones contextualizadas (extra-matemáticas) vinculadas a juegos de azar, pero prevalecen los contextos cotidianos. Incluye varias situaciones que vinculan la recolección de datos en muestras grandes. Estas características están presentes tanto para la introducción, el desarrollo y para el afianzamiento del cálculo de probabilidades. Presenta problemas para trabajar en equipos de estudiantes y luego, discutir los resultados. Hace referencia a problemas de simulación e implican la determinación del espacio muestral, conteo de casos en espacios discretos, manipulación de tablas para datos recolectados de encuestas. Los cálculos se hacen desde los enfoques clásico y frecuencial.

Lenguaje. Predomina el lenguaje coloquial para el enunciado de los problemas. Se utiliza el lenguaje simbólico, numérico y gráfico para ilustrar los enunciados, representar situaciones y elaborar tablas de doble entrada.

Conceptos. Aparecen como previos y necesarios para interpretar los enunciados los conceptos de números naturales y racionales, par ordenado, propiedad conmutativa en la suma y el producto, fracciones equivalentes. Como emergentes, el concepto de espacio muestral, suceso, probabilidad, eventos disjuntos, complemento, estabilidad de la frecuencia relativa y sucesos independientes.

Propiedades. Acotación de la probabilidad entre 0 y 1. Cálculo de una probabilidad a partir del evento complementario. Ley de los grandes números.

Procedimientos. Como previos y necesarios se destacan la interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos (por ejemplo, comparación de fracciones) y ejemplificación. Como emergentes, el conteo en espacios muestrales, la construcción de tablas de doble entrada, la comparación de distintas soluciones.

Argumentos. Los procesos de argumentación y validación surgen a través de la fundamentación y justificación de procedimientos, de respuestas y de enunciados. Hay actividades para trabajar en equipos de estudiantes en los que se pide discutir y analizar los resultados obtenidos de experiencias realizadas, por ejemplo el lanzamiento de un número grande veces de una moneda.

La configuración epistémica del Libro 5 se resume en la Figura 12.

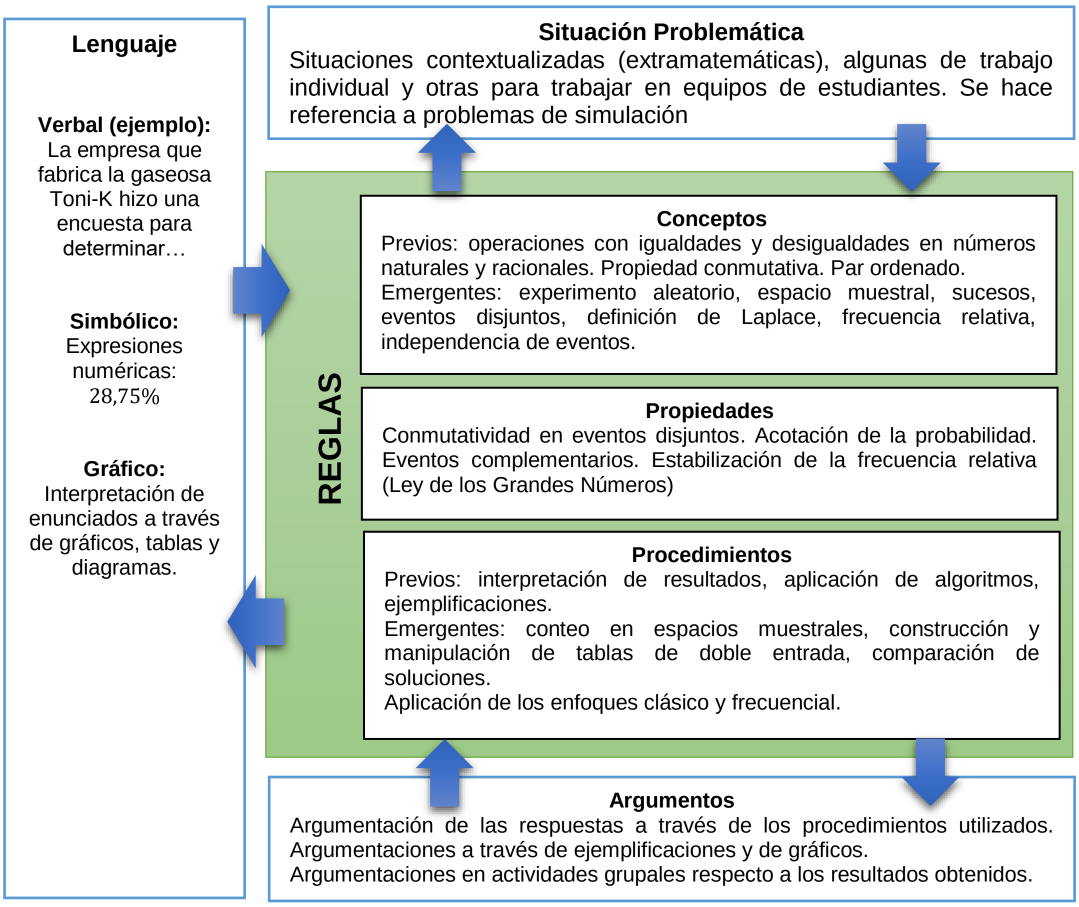


Figura 12: Configuración epistémica del Libro 5

Un ejemplo de actividades que propone el Libro 5 se encuentran en la Figura 13.

24. De un mazo de naipes españoles, la probabilidad de sacar un rey es de $\frac{2}{25}$. ¿Podés decir si el mazo tiene los dos comodines? ¿Cómo lo sabés?

25. ***En equipo***

Arrojen 100 veces una moneda (para no aburrirse, pueden hacerlo en dos grupos, 50 veces cada uno) y registren las cantidades de veces que salió cara y las que salió ceca.

a) ¿Qué porcentaje de veces salió cara? ¿Y ceca?

b) Comparen con los otros equipos. Después reúnan los datos de todo el curso y vuelvan obtener los porcentajes. ¿Pueden sacar alguna conclusión?

26. Se preparó un programa de computadora para que simule 6 000 tiradas de un dado. Se generó así una lista de números al azar, desde 1 hasta 6. Luego se contabilizaron las veces que había salido 1, 2, 3, etc., y se confeccionó la tabla.

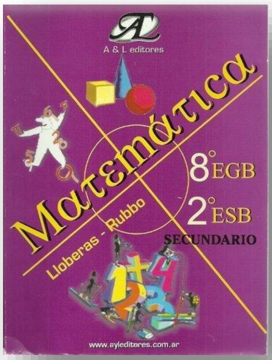
a) Completá la tabla escribiendo las frecuencias relativas con su expresión decimal.

b) Ani dice que las frecuencias relativas son casi iguales a la probabilidad de que salga cada número al tirar un dado. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

Dado	Frecuencia
1	998
2	1 002
3	999
4	1 001
5	1 010
6	990

Figura 13: Ejemplo de actividades del Libro 5 extraído de Berman et al. (2007, p. 133)

5.2.2.6. Configuración epistémica del Libro 6



Lloberas, M. y Rubbo, A. (2007). *Matemática 8*. Buenos Aires, Argentina: A & L Editores.

Situaciones problemas. Se presentan situaciones contextualizadas (extra-matemáticas) vinculadas a juegos de azar, pero prevalecen los contextos cotidianos e incluye varias situaciones que implican grandes registros de juegos en equipo. Esto se observa tanto para la introducción, el desarrollo y para el afianzamiento del cálculo de probabilidades. Implican la determinación del espacio muestral, conteo de casos en espacios discretos, manipulación de tablas para datos recolectados de encuestas. Los cálculos se hacen desde los enfoques clásico y frecuencial.

Lenguaje. Predomina el lenguaje coloquial para el enunciado de los problemas. Se utiliza el lenguaje simbólico, numérico y gráfico para ilustrar los enunciados, representar situaciones y elaborar tablas de doble entrada.

Conceptos. Aparecen como previos y necesarios para interpretar los enunciados los conceptos de números naturales y racionales, par ordenado, propiedad conmutativa en la suma y el producto, fracciones equivalentes. Como emergentes, el concepto de espacio muestral, suceso, probabilidad, eventos disjuntos, complemento, estabilidad de la frecuencia relativa, sucesos independientes.

Propiedades. Acotación de la probabilidad entre 0 y 1. Cálculo de una probabilidad a partir del evento complementario. Ley de los grandes números.

Procedimientos. Como previos y necesarios se destacan la interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos (por ejemplo, comparación de fracciones) y ejemplificación. Como emergentes, el conteo en espacios muestrales, construcción de un diagrama de árbol, la construcción de tablas de doble entrada y la comparación de distintas soluciones.

Argumentos. Los procesos de argumentación y validación surgen a través de la fundamentación y justificación de procedimientos, de respuestas y de enunciados. Hay actividades para trabajar en equipos de estudiantes en los que se pide discutir y analizar los resultados obtenidos de experiencias realizadas, por ejemplo, el lanzamiento de un número grande veces de una moneda.

La configuración epistémica asociada al Libro Nº 6 se presenta en la Figura Nº 14.

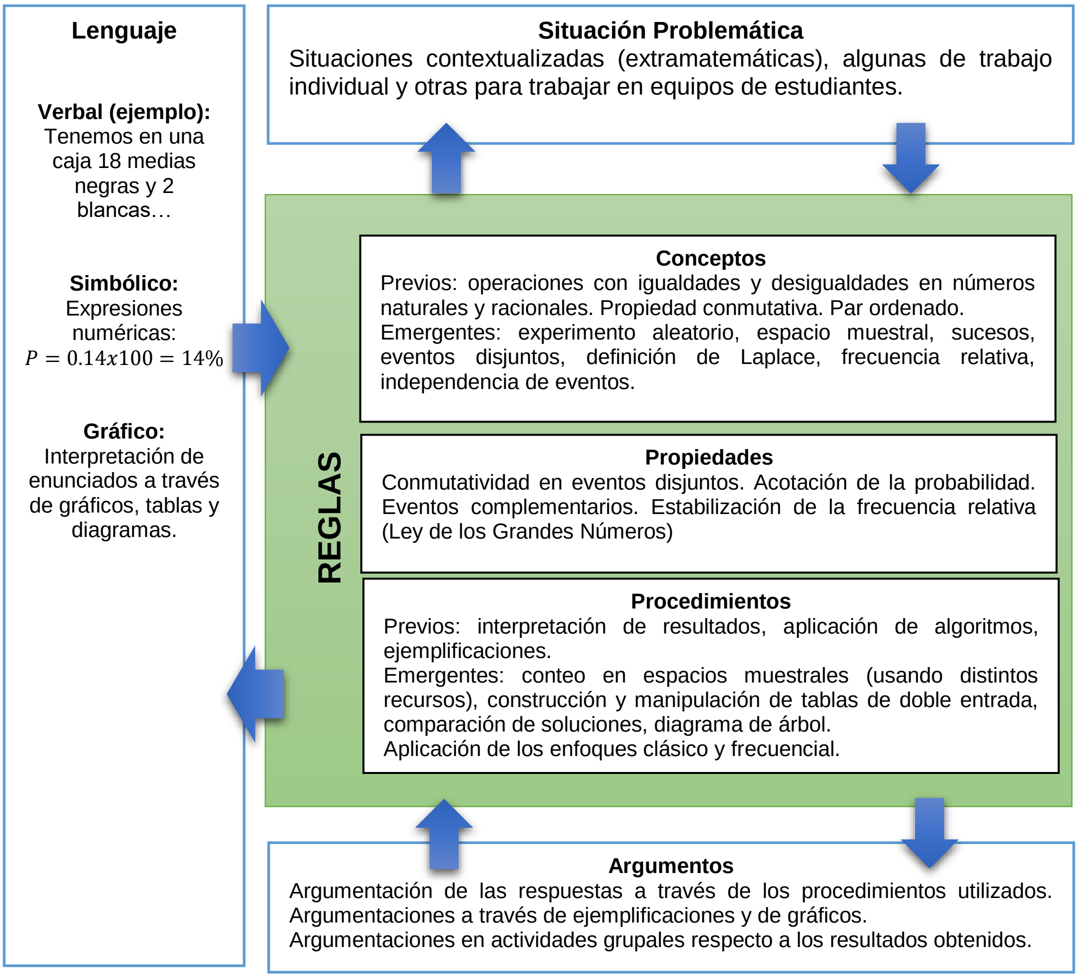


Figura 14: Configuración epistémica del Libro 6

Un ejemplo de actividades que propone el Libro 6 se encuentran en la Figura 15.

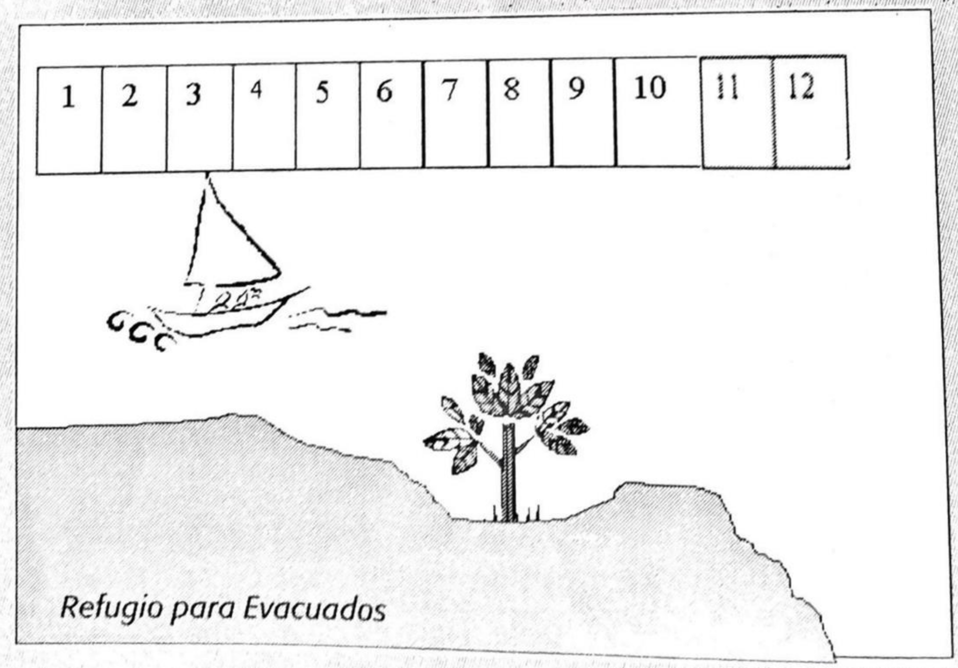
Para jugar de a 2 personas o más

Cada jugador está a cargo de un grupo de personas para poder evacuarlas por un desastre natural. Deben lograrlo en el menor tiempo posible. Para ello, por turno, usarán el bote y evacuarán una persona por vez.

Para jugar: se necesitan 2 dados (preferentemente de distinto color), 8 fichas (representan a las personas a evacuar) para cada jugador y el tablero que se encuentran debajo.

Reglas del juego: Cada jugador elige un número y ubica sus 8 fichas sobre este. Se tiran los dados y, si la suma de los mismos corresponde a alguno de los números elegidos por alguno de los jugadores, se evacúa una de las personas (se traslada una de las fichas hacia el refugio). Gana el que primero evacúa a todas las personas de su grupo.

Tablero



¿Conviene ubicar las fichas en algún lugar en especial? Investiguemos

Figura 15: Ejemplo de actividades del Libro 6 extraído de Rubbo y Lloberas (2007, p. 186)

5.2.2.7. Configuración epistémica del Libro 7

Kaczor, P.; Schaposchnik, R.; Franco, E.; Cicala, R. y Díaz, B. (1999). *Matemática 1*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.

Situaciones problemas. Se presentan situaciones contextualizadas únicamente vinculadas a juegos de azar (dados, naipes, monedas) tanto para la introducción como para el afianzamiento del cálculo de probabilidades. Implican la determinación del espacio muestral y luego, el cálculo se hace solamente desde el enfoque clásico. No se presentan situaciones intramatemáticas.

Lenguaje. Predomina el lenguaje coloquial para el enunciado de los problemas y el lenguaje simbólico para la solución de los mismos.

Conceptos. Aparecen como previos y necesarios para interpretar los enunciados los conceptos de números naturales y racionales, propiedad conmutativa en la suma y el producto. Como emergentes, el concepto espacio muestral, suceso, incompatibilidad, eventos disjuntos e intersección de sucesos y probabilidad condicional. Sucesos mutuamente excluyentes. Frecuencia relativa.

Propiedades. Se las aplica rutinariamente a problemas luego de ser enunciadas. Por ejemplo, la conmutatividad de eventos bajo independencia y la no conmutatividad para eventos dependientes. Ley de los grandes números

Procedimientos. Como previos y necesarios se destacan la interpretación de enunciados, cálculos algorítmicos y ejemplificación. Como emergentes, el conteo de espacios muestrales, representaciones en diagraman de Venn.

Argumentos. No se presentan instancias que conlleven a algún proceso de argumentación.

La configuración epistémica asociada al Libro 7 se presenta en la Figura 16.

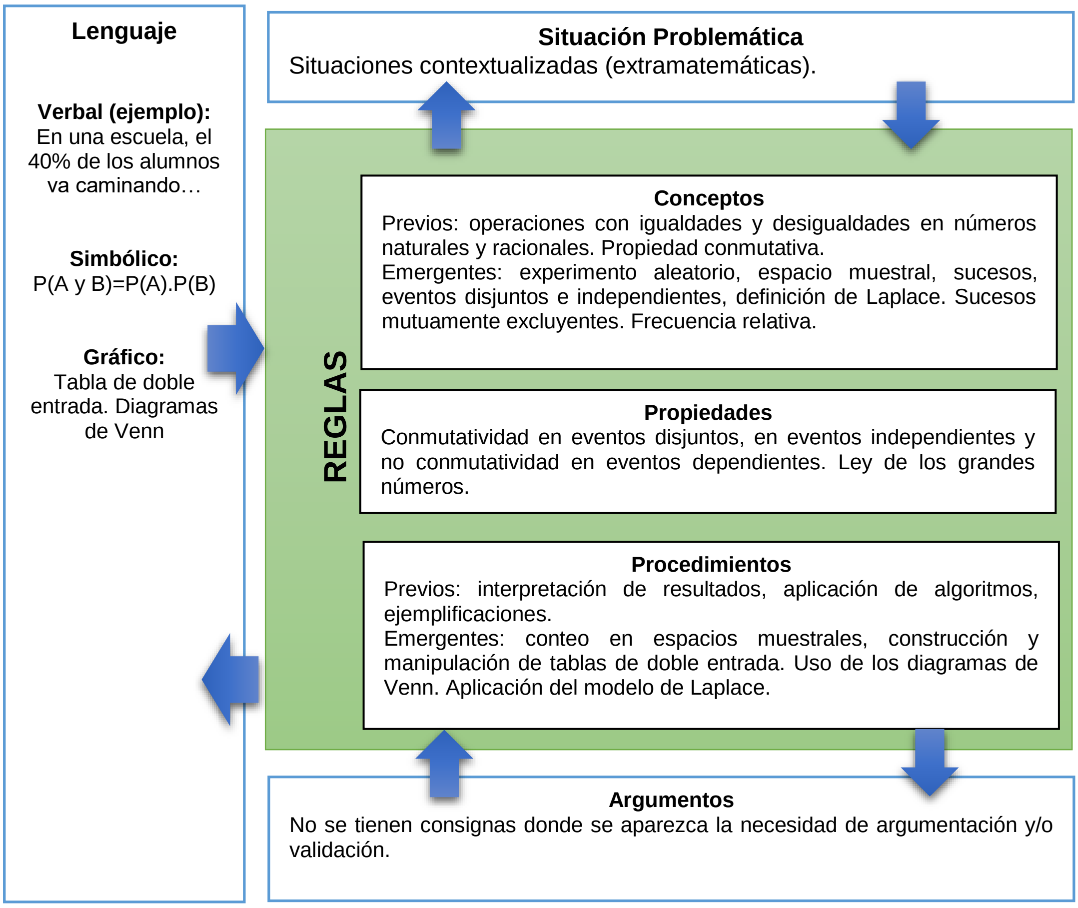
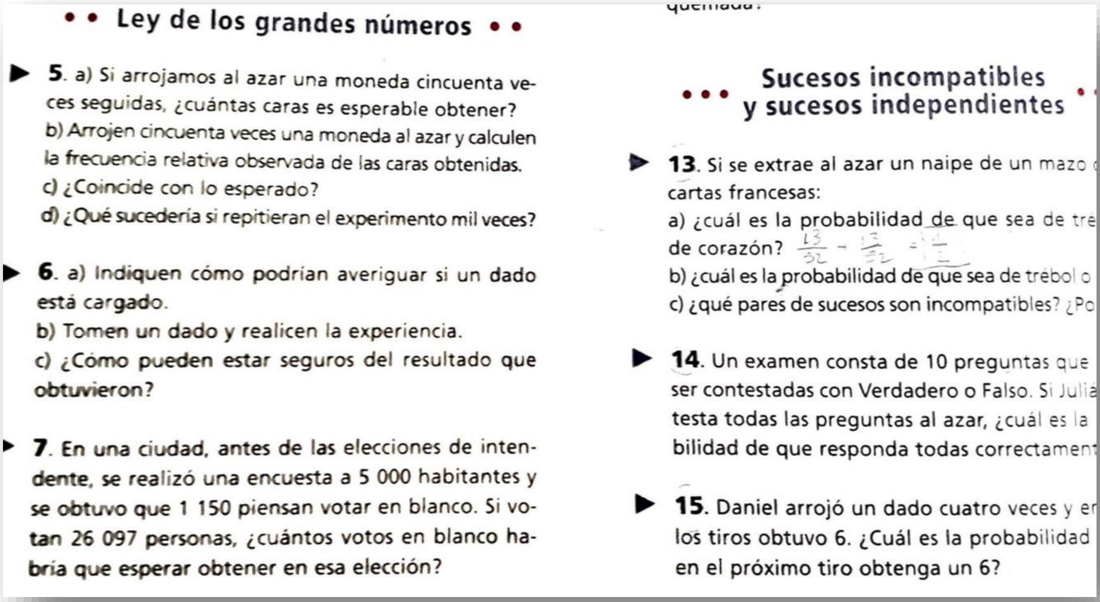


Figura 16: Configuración epistémica del Libro 7

En la Figura 17 presentamos un ejemplo del tipo de actividades y tareas que propone el Libro 7.



quemada?

Ley de los grandes números

5. a) Si arrojamos al azar una moneda cincuenta veces seguidas, ¿cuántas caras es esperable obtener?
b) Arrojen cincuenta veces una moneda al azar y calculen la frecuencia relativa observada de las caras obtenidas.
c) ¿Coincide con lo esperado?
d) ¿Qué sucedería si repitieran el experimento mil veces?

6. a) Indiquen cómo podrían averiguar si un dado está cargado.
b) Tomen un dado y realicen la experiencia.
c) ¿Cómo pueden estar seguros del resultado que obtuvieron?

7. En una ciudad, antes de las elecciones de intendente, se realizó una encuesta a 5 000 habitantes y se obtuvo que 1 150 piensan votar en blanco. Si votan 26 097 personas, ¿cuántos votos en blanco habría que esperar obtener en esa elección?

Sucesos incompatibles y sucesos independientes

13. Si se extrae al azar un naipe de un mazo d
cartas francesas:
a) ¿cuál es la probabilidad de que sea de tré
de corazón? $\frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{1}{2}$
b) ¿cuál es la probabilidad de que sea de trébol o
c) ¿qué pares de sucesos son incompatibles? ¿Po

14. Un examen consta de 10 preguntas que
ser contestadas con Verdadero o Falso. Si Julia
testa todas las preguntas al azar, ¿cuál es la
bilidad de que responda todas correctament

15. Daniel arrojó un dado cuatro veces y en
los tiros obtuvo 6. ¿Cuál es la probabilidad
en el próximo tiro obtenga un 6?

Figura 17: Ejemplo de actividades del Libro 7 extraído de Kaczor et al. (1999, p. 278)

5.3. Idoneidad didáctica de las unidades analizadas en los textos escolares

La idoneidad didáctica es el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo (Godino, Batanero y Font, 2006). Para ello se utilizan seis criterios parciales de idoneidad:

- Epistémico (relativo a los significados institucionales)
- Cognitivo (significados personales)
- Mediacional (recursos tecnológicos y temporales)
- Emocional (actitudes, afectos, emociones)
- Interaccional (interacciones docente – discentes)
- Ecológico (relaciones intra e interdisciplinares y sociales).

Cada una de estas idoneidades se valora cualitativamente como de baja, media o alta idoneidad. A continuación se describe sintéticamente cada una de ellas:

Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos (textos) y/o implementados (clases), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la propuesta de los textos con respecto cálculo de probabilidades puede limitarse al aprendizaje de ejercicios de aplicación algoritmos (baja idoneidad), o presentar diferentes tipos de situaciones contextualizadas donde se incluyan la justificación o argumentación de los algoritmos (alta idoneidad)

Idoneidad cognitiva: se refiere al grado de proximidad de los significados pretendidos y/o implementados respecto de aquellos que son personales iniciales de los estudiantes (previos) o, dicho de otra forma la medida en que el “material de aprendizaje” esté en la zona de desarrollo potencial (como lo entiende Vygotsky) de los estudiantes. Por ejemplo, un texto que realizara un test o evaluación inicial para saber si los estudiantes dominan los conceptos previos al concepto de fracción, sería de un alto grado de idoneidad cognitiva.

Idoneidad mediacional: se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, un texto que propusiera situaciones pertinentes al estudio de la aleatoriedad y la probabilidad a través de un software, página web, calculadora, etc.; el proceso de estudio tendría mayor idoneidad mediacional que otro que esté basado exclusivamente en el lápiz y papel.

Idoneidad emocional: se refiere al grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio. Por ejemplo, podríamos decir que tendrán una idoneidad emocional alta los textos que trabajen procesos basados en el uso de situaciones contextualizadas con números racionales que sean de interés para los estudiantes.

Idoneidad interaccional: Si bien no se puede observar exhaustivamente en los textos, esta idoneidad se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Por ejemplo, un texto que proponga actividades a realizar en forma cooperativa o actividades que implique el análisis de lo que realizó otro resolutor, tiene una idoneidad interaccional alta.

Idoneidad ecológica: Se refiere al grado de adaptación curricular, y conexiones intra e interdisciplinares. Por ejemplo, un texto en donde los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares o se relacionen con otros contenidos intra e interdisciplinares tendrá idoneidad ecológica alta.

De esta manera, la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje se entiende como la articulación coherente de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

Teniendo en cuenta estos indicadores y las configuraciones epistémicas de cada uno de los textos analizados, se muestra sintéticamente en la Tabla 2 un primer análisis de las distintas idoneidades parciales. Se prestó especial atención a las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica, dado que nos resulta poco viable valorar en las actividades de los textos la idoneidad mediacional y emocional, pues la primera hace referencia al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, mientras que la segunda se refiere al grado de implicación de los estudiantes en el proceso de estudio.

	Epistémica	Cognitiva	Interaccional
Libro 1	BAJA	MEDIA	BAJA
Libro 2	MEDIA	ALTA	MEDIA
Libro 3	MEDIA	ALTA	MEDIA
Libro 4	MEDIA	ALTA	MEDIA
Libro 5	ALTA	MEDIA	ALTA
Libro 6	ALTA	ALTA	ALTA
Libro 7	MEDIA	BAJA	BAJA

Tabla 2: Valoración de la idoneidad didáctica de los libros analizados

Con respecto a la idoneidad ecológica, y tomando como referencia la configuración epistémica elaborada a partir el significado institucional global/de expertos, consideramos una valoración alta pata los libros 5 y 6, mientras que los restantes los valoramos con idoneidad ecológica media.

5.4. Análisis de resultados

Con base en las características generales, la estructuración de las mismas y el enfoque didáctico utilizado, encontramos rasgos en común entre las configuraciones epistémicas de los libros analizados. Esto motivó a considerar tres grupos, que se describen a continuación.

5.4.1. Configuración epistémica del Grupo 1

Los libros 5 y 6 presentan la una configuración epistémica similar, caracterizada por:

- Problemas contextualizados iniciales para realizar la introducción del tema. Son problemas de contexto evocado introductorios, puesto que se proponen al inicio de un tema matemático, y se han diseñado para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo, en términos de Vygotsky.
- Desarrollo de la unidad didáctica mediante problemas contextualizados de afianzamiento o consolidación. Estos problemas contextualizados de afianzamiento o integradores son propuestos al final del tema. Se trata de aplicar o integrar los conocimientos adquiridos previamente en el proceso de instrucción.
- La configuración epistémica de este grupo de textos muestra que se pone énfasis en la resolución de situaciones problemas como centro de la actividad matemática.
- Todos los temas de la unidad didáctica se introducen con situaciones problemas contextualizadas, las cuales para resolverlas necesitan de conceptos, propiedades y procedimientos previos que deben poseer los estudiantes y motivan a que emerjan conceptos, propiedades y procedimientos necesarios para llegar a la solución de la misma.
- Las tareas demandan de la utilización de un lenguaje verbal, simbólico y gráfico según el tipo de situación.
- En muchas de las situaciones problemas propuestas se requiere de la argumentación, es decir, se deben justificar las respuestas en base a conceptos, propiedades o procedimientos aplicados previamente. El tipo de argumentación es inductivo. Esto se observa en el pedido de

argumentación en actividades individuales, pero también grupales (por ejemplo, comparando los resultados entre uno y otros integrantes)

- La gestión de la clase que sugiere el texto lleva a que el profesor proponga situaciones problemas que los estudiantes han de intentar resolver. Luego, en el proceso de puesta en común de las soluciones, además de resolver los problemas, se van recuperando los conceptos involucrados en la unidad didáctica. Estos conceptos, a su vez, se relacionan y organizan para ser primero aplicados a ejercicios y después, utilizarlos en la resolución de problemas contextualizados más complejos.

La configuración epistémica de este grupo de libros se contempla en la Figura 18.

Figura 18: Configuración epistémica del Libro 5 y 6

5.4.2. Configuración epistémica del Grupo 2

Los libros 2,3 y 4 presentan la siguiente una configuración epistémica similar, caracterizada por:

- La mayoría de las situaciones problemas son extramatemáticas con la mayoría vinculadas a los juegos de azar.
- Presentan situaciones problemas para aplicar o afianzar conceptos o procedimientos previamente desarrollados, pero siempre prevalecen contextos lúdicos.
- Los conceptos, definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos se introducen con situaciones problemas intra y extra-matemáticos, y llevan a la aplicación de estos elementos primarios.
- Las situaciones problemas requieren de la utilización de lenguaje verbal, simbólico y gráfico, según el tipo de situación.
- Los procesos de argumentación son de tipo individual-inductivos y se piden sobre la solución del estudiante para un determinado problema. No hay situaciones donde se promueva la discusión entre estudiantes o grupos de ellos.
- La actividad matemática que caracteriza a las situaciones problemas propuestas están centradas en procesos más bien algorítmicos.
- Las situaciones problemas solo tienen la función de afianzar un concepto, y por sí solas no inducen a que se construyan los mismos.
- La gestión de la clase que sugiere el texto lleva a que el docente proponga situaciones problemáticas vinculadas a juegos de azar, luego expone los conceptos, procedimientos, propiedades. Los estudiantes resuelven situaciones propuestas similares a las trabajadas anteriormente y, en general, se les pide argumentar su solución propuesta. Luego continúan resolviendo problemas de características similares.

La configuración epistémica de este grupo de libros se plasma en la Figura 19.

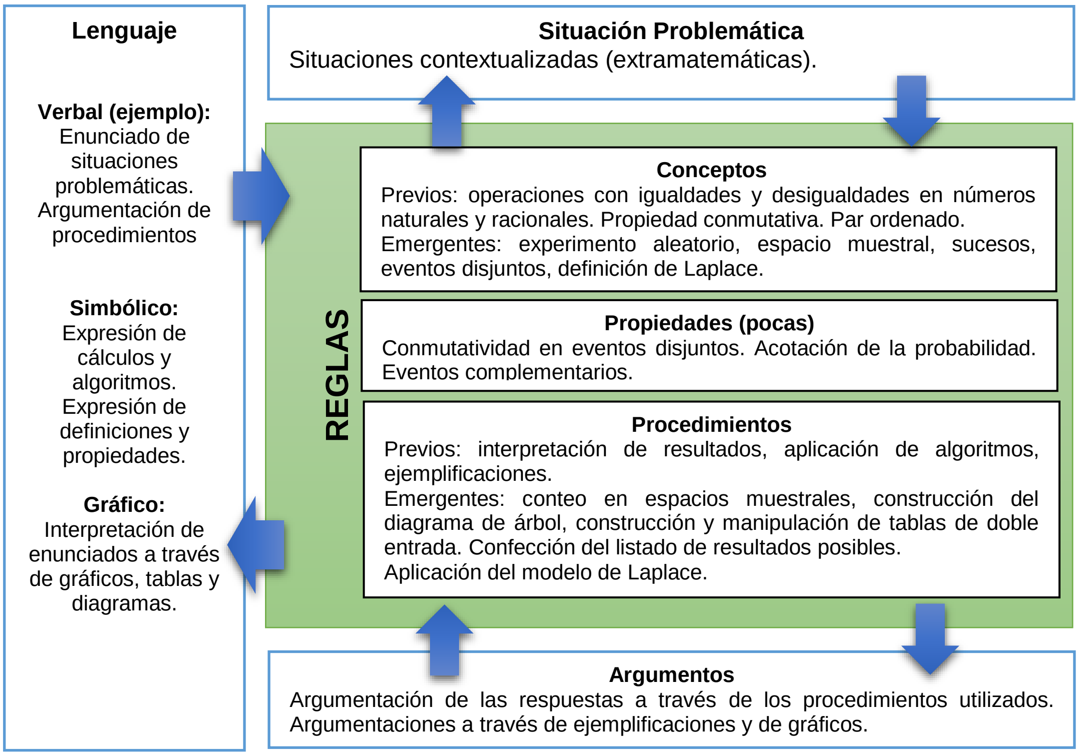


Figura 19: Configuración epistémica del Libro 2,3 y 4

5.4.3. Configuración epistémica del Grupo 3

Los libros 1 y 7 presentan la siguiente una configuración epistémica caracterizada por:

- La mayoría de las situaciones problemas son vinculadas a los juegos de azar casi con exclusividad. Algunas de ellas son utilizadas para afianzar y/o integrar conceptos y procedimientos pero siempre del mismo tipo.
- Los conceptos, definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos se introducen con situaciones problemas como ejemplos sin exploración previa de algún tipo.
- Las situaciones problemas requieren de la utilización de lenguaje verbal, simbólico y gráfico, según el tipo de situación.
- No aparecen situaciones problemas que impliquen procesos de argumentación, es decir, no demandan justificar o validar las resoluciones con base en conceptos, propiedades o procedimientos aplicados previamente.
- La actividad matemática que caracteriza a las situaciones problemas propuestas están centradas en procesos de algoritmización y responden a

una concepción más formalista de la matemática. Las situaciones problemas solo tienen la función de afianzar un concepto, y por sí solas no inducen a que se construyan los mismos.

- La gestión de la clase que promueve conduce a pensar en un docente que expone los conceptos, propone ejemplos y explicita propiedades. Los estudiantes han de aplicar dichos conceptos y propiedades a la resolución de problemas de la misma naturaleza.

La configuración epistémica asociada a este grupo de libros se contempla en la Figura Nº 20.

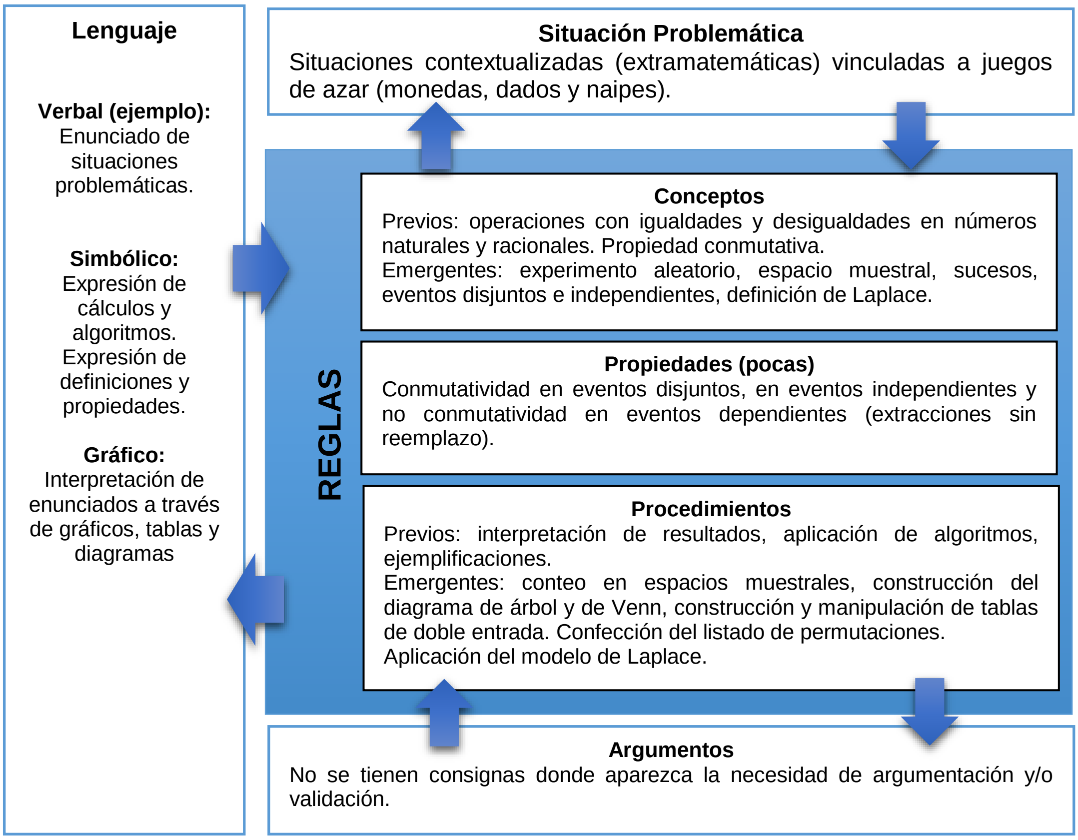


Figura 20: Configuración epistémica de los Libros 1 y 7

5.5. Configuración epistémica de referencia

A partir de las configuraciones epistémicas de los 7 libros analizados, hemos conformado una Configuración Epistémica de referencia lo más semejante a la Configuración Epistémica de referencia elaborada a partir del significado institucional global/de expertos.

Esta configuración de referencia se ha utilizado para el diseño de las actividades del Instrumento y también para realizar comparaciones con las Configuraciones Cognitivas asociadas a cada estudiante.

Se describen los elementos primarios que la conforman:

Situaciones problemas. Actividades contextualizadas (extra matemáticas) tanto vinculadas a los juegos de azar como también a la vida cotidiana, también actividades no contextualizadas (intra-matemáticas).

Problemas contextualizados de introducción, aplicación y consolidación de conceptos, propiedades o procedimientos.

Conceptos.

Previos: operaciones con igualdades y desigualdades en números naturales y racionales. Propiedad conmutativa. Par ordenado. Unión e intersección de conjuntos.

*Emergente*s: experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, eventos disjuntos, definición de Laplace, frecuencia relativa, estabilidad de la frecuencia relativa (Ley de los grande números), independencia de eventos. Técnicas básicas de conteo.

Propiedades.

Previas: operaciones en conjuntos numéricos. Leyes uniformes y de monotonía. Conteo de elementos de conjuntos cualesquiera.

Emergentes: Conmutatividad en eventos disjuntos. Acotación de la probabilidad. Eventos complementarios. Estabilización de la frecuencia relativa (Ley de los Grandes Números)

Procedimientos.

Previos: Cálculos numéricos. Interpretación de enunciados. Algoritmos de las operaciones. Representación de conjuntos de datos y diagramas.

Emergentes: Creación y manipulación de tablas. Interpretación de gráficos, enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de fracciones. Aplicación de algoritmos en operaciones con fracciones y expresiones decimales. Aproximación de decimales por redondeo y truncamiento. Cálculo de porcentajes. Expresión simbólica y gráfica de enunciados verbales.

Argumentos. Inductivos, del tipo: (a) Argumentación sostenida por los procedimientos utilizados, (b) Argumentación de las respuestas a través de las propiedades utilizadas, (c) Argumentación a través de ejemplificaciones (d) Argumentación a través de lenguaje gráfico, simbólico y /o verbal.

Lenguaje. (a) Verbal: Expresión de enunciados de situaciones problemas, Expresión de las respuestas que dan solución a las situaciones, Argumentación de procedimientos, Expresión verbal de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. (b) Simbólico: Expresión simbólica de los enunciados (traducción de lenguaje verbal al simbólico), Expresión simbólica de propiedades, Expresión simbólica de algoritmos de las operaciones, Expresión simbólica de conceptos, procedimientos y argumentos. (c) Gráfico: Expresión gráfica de enunciados verbales y simbólicos (traducción de lenguaje verbal y simbólico al gráfico), Interpretación de enunciados a través de tablas y gráficos, Expresión gráfica de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

La configuración epistémica de referencia resulta ser la siguiente:

Lenguaje

(a) **Verbal**: Expresión de enunciados de situaciones problemas, Expresión de las respuestas que dan solución a las situaciones, Argumentación de procedimientos, Expresión verbal de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

(b) **Simbólico**: Expresión simbólica de los enunciados (traducción de lenguaje verbal al simbólico), Expresión simbólica de propiedades, Expresión simbólica de algoritmos de las operaciones, Expresión simbólica de conceptos, procedimientos y argumentos.

(c) **Gráfico**: Expresión gráfica de enunciados verbales y simbólicos (traducción de lenguaje verbal y simbólico al gráfico), Interpretación de enunciados a través de tablas y gráficos, Expresión gráfica de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

Situación Problemática

Actividades contextualizadas (extra matemáticas) tanto vinculadas a los juegos de azar como también a la vida cotidiana, también actividades no contextualizadas (intra-matemáticas).
Problemas contextualizados de introducción, aplicación y consolidación de conceptos, propiedades o procedimientos.

REGLAS

Conceptos

Previos: operaciones con igualdades y desigualdades en números naturales y racionales. Propiedad conmutativa. Par ordenado. Unión e intersección de conjuntos.
Emergentes: experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, eventos disjuntos, definición de Laplace, frecuencia relativa, estabilidad de la frecuencia relativa (Ley de los grandes números), independencia de eventos. Técnicas básicas de conteo.

Propiedades

Previas: operaciones en conjuntos numéricos. Leyes uniformes y de monotonía. Conteo de elementos de conjuntos cualesquiera.
Emergentes: Conmutatividad en eventos disjuntos. Acotación de la probabilidad. Eventos complementarios. Estabilización de la frecuencia relativa (Ley de los Grandes Números)

Procedimientos

Previos: Cálculos numéricos. Interpretación de enunciados. Algoritmos de las operaciones.
Representación de conjuntos de datos y diagramas.
Emergentes: Creación y manipulación de tablas. Interpretación de gráficos, enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de fracciones. Aplicación de algoritmos en operaciones con fracciones y expresiones decimales. Aproximación de decimales por redondeo y truncamiento. Cálculo de porcentajes. Expresión simbólica y gráfica de enunciados verbales.

Argumentos

Inductivos, del tipo: (a) Argumentación sostenida por los procedimientos utilizados, (b) Argumentación de las respuestas a través de las propiedades utilizadas, (c) Argumentación a través de ejemplificaciones (d) Argumentación a través de lenguaje gráfico, simbólico y /o verbal respecto a los resultados obtenidos.

Figura 21: Configuración Epistémica de Referencia

El instrumento comentado

6.1. Introducción

El instrumento tuvo como objetivo valorar las concepciones que tiene un estudiante acerca de la aleatoriedad y la probabilidad como objetos matemáticos. El término concepción tiene una connotación relevante en nuestro trabajo, tomamos la siguiente acepción:

> Una concepción está determinada por un conjunto relativamente organizado de conocimientos utilizados con bastante frecuencia, y conjuntamente, sobre un conjunto de situaciones (para el cual son pertinentes, adecuados, útiles, etc.), y que se manifiestan mediante un repertorio relativamente estable y limitado de comportamientos, lenguajes, técnicas, etc. (Antibi et Brousseau, 2000, p. 20)

En este sentido, cada actividad propuesta en el instrumento intenta rescatar la relación que pudiera hacerse en su resolución entre conceptos, definiciones, propiedades, proposiciones, técnicas, algoritmos, rutinas, argumentos y lenguaje. No es suficiente constatar que un estudiante aplicó adecuadamente una técnica, sino más bien, determinar cómo relaciona esa técnica con otros elementos primarios del objeto matemático.

6.2. Problemas del instrumento y resolución experta

A continuación se presentan cada una de las actividades que tiene el instrumento, con una primera resolución a nivel experto explorando las posibles relaciones entre los objetos primarios y también se tiene una clasificación del tipo de concepciones que pueden aparecer:

Problema 1 (Adaptado de Díaz (2003, p. 8))

Al inicio de un camino que conduce a dos posibles salidas, llamadas A y B, se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia un alimento situado al final del camino. En la salida A se colocaron verduras y en la salida B frutas. Un criador de hámster llevó a cabo un experimento bajo condiciones controladas donde dejó que 100 de estos roedores recorrieran libremente, uno a uno, este camino. Observó que 70 de ellos prefirieron las verduras.

<u>Resolución</u>:

Esta consigna corresponde a un contexto extra-matemático en la que se pide, en función de repeticiones de un experimento aleatorio, apoyar o no una conjetura dada y también anticipar un resultado del experimento.

a) Si hacemos la prueba con un hámster y éste se dirige a las frutas ¿piensas que el criador se equivocó en la observación que hizo? ¿Por qué?

Este ítem aborda la aleatoriedad (*concepto*).

Para resolverlo, el estudiante debe reconocer que al tratarse de un experimento aleatorio, una realización del mismo no responde a la Ley de los grandes números (*propiedad*), por lo tanto no es posible afirmar si lo dicho por el criador es correcto o no. De esta forma se percibe una concepción correcta de la aleatoriedad en el sentido que una repetición del experimento no necesariamente debe coincidir con lo que ocurra en una cantidad grande (a infinita) de repeticiones.

Una concepción errónea de la aleatoriedad es si el estudiante justifica que el criador se equivocó argumentando que como la mayoría de ellos (en el experimento realizado cien veces) eligió las verduras, entonces uno en particular también lo debería hacer. Esta concepción está sustentada en un sesgo llamado *outcome approach* que está reportado en Díaz (2003). Podemos hablar, en un sentido general, de una "concepción centrada en un resultado único según el comportamiento poblacional" (entendiendo que aquí no se toma como población el resultado de las cien repeticiones).

b) Si se repite la prueba pero con 10 hámsters y 4 de ellos eligen frutas ¿pensarías que la observación del criador es errónea? ¿Por qué?

Este ítem aborda conjuntamente la aleatoriedad (*concepto*) y la asignación de probabilidades (*concepto y procedimiento*).

Para resolverlo, nuevamente el estudiante debe reconocer que diez repeticiones de un experimento aleatorio no son suficientes para aplicar la Ley de los Grandes números (*propiedad*). Por lo tanto no sería de esperar que la frecuencia relativa del evento de interés en la muestra (es decir 4/10=0.4) deba ser próxima a la probabilidad teórica (estimada desde la frecuencia relativa del experimento realizado cien veces, es decir 30/100=0.3) (*procedimiento*). Por lo tanto, la evidencia registrada para diez repeticiones no sería suficiente para concluir que lo dicho por el criador es correcto o no. Es decir, se percibiría una concepción correcta tanto de aleatoriedad como de probabilidad.

De esta manera, una concepción errónea se registraría si se pretende comparar la frecuencia relativa para las diez repeticiones (es decir el cálculo laplaciano), esperando que coincida con el valor 0.3 (*procedimiento)*, suponiendo que lo que ocurre para muestras grandes, también debe ocurrir para muestras chicas (*propiedad)*. Esta concepción se puede explicar por el uso de la "heurística de la representatividad" generando una insensibilidad al tamaño muestral, tal como se reporta en Tversky y Kanneman (1985, citado en Díaz, 2003). Podemos hablar de una "concepción centrada en Laplace con sesgo de insensibilidad al tamaño muestral".

c) Si la prueba se pretende realizar con 350 hámsters, ¿se podría estimar cuántos de ellos elegirían las verduras? Justifica tu respuesta.

Este ítem vincula la aleatoriedad y la asignación de probabilidades desde el enfoque frecuencial (*conceptos*).

Para resolverlo, se puede aplicar la Ley de los Grandes Números (*propiedad*) argumentando que 350 repeticiones es un número considerablemente grande, por lo tanto si se toma la probabilidad del evento "que el hámster elija las verduras" como 0.7 (pues 70 de 100 habían tomado esta elección), aplicando un cálculo de porcentaje (350*0.7) se estima que 245 hámsters elegirán las verduras. Se concluiría que las concepciones tanto de aleatoriedad como de probabilidad son correctas, pues si bien el experimento es aleatorio al individualizar los hámsters, la regularidad global al tener una muestra grande permite efectivamente, suponiendo las mismas condiciones experimentales y la independencia en casa repetición, estimar la cantidad de éxitos.

También podría ocurrir que el estudiante argumente que no es posible realizar la estimación pues "todo depende del azar", desconociendo que, bajo independencia, la frecuencia relativa de un evento converge a la probabilidad teórica a medida que la cantidad de repeticiones aumenta al infinito (*propiedad*). Este significado se reporta en Konold, Lohmeier, Pollatsek y Well (1991) como "aleatoriedad como incertidumbre" citado en Batanero y Romero (1995, p. 10). Se propone hablar de una "concepción centrada en la incertidumbre".

el estudiante considere a los eventos “que elija verdura” y “que elija fruta” equiprobables (cuando no lo son en verdad), por lo tanto estimaría que la mitad debería elegir verduras, o sea 350/2=175 hámsters. Esta concepción errónea, que podríamos llamarle “Concepción centrada en Laplace”, que consiste en tomar como equiprobables a espacios muestrales que no lo son, se reporta en Lecoutre (1992) citado en Díaz (2003, p. 7)

d) Al pedirle al criador que describa la secuencia de resultados del experimento que hizo expresa lo siguiente: “A A B B B B …”. ¿Es posible anticipar cuál sería el siguiente resultado? ¿Por qué sí o por qué no? En caso de que sea posible anticiparlo, ¿cuál sería el resultado?

Este ítem vincula la aleatoriedad (*concepto*)

El estudiante puede reconocer que la muestra es pequeña (se indican solo 6 registros), si bien existe una frecuencia relativa mayor que otra (para el evento A es 0.7 y para el evento B es 0.3), no sería posible determinar el próximo resultado, con lo cual la concepción de aleatoriedad es correcta.

Otros posibles escenarios:

- considerar que al tener el evento A una mayor frecuencia relativa, entonces sería de esperar que el próximo resultado sea A, omitiendo que al ser la muestra pequeña, la variabilidad es importante (*propiedad)*. Esta concepción errónea se la podría llamar, retomando el sesgo ya comentado vinculado al tamaño de la muestra, “concepción centrada en el enfoque frecuencial con sesgo de insensibilidad al tamaño muestral”.
- no contemplar la existencia de rachas (*propiedad)*, entonces podría decir que el próximo resultado debe ser “A”. Esta concepción errónea se caracteriza por comprender la aleatoriedad como un “proceso de autocorrección”, es otra consecuencia del uso de la heurística de la representatividad según Tversky y Kanneman (1985, citado en Díaz, 2003). Podemos hablar de una “concepción de la aleatoriedad como proceso autocorrector”.

<u>Análisis del potencial matemático de la consigna:</u>

En esta consigna observamos que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Además la consigna solicita justificar la respuesta, fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual valoramos el Potencial Matemático de este problema como rico. Por otra parte, se tienen en cuenta los criterios propuestos por Barreiro (2015) para las consignas matemáticas, en cuanto a que al relatar una situación en un contexto real, se propone una pregunta que tenga que ver con ese relato y su contexto.

Problema 2 (Adaptado de De Olivera, Olesker y Pagés (2017))

Juan y María son amigos que hacen apuestas sobre el resultado de eventos deportivos. Cada uno de ellos paga en función de la probabilidad asignada al resultado. En un partido de fútbol entre Colón y Unión de Santa Fe, Juan pagaba más que María porque apostaba al empate. ¿Consideras que el razonamiento de Juan es acertado? Explica tu respuesta.

Resolución:
Esta consigna corresponde a un contexto extra-matemático en la que se pide validar una apuesta probabilística al resultado de un partido de fútbol.

La consigna aborda la asignación de probabilidades desde el enfoque subjetivo (*concepto*). Para abordarla, desde una concepción correcta de asignación de probabilidades, los estudiantes pueden argumentar que puede ser acertado en el caso de que Juan cuente, por ejemplo, con un registro de los últimos resultados donde ambos equipos venían empatando partido a partido, o también analizar que por la instancia de ese encuentro (por ejemplo para alguna clasificación de torneo) a ambos equipos les conviene un empate. En cualquier caso no se aplica el enfoque clásico ni el frecuencial (*conceptos*), sino el enfoque subjetivo pues, en principio, se necesita considerar información a-priori ya que no se tiene un espacio muestral equiprobable ni tampoco independencia si se pretende analizar un número grande de partidos (propiedades y procedimientos).

Puede también ocurrir:

- que el estudiante justifique que no, en cuanto considere equiprobables los eventos “ganar”, “perder” y “empatar”. Esta asignación de probabilidades, denominada anteriormente como “concepción centrada en Laplace”, se asocia a un significado de la aleatoriedad condicionado solamente al enfoque clásico.

- que el estudiante justifique que sí, pero argumentando que si ambos equipos, desde hace un número grande de partidos vienen empatando, entonces deberían empatar también en este encuentro. Aquí se encontraría una “concepción centrada en el enfoque frecuencial” para la probabilidad y una “concepción centrada en un resultado único según el comportamiento poblacional” para la aleatoriedad.

Análisis del potencial matemático de la consigna:

En esta consigna observamos que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Además la consigna solicita justificar la respuesta, fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual valoramos el potencial matemático de este problema como rico.

Problema 3 (Adaptado de Bastias, Alvarado y Retamal (2017))

En el día de hoy se produce un nacimiento en un hospital de Concordia: ¿qué probabilidad asignarías de que sea varón? ¿Por qué?

Resolución:

Esta consigna corresponde a un contexto extra-matemático en la que se pide asignar una probabilidad al sexo que tendrá un niño al nacer.

La consigna aborda la asignación de probabilidades y el reconocimiento de la aleatoriedad (*conceptos*).

La resolución y el análisis de esta consigna son similares al Problema 2, con la sustancial diferencia en que el contexto es de la vida cotidiana en un marco de aspectos biológicos y no de juegos.

En el antecedente de Moreno, Cardeñoso Domingo y González García (2014) se ha observado que a los estudiantes de Profesorado de matemática les cuesta significativamente reconocer la aleatoriedad en situaciones cotidianas (en el estudio mencionado lo comparaba con estudiantes del profesorado de Biología).

Desde una concepción correcta tanto de aleatoriedad como de probabilidad, la asignación debería estar argumentada desde el enfoque subjetivo en cuanto a considerar las características poblacionales del lugar u otros factores que puedan incidir (*concepto y procedimiento*). Se considera un evento aleatorio sin lugar a dudas pero probabilísticamente existe una proporción a nivel mundial.

También puede ocurrir:

- que el estudiante considere equiprobables los eventos “que sea mujer” y “que sea varón”, por lo tanto asignaría ½, este argumento manifestaría una “concepción centrada en Laplace”, pues no sería correcto ya que biológicamente no es justificable. Sería correcto argumentar esta probabilidad frecuencialmente (*concepto y propiedad*) desde los datos actuales en los que se tienen registros que al corriente año, las proporciones mundiales son casi similares.
- que el estudiante se abstenga de asignar una probabilidad diciendo que “puede ocurrir cualquiera de los dos” argumentando que depende del azar. Podemos hablar de una “concepción centrada en la incertidumbre”.

<u>Análisis del potencial matemático de la consigna:</u>

En esta consigna observamos que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Además la consigna solicita justificar la respuesta, fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual valoramos el potencial matemático de este problema como rico.

Problema 4 (Adaptado de Esteban, Batanero, Serrano y Contreras (2016))

Carolina y Joaquín lanzan 100 veces una moneda haciéndola girar en el aire. Se les pidió que anoten los resultados de la cara superior de la moneda cuando quedó quieta en el piso. Los registros se presentan a continuación, para los cuales se usó una “C” para indicar Cara y una “X” para indicar Cruz.

Registros de Carolina:
X C C C C X X C C C X X X C C C X X C C X X X C C C C C X X X C C C X X C
X C X X C C X X C C C C C C X X C X C X X X C X C X C C C C C C X C X X X
C X C X X X C C X X X C C C C C C X X C C C C X C C
Registros de Joaquín:
C X C C C X X C C X X X C C X C X C X X X C C X X C C X C X X X X C X C C
X C C C X X X C X C C X C X X C X C C C X X C X X X C C C X C X C X X C X
X C C X C C C X X X C X C C X X C C X X C C C X X C

Teniendo en cuenta los registros de Carolina y Joaquín: ¿es posible determinar si alguno de los dos ha mentido y no lanzó la moneda (hizo trampas), inventando el registro presentado? ¿Por qué?

<u>Resolución</u>:

Esta consigna corresponde a un contexto extra-matemático en la que se pide reconocer si un listado de dos resultados posibles puede no ser aleatorio.

La consigna aborda el reconocimiento de una secuencia de dos elementos como aleatoria (*concepto y procedimiento*).

Para su solución, el estudiante puede observar para cada listado, siguiendo a Esteban, Batanero, Serrano y Contreras (2016):

- la presencia de variabilidad local, en el sentido de que no debe aparecer algún tipo de patrón,
- que exista regularidad global, esto es la similitud entre la frecuencia relativa de la cantidad de caras y la probabilidad teórica de 0.5 (por ser equiprobable el espacio muestral). La existencia de una diferencia importante entre dos números, en el contexto de una muestra aleatoria de tamaño 100, puede indicar si el listado se lo puede considerar aleatorio o no.

Además de estas dos cosas (*conceptos y procedimientos*), también debe considerar la presencia de rachas. En particular, existe el teorema de Erdös y Rényi (*propiedad*) que asegura, con probabilidad tendiente a 1, que debe haber rachas de, al menos, longitud igual a ln(n) (para este caso ln(100) es aproximadamente 5).

De una concepción correcta que contemple estos aspectos, se concluye que el listado de Joaquín puede que sea inventado pues se observan solo rachas cortas, la cantidad de caras es exactamente cincuenta. En cambio en el listado de Carolina, la cantidad de caras es de 57 (se observa frecuencialmente un 57% de caras para cien lanzamientos) (*propiedad y procedimiento*) y se observa la presencia de rachas (en particular de 5 y 6 caras).

Cabe destacar que la no presencia de patrones se cumple en ambos listados.

También podría suceder:

- que el estudiante argumente que el listado de Carolina es inventado ya que no coincide la cantidad de caras con 50 (la mitad de 100) suponiendo que debería ser exactamente la mitad (procedimiento). Es decir, no se reconocería la fluctuación de la frecuencia relativa y/o se entendería que la ley de los grandes números (*propiedad*) se cumple perfectamente para todo valor de la cantidad de lanzamientos. Diríamos que subyace una "concepción centrada en Laplace sin reconocimiento de fluctuación de la frecuencia relativa".

- que el estudiante señale el listado de Carolina como inventado pues aparece varias veces seguidas el evento C, argumentando que esto no debería ocurrir, que debería aparecer enseguida X. Diríamos que prima una "concepción de la aleatoriedad como proceso autocorrector".
- que el estudiante justifique que los dos serían aleatorios pues como "depende del azar" puede ocurrir cualquier resultado. Esta respuesta evidencia la, ya mencionada, "concepción centrada en la incertidumbre", no considerando (entre otros objetos) la Ley de los grandes números.

Análisis del potencial matemático de la consigna:

En esta consigna observamos que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. También se observa que el tamaño de la muestra es de cien, considerada como suficiente para poder utilizar propiedades como la Ley de los grandes números, por ejemplo. Además la consigna solicita justificar la respuesta, fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual valoramos el PM de este problema como rico.

Problema 5 (Adaptado de De Olivera, Olesker y Pagés (2017))

Unir con una flecha cada evento de la columna izquierda con la probabilidad que le asignarías justificando posteriormente tu respuesta:

Evento
A: Obtener cara al tirar una moneda no cargada[1].
B: Obtener cara al tirar una moneda no cargada, pero sabiendo que en los primeros 5 lanzamientos se obtuvo cara.
C: Obtener cara al tirar una moneda que no se sabe si está cargada, pero en los primeros 10 lanzamientos se obtuvo cara.

Probabilidad
0
Entre 0 y ½
½
Entre ½ y 1
1

[1] Al decir "no cargada" se hace referencia a una moneda legal, sin desperfectos ni tampoco alguna particularidad que pueda incidir en forma tendenciosa en el resultado.

Justificación para el evento A:

Justificación para el evento B:

Justificación para el evento C:

Resolución:

Esta consigna corresponde a un contexto extra-matemático en la que se pide asignar probabilidades a tres eventos vinculados al lanzamiento de monedas en distintas situaciones.

La consigna aborda el reconocimiento de la aleatoriedad y la asignación de probabilidades desde distintos enfoques (*conceptos y procedimientos*).

El estudiante puede justificar, para el evento A, que la probabilidad es exactamente ½, considerando la equiprobabilidad del espacio muestral y aplicar, consecuentemente, el enfoque clásico (concepto y procedimiento).

Para el evento B, el próximo resultado podría ser tanto cara como cruz, es decir, nuevamente sería ½. Los eventos se pueden suponer independientes (*concepto*) pues se aclara que la moneda no está cargada, además de ser un tamaño de muestra muy pequeño.

En el evento C es importante la aclaración que no se sabe si la moneda no está cargada. Por lo tanto no debería, a priori, considerarse equiprobable el espacio muestral (*propiedad*), pero tampoco considerar el enfoque frecuencial (por el tamaño de la muestra) (*propiedad*), correspondería el enfoque subjetivo, tomando como respuesta que la probabilidad sería un número entre ½ y 1, argumentando que no se sabe si los eventos son independientes y que en 10 lanzamientos anteriores se han observado cara.

Las respuestas anteriores evidenciarían concepciones correctas tanto de aleatoriedad como de probabilidad.

Otros posibles escenarios:

- que el estudiante asigne al evento B una probabilidad entre 0 y ½ ó directamente 0, argumentando que debería salir cruz pues ya salió muchas veces seguido cara. Nuevamente se reconocería la “concepción de la aleatoriedad como proceso autocorrector”.

- que el estudiante, en una línea argumentativa similar a la anterior, asigne al evento C probabilidad 0, sin considerar bajo algún aspecto que no está garantizada la equiprobabilidad del espacio muestral. En este caso hablaríamos de una “concepción centrada en Laplace” y de una “concepción de la aleatoriedad como proceso autocorrector”.
- que se asigne al evento C la probabilidad ½, argumentando, desde una “concepción centrada en la incertidumbre” (asociar lo aleatorio como lo incausal) que puede ocurrir igualmente un evento u otro. O que también asigne ½ desde una “concepción centrada en Laplace”, omitiendo que no sería pertinente suponer la equiprobabilidad del espacio muestral (propiedad y procedimiento).

<u>Análisis del potencial matemático de la consigna:</u>

En esta consigna observamos que no están indicados los pasos a realizar en la resolución. Se pide unir con flechas pero no necesariamente tienen la misma cantidad de opciones que de situaciones, con lo cual se deben descartar alternativas a total criterio del estudiante. Además la consigna solicita justificar la respuesta, fomentando las habilidades de argumentación, razón por la cual valoramos el potencial matemático de este problema como rico.

Concepciones iniciales sobre aleatoriedad y probabilidad

7.1. Introducción

En este capítulo analizamos cualitativamente las soluciones que realizaron los 43 estudiantes (19 ingresantes de las carreras de ingeniería y 24 alumnos del profesorado de Matemática) que resolvieron las actividades propuestas en el instrumento elaborado y comentado en el capítulo 6.

Para el análisis usamos como herramientas teóricas las configuraciones epistémicas y cognitivas, de acuerdo al EOS de Godino, Batanero & Font (2007).

Para iniciar el análisis determinamos las configuraciones cognitivas de los 43 estudiantes. Para esto tuvimos en cuenta las resoluciones de las situaciones que se presentaron en el instrumento elaborado y comentado anteriormente.

En una segunda instancia examinamos estas configuraciones y las comparamos con la configuración epistémica de referencia (Configuración Epistémica Global de Referencia y Configuración Epistémica Global de los textos escolares). Este proceso nos permitió encontrar información para valorar las concepciones encontradas sobre aleatoriedad y probabilidad.

Se trabajaron las configuraciones cognitivas de los grupos por separado, a los efectos de poder comparar y luego tener una mirada global para cada institución. Indicaremos como **AI** a los alumnos ingresantes a la Facultad Regional Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional (FRCON-UTN) y como **AP** a los alumnos del Profesorado Concordia D-54.

Asimismo, acordamos en hablar de “Concepciones adecuadas” y “Concepciones deficientes”, en el sentido de distinguir y siguiendo la definición de Antibi et Brousseau (2000), de aquellas concepciones que contengan sesgos que conduzcan a conclusiones conceptuales incorrectas.

7.2. Resumen general y discriminado por grupos

A continuación se presenta un resumen para cada situación problema a resolver del instrumento respecto a los 43 estudiantes y también un comparativo por grupos. Para cada caso se describen las concepciones encontradas tomando como referencia la caracterización presentada en la sección 4.3.5.

Problema 1

Al inicio de un camino que conduce a dos posibles salidas, llamadas A y B, se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia un alimento situado al final del camino. En la salida A se colocaron verduras y en la salida B frutas. Un criador de hámster llevó a cabo un experimento bajo condiciones controladas donde dejó que 100 de estos roedores recorrieran libremente, uno a uno, este camino. Observó que 70 de ellos prefirieron las verduras.

(a) Si hacemos la prueba con un hámster y éste se dirige a las frutas ¿piensas que el criador se equivocó en la observación que hizo? ¿Por qué?

Para esta situación problema se obtuvieron los siguientes registros:

Respecto al conjunto total de estudiantes:

Concepciones Adecuadas	Concepciones deficientes
38 (88%)	5 (21%)

Tabla 3: Resultado general para el ítem 1a

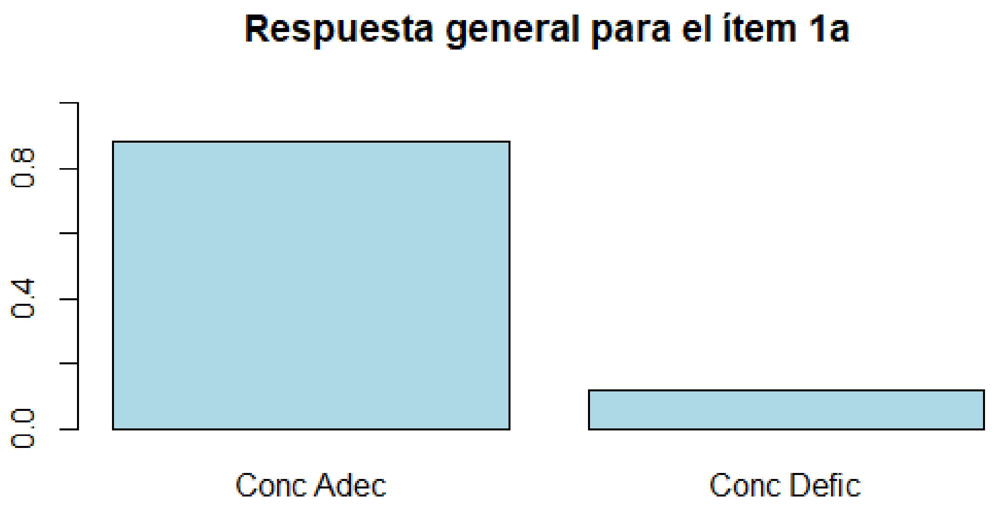


Figura 22: Resultado general para el ítem 1a

Respecto al grupo de estudiantes:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente
AI	19 (100%)	0 (0%)
AP	19 (79%)	5 (21%)

Tabla 4: Resultados para el ítem 1a según cada grupo

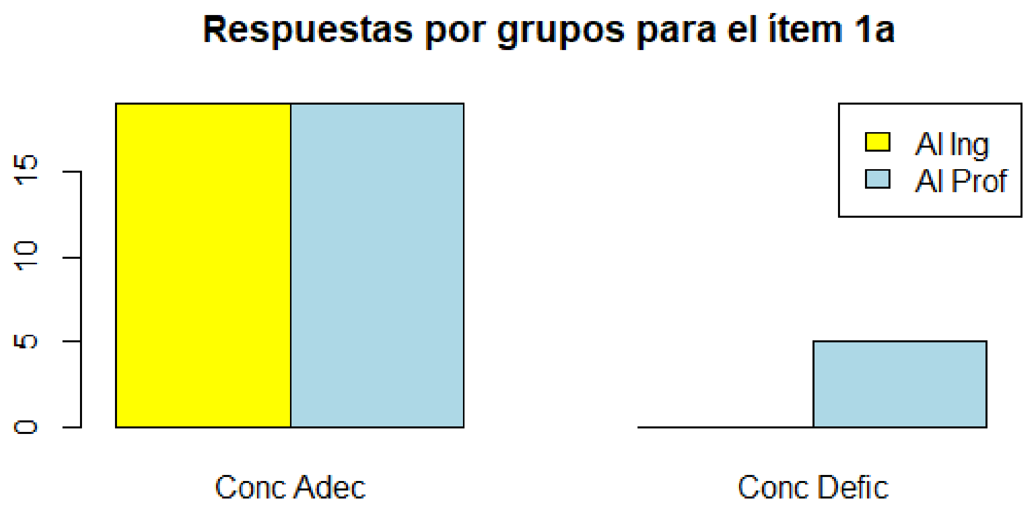


Figura 23: Resultados para el ítem 1a según cada grupo

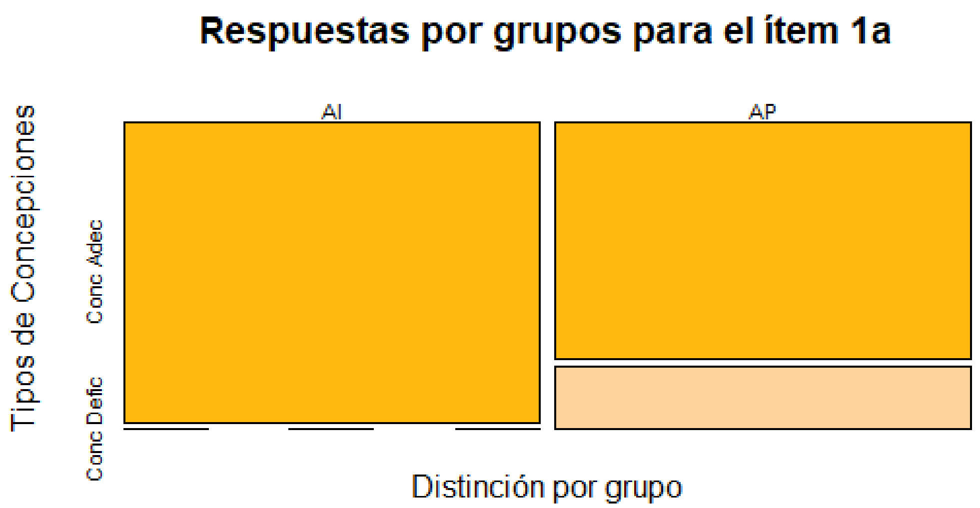


Figura 24: Resultados para el ítem 1a según cada grupo

En casi todos los estudiantes se observaron concepciones adecuadas según lo que se esperaba. En los estudiantes de ingeniería fue el total y en los del profesorado sólo 5 manifestaron el sesgo "*outcome-approach*" que la entendemos como la concepción de considerar que un resultado debería coincidir con lo que frecuencialmente ha ocurrido en mayor medida.

A continuación presentamos un conjunto de funciones semióticas que favorecen la resolución de este ítem:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
"Al inicio de un camino que conduce a dos posibles salidas, llamadas A y B"	F1	Sucesos A y B mutuamente excluyentes y exhaustivos
"se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia un alimento situado al final del camino"	F2	La selección del hámster por alguna salida es aleatoria
"En la salida A se colocaron verduras y en la salida B frutas"	F3	Los eventos "que el hámster haya elegido la salida A" y "que el hámster elija verduras" son equivalentes. Análogamente para "que el hámster haya elegido la salida B" y "que el hámster elija frutas"
"Un criador de hámster llevó a cabo un experimento bajo condiciones controladas donde dejó que 100 de estos roedores recorrieran libremente, uno a uno, este camino. Observó que 70 de ellos prefirieron las verduras."	F4	Se repitió, bajo independencia, el experimento aleatorio antes descripto. La frecuencia relativa del evento "un hámster prefirió verduras" es 70/100=0.7
El evento "un hámster prefirió frutas"	F5	Es el evento complementario a "un hámster prefirió verduras". Luego, la frecuencia relativa es 1-0.7=0.3
La frecuencia relativa se aproxima, bajo independencia, a la probabilidad teórica si la cantidad de ensayos es grande.	F6	Aquí el ensayo se repitió una única vez. Por la aleatoriedad del evento, nada se puede decir de su ocurrencia. Por lo tanto nada se puede decir de la conjetura del criador.

Tabla 5: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 1a

(b) Si se repite la prueba pero con 10 hámsters y 4 de ellos eligen frutas ¿pensarías que la observación del criador es errónea? ¿Por qué?

Para esta situación problema se obtuvieron los siguientes registros:

Respecto al conjunto total de estudiantes:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
19 (44%)	23 (53%)	1 (2%)

Tabla 5: Resultados general para el ítem 1b

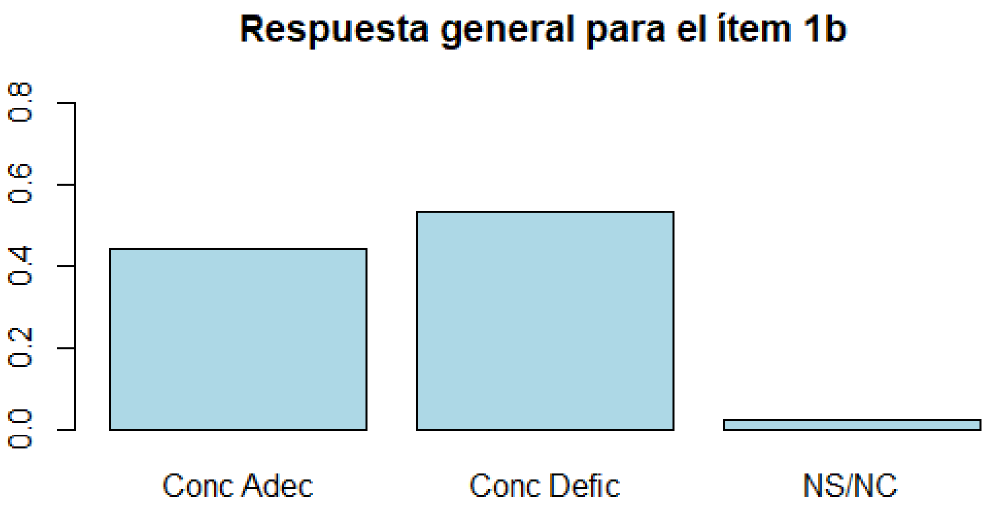


Figura 25: Resultado general para el ítem 1b

Resultados por grupos

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	13 (68%)	6 (32%)	0 (0%)
AP	6 (25%)	17 (71%)	1 (4%)

Tabla 6: Resultados para el ítem 1b según cada grupo

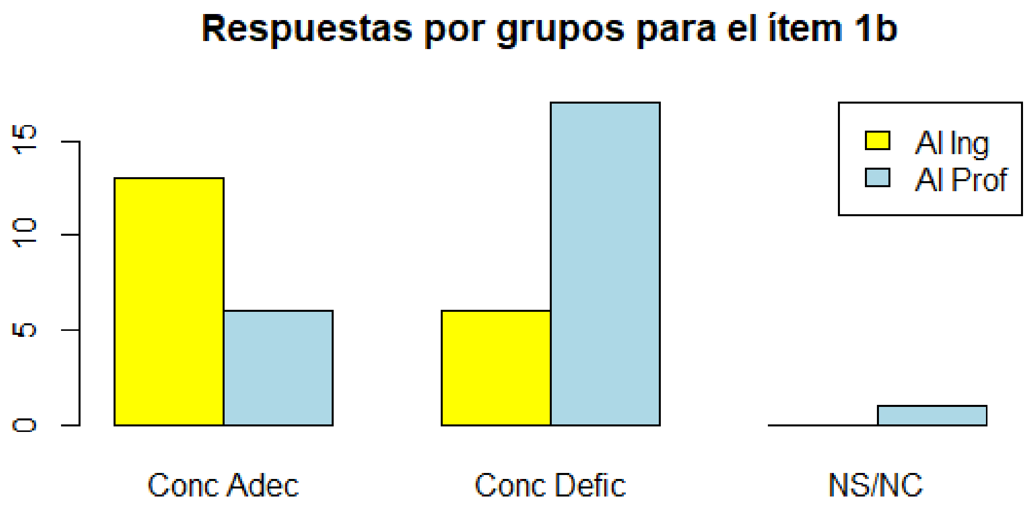


Figura 26: Resultados para el ítem 1b según cada grupo

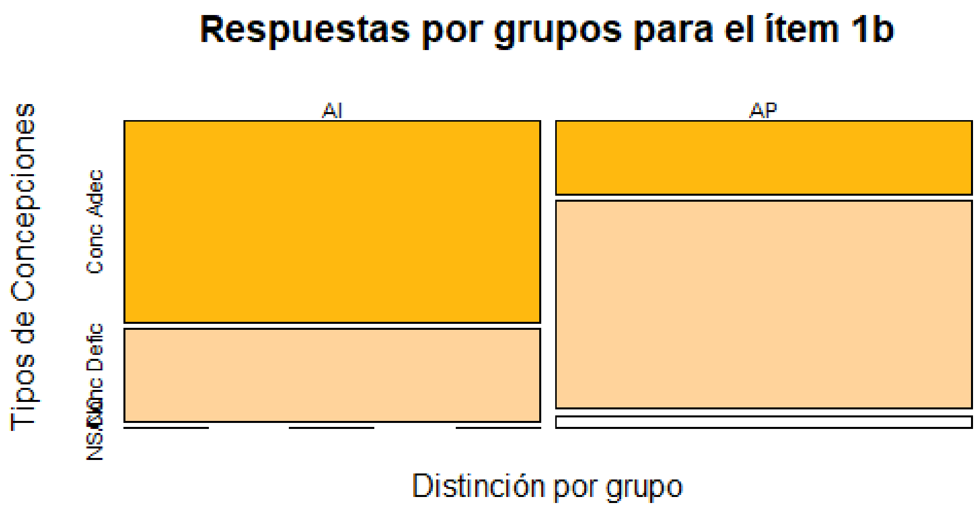


Figura 27: Resultados para el ítem 1b según cada grupo

Para este ítem, se ha registrado algo más de la mitad de concepciones deficientes. En la comparación de los grupos es muy acentuada la diferencia entre esos porcentajes, siendo la posición favorable para los ingresantes a la FRCON-UTN.

Prácticamente todos los casos catalogados para este ítem como “Concepción deficiente” responden al uso de la heurística de la representatividad, derivando en el sesgo de “insensibilidad en el tamaño muestral”, la cual entendemos como la concepción de pensar en lo que ocurra para muestras grandes también debe ocurrir para muestras pequeñas.

Respecto a un conjunto de funciones semióticas que favorezcan la resolución del ítem, tomaremos del ítem 1a las funciones semióticas F1, F2, F3, F4 y F5 y agregamos las siguientes:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
La frecuencia relativa se aproxima, bajo independencia, a la probabilidad teórica si la cantidad de ensayos es grande.	F6	Aquí la cantidad de ensayos es pequeña (n=10), luego, no tenemos la certeza de que ocurra esta aproximación. No es aplicable.
La fluctuación de la frecuencia relativa para muestras pequeñas es importante.	F7	No se puede concluir en una estimación confiable de la cantidad de hámsters que puedan elegir frutas o verduras. Luego, no es posible dar un juicio sobre la conjetura del criador.

Tabla 7: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 1b

(c) Si la prueba se pretende realizar con 350 hámsters, ¿se podría estimar cuántos de ellos elegirían las verduras? Justifica tu respuesta.

Para esta situación problema se obtuvieron los siguientes registros:

Respecto al conjunto total de estudiantes:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
14 (33%)	28 (65%)	1 (2%)

Tabla 8: Resultado general para el ítem 1c

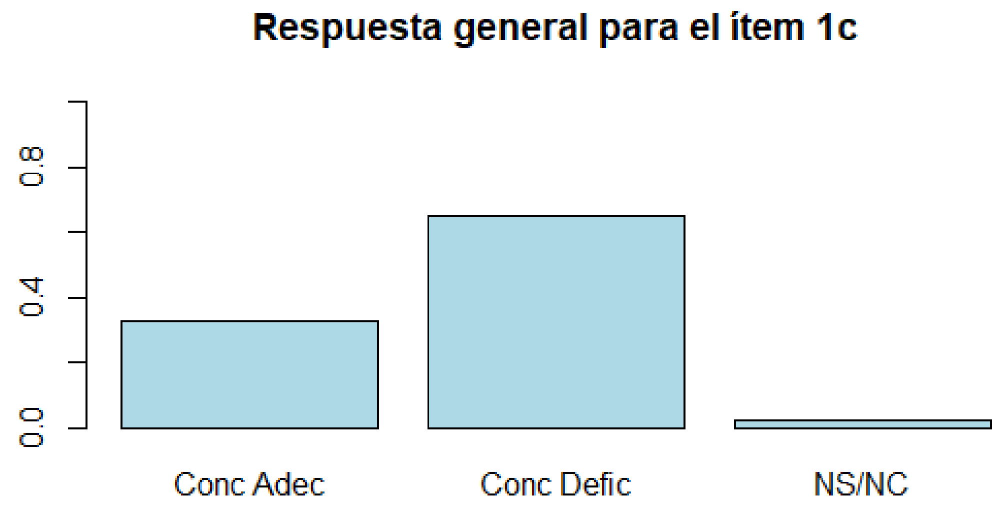


Figura 28: Resultado general para el ítem 1c

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	8 (42%)	11 (58%)	0 (0%)
AP	6 (25%)	17 (71%)	1 (4%)

Tabla 9: Resultados para el ítem 1c según cada grupo

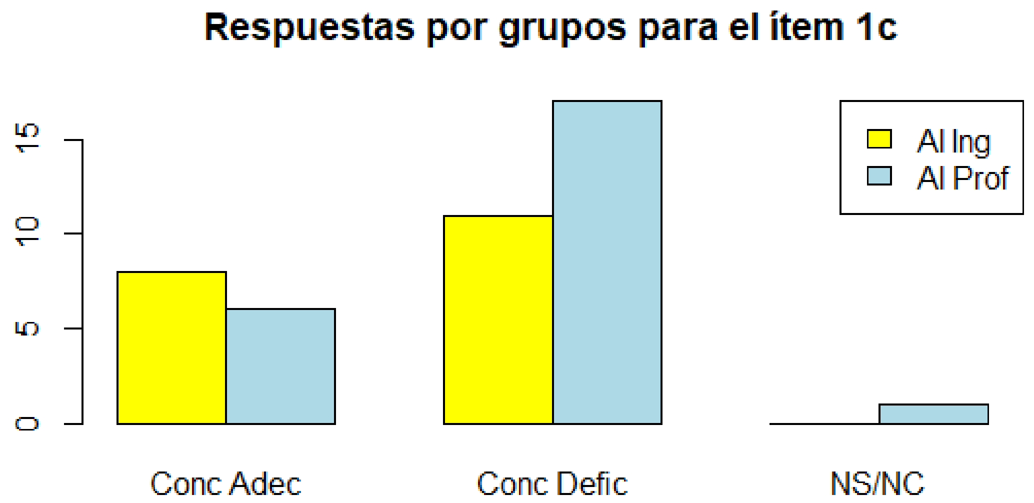


Figura 29: Resultados para el ítem 1c según cada grupo

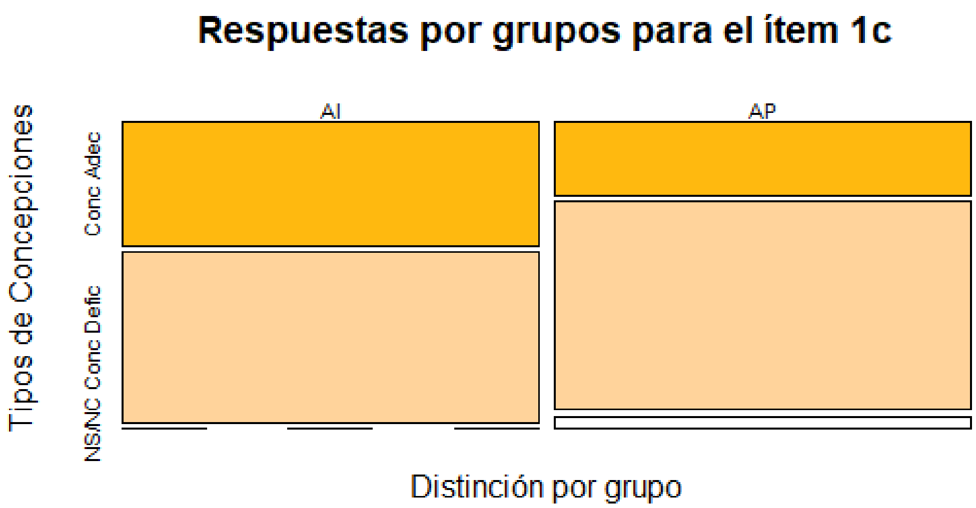


Figura 30: Resultados para el ítem 1c según cada grupo

Para el ítem 1c, el 65% del total tuvo una concepción deficiente. Por grupos, nuevamente la diferencia desfavorable es para los estudiantes del profesorado.

De este 65% de estudiantes, 7 de ellos argumentaron que no sería posible hacer la estimación pues "todo depende del azar". Aquí se manifiesta la "concepción de la aleatoriedad como incertidumbre" total, con lo que se omite la regularidad de la frecuencia relativa para muestras grandes (Ley de los grande números). Y 9 estudiantes aplican el cociente entre casos favorables y casos posibles (tomando las proporciones de referencia 0.7 y 0.3) pero no hacen la aclaración que el valor obtenido sería aproximado, algunos de ellos usan la palabra "exactamente".

Podemos decir que prima una "concepción centrada en Laplace".

Respecto a un conjunto de funciones semióticas favorables a la resolución, nuevamente tomamos F1, F2, F3, F4 y F5 del ítem 1a (ó 1b) y agregamos las siguientes:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
La frecuencia relativa se aproxima, bajo independencia, a la probabilidad teórica si la cantidad de ensayos es grande.	F6	Aquí la cantidad de ensayos es pequeña, luego, no tenemos la certeza de que ocurra. No es aplicable.
La fluctuación de la frecuencia relativa para muestras pequeñas es importante	F7	No se puede concluir en una estimación confiable de la cantidad de hámster que puedan elegir frutas o verduras. Luego no es posible dar un juicio sobre la conjetura del criador.

Tabla 10: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 1c

(d) Al pedirle al criador que describa la secuencia de resultados del experimento que hizo expresa lo siguiente: “A A B B B B …”. ¿Es posible anticipar cuál sería el siguiente resultado? ¿Por qué sí o por qué no? En caso de que sea posible anticiparlo, ¿cuál sería el resultado?

Para esta situación problema se obtuvieron los siguientes registros:

Respecto al conjunto total de estudiantes:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
20 (47%)	18 (42%)	5 (12%)

Tabla 11: Resultado general para el ítem 1d

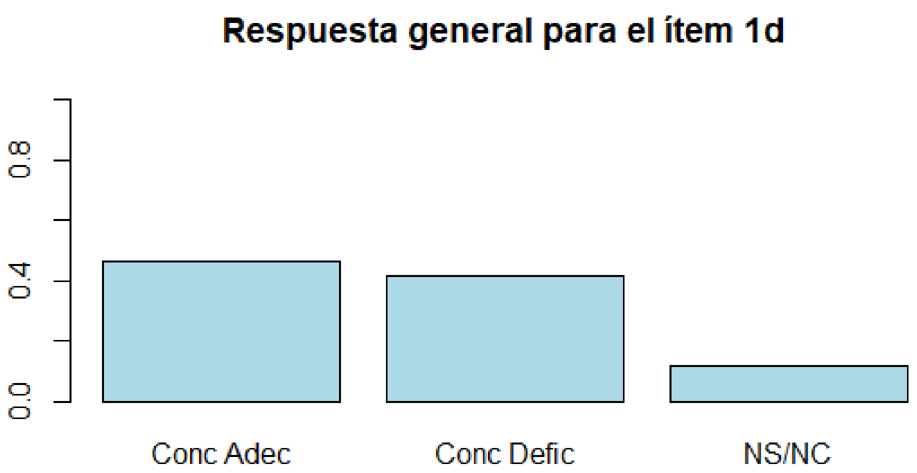


Figura 31: Resultado general para el ítem 1d

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	10 (53%)	9 (47%)	0 (0%)
AP	10 (42%)	9 (38%)	5 (21%)

Tabla 12: Resultados para el ítem 1d según cada grupo

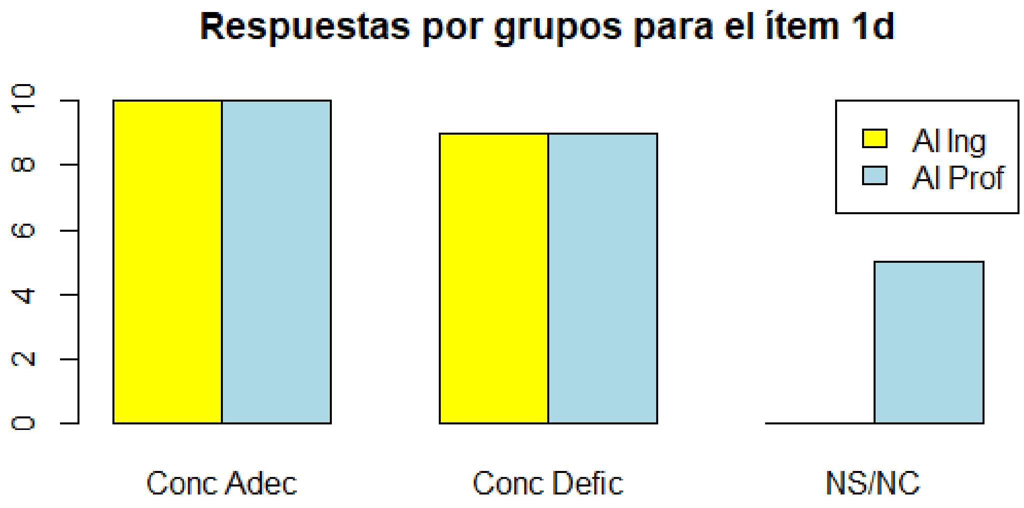


Figura 32: Resultados para el ítem 1d según cada grupo

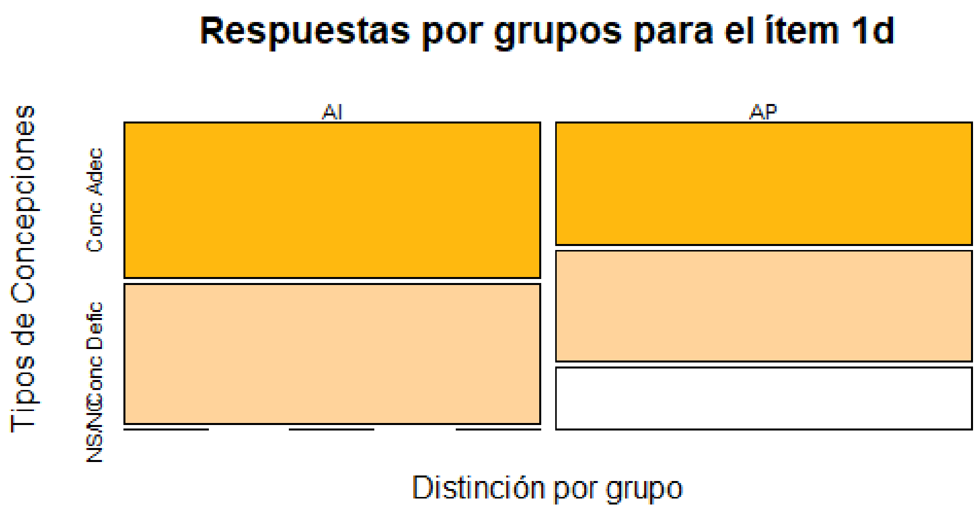


Figura 33: Resultados para el ítem 1d según cada grupo

Para este ítem tanto en el caso general como para cada grupo aproximadamente la mitad tiene concepción deficiente.

Se encontró que 10 estudiantes evidenciaron el sesgo del “resultado aislado” (*outcome approach*). El resto en menores cantidades no han realizado argumentaciones (sólo han dado como respuesta alguna de las letras) y otros han evidenciado el sesgo del descuido al tamaño muestral.

Para el análisis desde las funciones semióticas, nuevamente tomamos F1, F2, F3, F4 y F5 de los ítems anteriores y agregamos las siguientes:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
La frecuencia relativa se aproxima, bajo independencia, a la probabilidad teórica si la cantidad de ensayos es grande.	F6	Aquí la cantidad de ensayos en pequeña, luego no tenemos la certeza de que estas frecuencias se repliquen en la muestra.
La fluctuación de la frecuencia relativa para muestras pequeñas es importante e incluso se esperarían rachas (al menos cortas si n es pequeño).	F7	Por lo tanto, nada se puede saber del orden de las ocurrencias. Equivalentemente no se puede saber con certeza si la siguiente letra será A ó B.

Tabla 13: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 1d

Problema 2

Juan y María son amigos que hacen apuestas sobre el resultado de eventos deportivos. Cada uno de ellos paga en función de la probabilidad asignada al resultado.

En un partido de fútbol entre Colón y Unión de Santa Fe, Juan pagaba más que María porque apostaba al empate. ¿Consideras que el razonamiento de Juan es acertado? Explica tu respuesta.

Para esta situación problema se obtuvieron los siguientes registros:

Respecto al conjunto total de estudiantes:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
5 (12%)	35 (81%)	3 (7%)

Tabla 14: Resultado general para el ítem 2

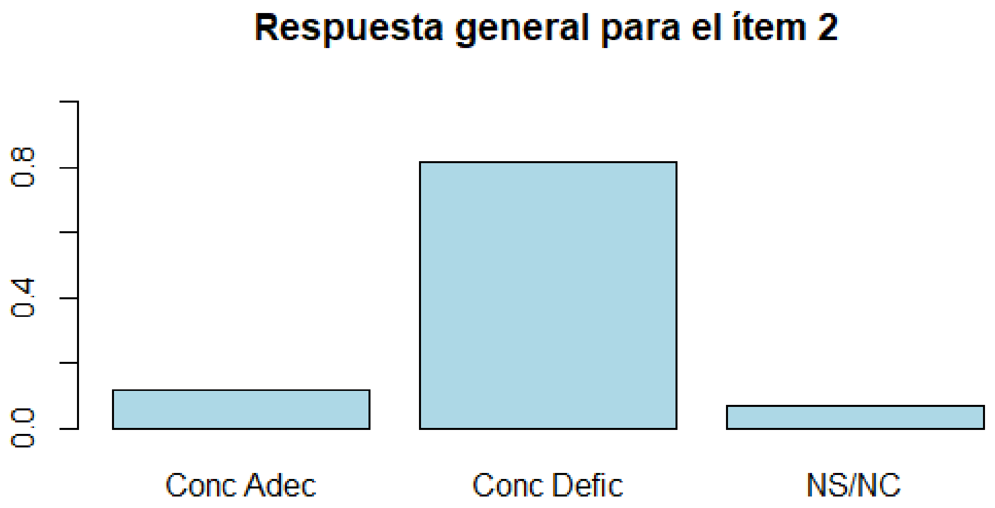


Figura 34: Resultado general para el ítem 2

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	4 (21%)	13 (47%)	2 (11%)
AP	1 (4%)	22 (38%)	1 (4%)

Tabla 15: Resultado general para el ítem 2 según cada grupo

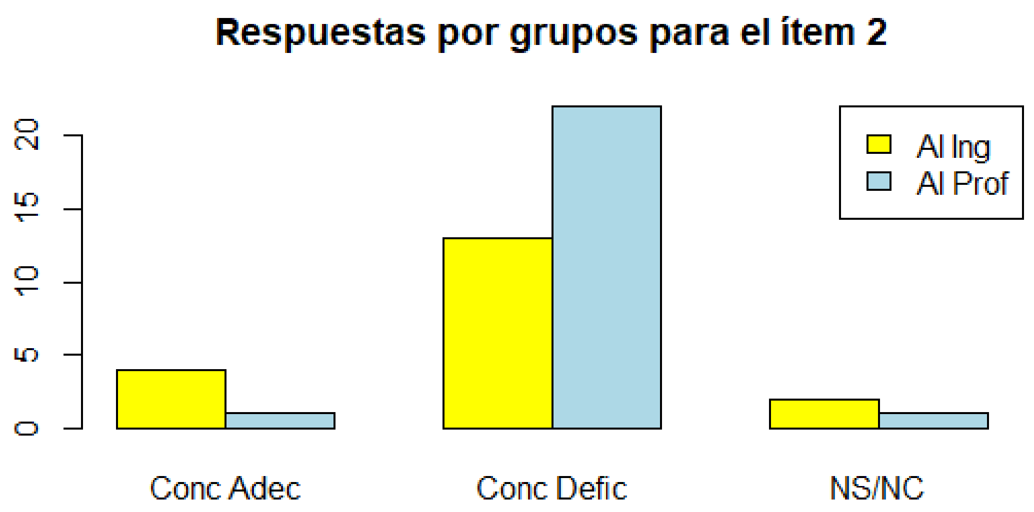


Figura 35: Resultados para el ítem 2 según cada grupo

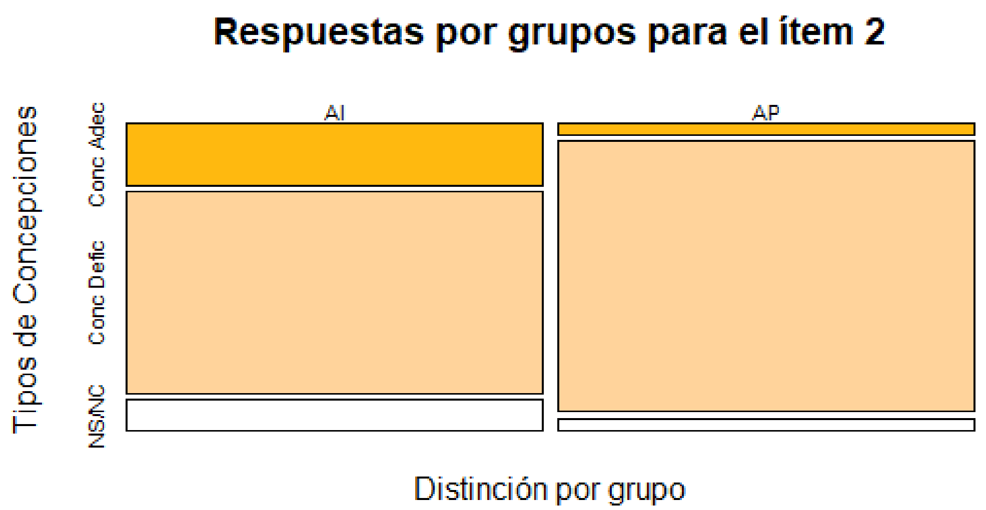


Figura 36: Resultados para el ítem 2 según cada grupo

Un 80% aproximadamente de los estudiantes presentaron concepción deficiente.

Estos resultados, asociados a la carencia del enfoque subjetivo, coinciden con los antecedentes que también exploraron este enfoque, tales como De Olivera, Olesker y Pagés (2017) y Rodríguez y Agnelli (2009).

De los estudiantes, 14 evidencian una fuerte "concepción centrada en Laplace", entendiendo que los eventos "ganar", "empatar" y "perder" son equiprobables.
En menores cantidades, justificaron desde una "concepción centrada en el enfoque frecuencial" y otros en la "concepción de la aleatoriedad como incertidumbre".

A continuación se presenta un conjunto de funciones semióticas que favorecen la resolución:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
El resultado de una competencia deportiva, en principio, es aleatorio	F8	Los eventos "ganar", "perder", "empatar" son factibles de asignarles probabilidades.
Los eventos "ganar", "perder", "empatar" en la realización de un partido de fútbol son eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.	F9	P(ganar)+P(perder)+P(empatar)=1
La asignación de probabilidad por el enfoque laplaciano es para espacios equiprobables.	F10	Aquí no tenemos, en principio, la certeza de equiprobabilidad. No es aplicable por lo tanto este enfoque para la asignación.
La asignación de probabilidad por el enfoque frecuencial necesita independencia y una cantidad grande de repeticiones	F11	En principio, no sería factible suponer la independencia. Sería muy discutible la aplicación del enfoque.
La asignación de probabilidad por el enfoque subjetivo supone basarse en el conocimiento y la experiencia propia	F12	Se puede suponer para esta situación. La asignación se haría por este enfoque.
No se explicita en el enunciado información adicional por parte de Juan	F13	No sería factible emitir un juicio a favor o en contra de su apuesta.

Tabla 16: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 2

Problema 3

En el día de hoy se produce un nacimiento en un hospital de Concordia: ¿qué probabilidad asignarías de que sea varón? ¿Por qué?

Para esta situación problema se obtuvieron los siguientes registros:

Respecto al conjunto total de estudiantes:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
12 (28%)	30 (70%)	1 (2%)

Tabla 17: Resultado general para el ítem 3

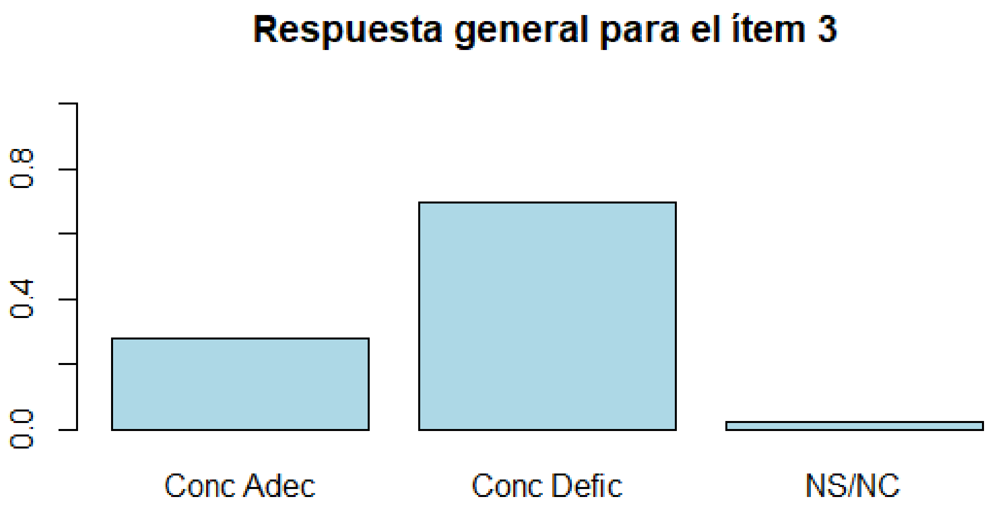


Figura 37: Resultado general para el ítem 3

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	5 (26%)	14 (74%)	0 (0%)
AP	7 (29%)	16 (67%)	1 (4%)

Tabla 18: Resultados para el ítem 3 según cada grupo

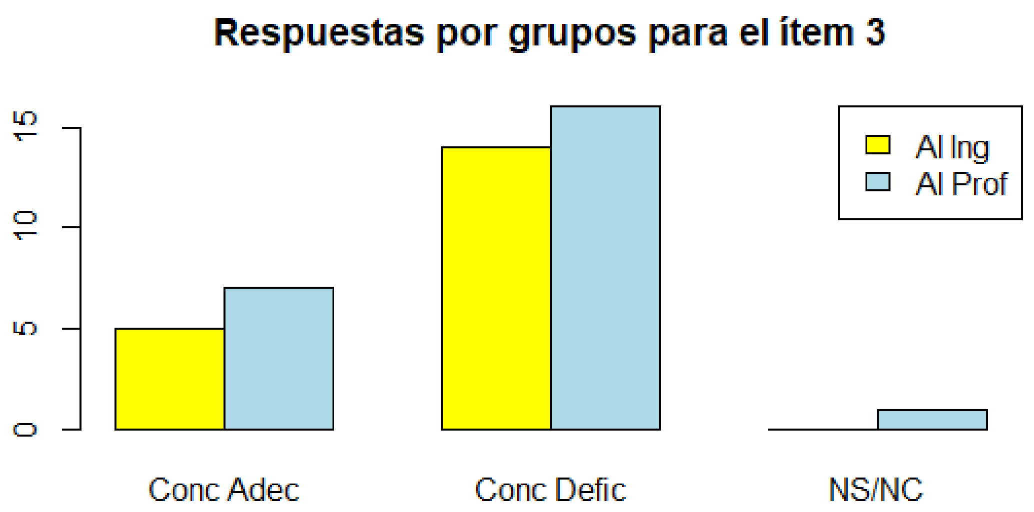


Figura 38: Resultados para el ítem 3 según cada grupo

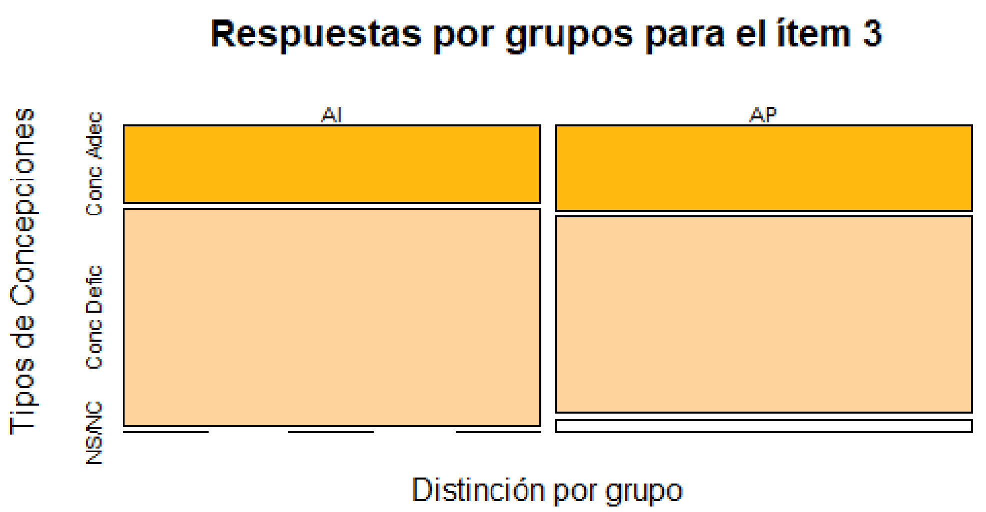


Figura 39: Resultados para el ítem 3 según cada grupo

En este ítem se observa que casi no hay diferenciación entre los grupos, para ambos la mayoría fueron catalogados con concepción deficiente.

En general, de las respuestas fundamentadas vinculadas a algún enfoque, primó la concepción centrada en Laplace (16 de ellos), sin aportar referencia a algún otro elemento de análisis (como composición poblacional, características del grupo de personas, entre otros). Si bien la muestra de estudiantes no se la consideraría significativamente grande (n=43), los ítems 2 y 3 apuntan a explorar la aplicación del enfoque subjetivo en distintos contextos, y las cantidades de alumnos que argumentaron usando el enfoque laplaciano son similares (14 para el ítem 2 y 16 para este ítem 3). Este resultado podría inducir que el cambio de contexto asociado a un partido de fútbol y un nacimiento en una ciudad, para estos casos, no son condicionantes para el cambio del enfoque.

Respecto a un conjunto de funciones semióticas que favorezcan la resolución, en general son similares a las del ítem anterior (salvo los contextos).

Problema 4

Carolina y Joaquín lanzan 100 veces una moneda haciéndola girar en el aire. Se les pidió que anoten los resultados de la cara superior de la moneda cuando quedó quieta en el piso. Los registros se presentan a continuación, para los cuales se usó una “C” para indicar Cara y una “X” para indicar Cruz.

Registros de Carolina:

X C C C C X X C C C X X X C C C X X C C X X X C C C C C X X X C C C X X C
X C X X C C X X C C C C C C X X C X C X X X C X C X C C C C C C X C X X X
C X C X X X C C X X X C C C C C C X X C C C C X C C

Registros de Joaquín:

C X C C C X X C C X X X C C X C X C X X X C C X X C C X C X X X X C X C C
X C C C X X X C X C C X C X X C X C C C X X C X X X C C C X C X C X X C X
X C C X C C C X X X C X C C X X C C X X C C C X X C

Teniendo en cuenta los registros de Carolina y Joaquín: ¿es posible determinar si alguno de los dos ha mentido y no lanzó la moneda (hizo trampas), inventando el registro presentado? ¿Por qué?

Para esta situación problema se obtuvieron los siguientes registros:

Respecto al conjunto total de estudiantes:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
6 (14%)	34 (79%)	3 (7%)

Tabla 19: Resultado general para el ítem 4

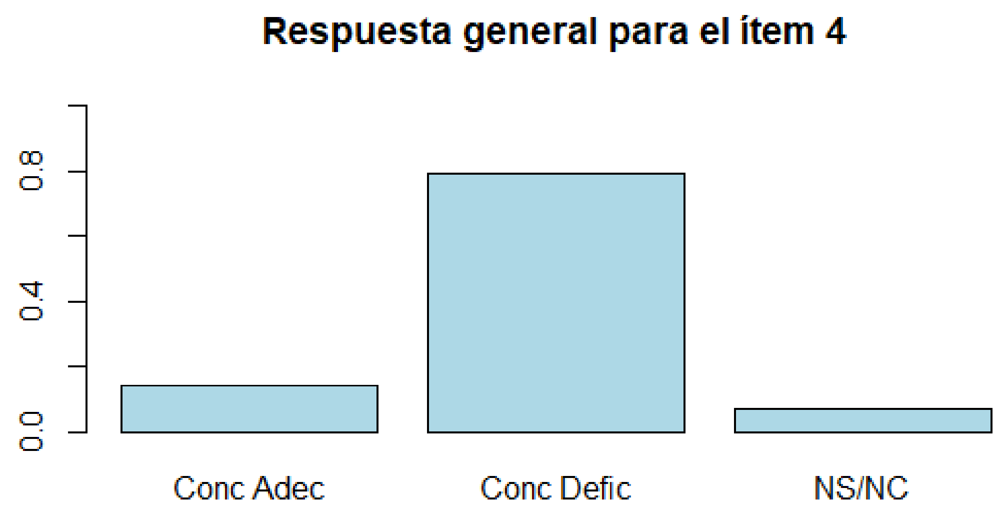


Figura 40: Resultados para el ítem 4 según cada grupo

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	1 (5%)	17 (89%)	1 (5%)
AP	5 (21%)	17 (71%)	2 (8%)

Tabla 20: Resultados para el ítem 4 según cada grupo

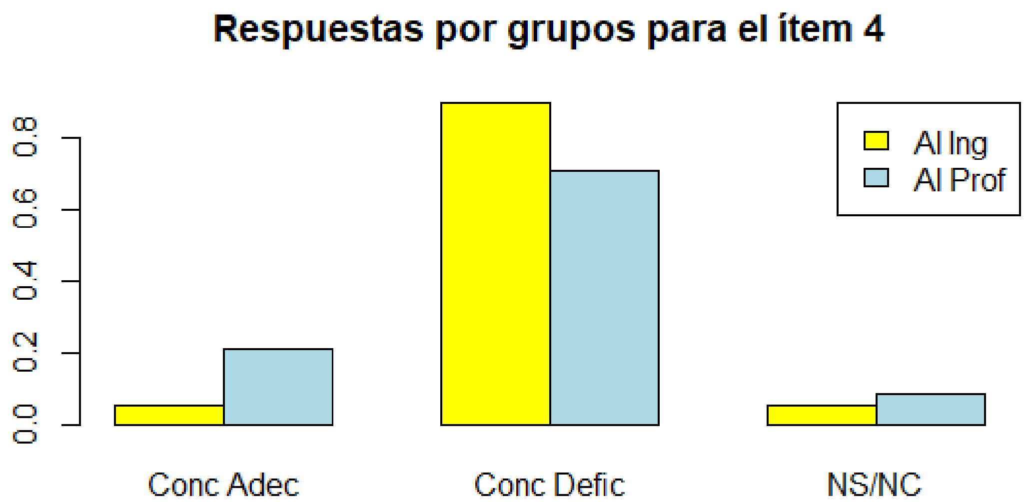


Figura 41: Resultados para el ítem 4 según cada grupo

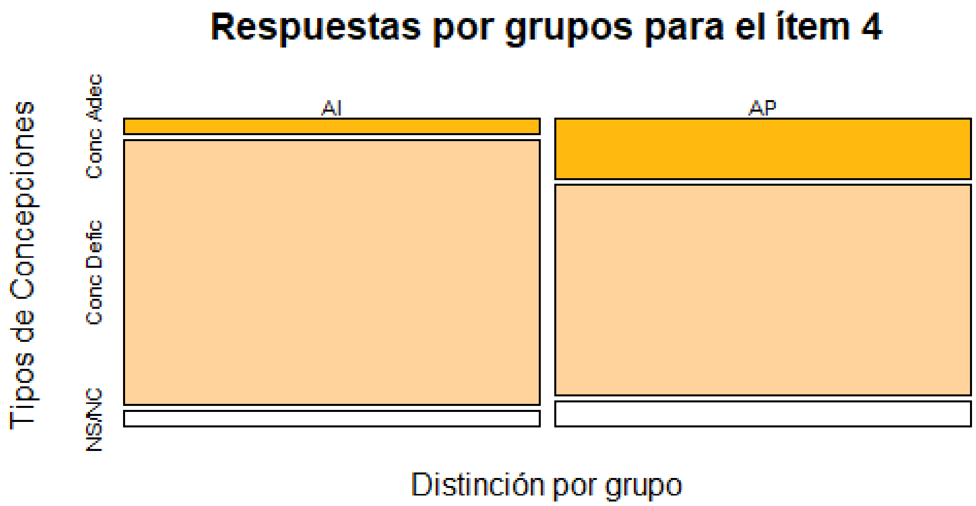


Figura 42: Resultados para el ítem 4 según cada grupo

En este ítem, sobre el estudio de dos secuencias binarias, aproximadamente el 80% fue catalogado como concepción deficiente, y no se reconocen grandes diferencias entre los grupos.

Del total, 15 estudiantes evidencian la “concepción de la aleatoriedad como incertidumbre”, argumentando que no se puede saber si alguno de los dos mintió sobre los lanzamientos. Por otro lado, 4 de ellos argumentaron desde una “concepción centrada en Laplace”. Pocos han evidenciado una “concepción de la aleatoriedad como proceso de autocorrección”, pues decidían que el listado que pudo ser inventado sería el que tenga rachas.

A continuación se presenta un conjunto de funciones semióticas que favorecen la resolución:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
"Carolina y Joaquín lanzan 100 veces una moneda haciéndola girar en el aire. Se les pidió que anoten los resultados de la cara superior de la moneda cuando quedó quieta en el piso"	F14	El evento "que se registre cara" y "que se registre cruz" son aleatorios y, en principio, equiprobables: P(cara)=P(cruz)=0.5
	F15	Este experimento aleatorio se repitió, bajo independencia, 100 veces
La frecuencia relativa bajo independencia para muestras grandes, se aproxima a la probabilidad teórica	F6	Se esperaría que en los 100 lanzamientos haya **aproximadamente** 50 caras (es decir, debe haber una regularidad global).
Bajo aleatoriedad no se espera encontrar patrones de la forma que sea	F16	Se esperaría que no aparezcan secuencias largas o alternadas del tipo, por ejemplo, CXCXCXCXC
Se tienen resultados teóricos que con alta probabilidad anticipan la existencia de rachas (para n=100, serían aproximadamente de longitud 5)	F17	Se esperarían encontrar rachas de longitud aproximada de 5 tanto para caras como para cruces
Las funciones F6, F16 y F17 anticipan lo que debería ocurrir bajo aleatoriedad	F18	Estos tres resultados son evidentes en la secuencia de Carolina a comparación de la secuencia de Joaquín. Sería de esperar que la de Joaquín haya sido inventada.

Tabla 21: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 4

Problema 5

Unir con una flecha cada evento de la columna izquierda con la probabilidad que le asignarías justificando posteriormente tu respuesta:

Evento
A: Obtener cara al tirar una moneda no cargada[2].
B: Obtener cara al tirar una moneda no cargada, pero sabiendo que en los primeros 5 lanzamientos se obtuvo cara.
C: Obtener cara al tirar una moneda que no se sabe si está cargada, pero en los primeros 10 lanzamientos se obtuvo cara.

Probabilidad
0
Entre 0 y ½
½
Entre ½ y 1
1

Justificación para el evento A:

Justificación para el evento B:

Justificación para el evento C:

Respecto al conjunto total de estudiantes para el ítem 5a:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
29 (67%)	12 (28%)	2 (5%)

Tabla 22: Resultado general para el ítem 5

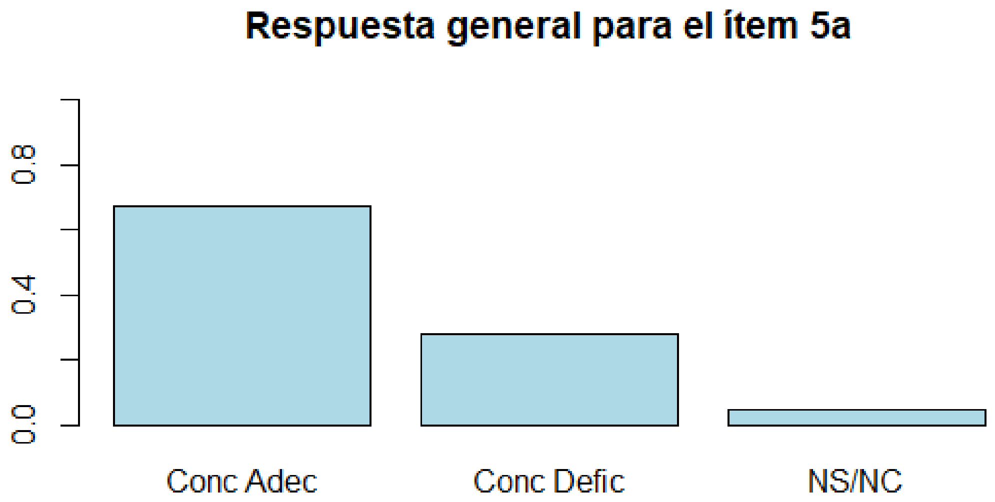


Figura 43: Resultado general para el ítem 5a

[2] Al decir “no cargada” se hace referencia a una moneda legal, sin desperfectos ni tampoco alguna particularidad que pueda incidir en forma tendenciosa en el resultado.

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	15 (79%)	3 (16%)	1 (5%)
AP	14 (58%)	9 (38%)	1 (4%)

Tabla 23: Resultados para el ítem 5a según cada grupo

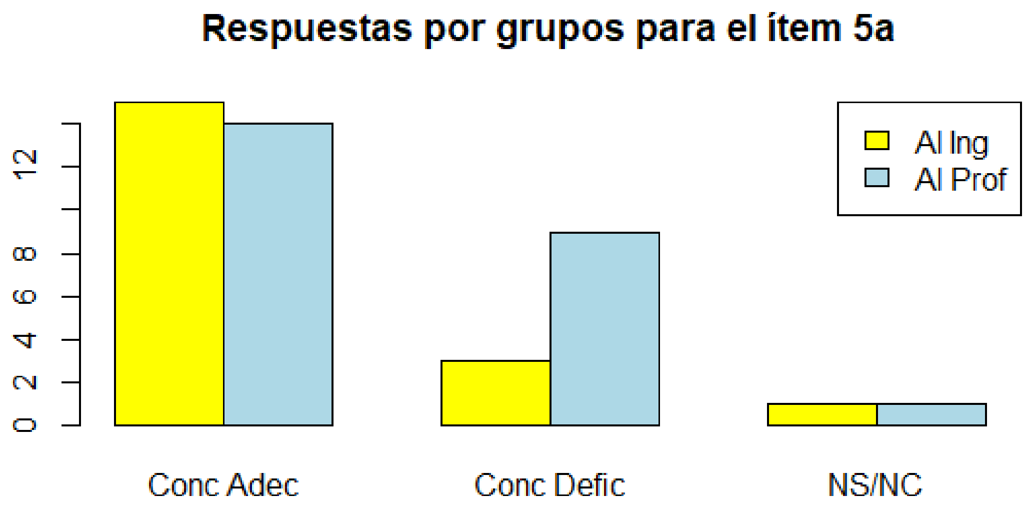


Figura 44: Resultados para el ítem 5a según cada grupo

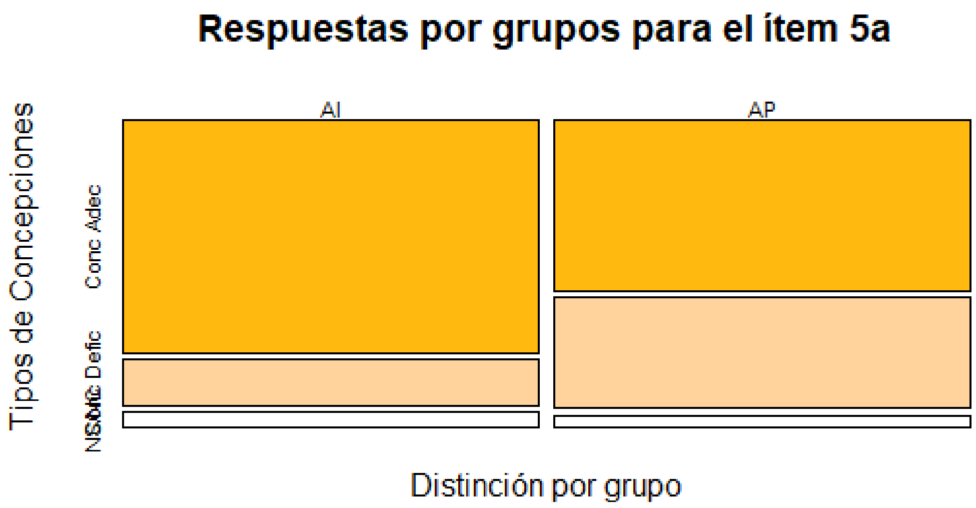


Figura 45: Resultados para el ítem 5a según cada grupo

Esta consigna, en general, no presentó mayores dificultades. Se observa una diferencia de concepciones adecuadas a favor de los alumnos del profesorado.

Las respuestas que no fueron convincentes consistieron en indicar una respuesta incorrecta pero no argumentada.

Un posible conjunto de funciones semióticas favorables a la resolución estaría formado por la F1 del ítem anterior.

Respecto al conjunto total de estudiantes para el ítem 5b:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
13 (30%)	27 (63%)	3 (7%)

Tabla 24: Resultado general para el ítem 5b

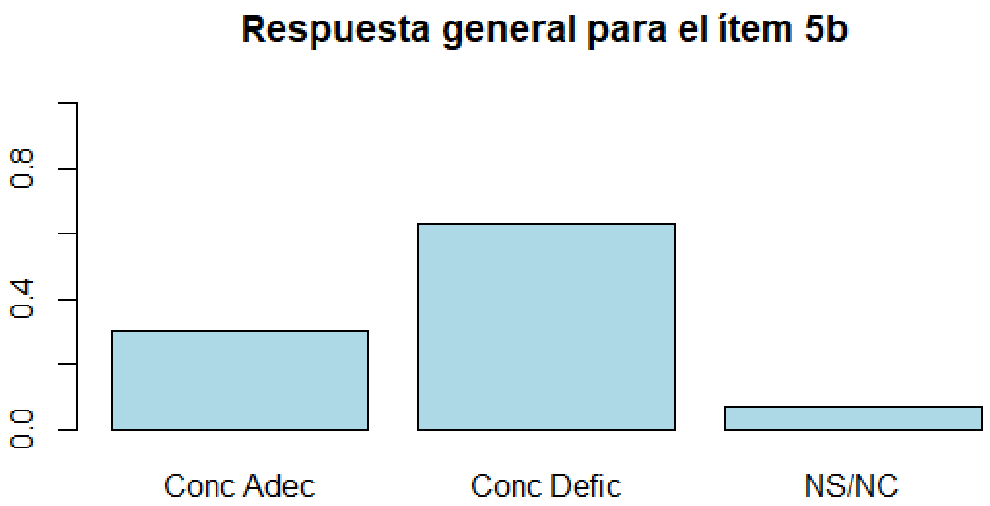


Figura 46: Resultados para el ítem 5b según cada grupo

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	7 (37%)	10 (53%)	2 (11%)
AP	6 (25%)	17 (71%)	1 (4%)

Tabla 25: Resultados para el ítem 5b según cada grupo

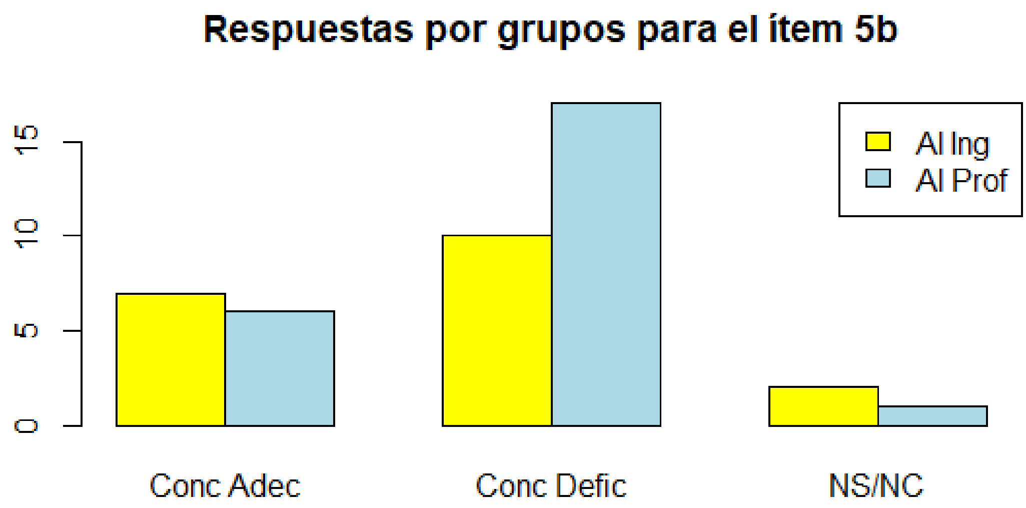


Figura 47: Resultados para el ítem 5b según cada grupo

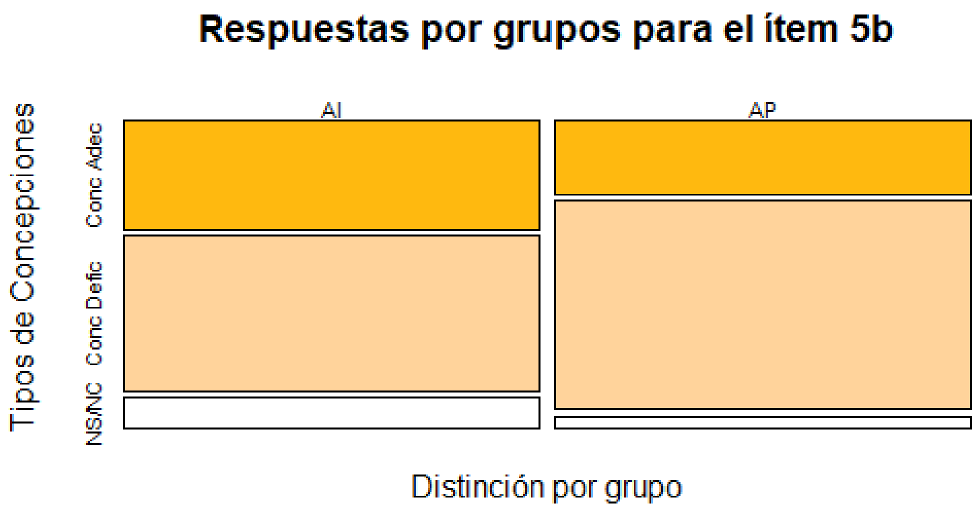


Figura 48: Resultados para el ítem 5b según cada grupo

Este ítem está relacionado con el anterior. Se observa un cambio evidente entre los porcentajes y se mantiene cierta similitud entre cada grupo. Prácticamente casi todas las respuestas asociadas a una concepción deficiente se basaron en una concepción de la aleatoriedad como un proceso de autocorrección.

A continuación se presenta un conjunto de funciones semióticas que favorecen la resolución:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
"Obtener cara al tirar una moneda no cargada".	F19	Los eventos "cara" y "cruz" son equiprobables y exhaustivos: P(cara)=P(cruz)=0.5
La frecuencia relativa para muestras chicas es considerable.	F7	Siendo n=5 (ó n=6) no sería posible anticipar con convicción la cantidad de caras. Por lo tanto, para este caso, nada se puede decir del orden.
Las 6 repeticiones se suponen independientes	F20	Por lo tanto la probabilidad de obtener cara, aún condicionada a los 5 eventos anteriores, sigue siendo 0.5
Se tienen resultados teóricos que con alta probabilidad anticipan la existencia de rachas (para n=100, serían aproximadamente de longitud 5)	F17	Se esperarían encontrar rachas de longitud aproximada de 5 tanto para caras como para cruces
Las funciones F7, F20 y F17 anticipan lo que debería ocurrir bajo aleatoriedad	F21	Estos tres resultados son evidentes en la secuencia de Carolina a comparación de la secuencia de Joaquín. Sería de esperar que la de Joaquín haya sido inventada.

Tabla 26: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 5b

Respecto al conjunto total de estudiantes para el ítem 5c:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
17 (40%)	23 (53%)	3 (7%)

Tabla 27: Resultado general para el ítem 5c

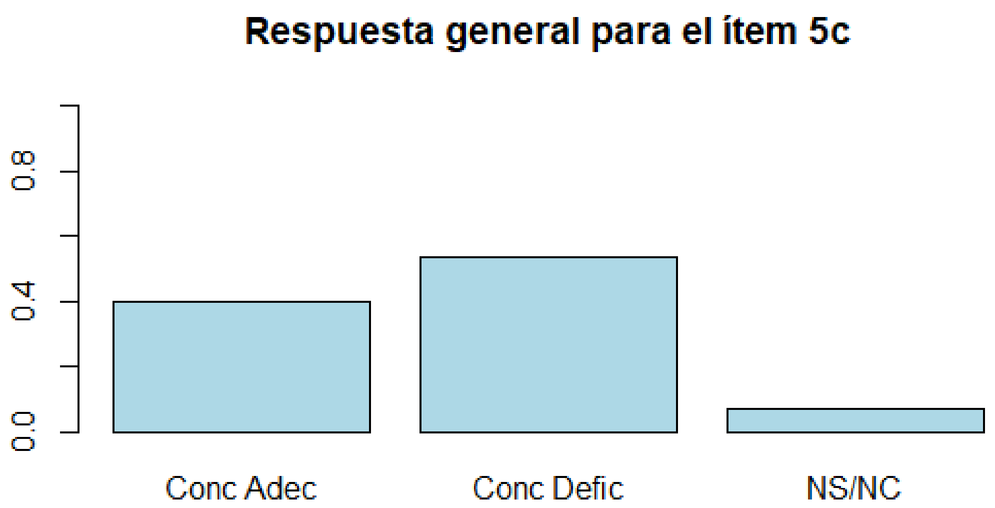


Figura 49: Resultado general para el ítem 5c

Resultado por grupos:

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	7 (37%)	11 (58%)	1 (5%)
AP	10 (42%)	12 (50%)	2 (8%)

Tabla 28: Resultados para el ítem 5c según cada grupo

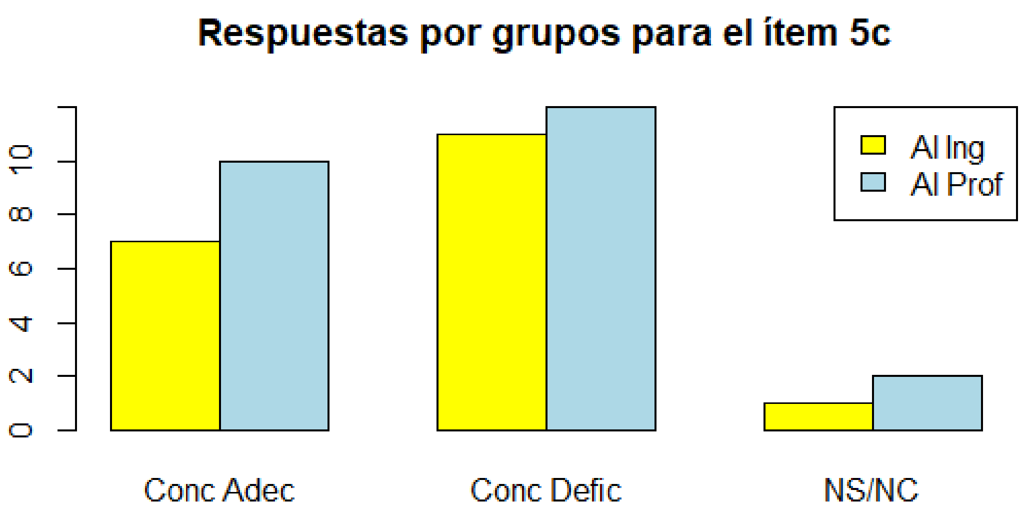


Figura 50: Resultados para el ítem 5c según cada grupo

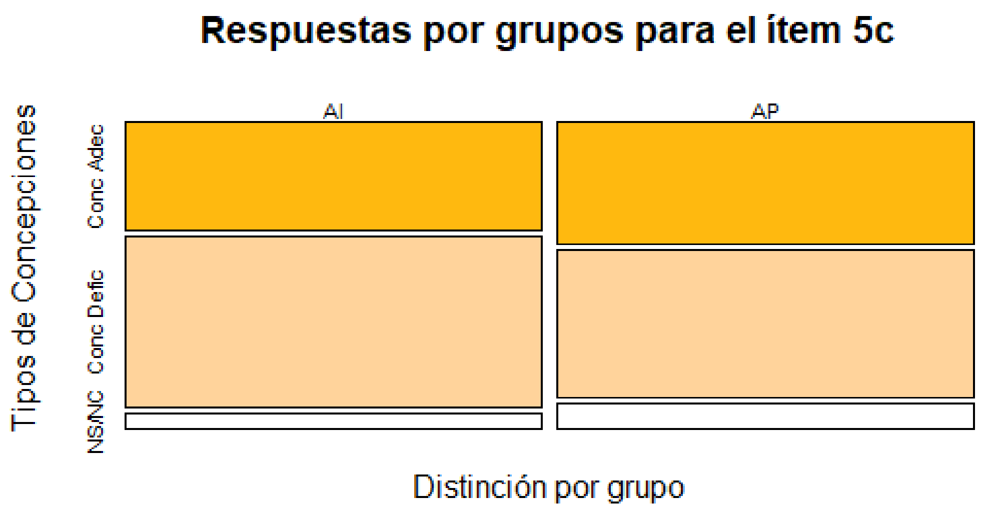


Figura 51: Resultados para el ítem 5c según cada grupo

Para el último ítem, los resultados obtenidos son similares tanto en el conteo general como dentro de cada grupo. Una vez más se observa la falencia en el uso del enfoque subjetivo y el sesgo de interpretar que el próximo lanzamiento debe ser cara, aún cuando no es posible tener la confirmación, más allá de entenderlo como un evento de alta probabilidad (esto se registró en 11 estudiantes). En menor medida (sólo 2 estudiantes) se ha registrado la "concepción centrada en Laplace".

A continuación se presenta un conjunto de funciones semióticas que favorecen la resolución:

Antecedente	Función Semiótica	Consecuente
"Obtener cara al tirar una moneda que no se sabe si está cargada".	F22	Los eventos "cara" y "cruz", son aleatorios, no se pueden suponer equiprobables, pero sí exhaustivos: P(cara)+P(cruz)=1
Durante diez lanzamientos seguidos se obtuvo cara.	F23	Se puede suponer que P(cara)>P(cruz)
Bajo independencia y una secuencia ocurrida de 10 éxitos (en terminología de experimentos de Bernoullí), induce a que P(éxito) es muy alta.	F24	Corresponde asignar una probabilidad alta de obtener cara: P(cara)>1/2. Pero no se tiene la certeza de ello.

Tabla 29: Funciones semióticas que favorecen la resolución del ítem 5c

7.3. Configuraciones cognitivas de los estudiantes

Luego de analizar cualitativamente las prácticas operativas de los 43 estudiantes a través de las configuraciones cognitivas de cada uno de ellos, decidimos agrupar las resoluciones de grupos de estudiantes en razón de las similitudes encontradas.

Esta agrupación en bloques se motivó también por la posibilidad que brindan de caracterización con mayor precisión las concepciones de aleatoriedad y probabilidad que se reconocen a través de sus escritos y nos permite comparar respecto a la Configuración epistémica de referencia.

Se han determinado tres bloques de estudiantes:

Bloque	Integrantes	Caracterizaciones
1	AI5, AI6, AI8, AI9, AI10, AI16,AP3, AP4, AP17, AP23	Sus producciones manifiestan un manejo de los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo, además del uso de la independencia de los eventos (tengamos presente que esta caracterización podría ser implícita para estos alumnos pues no tuvieron formación previa alguna de nivel terciaria y/o universitaria)
2	AI1, AI2, AI4, AI7, AI14, AI15, AI16, AI17, AP1, AP2, AP6, AP8, AP12, AP13, AP14, AP15, AP18, AP19, AP21, AP 24	Los integrantes de este Bloque 2 se caracterizan por una fuerte “concepción centrada en Laplace”, lo que lleva en algunos casos al sesgo de la equiprobabilidad para espacios que no lo son. Otra característica común que se observa es la “concepción de aleatoriedad como incertidumbre”, lo que puede traer como consecuencia el no reconocimiento de la estabilidad de la frecuencia relativa para muestras grandes (quizá por esta razón no se reconoce, en general, el uso del enfoque frecuencial).
3	AI3, AI11, AI12, AI13, AI18, AI19, AP5, AP7, AP9, AP10, AP13, AP16, AP20	Este Bloque 3 se conforma con estudiantes en cuyas producciones se reconoce una muy fuerte presencia de la “concepción de la aleatoriedad como incertidumbre”. A tal punto que muchas respuestas aluden que nada se puede determinar ni estimar porque “todo depende del azar”.

Tabla 30: Agrupación de los estudiantes según las concepciones cognitivas

A continuación se presentan sus configuraciones cognitiva:

Lenguaje

(a) Verbal: Argumentación de procedimientos, Expresión verbal de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

(b) Simbólico: Expresión simbólica de los enunciados (traducción de lenguaje verbal al simbólico), Expresión simbólica de propiedades, Expresión simbólica de algoritmos de las operaciones, Expresión simbólica de conceptos, procedimientos y argumentos.

(c) Gráfico: Interpretación de enunciados a través de tablas y gráficos

Situación Problemática

Actividades contextualizadas (extra matemáticas) tanto vinculadas a los juegos de azar como también a la vida cotidiana.

REGLAS

Conceptos

Previos: operaciones con igualdades y desigualdades en números naturales y racionales. Propiedad conmutativa. Par ordenado. Unión e intersección de conjuntos.
Emergentes: experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, eventos disjuntos, definición de Laplace, frecuencia relativa, independencia de eventos. Enfoque frecuencial. Sucesos mutuamente excluyentes. Disposiciones ordenadas. Ensayos de experimentos aleatorios.

Propiedades

Previas: operaciones en conjuntos numéricos. Conteo de elementos de conjuntos cualesquiera.
Emergentes: Conmutatividad en eventos disjuntos. Acotación de la probabilidad. Eventos complementarios. Ley de los grandes números

Procedimientos

Previos: Cálculos numéricos. Interpretación de enunciados. Algoritmos de las operaciones.
Representación de conjuntos de datos y diagramas.
Emergentes: Interpretación de gráficos, enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de fracciones. Aplicación de algoritmos en operaciones con fracciones y expresiones decimales. Aproximación de decimales por redondeo y truncamiento. Cálculo de porcentajes. Expresión simbólica y gráfica de enunciados verbales.

Argumentos

Argumentación sostenida por los procedimientos utilizados y por la omisión de información adicional en los enunciados (vinculado al uso del enfoque subjetivo)

Figura 52: Configuración cognitiva para el Bloque 1

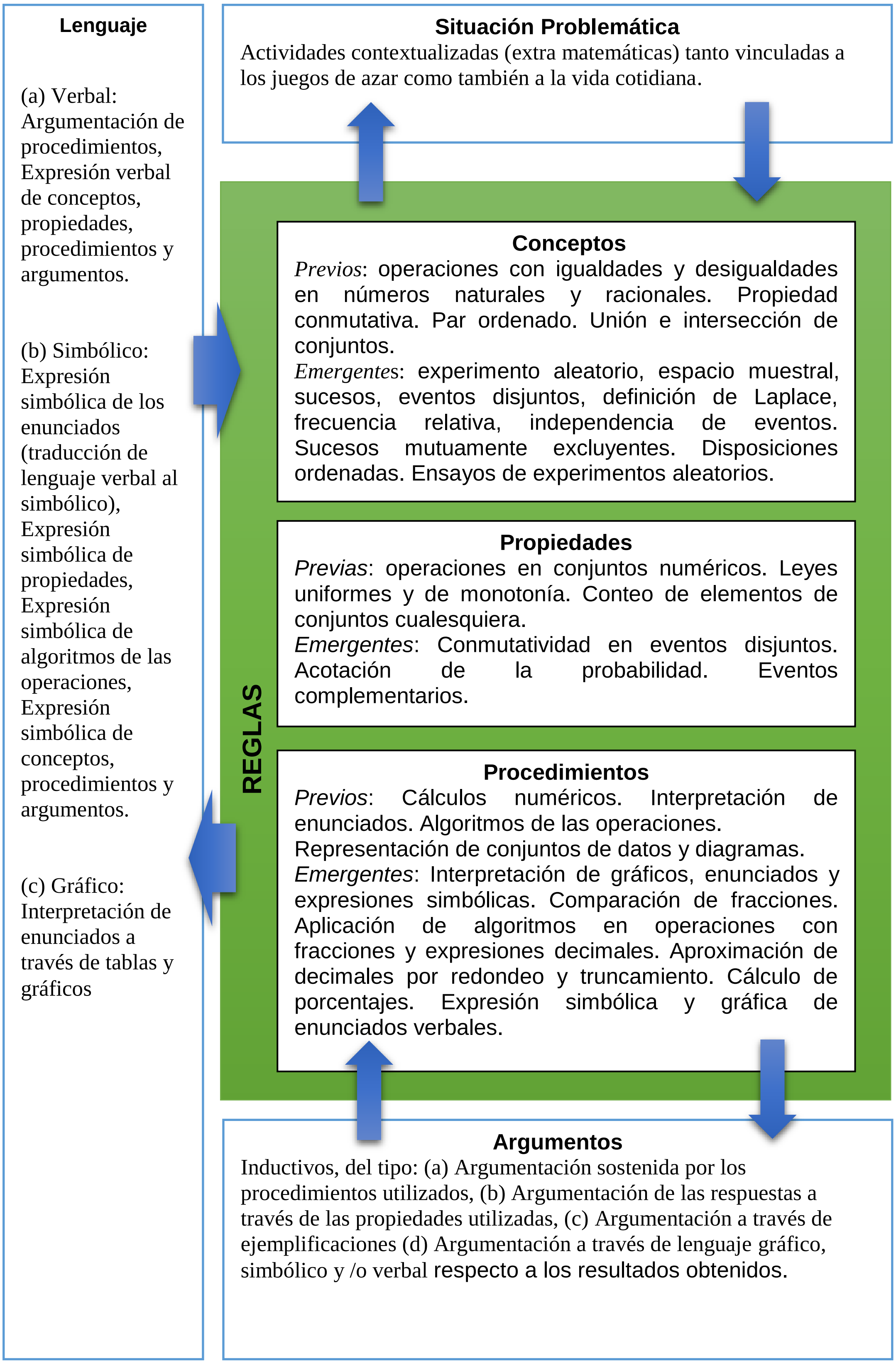


Figura 53: Configuración cognitiva para el Bloque 2

Lenguaje

(a) Verbal: Argumentación de procedimientos, Expresión verbal de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

(b) Simbólico: Expresión simbólica de los enunciados (traducción de lenguaje verbal al simbólico), Expresión simbólica de propiedades, Expresión simbólica de algoritmos de las operaciones, Expresión simbólica de conceptos, procedimientos y argumentos.

(c) Gráfico: Interpretación de enunciados a través de tablas y gráficos

Situación Problemática

Actividades contextualizadas (extra matemáticas) tanto vinculadas a los juegos de azar como también a la vida cotidiana.

REGLAS

Conceptos

Previos: operaciones con igualdades y desigualdades en números naturales y racionales. Propiedad conmutativa. Par ordenado. Unión e intersección de conjuntos.
Emergentes: experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, eventos disjuntos, definición de Laplace, frecuencia relativa, independencia de eventos. Sucesos mutuamente excluyentes. Disposiciones ordenadas. Ensayos de experimentos aleatorios.

Propiedades

Previas: operaciones en conjuntos numéricos. Leyes uniformes y de monotonía. Conteo de elementos de conjuntos cualesquiera.
Emergentes: Conmutatividad en eventos disjuntos. Acotación de la probabilidad. Eventos complementarios.

Procedimientos

Previos: Cálculos numéricos. Interpretación de enunciados. Algoritmos de las operaciones.
Representación de conjuntos de datos y diagramas.
Emergentes: Interpretación de gráficos, enunciados y expresiones simbólicas. Comparación de fracciones. Aplicación de algoritmos en operaciones con fracciones y expresiones decimales. Aproximación de decimales por redondeo y truncamiento. Cálculo de porcentajes. Expresión simbólica y gráfica de enunciados verbales.

Argumentos

Inductivos, del tipo:
(a) Argumentación sostenida por los procedimientos utilizados,
(b) Argumentación sostenida por la idea de la prevalencia del azar independientemente del tamaño muestral y la independencia de los eventos

Figura 54: Configuración cognitiva para el Bloque 3

Conclusiones

8.1. Introducción

En este capítulo se recuperan reflexiones y conclusiones a las que hemos llegado con nuestra investigación. Retomamos las preguntas de investigación formuladas inicialmente:

- *¿Cuáles son las concepciones iniciales sobre aleatoriedad y probabilidad de los estudiantes que inician un curso de Probabilidad y Estadística en el nivel superior?*
- *¿Qué prácticas matemáticas caracterizan a estas concepciones?*
- *¿Qué dificultades generarían estas concepciones para la construcción de nuevos objetos matemáticos estocásticos?*

Para intentar responder estas preguntas hemos determinado una configuración epistémica de referencia, luego de analizar didácticamente siete libros de texto de matemática y haber consultado documentos oficiales nacionales y jurisdiccionales. Esta configuración nos sirvió de base para diseñar un instrumento en el cual también se consideraron aportes de investigaciones previas realizadas sobre la temática de nuestra investigación. El instrumento se aplicó a dos grupos de estudiantes del año lectivo 2019 y estuvo compuesto por ingresantes a las carreras de ingeniería de la FRCON-UTN y, por otro lado, profesores de Matemática en formación en su primer año, pertenecientes al Instituto Profesorado Concordia D-54. Ambos grupos no contaban con formación terciaria y/o universitaria previa en Probabilidad y Estadística.

A partir de las prácticas operativas que realizaron ante el instrumento que diseñamos para tal fin, se determinaron sus configuraciones cognitivas, encontrando similitudes importantes que fueron agrupadas en tres bloques. De esta forma, se pudo comparar las configuraciones cognitivas con la configuración epistémica de referencia, llegando a las conclusiones que seguidamente detallamos.

Para la presentación de resultados tomaremos como ejes de discusión los que se detallan a continuación, los que a su vez se corresponden con las preguntas de investigación formuladas:

- Caracterización de las concepciones iniciales sobre aleatoriedad y probabilidad en cada uno de los bloques considerados de estudiantes.
- Descripción de las prácticas matemáticas asociadas a las concepciones de los estudiantes
- Incidencias de las concepciones deficientes en la construcción de otros objetos matemáticos.

Cerramos el capítulo con reflexiones finales derivadas de la investigación, comentarios sobre las limitaciones y posibles caminos en la formulación de otras preguntas que ampliarían este estudio.

8.2. Caracterización de las concepciones iniciales halladas en los estudiantes y posibles incidencias en otros objetos matemáticos

En primer lugar, al revisar las configuraciones cognitivas de los alumnos, reconocimos un conjunto de similitudes que motivó la agrupación de los mismos.

Retomando el cuadro de la sección 7.3, se observan las siguientes cantidades por bloques:

Bloque	Cantidad de estudiantes	Caracterización general
1	10 (23%)	Concepciones adecuadas de los tres enfoques
2	20 (46%)	Concepciones centradas en Laplace
3	13 (31%)	Concepción de la aleatoriedad como incertidumbre

Tabla 31: Descripción de los Bloques de estudiantes 1, 2 y 3

El primer bloque abarca el 23% aproximadamente de los 43 estudiantes analizados. Este bloque se caracteriza, en general, por tener concepciones adecuadas respecto a los tres enfoques (clásico, frecuencial y subjetivo) y un aceptable reconocimiento de la independencia entre los eventos, que se asocia a la noción de aleatoriedad. El tipo de argumentaciones encontradas son variadas, pero contienen elementos que dan indicios de la caracterización dada. Por ejemplo, se hallan respuestas como la siguiente:

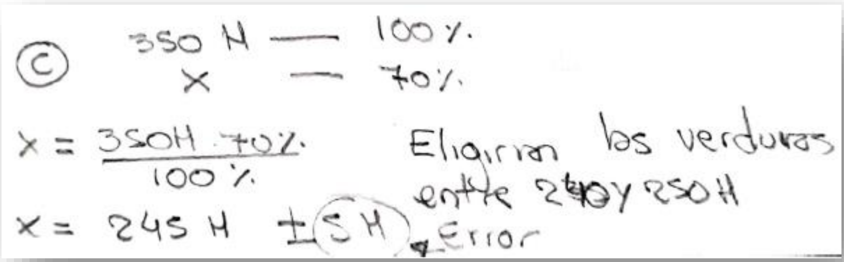


Figura 55: Respuesta de AI8 al ítem 1c

Reconocemos en la Figura 55 que aplica una regla de tres simple tomando como probabilidades los porcentajes del enunciado pero propone un margen de error de tamaño 5. Interpretamos que el estudiante AI8 no cree que el resultado sea exactamente 245 pero supone que debería fluctuar cerca de dicho valor (tomando como fluctuación más o menos 5 hamsters). Esto induce a pensar que tiene una concepción inicial adecuada del comportamiento de la frecuencia relativa a la larga (recordando que son alumnos que no tuvieron formación previa en Probabilidad y Estadística).

El enfoque frecuencial en particular no está presente en todos los libros, nos merece un especial interés pues en la vida cotidiana puede explicar la interpretación de un resultado de encuestas, por ejemplo, algo que incumbe la vida cotidiana de los estudiantes. El ítem 1c en particular tiene la intención de explorar el reconocimiento del comportamiento de la frecuencia relativa a la larga (la propiedad llamada Ley de los Grandes Números). Observemos el resumen general y por grupos respecto a este ítem:

Concepciones adecuadas	Concepciones deficientes	NS/NC
14 (33%)	28 (65%)	1 (2%)

	Concepciones adecuadas	Concepciones deficientes	NS/NC
AI	8 (42%)	11 (58%)	0 (0%)
AP	6 (25%)	17 (71%)	1 (4%)

Tabla 32: Resultado general y por grupos para el ítem 1c

Se observa algo importante: en general más de la mitad fue catalogado como concepción deficiente, pero cuando se mira en el resumen descriptivo por grupos no se distinguen entre ellos (para ambos, la mayoría tiene la misma caracterización). Este resultado coincide con el antecedente de Rodríguez y Agnelli (2009) en su estudio aplicado a estudiantes de Biología y también en profesores en formación en el primer día de clases. Esta escasa presencia del enfoque frecuencial denota, por un lado, la necesidad de trabajarlo en la escuela media, y por otro, se la puede comprender desde su ausencia, en general, en los libros de texto.

El segundo bloque considerado abarca casi la mitad de los 43 estudiantes. En ellos se percibe una fuerte concepción centrada en Laplace, al punto que se registra en muchos casos el sesgo de la equiprobabilidad. Por ejemplo, en el ítem 2 (el problema vinculado a las apuestas en un partido de fútbol) se obtuvieron los siguientes resultados:

Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
5 (12%)	35 (81%)	3 (7%)

	Concepción adecuada	Concepción deficiente	NS/NC
AI	4 (21%)	68 (47%)	2 (11%)
AP	1 (4%)	92 (38%)	1 (4%)

Tabla 33: Resultados general y por grupos para el ítem 2

En 14 de los 35 el argumento fue que los eventos "ganar", "perder" y "empatar" eran equiprobables, como aparece en el ejemplo de la Figura 56:

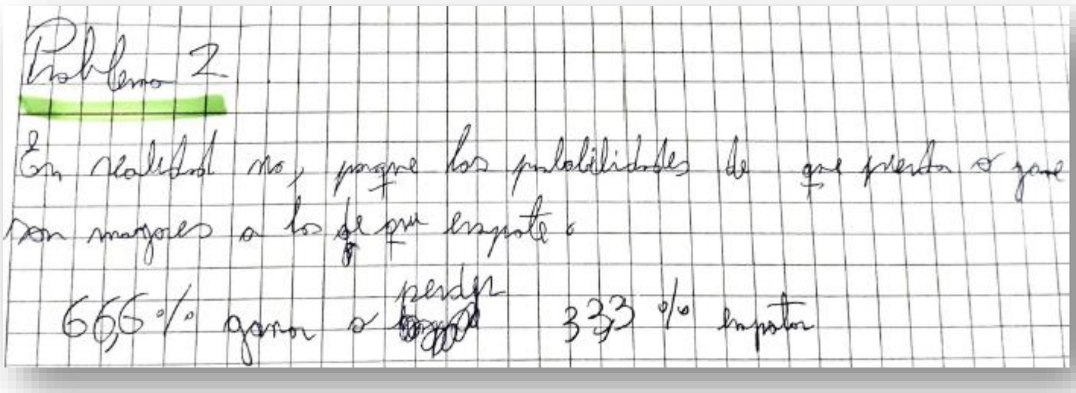


Figura 56: Respuesta de AP8 para el ítem 2

El enfoque clásico es el que se encontró en los 7 libros analizados y mencionado explícitamente en los documentos curriculares. Esto da cuenta que los estudiantes, en general, lo tenían presente pero con esta concepción deficiente respecto a la familia de problemas en los que se puede aplicar.

Otra concepción que se observa, en términos generales para estos estudiantes, es la de la aleatoriedad como incertidumbre. Esto se induce en la cantidad de respuestas equivalentes a la idea de que "todo depende del azar". Esta concepción puede ayudar a entender el hecho de que no se observe el uso del enfoque frecuencial. Asimismo, esto se induce del ítem 1c (la repetición del experimento de los hámsters 350 veces) en el ítem 4 (el de la comparación de las secuencias binarias de tamaño 100) donde los argumentos, en general, fueron que no era posible hacer estimaciones porque eso “depende del azar” entonces podía darse cualquier resultado, como puede verse por ejemplo en la Figura 57:

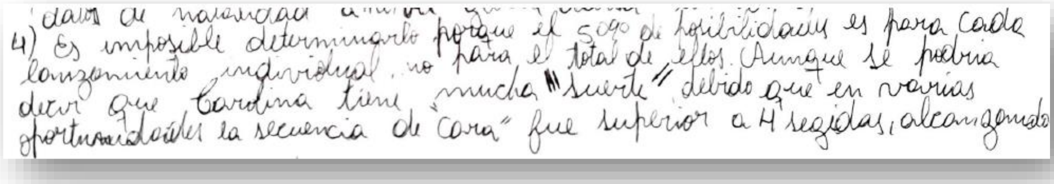

4) Es imposible determinarlo porque el 50% de posibilidades es para cada lanzamiento individual, no para el total de ellos. Aunque se podría decir que Carolina tiene mucha "suerte" debido que en varias oportunidades la secuencia de "cara" fue superior a 4 seguidas, alcanzando

Figura 57: Respuesta de AI4 al ítem 4

Como particularidades para el Bloque 3 se destaca una fuerte concepción de la aleatoriedad como incertidumbre, pero a diferencia del Bloque 2, siempre en términos generales, la presencia es tan importante que la utilizan como argumento, incluso, en aquellos casos donde correspondería la aplicación del enfoque clásico.

Esta intuición de incertidumbre para todos los casos puede explicar que no usen algún enfoque, porque si absolutamente todo “depende del azar”, las estimaciones no tienen sentido alguno pues no tendrían confianza.

Algo para destacar es que en los tres bloques aparece (sin predominio en particular) el sesgo de *outcome-approach* y la heurística de la representatividad manifestada en el descuido del tamaño muestral, en términos de Díaz (2003) como si pensarían en una Ley de los pequeños números,. En otros términos, lo que se observa como patrón en una muestra grande también se debe observar en una muestra pequeña.

En líneas generales, muchos de los estudiantes presentan concepciones deficientes del mismo tipo que encontraron Gómez, Batanero y Contreras (2013): poco reconocimiento de la estabilidad de la frecuencia relativa para muestras grandes, heurística de la representatividad y sesgo de equiprobabilidad.

Respecto de los alumnos ingresantes a ingeniería, también coinciden en varios casos con lo hallado por Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo (2018) en cuanto al sesgo de equiprobabilidad y la heurística de representatividad. Este antecedente ya comentado coincide en el mismo perfil de los alumnos,. Además, son las mismas concepciones deficientes que encontraron Bastias, Alvarado y Retamal

(2017) pero aplicado a profesores de Matemática en ejercicio, los que contaban con una primera formación en el estudio de la estocástica.

8.3. Prácticas matemáticas de los estudiantes asociadas a estas concepciones

De las comparaciones entre las configuraciones cognitivas de los estudiantes y la configuración epistémica de referencia, surgen evidencias del tipo de prácticas que realizaron para las resoluciones del instrumento.

Podemos resumirlas, en general, de la siguiente forma:

- Los estudiantes han realizado conteos en los espacios muestrales correspondientes, cocientes de números naturales, comparaciones de fracciones y de números naturales, cálculo de porcentajes y redondeos.
- Las argumentaciones han sido de tipo inductivas, en el sentido de justificar algún procedimiento y/o concepto utilizado. Sabiendo que los estudiantes, en principio, no conocen algunas propiedades como la ley de los grandes números, pocos la han usado sin hacer referencia a su nombre.
- Primó el lenguaje verbal para las argumentaciones. El lenguaje simbólico para los cálculos y/o conteos realizados. Algunos usaron el lenguaje gráfico para representaciones asociadas a la interpretación de los enunciados.

8.4. Reflexiones y consideraciones finales

La realización de esta investigación nos llevó a reflexionar sobre el diseño de tareas que involucren los objetos matemáticos aleatoriedad y probabilidad:

- Las situaciones problemáticas deben ser extra matemáticas inicialmente vinculadas a los aspectos lúdicos (trascendiendo elementos como monedas y cartas) y luego a situaciones cotidianas. Deben involucrar una red relevante de conceptos, propiedades y procedimientos para su resolución. Esto aportaría a varios criterios de idoneidad. Didáctica planteados por el EOS.
- La complejidad conceptual de estos objetos en estudio sugieren que las situaciones no consistan en la aplicación directa de una regla o

procedimiento. La aplicación correcta de un procedimiento o cálculo, desde el EOS, no implica que el estudiante comprenda el concepto.

- La realización de juegos entre estudiantes que impliquen escenarios estocásticos donde sea objeto de estudio las estrategias. Por ejemplo, si es relevante quién inicia el juego, puede aportar significativamente a la comprensión de la aleatoriedad, y la repetición de las jugadas a la exploración de la Ley de los grandes números.
- Es relevante que las situaciones promuevan o exijan procesos de argumentación (por ejemplo, a través de la comparación de resoluciones entre los estudiantes), porque en ellas se puede inducir las relaciones que realizan entre los objetos matemáticos primarios.
- Es importante el análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático, pues nos permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

8.5. Limitaciones y líneas futuras de trabajo

La caracterización que se logró hacer de la aplicación del instrumento diseñado corresponde a estos dos grupos de estudiantes en particular, por lo que no se puede inferir hacia otros individuos. No obstante, creemos que es de mucha pertinencia el instrumento para aplicarlo en otros grupos con el fin de comparar resultados.

Consideramos importante el análisis de los libros de matemática del nivel secundario utilizando los criterios de idoneidad del EOS, que sientan las bases para extenderse a otros textos, incluso de nivel superior sin inconvenientes.

Esta investigación puede tener varias líneas de profundización y complementariedades, como por ejemplo:

- Dado un grupo de estudiantes, luego de realizar una caracterización de sus concepciones iniciales, diseñar un instrumento para explorar si existe alguna asociación entre el tipo de concepciones y el grado de comprensión de objetos estadístico-matemáticos más complejos (entre ellos, intervalos de confianza o test de hipótesis).

- Replicar este trabajo con profesores de Matemática en ejercicio. No sería algo trivial, incluso serviría para comparar los resultados con trabajos como los de Bastias, Alvarado y Retamal (2017).
- A estos mismos grupos, ingresantes a FRCON-UTN y estudiantes del segundo año del profesorado de Matemática del Profesorado Concordia, realizar un relevamiento al finalizar el cursado de las materias Probabilidad y Estadística (para el caso de las ingenierías) y Problemáticas de la Probabilidad y la Estadística I (para el caso de los estudiantes del Profesorado Concordia). Tal trabajo se podría comparar con los resultados de Lavalle, Micheli y Boché (2003).
- Replicar este trabajo pero bajo otro marco teórico que no sea el EOS, pues al tomar un determinado posicionamiento teórico tiene el sesgo que imponen los lineamientos teóricos correspondientes.

Referencias bibliográficas

Alvarado, H.; Estrella, S.; Retamal, L. y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la en probabilidad. *Relime, 21 (2)*, 131-156.

Antibi, A. et Brousseau, G. (2000). Le dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20 (1), 7-40.

Attorresi, H.; García Díaz, A. y Pralong, H. (2014). Independencia en los juicios probabilísticos entre un problema clásico de Tversky y Kahneman y otro modificado. *VI Congreso Internacional de Investigación y Práctica Profesional en Psicología, XXI Jornadas de Investigación, Décimo Encuentro de Investigadores en Psicología del MERCOSUR* (pp. 11-13). Buenos Aires, Argentina: Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires.

Azcárate, P.; Cardeñoso, J. M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias*, 16 (1), 85 – 97.

Barreiro, P. (2015). *Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática*. Tesis de Maestría. Neuquén: Universidad Nacional del Comahue.

Bastias, H.; Alvarado, H. y Retamal, L. (2017). Explorando el significado intuitivo de la probabilidad en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Granada, España: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la escuela secundaria. *Relime, 8(3),* 247-263.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno*, 5, 15-28.

Batanero, C.; Gómez, E.; Serrano, L. y Contreras, J.M. (2012). *Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de educación primaria. Redimat*, 1(3), 222-245.

Berman, A.; Dacunti, D; Pérez, M.; Veltri, A. y Moledo, L. (2007). *Matemática II*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.

Boccioni, M.; Tabaj, A.; Vigione, Y. y Cabral, G. (2018). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Puerto de Palos.

Cardeñoso Domingo, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la UCA.

D'Amore, B.; Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradìgma,* 28(2), 49-77.

De Olivera, F.; Olesker, L. y Pagés, D. (2019). Concepciones de los futuros docentes sobre la aleatoriedad. Un estudio en el profesorado de matemática. *Reloj de agua*, (16), 5-14.

Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa (pp. 8-11).* Lleida, España.

Esteban. R.; Batanero, C.; Serrano, L. y Contreras, J. M. (2016). ¿Reconocen los estudiantes de educación secundaria obligatoria las secuencias de resultados aleatorios? En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XX (pp. 135-145). Málaga: SEIEM

Font, V.; Planas, N. y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), 89-105.

Garfield, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review,* 63(1), 23-54.

Godino J. D. (1996). Mathematical objects: their meanings and understanding. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 417 – 424).

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *Uno,* 25, 77-87.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado el 2 de febrero de 2011 de http://www.ugr.es/~godino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J.; Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39 (1-2), 127-135.

Gómez, E.; Batanero, C. & Contreras, C. (2013). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28 (48), 209-229

Green, D. (1991). *A longitudinal study of pupils' probability concepts*. Universidad de Loughborough.

Hill H.; Balll D. & Schilling S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.

Jallier, A. y Pérez, M. (2016). *Entre números III*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.

Kaczor, P. (2016). *Entre números II*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Santillana.

Kaczor, P.; Schaposchnik, R.; Franco, E.; Cicala, R. y Díaz, B. (1999). *Matemática 1*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.

Kahneman D.; Slovic P. & Tversky A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.

Konold C. & Falk R. (1992). Encoding difficulty: a psychological basis for Misperceptions of randomness. *The sixteenth international conference for psychology of mathematics education*. New Hampshire: Durham.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59 – 98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Netherlands: Kluwer.

Konold, C.; Lohmeier, J.; Pollatsek, A.; Well, A.D.; Falk, R. & Lipson, A. (1991), Novice Views on Randomness. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 167-173), Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Kurzrok, L.; Altman, S.; Arnejo, M. y Comparatore, C. (2017). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Tinta Fresca.

Kyburg, H. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Boston: Reidel.

Lavalle, A.; Micheli, E. y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Premisa*, 5 (17), 23-31.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Lincoln, Y. & Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park: SAGE Publication.

Lloberas, M y Rubbo; A. (2007). *Matemática 8*. Buenos Aires, Argentina: A & L Editores.

Moreno, A.; Cardeñoso Domingo, J. M. y González García, F. (2014). La aleatoriedad en profesores de biología y de matemática en formación: análisis y contraste de significados. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 11(2), 198-215.

Petrov, V. y Mordecky, E. (2008). *Teoría de la probabilidad*. Montevideo. Montevideo, Uruguay: Dirac.

Pochulu, M. (2012). Enfoque ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. En Pochulu M. y Rodríguez M (Comps.), *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 63 – 89). Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS y EDUVIM

Poincare, H. (1936). El Azar. *Journal of the American Statistical Association*, 31, 10-30.

Rodríguez, M. y Agnelli H. (2009). Concepciones de los alumnos acerca de la probabilidad. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp 489-498). México: CLAME.

Sánchez Sánchez, E. y Valdez Monroy, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 39-46). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Serrano L.; Batanero C.; Ortíz J. y Cañizares J. (2001). Concepciones de los estudiantes de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma,* 36, 23-31.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. Science. 185, 1124-1131.

Tversky, A.; & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review, 90*(4), 293–315

Zabell S. (1992). Randomness and statistical applications. In F. Gordon & S. Gordon (Eds,), Statistics for the XXI Century. The Mathematical Association of America

Anexo I

Informe de par externo: Ana María Ruíz

Ítem	Criterios a evaluar										Observaciones (Indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (sesgo)		Lenguaje adecuado para el nivel		Mide lo que pretende		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
1	X		X			X	X		X		
2	X		X			X	X		X		
3	X		X			X	X		X		
4	X		X			X	X		X		
5	X		X			X	X		X		

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder a las preguntas que se formulan	X		
Los ítems permiten el logro de los objetivos de la investigación	X		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	X		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, le agradecemos que nos sugiera los ítems a añadir			

Validez (marque con una cruz)			
Aplicable	X	No aplicable	
Aplicable atendiendo a las observaciones			
Observaciones:			

Anexo II

Informe de par externo: Federico de Olivera Lamas

Ítem	Criterios a evaluar										Observaciones (Indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (sesgo)		Lenguaje adecuado para el nivel		Mide lo que pretende		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
1	x		?			x	x		?		Parece admitir que la probabilidad de verduras es 0.7 por una uestra de 100… Más allá de eso lo demás me parece correcto.
2		x		x		?	x			?	No me queda claro del todo el problema a partir de la redacción, imagino que a un estudiante le sucederá algo peor.
3	x		x			x	x		x		
4	x		x			x	x		x		
5	x		x			x	x		x		

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder a las preguntas que se formulan	x		En general sí, salvo 2
Los ítems permiten el logro de los objetivos de la investigación	x		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	?		¿En función de qué? ¿menor a mayor complejidad o qué criterio?
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, le agradecemos que nos sugiera los ítems a añadir	x		Creo adecuado dado que lo más relevante son las justificaciones.

Validez (marque con una cruz)			
Aplicable	x	No aplicable	
Aplicable atendiendo a las observaciones			

Observaciones:

Las observaciones fueron realizadas arriba y en el mail.

Anexo III

Informe de par externo: Federico Dalmao Artigas

Ítem	Criterios a evaluar										Observaciones (Indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (sesgo)		Lenguaje adecuado para el nivel		Mide lo que pretende		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
1	x		x			x	X		x		
2	x		x			x	X		x		
3	x		x			x	X		x		
4	x		x			x	X		x		
5	x		x			x	X		x		

Aspectos Generales	Sí	No	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder a las preguntas que se formulan	x		
Los ítems permiten el logro de los objetivos de la investigación	x		
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial	x		
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, le agradecemos que nos sugiera los ítems a añadir	x		

Validez (marque con una cruz)			
Aplicable	x	No aplicable	
Aplicable atendiendo a las observaciones			
Observaciones:			

Anexo IV

Resoluciones de los alumnos AP

Seguidamente se presentan las copias de las resoluciones realizadas por los 24 estudiantes del primer año del Profesorado de matemática del Profesorado Concordia D-54, Argentina.

Anexo V

Resoluciones de los alumnos AI

Seguidamente se presentan las copias de las resoluciones realizadas por los 19 estudiantes ingresantes a las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina