Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.
Orientación: Matemática

Una propuesta didáctica de introducción al Álgebra a través de la noción de función y sus distintas representaciones.

Prof. Paola Yanina Muller

Director de Tesis: Dr. Ricardo Chrobak

Co-Director de Tesis: Dra. Graciela Carmen Lombardo

Tesis presentada para optar al título de

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática.

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Misiones, Argentina.

Mayo de 2020

Resumen

La presente investigación da cuenta del proceso de diseño e implementación de una propuesta didáctica de introducción al Álgebra a través de la noción de función y sus distintas representaciones basada en el Modelo de Enseñanza Aproximativo propuesto por Roland Charnay.

Dicha propuesta, de carácter descriptiva e interpretativa, fue desarrollada en segundo año de dos escuelas secundarias de la provincia de Misiones, a fin de analizar los aspectos facilitadores u obstaculizadores del aprendizaje a partir de las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de los problemas, las dificultades presentadas y los errores cometidos.

Además, se llevaron a cabo entrevistas a docentes del área, encuestas y entrevistas a estudiantes y una revisión bibliográfica del tema, para enriquecer el análisis.

Se ha evidenciado que, los alumnos no reconocen los tres usos asociados a las variables, tienen dificultades y errores al trabajar con el lenguaje simbólico y en su mayoría, no reconocen las distintas representaciones de una función.

Por tal motivo, se considera fundamental comenzar a trabajar las nociones algebraicas desde los primeros años de la escuela secundaria porque el Álgebra es el idioma de la Matemática y como tal, debiera ocupar un lugar preponderante dentro de las matemáticas escolares.

Palabras claves

Enseñanza – Aprendizaje – Álgebra – Funciones - Registros de representación - Variables.

Abstract

The present investigation is about the design process and implementation of one didactic proposal of introduction to Algebra through the notion of the function and its different representations based on the model of approximative teaching proposal by Roland Charnay.

This descriptive and interpretative proposal was developed in second year of two secondary schools of Misiones province. The main objectives to analyze the facilitating and obstacles aspects of learning process from the strategies used by students in solving problems as well as the difficulties presented and the mistakes made.

Moreover, interviews to Math teachers where conducted, surveys and interview to students were conducted too. Besides a, bibliographic revision of the topic to enrich the analyzes.

It was proved that students don´t recognize the three uses associated with variables, they have difficulties and mistakes when they work with the symbolic language and the vast majority don´t recognize the different representations of a function.

For this reason, it is essential to start working with Algebra since the first years of secondary schools because Algebra is the language of Maths and as such, it should ocupate a preponderant place within the schools Maths.

Key words

Teaching – Learning – Algebra – Functions - Record of representation – Variables.

Dedicatoria

Una vez que finalicé el profesorado en Matemática ella fue la primera persona que me dijo: seguí estudiando, y después de varios años pude terminar mi tesis de maestría, pero ella lamentablemente no pudo verlo porque el destino así lo quiso.

Quiero dedicar el presente trabajo a esa persona especial que siempre me incentivó y me alentó para que continúe estudiando y perfeccionándome, quien me ayudó siempre de manera incondicional, desde mi niñez hasta la formación inicial e incluso en mis comienzos como docente.

Ella fue mi tía Mercedes.

Por siempre en mis recuerdos y en mi corazón, querida tía Mechy.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios por permitirme continuar mis estudios superiores y culminar esta etapa de formación.

A mis familiares y amigos, especialmente a mi papá, mi mamá y mi hermana por su apoyo incondicional.

A mi esposo Cristian por ayudarme y alentarme a seguir adelante.

A mi director, el Dr. Ricardo Chrobak y co-directora de tesis, la Dra. Graciela Lombardo por su tiempo y dedicación en todo el proceso de elaboración de tesis.

A la profesora Caronía Silvia, por ser una de las primeras personas que me aconsejó y orientó en la elaboración del proyecto de tesis.

Al CEP N° 43, la EPET N° 50 y a sus directivos, que generosamente me permitieron llevar adelante mi investigación.

A mis colegas del área de Matemática que han brindado su tiempo y han compartido sus experiencias para enriquecer este trabajo.

A mis alumnos que han sido los protagonistas de esta investigación.

A todos ¡Muchas gracias!

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

De acuerdo al Diseño Curricular Jurisdiccional de la Provincia de Misiones, uno de los ejes a ser trabajado en el Ciclo Básico Secundario es: Introducción al Álgebra y las funciones.

El desarrollo de este eje supone que a lo largo de primero y segundo año se aborden temas como ser: función lineal, función de proporcionalidad directa e inversa, ecuaciones e inecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Uno de los temas fundamentales a ser desarrollado en la escuela secundaria es el concepto de función, ya que se espera que, los alumnos construyan conocimientos de funciones simples, como ser lineales o de proporcionalidad directa y avancen hacia otras más complejas tal como, las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

La enseñanza y el aprendizaje de las funciones en el Ciclo Básico muchas veces se ven reducidos, porque se priorizan actividades en torno al eje de Números y operaciones o se limita el trabajo algebraico a la resolución de ecuaciones en el conjunto de números racionales. Por tal motivo, abordar la noción de función y favorecer el mejoramiento de su aprendizaje en el Ciclo Básico Común Secundario Obligatorio resulta de gran importancia.

De acuerdo a Serres Voisin (2011) existen diversas acepciones del Álgebra, entre las que se pueden mencionar: el Álgebra como una Aritmética generalizada, como un lenguaje o como una herramienta que se utiliza para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos.

Estudios realizados por Sadovsky y Sessa (2005) en nuestro país, han revelado que el Álgebra que predomina en la escuela secundaria se identifica con una Aritmética generalizada.

Frente a esta situación y teniendo en cuenta que el Álgebra no se reduce a la manipulación de letras, en el presente estudio se considera al Álgebra escolar como una herramienta para realizar actividades de modelización matemática.

De acuerdo a Sessa (2005) existen diferentes entradas al Álgebra: a través de ecuaciones, por medio de la generalización o a través de la construcción del concepto de función.

La presente investigación se basó en la construcción de los conceptos de dependencia y variabilidad, con el objetivo de identificar el razonamiento algebraico utilizado por alumnos de segundo año de dos escuelas secundarias al resolver problemas relacionados al estudio de funciones a través de las distintas formas de representación.

Para ello se diseñó e implementó una secuencia didáctica sobre funciones en segundo año de las siguientes escuelas: el Centro Educativo Polimodal N° 43 y la Escuela Provincial de Educación Técnica N° 50, a fin de analizar los resultados obtenidos y reconocer los aspectos facilitadores u obstaculizadores del aprendizaje a partir de la implementación de dicha secuencia.

Como ya se ha mencionado anteriormente las funciones ocupan un lugar indiscutido en las clases de Matemática. Las mismas corresponden a herramientas modelizadoras que brindan la posibilidad de estudiar la dependencia entre dos magnitudes asociadas a un fenómeno y la consideración de las letras para expresar esas cantidades variables.

La tesis se ha dividido en siete capítulos:

En el primer capítulo se plantean el problema, la justificación y los objetivos de investigación.

En el segundo capítulo se presentan el estado del arte y el marco teórico.

En el marco teórico, se detallan los aspectos centrales del Modelo de Enseñanza Aproximativo o Apropiativo propuesto por Roland Charnay, en el cual se basó la elaboración e implementación de la secuencia didáctica de la presente investigación. Se detallan aspectos centrales en la iniciación del aprendizaje del álgebra, se describe el Modelo 3UV planteado por Ursini y Trigueros (1998) que proporciona una herramienta para trabajar los diferentes usos de la variable y la teoría de los registros de representaciones semióticas de Raymond Duval (1995), que permitió el análisis de las producciones de los alumnos. Por otra parte, se recuperan los antecedentes más recientes relacionados al tema de investigación.

El tercer capítulo contiene la metodología de investigación que es de carácter descriptiva e interpretativa y los instrumentos de recolección de datos, así como las técnicas de análisis y procesamiento de la información. El proceso de investigación se desarrolló en dos partes; en la primera, se diseñó la secuencia didáctica, se realizó el análisis a priori y se llevó a cabo la implementación de la misma y en la segunda, se recuperaron las producciones de los alumnos en clase y los exámenes realizados para analizar los resultados obtenidos. A fin de ampliar el análisis también se consideraron: las voces de los estudiantes a través de encuestas y entrevistas, las opiniones de docentes del área y se realizó una revisión bibliográfica del tema: funciones y sus distintas representaciones.

En el cuarto capítulo, se detalla el análisis a priori de la secuencia didáctica, los problemas seleccionados, los objetivos propuestos y los posibles procedimientos de los alumnos.

En el quinto capítulo se presentan, la descripción y el análisis de la información obtenidos en el desarrollo de las clases y en la resolución de los exámenes.

En el capítulo seis, se detalla el análisis de las encuestas y entrevistas realizadas a alumnos y docentes. También se incluye el análisis de tres libros de texto de nivel secundario.

En el séptimo capítulo se explicitan las conclusiones, algunas recomendaciones para docentes de Matemáticas y nuevos interrogantes de investigación.

Finalmente, la memoria se completa con varios apéndices. El apéndice A contiene la secuencia didáctica. En el apéndice B se recuperan los registros de clase correspondientes a la implementación de la secuencia didáctica en el Centro Educativo Polimodal N° 43, mientras que en el apéndice C, los registros de clase correspondientes a la implementación en la Escuela Provincial de Educación Técnica N° 50. En el apéndice D, se detallan las actividades de refuerzo y el análisis a priori. El apéndice E contiene información acerca de la resolución de las actividades de refuerzo por los alumnos de las dos instituciones seleccionadas para la presente investigación. En el apéndice F se incluyen los exámenes, así como los objetivos de cada una de las actividades y sus criterios de evaluación. El apéndice G contiene las entrevistas realizadas a los profesores de Matemática. En el apéndice H se recuperan las entrevistas realizadas a los alumnos del CEP N° 43, mientras que en el apéndice I, las entrevistas realizadas a los alumnos de la EPET N° 50. Por último, el apéndice J contiene las preguntas de la encuesta realizada a los alumnos de ambas escuelas.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, JUSTIFICACIÓN, OBJETIVOS

1.1 Planteamiento del problema

Enseñar Álgebra en los primeros años de la escolaridad secundaria resulta complejo, porque la mayoría de las veces el trabajo docente se centra en contenidos relacionados a la Aritmética y la Geometría, dado que los alumnos que ingresan al primer año de la escuela secundaria carecen de contenidos básicos relacionados a estos ejes. Por ejemplo, muchos de ellos ingresan sin saber multiplicar y dividir, lo que obliga a los docentes, a dedicar mucho tiempo del año a desarrollar actividades relacionadas al conjunto de los números racionales y sus operaciones, haciendo hincapié en esto y postergando las actividades algebraicas.

Desde el nivel primario hasta el nivel universitario, la enseñanza del Álgebra es un motivo de preocupación para numerosos investigadores que han dedicado sus esfuerzos a estudiar la iniciación en el trabajo algebraico como así también las dificultades y obstáculos que presentan los alumnos.

El Álgebra escolar, tal como lo plantea Godino (2003) "…incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos" (p. 774). Este estudio en primer y segundo año, se ve muchas veces reducido, a la "manipulación de letras que representan números no especificados", como es el caso de la resolución de ecuaciones e inecuaciones y se descuida un aspecto central que es el desarrollo del pensamiento algebraico que debiera iniciarse desde primer año e ir fortaleciéndose en los años siguientes.

Todo esto lleva a formular las siguientes preguntas ¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia? ¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen? ¿Qué dificultades presentan en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuáles son las razones de estas dificultades? ¿Están relacionadas al Álgebra en sí misma o a la forma de enseñanza? ¿Las actividades desarrolladas en el Ciclo Básico Secundario permiten a los alumnos desarrollar el concepto de función? ¿De qué manera puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje de las funciones, en los primeros años de la escuela secundaria? ¿Se trabajan los distintos registros de representación? ¿Por qué es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos?

1.2 Justificación

Algunos autores afirman que, el Álgebra, como una rama de la Matemática, permite plantear y resolver problemas, presentar fórmulas, describir procedimientos, generalizar relaciones y estudiar patrones y estructuras. Arcavi (1994) afirma: "El álgebra es, entre otras cosas, una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructuras, para establecer conexiones y para formalizar argumentos matemáticos" (p. 24)

Distintos autores se refieren al Álgebra escolar y a la importancia de su estudio. Entre ellos Kieran y Filloy (1989) afirman:

> Los adolescentes, al comenzar el estudio del Álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en Aritmética. Sin embargo, el Álgebra no es simplemente una generalización de la Aritmética. Aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la Aritmética. (p.229)

Por su parte Godino y Font (2003) plantean:

> Una visión tradicional y limitada del Álgebra escolar (que se ha denominado "Aritmética generalizada") es considerarla simplemente como una manipulación de letras que representan números no especificados… Es necesario, sin embargo, que los profesores tengan una visión del Álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. La generalización se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, por lo que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas. (p.777)

Palarea Medina (1998) concluye:

> La metáfora del Álgebra como lenguaje… es entendida como un sistema de representación que se ocupa del significado de las escrituras algebraicas, además de considerar el carácter instrumental de los signos del Álgebra, lo que sugiere la necesidad de considerarla como una actividad más de los alumnos, y los signos, como instrumentos específicos de esa actividad. (p.XI)

Enseñar Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria supone, tal como plantea Palarea Medina (1998), proporcionar a los alumnos experiencias que faciliten la transición del pensamiento aritmético al algebraico.

Varios investigadores como ser: Chevallard (1984), Kieran y Filloy (1989), Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora (1999), Kieran (2006) han caracterizado la ruptura que supone este pasaje.

De acuerdo a Philipp (1992), el pasaje del pensamiento aritmético al algebraico, tiene lugar cuando se alcanza la comprensión del concepto de variable y Juárez López (2011) plantea que "El concepto de variable es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del Álgebra". (p. 84)

Lo funcional y lo algebraico están íntimamente relacionados, por tal motivo, en el presente estudio se plantea la posibilidad de construir la noción de función y sus distintas representaciones al mismo tiempo que se enriquece el sentido de las expresiones algebraicas. "En este caso las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales y su significado está ligado a los procesos de traducción entre ellas, las tablas de datos numéricos y las representaciones gráficas cartesianas". (Puig & Monzó, 2008, p.4).

El aprendizaje del Álgebra y la adquisición del lenguaje algebraico presentan dificultades para la mayoría de los alumnos, las cuales podrían estar relacionadas a la complejidad del Álgebra, las formas de enseñanza y las actividades propuestas. Como plantea Palarea Medina (1998):

> Las dificultades asociadas al aprendizaje del lenguaje algebraico de los alumnos de la E.S.O. no ofrece dudas. Estas dificultades se traducen en errores que cometen los alumnos y éstos se producen por causas muy diversas que se refuerzan en redes complejas. (p.2)

Es por ello que, resulta importante analizar y reflexionar sobre los obstáculos y errores que tienen los alumnos de los primeros años de la escuela secundaria para comprender y trabajar con contenidos relacionados al Álgebra y proponer acciones en pos de la mejora de la enseñanza.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Identificar el razonamiento algebraico utilizado por alumnos de segundo año de dos escuelas secundarias al resolver problemas relacionados al estudio de funciones a través de las distintas formas de representación.

1.3.2 Objetivos específicos

- Describir procedimientos, estrategias y/o justificaciones utilizadas por alumnos de segundo año secundario del Centro Educativo Polimodal N°43 (en adelante CEP N° 43) y la Escuela Provincial de Educación Técnica N°50 (en adelante EPET N° 50).
- Detectar obstáculos y errores frecuentes.
- Reconocer aspectos facilitadores u obstaculizadores del aprendizaje a partir de la implementación de la secuencia didáctica.

1.3.3 Hipótesis

La implementación de una secuencia didáctica de introducción al Álgebra a través de la noción de función y sus distintas representaciones puede favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico de los alumnos del Ciclo Básico Secundario.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO

2.1 Estado del arte

Diversos autores han investigado acerca del aprendizaje del Álgebra y las dificultades que presenta, tanto en el nivel medio como en el nivel superior. Entre ellos se pueden mencionar:

Esquinas Sancho (2009) llevó adelante su trabajo de tesis doctoral referida a las dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico, a partir de la elaboración de un cuestionario de trece preguntas que permitió evaluar la capacidad de comprensión, expresión, generalización y formalización de alumnos de 6º EP -de 11 a 12 años-, que aún no habían recibido ninguna enseñanza algebraica formal en la escuela, y contrastarlo con los resultados obtenidos por alumnos de 1º ESO -de 12 a 13 años- y 2º ESO -de 13 a 14 años-, ya iniciados en el estudio del Álgebra.

Serres Voisin (2011) a partir de estudiar qué se entiende por álgebra escolar y cómo se relaciona el lenguaje y el pensamiento algebraico, analizó la iniciación del aprendizaje del Álgebra, relacionando los procesos de generalización y simbolización con el desarrollo de las concepciones de variable, con la resolución de problemas y con el uso de las calculadoras.

Ricaldi Echevarría (2011) llevó a cabo una investigación donde describe y analiza si el tratamiento del Álgebra en el primer año de secundaria de un colegio privado en la ciudad de Lima corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado. Además, propone un modelo didáctico alternativo en el que se consideró la introducción de los temas algebraicos a través de tipos de problemas. La investigación describe y analiza las diferentes organizaciones matemáticas y didácticas presentes en libros de textos y programas curriculares, además de incluir una entrevista estructurada a los docentes sobre su práctica pedagógica, utilizando como marco teórico fundamental la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), además de algunos aportes del Enfoque Ontosemiótico.

Las docentes Villagra, Gallardo, Acosta y Paz del ISFD N° 6018 de la provincia de Salta, llevaron a cabo una investigación publicada por el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2018) en la cual analizaron los errores más frecuentes que cometen los alumnos en el Ciclo Básico de tres escuelas medias de la ciudad de San Ramón de la Nueva Orán en el uso del Álgebra para discutir la naturaleza de dichos errores y los obstáculos que los originan, como así también la vinculación con la consideración de los distintos usos de la variable. Durante su trabajo relevaron datos a través de entrevistas y cuestionarios a docentes de Matemática, analizaron carpetas, tareas y realizaron entrevistas a alumnos de dicho ciclo.

Alurralde e Ibarra (2008) realizaron un análisis de la producción de los estudiantes en la primera evaluación de Álgebra Lineal y Geometría Analítica de primer año de la carrera ingeniería en la Universidad Nacional de Salta, con el objetivo de identificar las herramientas algebraicas que utilizan los alumnos en la resolución de los problemas propuestos respecto al uso de las letras en sus diversas formas (como incógnita, como número general, como parámetro y como variable en relación funcional).

Caronía, Sklepek, Martyniuk, Operuk y Abildgaard (2018) analizaron los objetos y procesos algebraicos involucrados, así como también las dificultades presentadas en la resolución de problemas de estudiantes universitarios del Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones, con aportes de investigaciones sobre las dificultades encontradas en el Álgebra y de la Teoría del Enfoque Ontosemiótico.

Otros por su parte, han centrado sus estudios en el tema funciones y sus distintas representaciones. Entre ellos podemos mencionar a:

Carnelli (2004), propuso un modelo de enseñanza de la función cuadrática con el fin de describir resultados en el aprendizaje en función de las distintas interacciones que se dan en el aula, considerando en todo momento una gestión de aula basada en el trabajo grupal. La metodología de investigación utilizada fue la Ingeniería didáctica, la cual comprende: los análisis previos que desembocaron en la propuesta didáctica, la propia propuesta, el análisis de su implementación, la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes y la validación del modelo de enseñanza.

Oviedo (2005) llevó adelante un estudio comparativo y evaluativo enmarcado en una investigación más amplia acerca de la enseñanza y aprendizaje de los sistemas dinámicos discretos entre dos grupos de alumnos pertenecientes a niveles distintos de la educación argentina, medio y universitario respectivamente, acerca del concepto de función a partir de una evaluación diagnóstica sobre ciertos tópicos del tema.

Posada Balvin y Villa (2006) realizaron una investigación basada en el diseño e implementación de una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, con estudiantes de grado 10, tomando como referentes conceptuales la noción de variación, el proceso de modelación matemática y los registros semióticos de representación.

Detzel (2006) llevó adelante un trabajo de investigación con alumnos de 3º ciclo de E.G.B. y/o 2º año del nivel medio de Río Negro y Neuquén (alumnos de 14 - 15 años de edad), centrado en la enseñanza de la noción de función, con el objetivo de dilucidar qué aspectos de las funciones: variabilidad, dependencia, correspondencia y univalencia, se ponen en evidencia y cuáles se desdibujan en su enseñanza.

Ruiz Munzón (2010), por su parte, llevó adelante una investigación para estudiar el problema didáctico del paso de lo numérico a lo algebraico y el paso de la modelización algebraica al cálculo diferencial, elaborando un modelo epistemológico de referencia (MER) del álgebra elemental y de su posterior desarrollo hacia la modelización funcional.

Jaimes Gómez (2012) en su investigación titulada: “La noción de función, un acercamiento a su comprensión”, propuso cinco talleres de acercamiento a las funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, exponenciales y de recurrencia. Los mismos contienen una serie de actividades destinadas a la comprensión del concepto de función a través de la modelación de situaciones reales, con base en las características y cualidades de los fenómenos.

Ospina García (2012) llevó adelante su trabajo de tesis analizando las respuestas de un grupo de estudiantes a dos cuestionarios los cuales le permitieron conocer, en primer lugar, los saberes previos de los estudiantes en cuanto a las representaciones de la función lineal y posteriormente, las conversiones a partir de los tres criterios de congruencia entre representaciones semióticas (correspondencia semántica, univocidad semántica y conservación del orden) que realizaron los estudiantes de las diferentes representaciones del concepto en la solución de las situaciones propuestas.

Betancur Aristizábal (2013) implementó una experiencia de aula con el fin de aproximar a los estudiantes del grado 8° al concepto de función, abordándolo desde una mirada dinámica y de la mano de los conceptos de dependencia, variables y variación. Para ello utilizó dos experiencias (N°1: Soluciones y N°2: Ley de Hooke) que permitieron que los estudiantes desarrollen actividades de medición y variación posibilitando la utilización de distintos tipos de representación: tablas de datos, plano cartesiano y lenguaje natural.

Pollio (2016) recuperó los conocimientos previos de un grupo de alumnos de Primer año de Bachillerato acerca del concepto de función. A diferencia de otros autores, no propone un cuestionario para desarrollar el concepto de función y sus distintas representaciones, sino que, desarrolla con un grupo determinado de alumnos, distintas actividades a fin de recuperar las definiciones personales de los estudiantes y evidenciar, en sus producciones, los registros de representación priorizados por ellos.

Soto, Herrera, Pereyra (2019) llevaron a cabo una investigación con el fin de analizar el nivel de coordinación entre registros de representación semiótica, de la función lineal en alumnos del tercer año de una escuela secundaria de la ciudad de Catamarca, Argentina. Para ello diseñaron y aplicaron un instrumento de recolección de datos, consistente en un cuestionario que implicó la realización de actividades cognitivas de tratamiento y conversión entre diferentes registros semióticos.

Hay quienes han dedicado sus investigaciones a estudiar específicamente las dificultades y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje de las funciones, como lo son: López Cahun y Sosa Moguel (2008). En su investigación titulada “Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de Funciones en estudiantes de bachillerato”, plantearon el análisis y la interpretación de resultados de una serie de reactivos a modo de cuestionario aplicados a veinte estudiantes de cuarto semestre de bachillerato en orden de clasificar y explicar las causas de las dificultades detectadas e identificar errores conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones.

También es importante mencionar a autores que han diseñado experiencias de aprendizaje para trabajar los conceptos asociados a las funciones a través de recursos informáticos:

Guevara Sánchez (2011) hizo hincapié en la necesidad de un aprendizaje significativo del concepto de función y para ello expuso una propuesta didáctica de modelado y simulación de funciones (lineal y cuadrática) a través de distintas situaciones problemáticas y la incorporación de softwares matemáticos (Graph 4.3 y GeoGebra).

Ciriquián (2014) expuso una propuesta práctica usando como recurso didáctico el software GeoGebra para la enseñanza de funciones gráficas en 1° de Bachillerato de Ciencias y Tecnología a partir de una investigación bibliográfica y un posterior trabajo de campo (entrevistas a docentes).

Iturbe y Garelik (2014) describieron una propuesta para la enseñanza de la “función racional” en el nivel medio, utilizando el software GeoGebra, y desarrollaron algunas reflexiones didáctico-matemáticas que surgen al planificar e implementar la misma.

Götte y Dal Maso (2015) presentaron una propuesta para trabajar el concepto de función y sus diferentes representaciones utilizando GeoGebra, con el fin de acercar a los futuros profesores a un uso reflexivo de las TIC donde la necesidad de validar las conjeturas halladas con un software sea un eslabón necesario para el desarrollo del pensamiento matemático.

Calderón Zambrano, Franco Pesantez y Alvarado Espinoza (2018) elaboraron secuencias didácticas con el apoyo de GeoGebra para el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas que fueron implementadas en tercero de bachillerato.

Luego de revisar la literatura existente, no se han encontrado trabajos que versen sobre propuestas didácticas relacionadas a la construcción del concepto de función y sus distintas representaciones como posible introducción al Álgebra en la escuela secundaria.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Principios constructivistas: Modelo de Enseñanza Aproximativo o Apropiativo

Pensar en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, en los contextos actuales, supone generar espacios de construcción de saberes, abandonando ciertas prácticas repetitivas y memorísticas de las clases habituales, para formar ciudadanos críticos y responsables.

Desde el constructivismo, se asume que es posible construir conocimiento matemático en el aula a través de la resolución de problemas, entendiendo a estos como aquellas situaciones que demandan del alumno un trabajo de indagación, reflexión, argumentación, validación, entre otras cosas.

El Modelo de Enseñanza Aproximativo o Apropiativo propuesto por Roland Charnay, es el que promueve un aprendizaje constructivista de la Matemática donde la resolución de problemas es el recurso por excelencia para dicho aprendizaje constituyéndose en "fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber" (Charnay, 1994, p. 58).

Waldegg (1998) plantea que: "El estudiante…al resolver una situación problemática, logra un aprendizaje significativo porque reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta nueva". (p. 24)

En este modelo, centrado en la construcción del saber por parte del alumno, el docente selecciona una colección de problemas que sirven de obstáculo cognitivo para el alumno, y se los presenta de manera tal que, partiendo de sus concepciones o conocimientos previos los pueda resolver y comience desde allí a construir el significado de un concepto nuevo.

La Dirección General de Cultura y Educación de La Provincia de Buenos Aires, en Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la Matemática en la EGB (2004), plantea:

> Este enfoque para la enseñanza de la Matemática permite darle la oportunidad al alumno, de acuerdo con sus posibilidades, de comenzar a apropiarse del modo de producción del conocimiento matemático. A partir de resolver problemas puede utilizar saberes ya adquiridos, ampliar otros, inventar procedimientos, justificar la elección de determinadas estrategias, reflexionar sobre los nuevos instrumentos elaborados,

> buscar formas para representarlos, fundamentar el producto de la actividad realizada. (p. 21)

Este trabajo supone que el alumno pruebe, ensaye y explore diferentes caminos de resolución; los comparta, discuta y analice con sus compañeros. El docente, por su parte, acompaña este proceso formulando preguntas, alentando la resolución, organizando la comunicación de la clase, proponiendo notaciones o terminología, cuando fuere necesario.

En los diseños curriculares de nuestro país se propone una Matemática constructiva, con énfasis en las siguientes competencias: argumentar, fundamentar y representar, comunicar, resolver problemas, modelizar, empleando instrumentos y conocimientos matemáticos.

El Modelo Aproximativo de Charnay se basa en las tipologías de las situaciones didácticas propuestas por Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas.

Panizza (2003) define a la misma como, “una teoría de la enseñanza que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.” (p.60).

Esta teoría otorga a la “situación” un rol fundamental en la construcción del conocimiento. Así, podemos definir a la situación didáctica, como el conjunto de interacciones entre el alumno, un cierto medio y el docente, construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos, un saber determinado.

Las situaciones didácticas se clasifican en situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. Gálvez (1994) describe las situaciones didácticas definidas por Brousseau de la siguiente manera:

> 1. Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
>
> 2. Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.
>
> 3. Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.

> 4. Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. (p. 43).

2.2.2 Secuencias didácticas y análisis a priori

Tomando como referencia el Modelo de enseñanza Aproximativo o Apropiativo y a fin de organizar las actividades llevadas al aula, se pueden elaborar secuencias didácticas.

El encuadre metodológico de los Diseños Curriculares jurisdiccionales de Matemática de nuestro país acuerda, de manera más o menos explícita, con este modelo. El Diseño Curricular Jurisdiccional de la provincia de Misiones plantea que: "Hacer Matemáticas es resolver problemas. Esto es: utilizar saberes previos y organizarlos, utilizándolos para plantear y resolver situaciones problemáticas en contextos intra y extra matemáticos". (p. 34)

Esta colección de problemas, es lo que llamamos secuencia didáctica, la cual puede ser definida de acuerdo a Tobon Tobon, Pimienta Prieto y García Fraile (2010) como "…conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos." (p.20).

Para llevar adelante la implementación de una secuencia, resulta fundamental la actividad grupal ya que es en el trabajo con otros, que los alumnos pueden expresar sus ideas, confrontar, argumentar, validar y llegar a conclusiones.

> En las secuencias didácticas se retoma plenamente el planteamiento de Vygotsky sobre el aprendizaje cooperativo y se busca que los estudiantes realicen actividades colaborativas en torno a la resolución de un determinado problema de la realidad, buscando que se complementen en sus habilidades, actitudes y conocimientos. (Tobon Tobon, et al., 2010, p.40)

En relación a esto, Charnay (1994) plantea que "Es principalmente a través de la resolución de una serie de problemas elegidos por el docente como el alumno construye su saber, en interacción con los otros alumnos." (p. 58)

Becerril, Duarte, García, Grimaldi y Ponce (2011) plantean que, la resolución de una colección de situaciones similares promueve en los alumnos, avances sobre el dominio de un concepto. "Se busca que los alumnos puedan poner en juego sus conocimientos como punto de partida –aun cuando sean erróneos o no convencionales- y a la vez ponerlos a prueba, modificarlos, ampliarlos y sistematizarlos a lo largo de varias oportunidades." (Becerril, et al., 2011, p. IX)

Este tipo de trabajo, plantea la necesidad de gestionar la clase a partir de las previsiones y el análisis a priori realizado por el docente a fin de anticipar posibles interacciones entre él, los alumnos y el saber.

En palabras de Chamorro (2005):

> Lo que llamamos el análisis a priori de la situación pretende determinar si una situación puede ser vivida como a-didáctica por el alumno, buscando las condiciones necesarias para ello, y analizando si la situación puede desarrollarse y produce una relación matemática del alumno con su problema. (p. 46)

Entendiendo situación a-didáctica tal y como la ha caracterizado Brousseau (1986), citado por Panizza, (2003, p. 62):

> …toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

Este análisis a priori permite describir y predecir los comportamientos posibles de los alumnos durante la implementación de la secuencia didáctica. El mismo contiene información acerca de: la respuesta apropiada a cada problema o el procedimiento óptimo, los conocimientos previos que el alumno necesita para resolver el problema, los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en la situación, posibles respuestas, así como dificultades y errores que pueden presentarse.

Toda esta información disponible con anterioridad permite al docente gestionar la clase de mejor manera y obtener mayores resultados de aprendizaje.

> …antes de enfrentar al alumno con una situación didáctica, el maestro debe realizar lo que se denomina el análisis a priori de la situación, que consiste en dar respuesta a ciertas preguntas, que buscan garantizar que la situación ha sido bien construida y que por tanto puede funcionar. (Chamorro, 2005, p. 50)

Una parte importante del análisis de una situación didáctica, tal como plantea Gálvez (1994):

> …lo constituye la identificación de las variables didácticas y el estudio, tanto teórico como experimental, de sus efectos. Lo que interesa son los intervalos de valores de estas variables que resultan determinantes para la aparición del conocimiento que la situación didáctica pretende enseñar. Se trata de precisar las condiciones de las que depende que sea ese el conocimiento que interviene y no otro. (p.44)

Otro aspecto importante mencionado anteriormente, dentro del análisis a priori, es la anticipación de errores y dificultades que pueden tener los alumnos. En relación a ello Charnay (1994) plantea que:

> En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia de saber sino, más bien, a una manera de conocer (que a veces ha servido en otros contextos) contra la cual el alumno deberá construir el nuevo conocimiento. (p. 7)

Caronía, Rivero, Operuk, y Mayol (2014) presentan una clasificación de errores cometidos por los alumnos en relación a: los manejos operatorios adecuados, el orden en que efectúan las operaciones, la forma de ver el signo igual, la no-aceptación de la falta de cierre y el significado que le atribuyen a las letras.

De acuerdo a la clasificación realizada por Caronía et. al (2014), los errores pueden definirse de la siguiente manera:

> Los manejos operatorios adecuados: los alumnos confunden las aplicaciones de las propiedades y las reglas de las operaciones.
>
> El orden en que efectúan las operaciones: los estudiantes consideran que el orden del cálculo que deben realizar es de izquierda a derecha, de la manera como se presentan los términos.
>
> La forma de ver el signo igual: los alumnos visualizan al signo igual como un simple separador de las secuencias de operaciones que realizan para llegar al resultado.
>
> La no-aceptación de la falta de cierre: los alumnos (…) ostentan la necesidad de arribar a un número concreto, igualan a un número, en general a cero, “no se dan cuenta que el procedimiento es a menudo la respuesta”.
>
> El significado que le atribuyen a las letras: los alumnos revelan el uso de las letras como etiquetas. (p. 7)

El signo igual juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico. Matthews y Fuchs (2020) se refieren al uso del signo igual diciendo:

> El signo igual es un símbolo relacional que indica la equivalencia o intercambiabilidad entre los dos lados de una ecuación, y como tal, es

> inherentemente proposicional. De hecho, el signo igual es una de las primeras instancias en las que los niños son introducidos a la idea de que las matemáticas deben ser acerca de la creación de sentido: Para que 3 + 4 = 6 + 1 sea verdadero, ambos lados deben sumar la misma cantidad. (p. 15)

Todos los aspectos mencionados anteriormente forman parte de lo que se conoce como ingeniería didáctica, entendida como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

En este último sentido Douady (1995) plantea que:

> …el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase. (p. 61)

Calderón y León (2012) plantean al respecto que:

> Una característica fundamental de este tipo de metodología de investigación es la confrontación entre los análisis a priori sobre los diseños de actividades de aula y los análisis a posteriori sobre los corpus que se producen en la implementación de las tareas, como la forma básica de validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (p.6)

2.2.3 Iniciación del aprendizaje del Álgebra

El Álgebra ocupa un lugar indiscutido dentro de las matemáticas escolares y como ya se ha mencionado anteriormente, es importante desarrollar el razonamiento algebraico de los alumnos a lo largo de los distintos niveles.

Para Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) la enseñanza del Álgebra escolar se caracteriza por la introducción de las variables para representar números; y si bien los estudiantes desde la escuela primaria han trabajado con las letras en fórmulas geométricas, es en la escuela secundaria cuando las letras surgen con mayor frecuencia en contextos algebraicos donde se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados dependiendo de la situación en que aparecen.

Existen muchas visiones acerca de cuál es la mejor manera de introducir el Álgebra en la escuela secundaria, cada una considera como prioritarios distintos aspectos.

Una de las posiciones, y que resulta ser la mayormente adoptada en nuestro país, es el trabajo a partir de ecuaciones donde las letras designan números desconocidos (incógnitas).

Sessa (2005) plantea al respecto que:

> …la mayor parte de las veces el verdadero "asunto" que se considera en la enseñanza para que los alumnos "entren en el mundo del álgebra" es el aprendizaje de las técnicas para "despejar la incógnita" en una ecuación lineal con una variable. (p. 69)

Es común ver en las aulas, actividades donde se plantean al alumno problemas para resolver con ecuaciones que pueden ser resueltos a partir de recursos aritméticos, acercando de esta manera al objeto al campo aritmético.

Otra posible vía de entrada al Álgebra es a partir de la generalización, la cual considera a las letras como números generales.

Así lo expresa el Grupo Azarquiel (1993):

> Una de las vías por la que un principiante puede encontrarse con el álgebra, y quizá de las más naturales y constructivas, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y, sobre todo, expresarlo. Al intentar describir relaciones o propiedades relativas a un conjunto de números, se puede conseguir que las letras aparezcan en un contexto, después de un proceso en el que se trata de dar sentido progresivamente a las interpretaciones personales. Se pueden convertir así en una necesidad del alumno, en un instrumento propio para explicar y manejar sus ideas. (p. 28)

Desde otra visión, el Álgebra puede surgir como instrumento para modelizar y resolver situaciones específicas de complejidad creciente. Por tal motivo, una tercera posibilidad podría denominarse entrada funcional y en términos de Sessa (2005):

> "…estaría dada por la construcción de la idea de dependencia entre dos magnitudes o cantidades y por la consideración de las letras para expresar esas cantidades

> variables. Explorar didácticamente esta entrada implica considerar la construcción del poderoso concepto de función. Implica analizar desde el punto de vista de la enseñanza toda la complejidad inherente a la tarea de modelización de fenómenos de la realidad. Requiere explorar la variedad de registros de representación semiótica que conlleva esta noción y reflexionar sobre el papel que juegan los procesos de conversión entre registros, en la construcción del sentido del objeto; en particular requiere analizar el complejo semiótico que constituyen los gráficos cartesianos". (p.71)

Numerosos investigadores coinciden en la complejidad de la iniciación del aprendizaje del Álgebra, cualquiera sea la vía elegida para comenzar a trabajar el lugar que ocupan las letras dentro del contexto algebraico.

> Los estudiantes se quedan con el uso sin significado de las letras y eso explica la dificultad a la hora de resolver problemas, pues no encuentran en el lenguaje simbólico las herramientas para el establecimiento de una relación o el planteamiento de una ecuación necesaria para entender, interpretar y trabajar con una determinada situación (González Trujillo, 2012, p.27).

De acuerdo a varias investigaciones la mayoría de los estudiantes tienen serias dificultades para desarrollar una comprensión y una manipulación adecuada del uso de las letras en Álgebra.

Algunos autores, por su parte, sostienen que gran parte de esas dificultades se deben a deficiencias en el dominio de la aritmética.

> El álgebra no está separada de la aritmética y aquella se puede considerar con la perspectiva de aritmética generalizada. De aquí que para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético. Por eso, a veces las dificultades que los estudiantes encuentran en álgebra, no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética; por ejemplo, en el caso de las fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc. (Palarea & Socas Rabayna, 2010, 94)

Esquinas Sancho (2009) plantea además que: "El carácter novedoso que presenta el álgebra como lenguaje, además de los conceptos de variabilidad y generalización de la aritmética, hacen que su comprensión sea un obstáculo en la evolución del pensamiento lógico del niño." (p.147)

El lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de la Matemática, por eso es importante tal como plantea Godino y Font (2003) tener una visión del Álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. Así: “Esta visión ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de grado.” (p. 778)

2.2.4 Modelo 3UV

Uno de los conceptos trabajados en las investigaciones relacionadas al aprendizaje del Álgebra es el de variable. Autores como Morales Peral y Díaz Gómez (2003) afirman que:

> Un concepto de gran importancia en la Matemática, de difícil comprensión entre los estudiantes, es el concepto de variable. Las razones de su dificultad residen, entre otras, porque éste es sorprendentemente difícil de definir, además de que al interior de las Matemáticas se utiliza de distintas formas. (p.109)

Bocco, Canter y Sayago (2012), plantean que:

> El pensamiento algebraico de los estudiantes se comienza a desarrollar en la escuela primaria y va evolucionando a medida que avanzan en su instrucción académica. Se considera que los alumnos han alcanzado un pensamiento algebraico maduro cuando son capaces de integrar y diferenciar los distintos usos de la variable, es decir, cuando pueden operar con ella de manera flexible. (p.1018)

En relación a ello Ursini (1994) plantea el modelo 3UV:

Variable como incógnita, los símbolos utilizados representan una cantidad cuyo valor es desconocido, aunque se puede determinar con exactitud tomando en consideración las restricciones del problema, planteando ecuaciones y determinando el/los valores que la satisfacen.

Variable como número general, los símbolos utilizados representan cantidades indeterminadas que no se pueden ni se necesitan determinar, esto es, cuando se expresan matemáticamente patrones, regularidades o métodos generales.

Variable en una relación funcional, se presenta cuando las cantidades involucradas están relacionadas, de tal forma que la variación de una cantidad afecta la variación de la otra. La relación funcional establece una correspondencia entre los valores de las dos variables, la misma puede representarse de distintas maneras.

Respecto al trabajo con variables y expresiones algebraicas el National Council of Teachers of Mathematics, (2000), citado por Serres Voisin (2011, p. 132) plantea que:

> Una comprensión de los significados y de los usos de las variables se desarrolla gradualmente mientras los estudiantes crean y usan expresiones simbólicas y la relacionan con representaciones verbales, tabulares y gráficas. Las relaciones entre cantidades usualmente pueden expresarse simbólicamente en más de una forma, dando oportunidad a los estudiantes de examinar la equivalencia de varias expresiones algebraicas.

Para abordar los significados asociados a las variables se puede trabajar en clases a partir de problemas contextualizados que según Esquinas Sancho (2009) son una oportunidad inmejorable para el aprendizaje del lenguaje algebraico.

> …la enseñanza del álgebra a partir de situaciones concretas cercanas al alumno ayuda a presentar su aprendizaje de forma lo más natural posible pues este aprendizaje informal, en el terreno del pensamiento algebraico, obliga a la utilización de un lenguaje que exprese informaciones matemáticas y posibilite la manipulación de las mismas en orden a la resolución de problemas. (p. 151)

2.2.5 Registros de representación semiótica

Uno de los temas principales relacionados al Álgebra son las funciones y sus distintas formas de representación.

Torres, Valoyes y Malagón (2002), por su parte, plantean que:

> La modelación en la introducción al Álgebra debe permitir el desarrollo de la noción de variable en los estudiantes. El punto crucial en este proceso de modelación es la fase de formulación que resulta en la creación del modelo (e.g., lineal). (p. 230)

Las funciones lineales representan para los estudiantes de la escuela secundaria la primera aproximación al concepto de función, el cual puede “atraparse” completamente si se trabajan articuladamente sus distintas formas de representación.

En un reportaje realizado a Sadovsky y Sessa (2004), Sessa plantea que:

> Hay distintas formas de escritura que es necesario poner en juego en la enseñanza, porque a partir de la coordinación de esas distintas formas de representación se va enriqueciendo la conceptualización. Quería tomar como ejemplo el estudio de las funciones, que es un tema de secundario. Al pensar distintas formas de representación en las que este objeto aparece es que se puede atrapar la complejidad del mismo. (p.39)

Una teoría que permite caracterizar el trabajo matemático vinculado al Álgebra y las funciones es el enfoque cognitivo basado en los registros de representaciones semióticas de Duval (1995).

El mismo plantea que, la conceptualización se logra cuando el estudiante es capaz de recurrir a varios registros de representación semiótica, como ser: gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. (Duval, 2004).

Según Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica y la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos.

> Por lo tanto, la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos:
>
> 1) de representarlos en un registro dado.
>
> 2) de tratar tales representaciones al interior de un mismo registro.
>
> 3) de convertir tales representaciones de un dado registro a otro. (D'Amore, 2011, p.158)

De acuerdo con Duval (1998): el tratamiento de una representación es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada y la conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016) plantean al respecto que:

> La disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles para la comprensión, construcción y comunicación de las matemáticas. Asimismo, se asume que la producción y aprehensión de representaciones materiales no es espontánea y su dominio debe ser previsto en la enseñanza. (p.92)

El concepto matemático función se puede expresar en una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados. Janvier (1987) afirma que, las representaciones semióticas para las funciones se materializan a través de cuatro sistemas de representación, que son:

- Representación gráfica, que se relaciona con los aspectos geométricos y topológicos del concepto.
- Representación tabular, que pone de manifiesto los aspectos numéricos.
- Representación analítica, que requiere del uso del lenguaje del Álgebra.
- Representación verbal que es la más próxima a las destrezas comunicativas del individuo y permite articular a todas las anteriores.

Duval (1998) sostiene que los objetos matemáticos sólo son accesibles mediante sus respectivos registros de representación; siendo fundamental en el proceso de aprendizaje, que los alumnos logren identificar un objeto matemático a partir de diferentes representaciones semióticas y de este modo puedan coordinar dichos registros a través de actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

En este sentido es que resulta importante el uso de las distintas representaciones en la enseñanza del concepto de función para desarrollar en los estudiantes la habilidad de manipular los objetos matemáticos en sus diferentes registros.

Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Jaimes (2017) plantean que:

> El objeto matemático "función" puede ser representado de forma analítica (algebraica), tabular, gráfica o en lenguaje natural. La conversión es la que permite la articulación entre los registros de representación en la enseñanza; son el resultado de la comprensión conceptual y cualquier dificultad que se presente, indica que la construcción del concepto aún no ha finalizado. (p.36)

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 Tipo de estudio

La presente investigación es de carácter descriptiva e interpretativa.

Aguirre y Jaramillo (2015), plantean que:

> …la descripción en sí misma tiene un papel necesario en la investigación cualitativa; aunque este papel es necesario, no es suficiente, también se necesita la interpretación, pero esta interpretación debe respaldarse en una epistemología realista que tenga claro qué cuenta como observación. (p. 175)

Coincidiendo con lo anterior, se plantea la presente investigación con el fin de describir situaciones de enseñanza y aprendizaje para detallar aspectos centrales del trabajo en el aula de alumnos de segundo año secundaria en relación a un tema específico: Funciones y sus representaciones. De esta manera, se pretende conocer cómo los alumnos de dos escuelas diferentes se enfrentan a las situaciones problemáticas propuestas, el tipo de actividades que realizan para resolverlas y los errores que cometen.

Dentro de las actividades de descripción llevadas a cabo se encuentran también, entrevistas a docentes del área y alumnos desde primero a quinto año, encuestas a alumnos de primer y tercer año y revisión bibliográfica del tema.

El presente estudio busca describir el desempeño de un grupo de alumnos de segundo año del Ciclo Básico Secundario en torno a las funciones y sus distintas representaciones para poder comprender cómo se lleva a cabo el aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria.

Las actividades de investigación llevadas a cabo fueron las siguientes:

- Diseñar una secuencia didáctica referida a funciones y las distintas formas de representación.
- Implementar dicha secuencia en segundo año secundario del CEP N° 43 y de la EPET N° 50.
- Analizar los resultados de aprendizaje a partir de la propuesta didáctica.
- Entrevistar a docentes de Matemática.

- Entrevistar a alumnos de distintos niveles de ambas instituciones educativas.
- Encuestar a alumnos de primer y tercer año secundario de cada una de las escuelas involucradas en la investigación.
- Revisar material bibliográfico (libros de Matemática de nivel secundario) existente y disponible en las escuelas mencionadas.
- Analizar e interpretar la información recopilada.

3.2 Población y muestra

La implementación de la secuencia se llevó a cabo con alumnos de segundo año del CEP N° 43 y de la EPET N° 50.
Se seleccionaron los cursos y escuelas mencionadas ya que la investigadora, dicta clases en ellas, lo cual facilitó los espacios requeridos para el desarrollo de las actividades.
Ambas instituciones educativas se encuentran ubicadas en el departamento de Leandro N. Alem, en los municipios Olegario V. Andrade y Cerro Azul, respectivamente. Los alumnos que asisten a ambas escuelas provienen, en su mayoría, de ámbitos rurales.
Además, se realizaron encuestas a alumnos de primer y tercer año, como así también entrevistas a alumnos de otros cursos y a docentes del área de Matemática que trabajan en dichas instituciones y en otras localidades cercanas.

3.3 Instrumentos

Los instrumentos de recolección de datos fueron la observación no estructurada, la encuesta, la entrevista a profundidad y la revisión documental.

La secuencia didáctica puede encontrarse en el Apéndice A, las entrevistas a los docentes en el apéndice G y las entrevistas a los alumnos del CEP N° 43 y de la EPET N° 50, en los Apéndices H e I, respectivamente.

3.3.1 Secuencia didáctica

Se diseñó una secuencia didáctica (Ver Apéndice A) basada en el Modelo Apropiativo-Aproximativo que consta de ocho actividades, las cuales fueron desarrolladas grupalmente por los alumnos durante nueve clases (CEP N° 43) y seis clases (EPET N° 50) durante los meses de septiembre y octubre de 2018.

Dicha secuencia consiste en una serie de problemas extraídos y/o adaptados de diferentes fuentes a fin de que los alumnos trabajen a partir de situaciones familiares como ser: cargar combustible en un auto, viajar en taxi, llenar una pileta de agua, y puedan aproximarse de manera intuitiva a la definición de función, al mismo tiempo que se articulan las diferentes formas de representación.

3.3.2 Actividades resueltas por los alumnos

Además de resolver las actividades propuestas durante la implementación de la secuencia, los alumnos resolvieron actividades de refuerzo y luego un examen escrito, los cuales quedaron a disposición de la docente como evidencia del trabajo realizado. Estas producciones sirvieron al análisis de: razonamientos efectuados, procedimientos utilizados, errores cometidos, avances en la construcción de los conocimientos y acreditación de los mismos.

3.3.3 Registros de clase

Durante el desarrollo de las clases se contaron con observadores externos, quienes fueron tomando nota de aspectos relacionados al desarrollo de las actividades, conformación y distribución de los grupos, uso del pizarrón, participación de los alumnos, organización de la clase, trabajo grupal, interrupciones, etc. Los mismos se pueden consultar en los Apéndices B: Registros de clase CEP N° 43, C: Registros de clase EPET N° 50 y E: Observaciones de clase CEP N° 43 y EPET N° 50.

3.3.4 Audios y/o videos de clase

Las grabaciones de video fueron utilizadas durante los momentos de puesta en común llevados a cabo durante las clases a fin de registrar los aportes de los alumnos en cuanto a las conjeturas realizadas, los distintos procedimientos utilizados, las intervenciones docentes y los acuerdos consensuados.

Este material audiovisual fue desgrabado y puede encontrarse en los Apéndices B y C, correspondientes a los registros de clase del CEP N° 43 y de la EPET N° 50, respectivamente.

3.3.5 Entrevistas a alumnos y docentes

Se realizaron diez entrevistas a docentes del área (Ver Apéndice G), que trabajan en escuelas secundarias de contextos similares al del CEP N° 43 y la EPET N° 50.

Además, se entrevistaron a diez alumnos de cada una de las escuelas seleccionadas. Se seleccionaron al azar dos alumnos por curso, alcanzando un total de veinte entrevistas. (Ver Apéndices H e I).

Las mismas fueron realizadas por una psicopedagoga que trabaja en escuelas de la zona y que gentilmente ha colaborado en la realización de esta tarea.

3.3.6 Encuestas

Se encuestaron a los alumnos de primer y tercer año que cursaban el ciclo lectivo 2019 en ambas instituciones educativas. En total se registraron 37 encuestas de primer año (13 alumnos correspondientes a la EPET N° 50 y 24 alumnos correspondientes al CEP N° 43) y 36 encuestas de tercer año (14 alumnos correspondientes a la EPET N° 50 y 22 alumnos correspondientes al CEP N° 43).

Se trataron de encuestas personales que se realizaron dentro del horario escolar en formato papel y de forma anónima. El formato de la misma puede encontrarse en el Apéndice J.

3.3.7 Libros de texto de Matemática.

Se consideraron tres libros de Matemática de nivel secundario de las editoriales Estrada, Santillana y Tinta Fresca. Se analizaron las distintas entradas al Álgebra propuestas por los autores, así como los temas desarrollados y las actividades sugeridas, a fin de realizar comparaciones.

3.4 Procedimiento

En primer lugar, se llevó a cabo la confección de una secuencia didáctica del tema, Funciones: tablas, gráficos y fórmulas, basada en el Modelo de Enseñanza Aproximativo o Apropiativo.

Luego se implementó la secuencia didáctica en el segundo año del CEP N° 43 y de la EPET N° 50, durante el desarrollo del eje de contenidos correspondiente a: Introducción del Álgebra y las funciones, durante el segundo semestre del ciclo lectivo 2018. Se propusieron además ejercicios de refuerzo y al finalizar, se evaluaron los contenidos desarrollados a través de un examen escrito.

Es importante aclarar que tanto los alumnos como las autoridades de cada una de las instituciones educativas, estaban al tanto del trabajo de investigación que se estaba realizando a partir de la implementación de la secuencia y el desarrollo de las clases. Todos estuvieron dispuestos a participar y colaborar.

Durante el desarrollo de las clases, se llevó a cabo un registro escrito y audiovisual de las mismas, para facilitar la recuperación de información.

A medida que se fueron desarrollando las clases, y ajustando algunos detalles, por ejemplo, debido a los días de asueto y cambios de actividad que tuvieron lugar en la escuela durante las semanas de implementación de la secuencia, fue necesario rever el cronograma y las clases no se desarrollaron totalmente de acuerdo a lo previsto.

Como una segunda parte del trabajo, se realizaron entrevistas a profundidad no estructuradas a docentes del área a fin de conocer de qué manera abordan el tema en los cursos que tienen a cargo, qué dificultades observan en los alumnos durante el aprendizaje del Álgebra, qué tipo de actividades consideran favorables para el desarrollo de los temas seleccionados, entre otras cosas.

Por otra parte, se entrevistaron a alumnos de distintos cursos de cada escuela y se llevaron a cabo encuestas a alumnos de primer y tercer año de cada una de las instituciones elegidas, con el fin de obtener información acerca de su experiencia con el aprendizaje del Álgebra, el desarrollo de las clases y los significados asignados a los distintos temas.

Por último, se realizó una revisión bibliográfica para conocer las propuestas de enseñanza de los libros de texto con los que cuenta la escuela.

Una vez finalizada la etapa de recolección de datos, se comenzó con el análisis e interpretación de los mismos. Por un lado, se consideraron, las actividades realizadas por los alumnos, las respuestas dadas en clase, los resultados de las evaluaciones, los errores cometidos durante las resoluciones de las actividades y por otro, las encuestas y entrevistas a alumnos para conocer sus apreciaciones personales, las entrevistas a los colegas del área y el análisis de libros de texto.

3.5 Técnica de análisis y procesamiento de la información

Una vez obtenidos los datos, fueron procesados, analizados e interpretados.

Los datos cuantitativos se organizaron en una matriz de tabulación, la cual contiene toda la información recabada mediante las encuestas realizadas a los alumnos.

Las técnicas de análisis cuantitativo que se utilizaron fueron las siguientes: distribución de frecuencias, porcentajes, gráficos circulares y de barras.

Por su parte, los datos cualitativos se organizaron en archivos de documentos Word, en los cuales se recopiló la información extraída de: las observaciones participantes y no participantes, la revisión documental (libros de texto y producciones de los alumnos durante las clases), las encuestas y las entrevistas llevadas a cabo.

Las técnicas de análisis cualitativo utilizadas fueron las siguientes: técnicas de categorización y análisis de contenido.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS A PRIORI

A continuación, se presentan los objetivos de la secuencia didáctica, los contenidos que aborda, los conocimientos previos de los alumnos, los recursos y el cronograma previsto. También se describen y analizan cada una de las situaciones problemáticas de la secuencia y los posibles procedimientos de los alumnos.

Para poder identificar los distintos procedimientos se utilizará la siguiente notación: N° del problema- Consigna- N° de procedimiento. Así por ejemplo: 2)a)i) es el procedimiento 1, de la consigna a), del problema 2.

4.1 Objetivos, contenidos, conocimientos previos, recursos y cronograma

Objetivos:

Que el alumno logre:

- Producir y validar conjeturas sobre relaciones entre variables, avanzando desde las argumentaciones empíricas hacia otras más generales.
- Representar mediante tablas, gráficos o fórmulas las regularidades o relaciones observadas entre valores.
- Pasar de una forma de representación a otra.

Contenidos: Funciones: Fórmulas, tablas y gráficos.

Las distintas actividades pretenden que los alumnos construyan la noción de función como relación entre dos variables (dependiente e independiente) que puede ser representada a través de una fórmula específica (Variables y parámetros), a través de una tabla de valores o gráficamente utilizando un par de ejes cartesianos.

Conocimientos previos

- Operaciones con números racionales.
- Ecuaciones de primer grado.
- Representación de puntos en el plano.
- Interpretación de gráficos cartesianos.

Recursos:

- Consignas impresas.
- Regla graduada.
- Papel y lápiz.
- Calculadora.
- Hoja cuadriculada (opcional).

Cronograma:

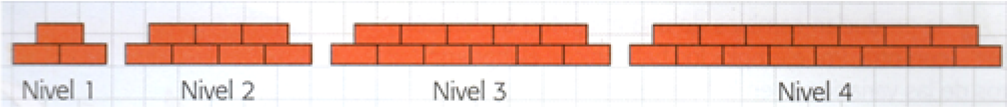
- Consigna 1: 30 minutos
- Puesta en común: 20 minutos
- Consignas 2 y 3: 50 minutos
- Puesta en común: 40 minutos
- Consignas 4 y 5: 50 minutos
- Puesta en común: 40 minutos
- Consignas 6 y 7: 50 minutos
- Puesta en común: 40 minutos
- Consigna 8: 30 minutos
- Puesta en común: 30 minutos
- Institucionalización: 20 minutos

Total: 400 minutos= 10 horas didácticas= 4 clases

4. 2 La secuencia didáctica y su análisis

La Figura 1, corresponde a la primera actividad de la secuencia didáctica:

1) En los niveles de un juego de computadora se construyen muros cada vez más largos usando ladrillos iguales. En cada nivel se agregan 4 ladrillos, 2 en cada fila. Estos son los primeros:



a) ¿Cuántos ladrillos tendrá el muro del nivel 5? ¿Y el del nivel 12?
b) ¿A qué nivel corresponde la figura que tenga 79 ladrillos?
c) ¿Es posible que la cantidad de ladrillos de un muro de este juego sea 254? ¿Por qué?
d) ¿Es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá el muro de un nivel cualquiera del juego?
e) ¿Puedes representar gráficamente la situación? ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea de trazo continuo?

Figura 1. Actividad 1 de la secuencia didáctica.

Objetivos:

Que el alumno logre:

- Observar una variación uniforme entre los niveles y la cantidad de ladrillos de cada uno.
- Determinar cantidad de ladrillos correspondientes a un nivel dado.
- Determinar el nivel correspondiente a una cantidad de ladrillos dado.
- Establecer un método general para calcular la cantidad de ladrillos de acuerdo al nivel del juego.
- Representar gráficamente la situación.

En este caso los alumnos podrían observar una regularidad geométrica: para pasar a un nuevo nivel se agregan 4 ladrillos, 2 en cada fila. A partir de ahí estarían en condiciones de responder a la primera pregunta por conteo.

Las demás preguntas incorporan las siguientes variables didácticas: En la consigna b) se pregunta por un muro de 79 ladrillos, este número es mayor que los trabajados anteriormente y tiene la finalidad de “frenar” el conteo y hacer que los alumnos recurran a otro procedimiento. En la consigna c), los alumnos deben decidir si 254 puede corresponder o no, a la cantidad de ladrillos de un nivel del juego. En este caso, el número propuesto es un número par de tres cifras, lo cual busca habilitar otros razonamientos, como ser, que el alumno reconozca que la cantidad de ladrillos de un nivel siempre es un número impar.

Con el ítem d) se espera que los alumnos puedan avanzar hacia una argumentación más general, aunque no lleguen a una fórmula explícita.

En la consigna e) se pide la representación gráfica de la situación para analizar, posteriormente en la puesta en común, el tipo de gráfico que se obtiene: puntos alineados, debido a la variable con la cual se está trabajando. Los alumnos pueden construir una tabla de valores para luego graficar o simplemente, representar los pares de valores correspondientes a los niveles 1, 2, 3 y 4 (cuyas imágenes están impresas en las consignas).

Posibles procedimientos

Consigna a)

- Procedimiento 1)a)i): Dibujar los muros.

Algunos alumnos podrían continuar la secuencia presentada a través de nuevos dibujos para representar los muros correspondientes a los siguientes niveles y contar los ladrillos utilizados en cada uno, tal como puede observarse en la Figura 2.

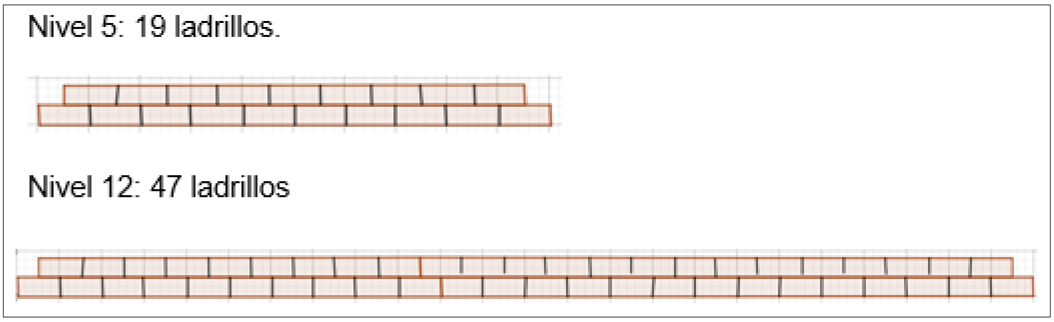


Figura 2. Ladrillos del muro correspondientes a los niveles 5 y 12, respectivamente.

- Procedimiento 1)a)ii): Construir una tabla agregando cuatro ladrillos a cada nuevo nivel.

Los alumnos podrían contar los ladrillos correspondientes a los niveles dados a través de los gráficos y volcarlos en una tabla, luego ampliar la misma agregando cuatro al valor anterior, hasta llegar al nivel 12 y de esta manera responder que: El muro del nivel 5 tendrá 19 ladrillos y el muro del nivel 12, 47 ladrillos, tal como puede verse en la Tabla 1.

Tabla 1. Procedimiento 1)a)ii)

Nivel	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	**12**
Cant. de ladrillos	3	7	11	15	**19**	23	27	31	35	39	43	**47**

- Procedimiento 1)a)iii): Construir una tabla sumando los ladrillos correspondientes al primer y segundo piso del muro.

Observando los gráficos los alumnos, podrían construir una tabla que relacione la cantidad de ladrillos del primer piso del muro, con las del segundo. Siguiendo con este razonamiento podrían hallar la cantidad de ladrillos correspondientes a los niveles 5 y 12, tal como puede verse en la Tabla 2.

Tabla 2. Procedimiento 1)a)iii)

Nivel	Primer piso	Segundo piso	Total
1	2	1	3
2	4	3	7
3	6	5	11
4	8	7	15
5	10	9	19
12	24	23	47

- Procedimiento 1)a)iv): Construir una tabla relacionando los ladrillos del primer nivel y los cuatro que se agregan en los niveles siguientes.

Los alumnos podrían establecer que, como cada nivel se obtiene agregando cuatro ladrillos al anterior, esto es equivalente a sumar a tres (cantidad de ladrillos del primer nivel) la cantidad de ladrillos correspondientes a los niveles siguientes, que se pueden obtener multiplicando cuatro por el número de nivel menos uno, tal como puede verse en la Tabla 3.

Tabla 3. Procedimiento 1)a)iv)

Nivel 1	3	3	3
Nivel 2	3+4	3+1.4	7
Nivel 3	3+4+4	3+2.4	11
Nivel 4	3+4+4+4	3+3.4	15
Nivel 5	3+4+4+4+4	3+4.4	19
...	...	...	...
Nivel 12	3+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4	3+11.4	47

Consigna b)

- Procedimiento 1)b)i): Continuar dibujando.

Aquellos alumnos que hayan respondido la consigna anterior a través del dibujo (Procedimiento 1)a)i)), podrían llegar a ampliar el mismo hasta obtener 79 ladrillos y determinar de esta manera el nivel correspondiente. Se trata de un procedimiento, poco preciso y muy laborioso.

- Procedimiento 1)b)ii): Ampliar la tabla del procedimiento 1)a)ii) hasta 79 ladrillos.

Podrían seguir sumando cuatro al último valor hallado (47), hasta llegar a 79, y relacionar esta cantidad con el nivel que le corresponde, tal como puede verse en la Tabla 4.

Tabla 4. Procedimiento 1)b)ii)

Nivel	**12**	13	14	15	16	17	18	19	**20**
Cant. de ladrillos	**47**	51	55	59	63	67	71	75	**79**

- Procedimiento 1)b)iii): Ampliar la tabla del procedimiento 1)a)iii) que suma los ladrillos correspondientes al primer y segundo piso del muro.

Observando los valores hallados en la consigna anterior los alumnos podrían establecer que: “El primer piso del muro tiene el doble de ladrillos que el número de nivel y el segundo, un ladrillo menos”. Así, podrían ir probando algunos valores hasta llegar a 79 ladrillos y responder al interrogante planteado, tal como puede observarse en la Tabla 5.

Tabla 5. Procedimiento 1)b)iii)

Nivel	Primer piso	Segundo piso	Total
15	30	29	59
18	36	35	71
20	**40**	**39**	**79**

- Procedimiento 1)b)iv): Al total de ladrillos, sumar uno y dividir por dos para calcular los ladrillos del primer piso y considerar su mitad como el número de nivel.

Otra posibilidad sería que los alumnos establezcan que: “Si al total de ladrillos, le sumamos uno y lo dividimos por dos, hallamos la cantidad de ladrillos del primer piso. Conocido este valor, lo dividimos por dos y hallamos el nivel correspondiente”.

Total de ladrillos: 79

Primer piso: (79+1)/2=40

Nivel: 40/2=20

- Procedimiento 1)b)v): Reemplazar cantidad de ladrillos por 79 y despejar nivel del juego en la expresión 3+4.(Nivel del juego-1).

Aquellos alumnos que hayan establecido que la cantidad de ladrillos del muro se puede calcular haciendo: 3+4.(Nivel del juego-1), esto es el usando el procedimiento 1)a)iv), podrían responder a la pregunta planteada haciendo justamente lo contrario:

Nivel= (79-3) /4 +1=20

Consigna c)

- Procedimiento 1)c)i): Observación y análisis

Algunos alumnos podrían establecer que, 254 no puede corresponder a la cantidad de ladrillos de un muro ya que se trata de un número par y todos los resultados encontrados anteriormente no lo eran.

- Procedimiento 1)c)ii): Ampliar la tabla del procedimiento 1)a)ii)

En este caso deberían seguir sumando cuatro ladrillos a la última cantidad de ladrillos conocida, hasta llegar a 254. Al hacerlo se darían cuenta de que no es posible que esta cantidad corresponda a un nivel del juego, tal como puede verse en la Tabla 6. No se trata de un procedimiento efectivo.

Tabla 6. Procedimiento 1)c)ii)

Nivel	1	2	3	4	...	60	61	62	63	64
Cant. de ladrillos	3	7	11	15	...	239	243	247	251	255

- Procedimiento 1)c)iii): Ampliar la tabla del procedimiento 1)a)iii)

En este caso resultaría más fácil evidenciar que 254 ladrillos no corresponden a un nivel del juego. Siguiendo con el razonamiento del procedimiento 1)b)iv), los alumnos podrían hacer lo siguiente, concluyendo que: no es posible que el nivel del juego como la cantidad de ladrillos en cada piso, sea decimal. Por lo tanto, 254 no puede corresponder a la cantidad de ladrillos de un muro del juego, tal como puede observarse en la Tabla 7.

Tabla 7. Procedimiento 1)c)iii)

Nivel	Primer piso	Segundo piso	Total
127,5/2=63,75	(254+1)/2=127,5	127,5-1=126,5	254

- Procedimiento 1)c)iv): Reemplazar cantidad de ladrillos por 254 y despejar nivel del juego en la expresión 3+4.(Nivel del juego-1).

Algunos alumnos, haciendo uso de la siguiente relación: 3+4. (Nivel del juego-1), podrían establecer que 254 no corresponde a una cantidad de ladrillos porque el nivel del juego no puede tratarse de un número decimal.

Nivel= (254-3)/4+1= 63,75

Consigna d)

- Procedimiento 1)d)i): La cantidad de ladrillos de un nivel cualquiera puede calcularse sumando los ladrillos del primer y segundo muro. Los ladrillos del primer muro son el doble del número del nivel y los del segundo, uno menos. Así, por ejemplo, en el nivel 100 habrán 200+199=399 ladrillos.
- Procedimiento 1)d)ii): La cantidad de ladrillos de un nivel cualquiera puede calcularse haciendo: 3+4. (Nivel del juego-1). Así, por ejemplo, para el nivel 100 tendríamos: 3+4.99= 399 ladrillos.
- Procedimiento 1)d)iii): La cantidad de ladrillos de un nivel cualquiera puede calcularse multiplicando por 4 al número de nivel y restando uno. Así, por ejemplo, para el nivel 100 sería: 4.100-1=399 ladrillos.

Consigna e)

- Procedimiento 1)e)i): Los alumnos podrían ubicar al número de nivel en el eje horizontal y a la cantidad de ladrillos en el eje vertical, y utilizando los primeros pares de valores correspondientes, obtendrían un gráfico similar al de la Figura 3.

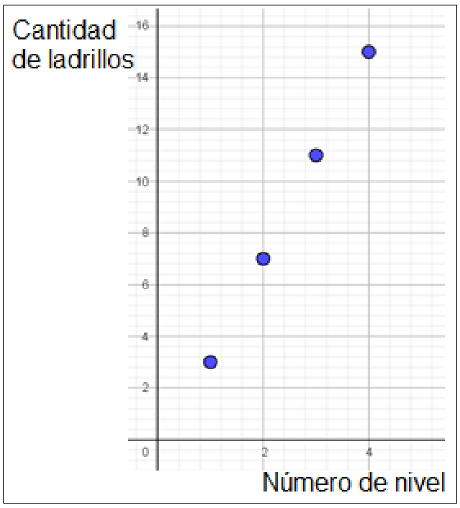


Figura 3. Procedimiento 1)e)i)

- Procedimiento 1)e)ii): En el caso de que ubiquen a la cantidad de ladrillos en el eje horizontal y al número de nivel en el eje vertical, obtendrían un gráfico similar al de la Figura 4.

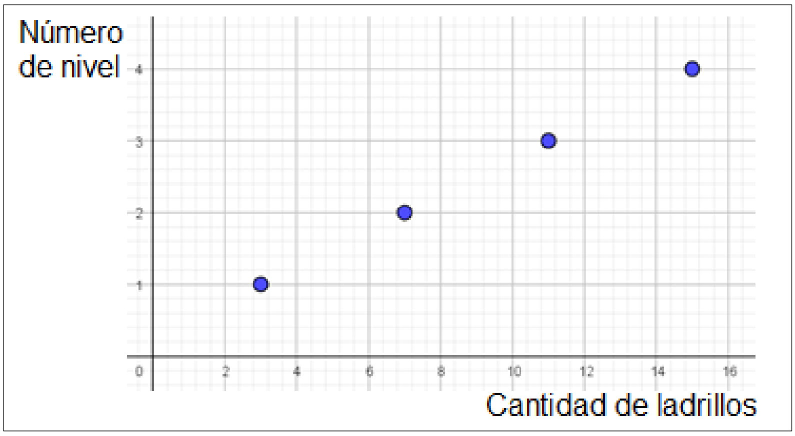


Figura 4. Procedimiento 1)e)ii)

Puede suceder que algunos alumnos opten por unir los puntos y otros no.

En la Figura 5, puede observarse la actividad 2 de la secuencia didáctica.

2) Un automovilista entra en una estación de servicio para cargar combustible. El precio de 1 litro de nafta es de $30.

a) Completar la tabla

Cantidad de nafta que carga	15	20	25	30	35	40	45	50
Precio a pagar								

b) ¿Existe una relación de dependencia entre la cantidad de nafta que carga y el precio a pagar? ¿Cuál?

c) La cantidad de nafta que carga y el precio a pagar son variables, ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y cuál es la variable dependiente?

d) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el precio a pagar cualquiera sea la cantidad de litros de nafta que se cargue?

A continuación, otro automovilista, que trae 15 litros de nafta en su tanque, entra a la misma estación de servicio para cargar más combustible.

e) Completar la tabla

Cantidad de nafta en el tanque	15	20	25	30	35	40	45	50
Precio a pagar								

f) En este caso ¿De qué forma se puede calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque?

g) Representa gráficamente los valores de la tabla. En este caso ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea?

Figura 5. Actividad 2 de la secuencia didáctica.

Objetivos:

Que el alumno logre:

- Calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de combustible que se carga.
- Identificar las variables y la relación de dependencia que existe entre ellas.
- Expresar a través de una fórmula las relaciones observadas.
- Representar gráficamente la situación.

En esta actividad, a diferencia del ejercicio anterior, los alumnos deben completar, en primer lugar, una tabla donde se estipule el precio a pagar de acuerdo a los litros de nafta que se carguen.

Posteriormente, se solicita que identifiquen la relación de dependencia entre las variables seleccionadas a fin de que puedan generalizar la misma a través de una fórmula.

En un segundo momento, se vuelve a solicitar que completen una tabla, pero en este caso, los alumnos deben prestar atención a un detalle, se cambia la variable: cantidad de nafta que carga por cantidad de nafta en el tanque.

Teniendo en cuenta los cálculos realizados anteriormente, se espera que el alumno sea capaz de escribir una fórmula que permita calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque.

Por último, se solicita la representación gráfica de la situación, esperando que los alumnos puedan graficar los pares de valores obtenidos al completar la tabla anterior para analizar posteriormente, el sentido de unir los puntos con una línea recta.

Posibles procedimientos

Consigna a)

- Procedimiento 2)a)i): Multiplicar el precio de un litro por la cantidad de litros que se cargan.

Para completar la primera tabla, los alumnos podrían hacer 15.30, 20.30, 25.30… 50.30 y de esta manera completar los cuadritos vacíos de la tabla.

- Procedimiento 2)a)ii): Calcular cuánto cuestan 5 litros de combustible e ir sumando dicho valor al primer precio calculado.

En primer lugar, los alumnos podrían calcular haciendo 15.30, el precio de cargar 15 litros de nafta. Luego reconociendo que los valores de litros varían de 5 en 5, podrían calcular cuánto cuestan 5 litros de nafta haciendo 5.30=150 e ir sumando dicha cantidad al primer precio calculado. Así reconociendo que los precios varían de $150 en $150, podrían completar los cuadritos vacíos sumando este valor al último precio hallado.

Consigna b)

- Procedimiento 2)b)i): Los alumnos podrían responder que sí existe una relación de dependencia entre la cantidad de nafta que se carga y el precio a pagar, estableciendo que el precio a pagar depende de los litros que se carguen.
- Procedimiento 2)b)ii): Puede ocurrir también, que algunos alumnos establezcan erróneamente, dado el contexto del problema, que la cantidad de nafta depende del precio.

Consigna c)

- Procedimiento 2)c)i): Si la respuesta fue la del procedimiento 2)b)i).

Aquellos alumnos que hayan establecido que, el precio depende de los litros de combustible podrían concluir que la variable independiente es la cantidad de combustible que se carga y la variable dependiente es el precio.

- Procedimiento 2)c)ii): Si la respuesta fue la del procedimiento 2)b)ii)

Aquellos alumnos que hayan establecido que, los litros de combustible dependen del precio podrían concluir que la variable independiente es el precio y la variable dependiente es la cantidad de combustible que se carga.

Consigna d)

- Procedimiento 2)d)i): Los alumnos podrían llegar o no, a una fórmula. Algunos quizá, podrían expresar en lenguaje coloquial que: “si multiplican el precio por litro, o sea $30 por la cantidad de litros que se cargan, se obtiene el precio a pagar".

- Procedimiento 2)d)ii): Otros de manera más simplificada, podrían concluir que 30. litros=Precio
- Procedimiento 2)d)iii): Algunos alumnos reconociendo a los litros como variable independiente (es decir x) y al precio como la variable dependiente (es decir y) podrían llegar a plantear que y=30.x.

Consigna e)

- Procedimiento 2)e)i): Calcular la cantidad de litros que se cargan y multiplicar dicho valor por el precio de un litro de nafta.

Los alumnos podrían calcular en primer lugar la cantidad de nafta que se carga, restando los litros de nafta que hay en el tanque menos los 15 litros que ya se tenían y luego multiplicar dicha cantidad por $30.

- Procedimiento 2)e)ii): Reconocer que los litros varían de 5 en 5, por lo tanto, el precio varía de 150 en 150.

Si a 15 litros corresponde $0, a 20 litros corresponderá $0+$150, a 25 litros, $150 +$150 y así sucesivamente.

Consigna f)

- Procedimiento 2)f)i): En este caso los alumnos podrían expresar a través del lenguaje coloquial que: "El precio a pagar será igual a multiplicar por treinta (precio de un litro de nafta) a la cantidad de nafta que se carga, esto es, la diferencia entre la cantidad de nafta que hay en el tanque y los quince litros que ya tenía".
- Procedimiento 2)f)ii): Otros podrían hacer uso del lenguaje simbólico y expresar que: y=30.(x-15), siendo x, la cantidad de combustible que hay en el tanque e y, el precio a pagar.

Consigna g)

- Procedimiento 2)g)i): Los alumnos podrían ubicar en un sistema de ejes cartesianos los pares de valores contenidos en la tabla, obteniendo una representación similar a la de la Figura 6.

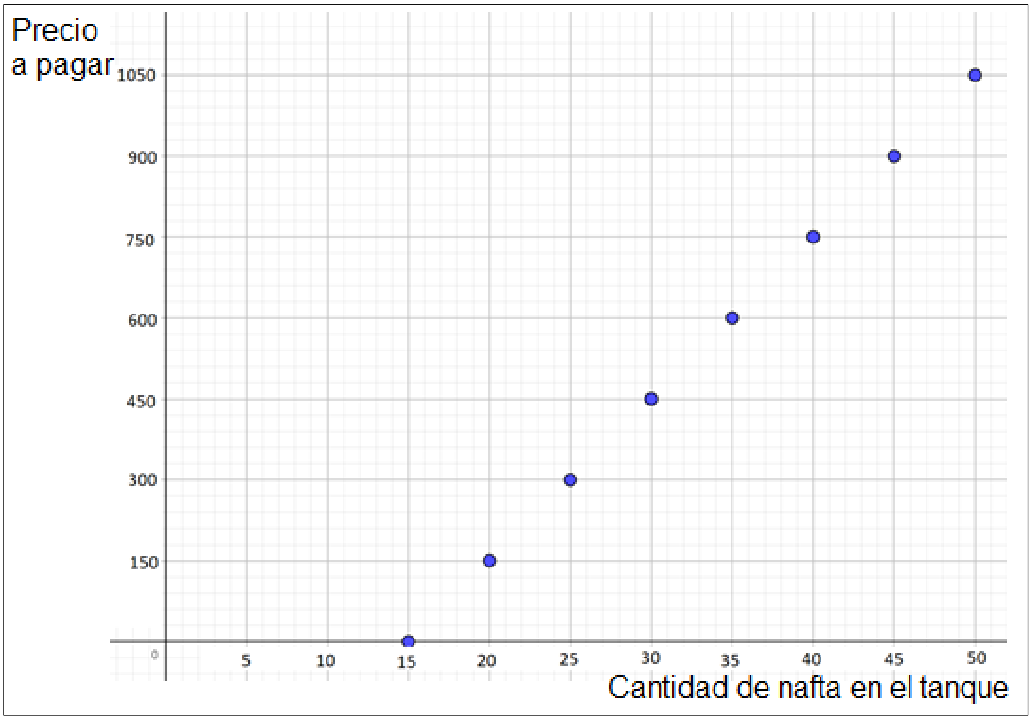
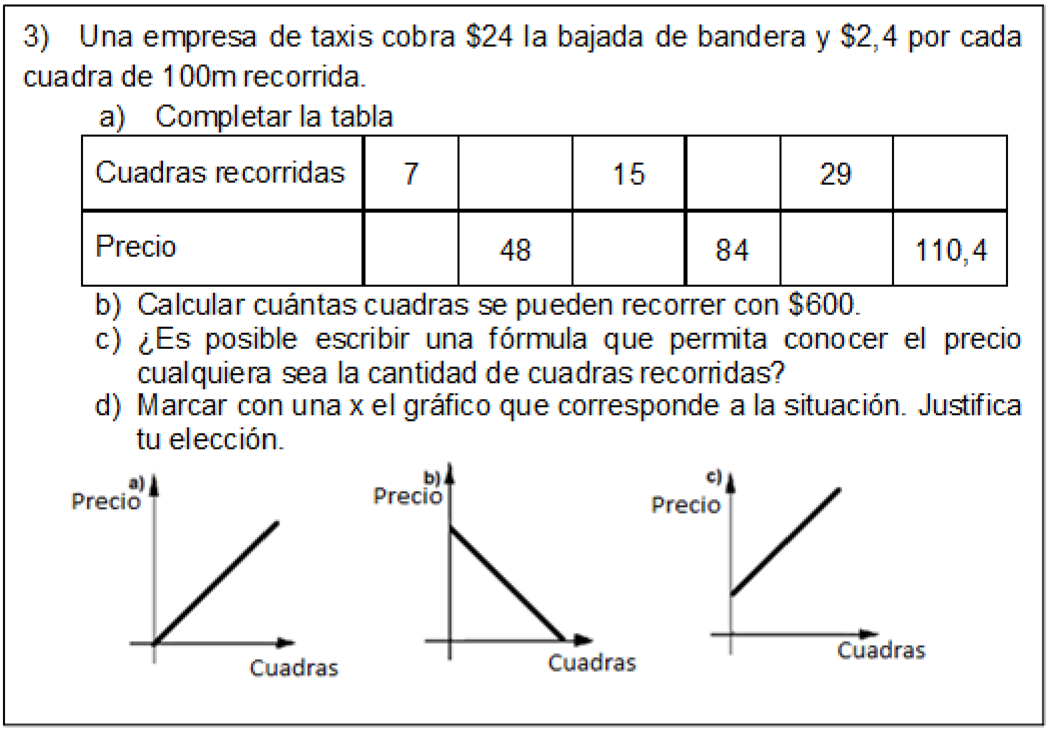


Figura 6. Procedimiento 2)g)i).

- Procedimiento 2)g)ii): Puede suceder que algunos alumnos ubiquen de manera diferente las variables sobre cada uno de los ejes, elijan trabajar con otra escala de valores y/o unan los puntos a través de una línea recta.

En la Figura 7, puede verse la actividad 3 de la secuencia didáctica.



3) Una empresa de taxis cobra $24 la bajada de bandera y $2,4 por cada cuadra de 100m recorrida.

a) Completar la tabla

Cuadras recorridas	7		15		29	
Precio		48		84		110,4

b) Calcular cuántas cuadras se pueden recorrer con $600.

c) ¿Es posible escribir una fórmula que permita conocer el precio cualquiera sea la cantidad de cuadras recorridas?

d) Marcar con una x el gráfico que corresponde a la situación. Justifica tu elección.

Figura 7. Actividad 3 de la secuencia didáctica.

Objetivos:

Que el alumno logre:

- Calcular valores correspondientes a kilómetros recorridos o precio, de acuerdo a lo solicitado en cada caso.
- Expresar a través de una fórmula la relación observada.
- Elegir un gráfico que represente a la situación.

En esta actividad, la tabla contiene valores correspondientes a cada una de las variables consideradas y el alumno debe completarla variando en cada caso, el cálculo utilizado (a diferencia del ejercicio anterior donde sólo se daban los valores de la variable independiente).

También se incorpora una pregunta acerca de un valor que no está contenido en la tabla, esto representa una variable didáctica que exige al alumno identificar el procedimiento a ocupar y no repetir mecánicamente los cálculos utilizados al completar la tabla.

A partir de los datos del problema y los cálculos realizados se espera que el alumno pueda escribir una fórmula que represente la situación y, además, (sin hacer el gráfico) elegir uno entre las tres posibilidades.

Posibles procedimientos

Consigna a)

- Procedimiento 3)a)i): Multiplicar por $2,4 y sumar $24.

Para calcular el precio para los viajes de 7, 15 o 29 cuadras, los alumnos podrían en todos los casos multiplicar el valor dado por el precio de una cuadra (esto es $2,4) y luego sumar la bajada de bandera, o viceversa, sumar al valor 24, los productos $2{,}4.7$, $2{,}4.15$ o $2{,}4.29$ respectivamente.

- Procedimiento 3)a)ii): Restar $24 y dividir por $2,4.

Para el caso donde se conoce el precio del viaje, los alumnos podrían considerar dichos valores, descontar la bajada de bandera y para calcular la cantidad de cuadras, dividir cada diferencia entre $2,4 así, por ejemplo, para un viaje que ha costado $48, se puede calcular la cantidad de cuadras recorridas haciendo: $(\$48\text{-}\$24)\ /\$2{,}4=10$ cuadras.

- Procedimiento 3)a)iii): Por tanteo.

Usando las calculadoras y sumando reiterativamente $2,4 a $24, los alumnos podrán ir calculando los precios correspondientes a 7, 8, 9, 10 cuadras y así sucesivamente hasta llegar a 36 y de esta manera completar todos los cuadritos vacíos. No se trata de un procedimiento óptimo, ya que los alumnos deben reconocer que la cantidad de cuadras recorridas se corresponde con la cantidad de veces que suman $2,4. Además podrían cometer errores de conteo.

Consigna b)

- Procedimiento 3)b)i): Dividir $600 entre $2,4.

Algunos alumnos podrían intentar calcular la cantidad de cuadras que se pueden recorrer con $600, dividiendo esta cantidad por el precio de una cuadra, lo cual sería incorrecto ya que no se tiene en cuenta el precio de la bajada de bandera.

- Procedimiento 3)b)ii): Restar \$24 y dividir por \$2,4.

Los alumnos podrían descontar en primer lugar el precio de la bajada de bandera y luego calcular la cantidad de cuadras recorridas, dividiendo esa cantidad entre \$2,4, así $(\$600\text{-}\$24)/\$2{,}4=240$ cuadras.

Consigna c)

Los alumnos podrían establecer alguna de estas relaciones:

- Procedimiento 3)c)i): Precio= Cuadras recorridas. Precio de una cuadra + Bajada de bandera.
- Procedimiento 3)c)ii): Precio= Cuadras recorridas. 2,4 + 24.
- Procedimiento 3)c)iii): y= 2,4.x +24

Consigna d)

- Procedimiento 3)d)i): Elegir el gráfico a)

Argumentando que a medida que aumenta la cantidad de cuadras aumenta el precio, lo cual es correcto, pero olvida el valor de la bajada de bandera.

- Procedimiento 3)d)ii): Elegir el gráfico b)

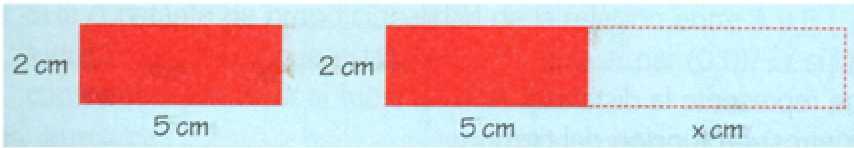
Haciendo una incorrecta interpretación del problema.

- Procedimiento 3)d)iii): Elegir el gráfico c)

Argumentando que el precio aumenta a partir de un valor fijo inicial (bajada de bandera) a medida que aumentan las cuadras.

En la Figura 8, puede observarse la actividad 4 de la secuencia didáctica.

4) Un rectángulo que originalmente tenía 5cm de base y 2 cm de altura se ha alargado una cierta cantidad, conservando su altura.



a) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas les parece que podrían servir para calcular el área A del nuevo rectángulo, suponiendo que x representa la longitud que se alarga su base?

A=2+5+x   A=10+2.5+x   A=x. 2+10   A=x. 5 +10   A=(5+x). 2

b) ¿Es posible que el área de este rectángulo sea de 9 cm^2? ¿Por qué?

c) ¿Es posible que el área mida 28 cm^2? ¿Y 29 cm^2? ¿Y 29,5cm^2? ¿Por qué?

Figura 8. Actividad 4 de la secuencia didáctica.

Objetivos

Que el alumno logre:

- Seleccionar una fórmula que represente a la situación planteada.
- Analizar la equivalencia entre las distintas expresiones algebraicas.
- Analizar distintos valores de la variable dependiente.

En este caso, no se solicita al alumno la elaboración de una fórmula sino la elección de alguna fórmula ya dada entre varias posibilidades, que represente a la situación planteada. Además, se espera que pueda analizar si existen valores de x, que permitan hallar las áreas solicitadas.

Posibles procedimientos

Consigna a)

- Procedimiento 4)a)i): Elegir alguna de las opciones correctas.

Elegir la tercera, la quinta o ambas fórmulas, ya que las mismas permiten calcular el área del nuevo rectángulo y son equivalentes.

- Procedimiento 4)a)ii): Elegir alguna de las opciones incorrectas.

Elegir la primera, segunda o cuarta fórmula, lo cual no sería correcto ya que las mismas no permiten calcular el área del nuevo rectángulo.

Consigna b)

- Procedimiento 4)b)i): Responder afirmativamente, sin analizar que $9cm^2$ es menor al área del rectángulo original.
- Procedimiento 4)b)ii): Responder negativamente, teniendo en cuenta que $10cm^2$ es el área del rectángulo original, por lo tanto, si el lado de 5cm se alarga x centímetros, el área resultante en todos los casos será mayor a $10cm^2$.

Consigna c)

- Procedimiento 4)c)i): Por tanteo.

En este caso, los alumnos podrían ir probando algunos valores haciendo uso de la calculadora, por ejemplo: eligen un número, le suman cinco y lo multiplican por dos. Podrían probar algunos valores y encontrar que, para que el área mida $28cm^2$, x debe medir 9cm. Podrían seguir trabajando de la misma manera intentando hallar los valores de x para las demás áreas.

- Procedimiento 4)c)ii): Usar algunas de las fórmulas elegidas.

Si $A=x.\,2+10$, entonces:

$x.\,2+10=28$	$x.\,2+10=29$	$x.\,2+10=29{,}5$
$2x=28-10$	$2x=29-10$	$2x=29{,}5-10$
$x=18/2$	$x=19/2$	$x=19{,}5/2$
$x=9$	$x=9{,}5$	$x=9{,}75$

Si $A=(5+x).\,2$, entonces:

$(5+x).\,2=28$	$(5+x).\,2=29$	$(5+x).\,2=29{,}5$
$(5+x)=28/2$	$(5+x)=29/2$	$(5+x)=29{,}5/2$
$x=14-5$	$x=14{,}5-5$	$x=14{,}75-5$
$x=9$	$x=9{,}5$	$x=9{,}75$

En la Figura 9, puede observarse la actividad número 5 de la secuencia.

5) Una pileta de 80.000 L de capacidad se llena mediante una bomba que arroja 5.000 L de agua por hora. Ayer se llenó un cuarto de la pileta y hoy se encenderá la bomba nuevamente para terminar de llenarla.

a) ¿Cuál de estas fórmulas describe la situación?

$y=80.000-5.000x$ $\quad$ $y=-5.000x+20.000$ $\quad$ $y=5000x+20.000$ $\quad$ $y=5000x+60.000$

b) Utilizando la fórmula elegida ¿Es posible saber cuánta agua habrá en la pileta después de dos horas y media de volver a encender la bomba?

c) Continuando el trabajo a partir de la fórmula ¿Es posible saber el tiempo que debe estar encendida la bomba hasta llenar la pileta?

d) ¿Qué representa cada una de las tres fórmulas que no señalaste? Tené en cuenta que, para vaciar la pileta, la extracción del agua también se hace por medio de la bomba.

e) Representar gráficamente cada una de las situaciones anteriores.

Figura 9. Actividad 5 de la secuencia didáctica.

Objetivos

Que el alumno logre:

- Seleccionar una fórmula que represente a la situación planteada.
- Reemplazar valores en una fórmula y hallar pares de valores correspondientes.
- Interpretar en el contexto del problema cada una de las fórmulas presentadas.
- Graficar cada una de las funciones.

El presente problema comienza con una consigna similar a la presentada en la actividad anterior (elegir una fórmula de entre varias, que represente a la situación planteada), pero en este caso además de ello, en las consignas b) y c) se sugiere un trabajo algebraico a partir de la fórmula seleccionada, donde se espera que los alumnos reemplacen algunos valores en la fórmula elegida y al resolver la ecuación puedan responder a las preguntas planteadas.

Además, se pide que interpreten cada una de las fórmulas restantes, lo que significa un análisis de las variables y los parámetros de cada una, lo cual permitiría que anticipen las características del gráfico correspondiente a cada función (ítem d) antes de graficarlas.

Posibles procedimientos

Consigna a)

- Procedimiento 5)a)i): Elegir la primera fórmula.

Esto sería incorrecto porque no se tiene en cuenta que la pileta ya tiene un cuarto de su capacidad (20.000 litros de agua) y en vez de cargar 5000 litros de agua por hora, se está sacando esa cantidad de agua porque el término 5.000x es negativo.

- Procedimiento 5)a)ii):Elegir la segunda fórmula.

Esto tampoco sería correcto porque, si bien los alumnos pueden identificar una suma entre los dos términos de la fórmula, el primero de ellos es negativo, lo que indica que de los 20.000 litros de agua que tiene la pileta se extraen 5.000 litros por hora.

- Procedimiento 5)a)iii): Elegir la tercera fórmula.

Esta sería la opción correcta porque se añaden 5.000 litros de agua a los 20.000 que se habían cargado el día anterior.

- Procedimiento 5)a)iv): Elegir la cuarta fórmula.

Esto no sería correcto porque en la misma aparece el número 60.000 que corresponde a las tres cuartas partes de la capacidad de la pileta y no a la cuarta parte como plantea el enunciado.

Consigna b)

- Procedimiento 5)b)i): Usar la fórmula correcta.

Suponiendo que los alumnos elijan la fórmula correcta el trabajo a partir de la misma, para calcular la cantidad de agua que habrá en la pileta después de dos horas y media de volver a encender la bomba, podría ser el siguiente:
Si $x=2{,}5$ horas, entonces:

$y=5000*2{,}5+20.000$

$y=12.500+20.000$

$y=32.500$ litros.

- Procedimiento 5)b)ii): Sin hacer uso de la fórmula.

En este caso, los alumnos podrían tener en cuenta el enunciado y considerando que la pileta ya tiene 20.000 litros de agua, sumarle a esa cantidad, la cantidad de agua que arrojaría la bomba en el tiempo solicitado. Es posible que puedan razonar de la siguiente manera: “Si por cada hora arroja 5.000 litros, en dos horas arroja 10.000 litros y en media hora: 2.500 litros, lo que da un total de 12.500 litros que, sumado a los 20.000 litros iniciales, da un total de 32.500 litros”.

Consigna c)

- Procedimiento 5)c)i):Usar la fórmula correcta.

En este caso, los alumnos deberían interpretar que para llenar la pileta es necesario que la misma tenga 80.000 litros de agua, con lo cual podrían trabajar usando la fórmula de la siguiente manera:
Si $y=80.000 \text{ litros}$, entonces:

$$5000.x+20.000= 80.000$$

$$5000.x= 80.000-20.000$$

$$x= 60.000/5.000$$

$$x=12 \text{ horas}$$

- Procedimiento 5)c)ii): Sin hacer uso de la fórmula.

Los alumnos podrían razonar de la siguiente manera: “Si la pileta ya tiene 20.000 litros de agua, faltan 60.000 litros para llenarla, entonces, como la bomba arroja 5.000 litros de agua por hora, se necesitan 12 horas para llenarla porque $60.000/5.000= 12$”.

Consigna d)
Los alumnos podrían plantear las siguientes afirmaciones para cada una de las fórmulas restantes.

Para $y=80.000\text{-}5.000x$

- Procedimiento 5)d)i): La pileta tiene 80.000 litros de agua y se extraen 5.000 litros por hora. (Correcto)

- Procedimiento 5)d)ii): La pileta tiene 80.000 litros de agua y se cargan 5.000 litros por hora. (Incorrecto).

Para y=-5.000x+20.000

- Procedimiento 5)d)iii): La pileta tiene 20.000 litros de agua y se extraen 5.000 litros por hora. (Correcto).
- Procedimiento 5)d)iv): La pileta tiene 20.000 litros de agua y se cargan 5.000 litros por hora. (Incorrecto).

Para y=5000x+60.000

- Procedimiento 5)d)v): La pileta tiene 60.000 litros de agua y se cargan 5.000 litros por hora. (Correcto).
- Procedimiento 5)d)vi): La pileta tiene 60.000 litros de agua y se extraen 5.000 litros por hora. (Incorrecto).

Consigna e)

- Procedimiento 5)e)i): Construir tablas de valores y luego graficar representando los puntos en un sistema de ejes cartesianos.

En este caso los alumnos podrían, usando las fórmulas, hallar pares de valores correspondientes para cada una de las funciones y luego representar esos puntos en un sistema de ejes cartesianos, tal como puede verse en las Figuras 10, 11 y 12.

y=80.000-5.000x

x	y=80.000-5000x
0	80.000-5000.0=80.000
2	80.000-5000.2=60.000
16	80.000-5000.16=0

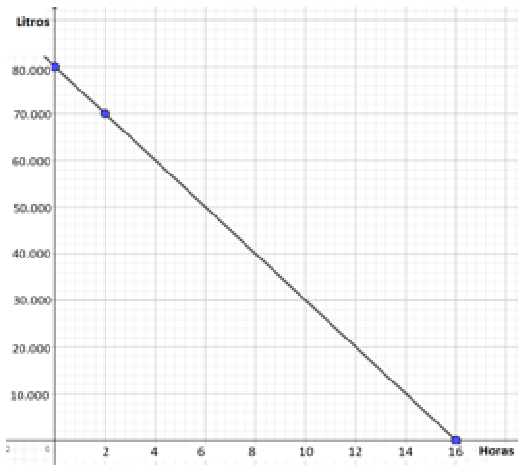


Figura 10. Tabla y gráfico correspondiente a la función y=80.000-5.000x.

y=-5.000x+20.000

x	y=-5.000x+20.000
0	-5000.0+20.000=20.000
2	-5000.2+20.000=10.000
4	-5000.4+20.000=0

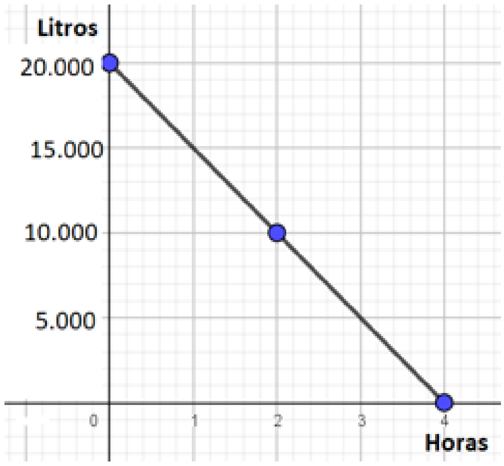


Figura 11. Tabla y gráfico correspondiente a la función y=-5.000x+20.000.

y=5000x+60.000

x	y=5.000x+60.000
0	5000.0+60.000=60.000
2	5000.2+60.000=70.000
4	5000.4+60.000=80.000

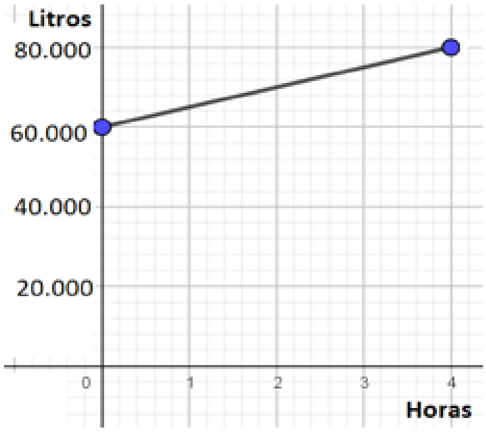


Figura 12. Tabla y gráfico correspondiente a la función y=5.000x+60.000.

- Procedimiento 5)e)ii): Hacer representaciones generales.

Sin hallar pares de valores que pertenezcan a cada función los alumnos podrían hacer esquemas que representen a las distintas situaciones, como los presentados en la actividad 3, tal como puede verse en la Figura 13.

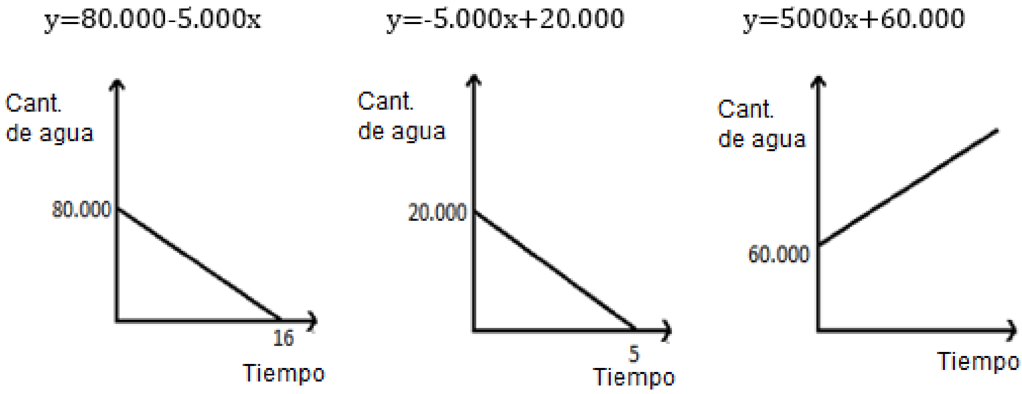
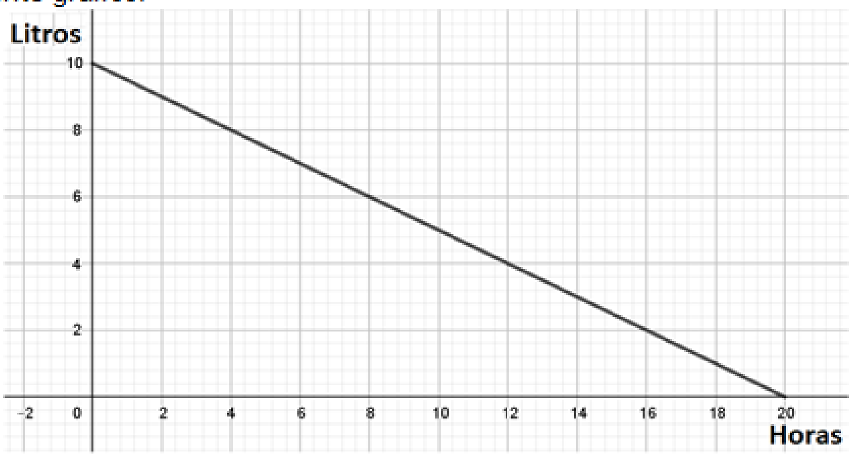


Figura 13. Gráficos correspondientes al Procedimiento 5)e)ii).

En la Figura 14, puede observarse la actividad 6 de la secuencia.

6) Un tanque de 10 litros de agua se desagota tal como se plantea en el siguiente gráfico.



a) Elabora una fórmula que represente la cantidad de agua que queda en el tanque a medida que se desagota en función del tiempo.

b) ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo? ¿Es posible leer esta misma información en la fórmula?

c) ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad inicial que hay en el tanque? ¿Es posible leer esta misma información en la fórmula?

Figura 14. Actividad 6 de la secuencia didáctica.

Objetivos

Que el alumno logre:

- Pasar de la representación gráfica a la algebraica.
- Analizar la información brindada por cada una de las representaciones: gráfica y algebraica.

En este caso, se espera que el alumno sea capaz de extraer información del gráfico (cantidad de litros que se desagotan por hora) para llegar a una expresión simbólica.

Además, se pretende analizar cómo la misma información (tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo y cantidad inicial de agua que hay en el tanque) aparece (o no) contenida en una u otra forma de representación.

Posibles procedimientos

Consigna a)

- Procedimiento 6)a)i)

En este caso los alumnos deberían calcular, en primer lugar, la razón a la que se desagota el tanque, para ello podrían hacer lo siguiente:

$10\text{litros}/20\text{horas}=0{,}5\ \text{litro}/\text{hora}=½\ \text{litro}/\text{hora}$

Una vez conocido este valor podrían elaborar la siguiente fórmula: (podría variar de un grupo a otro las notaciones utilizadas).

Si x: Tiempo en horas e y: Cantidad de agua que queda en el tanque, entonces:

$y=10\text{-}1/2x$

$y=\text{-}1/2x+10$

Consigna b)

Los alumnos podrían responder que:

- Procedimiento 6)b)i): Puede leerse la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo sobre el eje horizontal, en el punto donde la recta llega a cero, en el número 20. Esta misma información no puede leerse directamente en la fórmula, no se observa el tiempo que demora vaciar el tanque, no aparece el valor 20. (Es necesario despejar el valor de x, considerando que y=0).

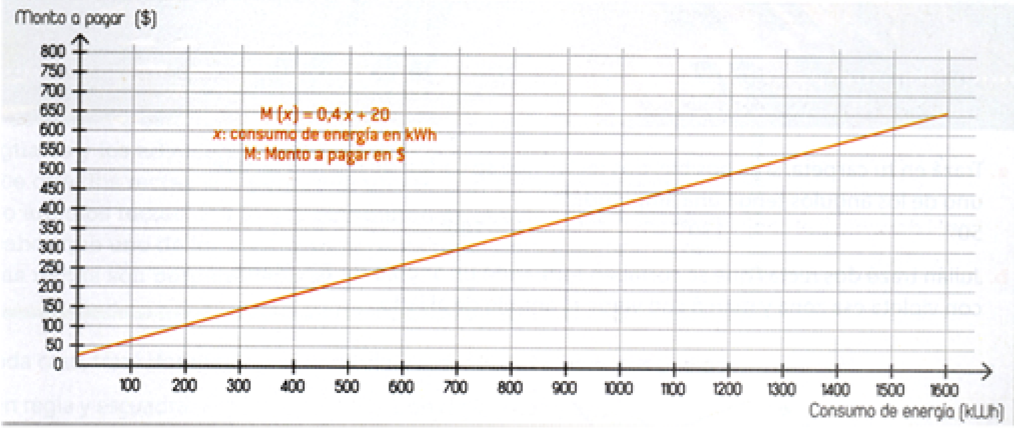
Consigna c)

Los alumnos podrían expresar lo siguiente:

- Procedimiento 6)c)i)): La cantidad inicial de agua puede leerse sobre el eje vertical, en el número 10, en el valor correspondiente a cero horas. Sí, es posible leer en la fórmula la cantidad inicial de agua, porque aparece el número 10 en la misma. (En este caso, además, resulta más evidente que cuando x=0, y=10)

En la Figura 15, puede observarse la actividad 7 de la secuencia didáctica.

7) Una empresa de energía eléctrica le presentó a sus usuarios que consumen hasta 1600 kWh, la siguiente información sobre el monto a pagar en función del consumo realizado.



a) ¿Se puede averiguar el monto a pagar correspondiente a un consumo de 200 kWh mirando el gráfico? ¿Y usando la fórmula? ¿Y el monto correspondiente a un consumo de 900 kWh?

b) Estimá, mirando el gráfico, cuál es el monto a pagar si el consumo es de 1.100 kWh. Usá la fórmula para verificar la estimación realizada.

c) Si una familia debe pagar $300 ¿Cuántos kWh ha consumido? ¿Y si debe pagar $550?

d) Si una familia no consumió energía durante todo el mes porque estuvieron de viaje ¿Tienen que pagar algo? En caso que así sea, ¿Cuánto tienen que pagar? Explicá cómo lo resolviste.

Figura 15. Actividad 7 de la secuencia didáctica.

Objetivos

Que el alumno logre:

- Responder interrogantes a partir de la información contenida en el gráfico.
- Responder interrogantes a partir del uso de la fórmula.
- Elegir entre ambos tipos de representación (analítica o gráfica) de acuerdo a la información solicitada.

Con la mencionada actividad se pretende que el alumno elija el tipo de representación (fórmula o gráfico) que le permita responder a las preguntas planteadas de manera más eficaz, para ello se proporciona el gráfico y la fórmula, ya que en algunos casos es posible responder solamente observando el gráfico y otras veces es necesario recurrir a la representación algebraica y hacer los cálculos necesarios para calcular los kWh consumidos o el monto a pagar en los distintos casos.

Posibles procedimientos

Consigna a)

Los alumnos podrían responder que:

- Procedimiento 7)a)i): Observar el gráfico.

Observando el gráfico se puede averiguar que el monto a pagar por un consumo de 200kWh es de $100, mientras que, no se puede saber con exactitud el precio correspondiente a un consumo de 900kWh, sólo con mirar el gráfico.

- Procedimiento 7)a)ii): Usar la fórmula.

Usando la fórmula se puede averiguar el precio correspondiente a un consumo de 200kWh, reemplazando x por 200kWh. Así: $\mathrm{M}(200)=0{,}4.200+20=100$.
De la misma manera se puede calcular el precio a pagar por un consumo de 900 kWh: $\mathrm{M}(900)=0{,}4.900+20=380$.

Consigna b)

- Procedimiento 7)b)i): Los alumnos podrían realizar distintas estimaciones, como ser: $\$460$, $\$461$, $\$462$, $\$463$, $\$464$, $\$465$. La verificación estaría dada por el siguiente cálculo: $\mathrm{M}(1.100)=0{,}4.1.100+20=460$

Consigna c)

- Procedimiento 7)c)i)): Observar el gráfico.

Los alumnos podrían responder que, si una familia debe pagar \$300, ha consumido 700 kWh. Y si debe pagar \$550, ha consumido un poco más de 1300 kWh.

- Procedimiento 7)c)ii)): Utilizar la fórmula.

Los alumnos podrían responder que, si una familia debe pagar \$300, ha consumido 700 kWh porque:

$$0{,}4.x+20=300$$

$$0{,}4.x=300-20$$

$$x=280/0{,}4$$

$$x=700\ \mathrm{kWh}$$

Y si debe pagar \$550, ha consumido 1325 kWh, porque:

$$0{,}4.x+20=550$$

$$0{,}4.x=550-20$$

$$x=530/0{,}4$$

$$x=1325\ \mathrm{kWh}$$

Consigna d)

- Procedimiento 7)d)i)): Observar el gráfico.

Los alumnos podrían responder que: La familia debe pagar un valor entre 0 y 50, que podría ser 20 o 30, no se puede saber exactamente, ya que la recta no pasa por el punto (0,0).

- Procedimiento 7)d)ii)): Observar la fórmula.

Podrían responder que deben pagar \$20 ya que dicho valor aparece en la fórmula y constituye un costo fijo.

- Procedimiento 7)d)iii): Calcular el monto utilizando la fórmula.

En este caso, los alumnos podrían plantear que si no hubo consumo x=0 entonces: $M(0)=0{,}4.0+20=20$, lo cual indica que la familia debe abonar $20 aunque no consumió energía durante todo el mes.

- Procedimiento 7)d)vi): Responder que la familia no debe pagar nada, porque no consumió energía durante todo el mes. (Incorrecto).

En la Figura 16, puede observarse la actividad 8 de la secuencia.

8) Alumnos de 3er año de la escuela están organizando una excursión de estudio. Necesitan alquilar un micro que los transporte y averiguaron los costos en dos compañías.

La compañía A cobra $1400 fijos y $3,50 por cada kilómetro recorrido.

La compañía B cobra $1200 fijos y $6,50 por cada kilómetro recorrido.

¿Qué compañía les conviene contratar? ¿Por qué?

Figura 16. Actividad 8 de la secuencia didáctica.

Objetivos

Que el alumno logre:

- Seleccionar la forma más adecuada (tabla, fórmula o gráfico) que permita tomar una decisión y resolver el problema planteado.

En este caso, no se sugiere una forma de representación a utilizar, sino que es el alumno quien debe elegir de acuerdo a sus experiencias anteriores qué procedimiento le permite tomar la mejor decisión: construir una tabla de valores, elaborar una fórmula, analizar un gráfico.

Posibles procedimientos

- Procedimiento 8)i): Elaborar una tabla de valores.

En este caso los alumnos podrían elaborar una tabla de valores, calculando el precio en ambas compañías para distintas distancias, tal como puede verse en las Tablas 8 y 9.

Tabla 8. Precio del viaje de acuerdo a los kilómetros recorridos en la Compañía A.

Kilómetros	10	100	1000
Precio	$1435	$1750	$4900

Tabla 9. Precio del viaje de acuerdo a los kilómetros recorridos en la Compañía B.

Kilómetros	10	100	1000
Precio	$1265	$1850	$7700

En este caso puede observarse que para un viaje de 10km conviene la compañía B, pero para un viaje de 1000km, conviene la compañía A. Dependerá de los valores elegidos por los alumnos las conclusiones a las que puedan llegar.

- Procedimiento 8)ii): Usar la calculadora

Puede suceder que, haciendo uso de la calculadora, los alumnos prueben distintos valores y concluyan que para valores menores a 66 kilómetros conviene la compañía B, mientras que, para distancias mayores convenga la compañía A.

- Procedimiento 8)iii): Elaborar fórmulas y trabajar a partir de ellas.

Los alumnos podrían elaborar una fórmula que represente el precio a pagar en cada compañía, de acuerdo a los kilómetros recorridos. A continuación, podrían elegir valores particulares (de km) y calcular el precio en cada caso.
Si x=50, entonces:

Compañía A: $y=1400+3{,}5.x$

$y=1400+3{,}5.50$

$y=1575$ pesos

Compañía B: $y=1200+6{,}5.x$

$y=1200+6{,}5.50$

$y=1525$ pesos

Si el valor elegido fuera 50 km, podrían concluir que conviene la compañía B. Pero si el valor de x elegido, fuera mayor, por ejemplo 300 km, la conclusión sería distinta.

Si x=300, entonces:

Compañía A: $y=1400+3{,}5.x$

$y=1400+3{,}5.300$

$y=2450$ pesos

Compañía B: $y=1200+6{,}5.x$

$y=1200+6{,}5.300$

$y=3150$ pesos

En este caso, conviene la compañía A.

- Procedimiento 8)iv): Representar gráficamente cada función.

En este caso se puede hacer una comparación más amplia y observar que para una cantidad de kilómetros menor a 66,6 kilómetros conviene la compañía B y para valores mayores, conviene la compañía A, tal como puede observarse en la Figura 17.

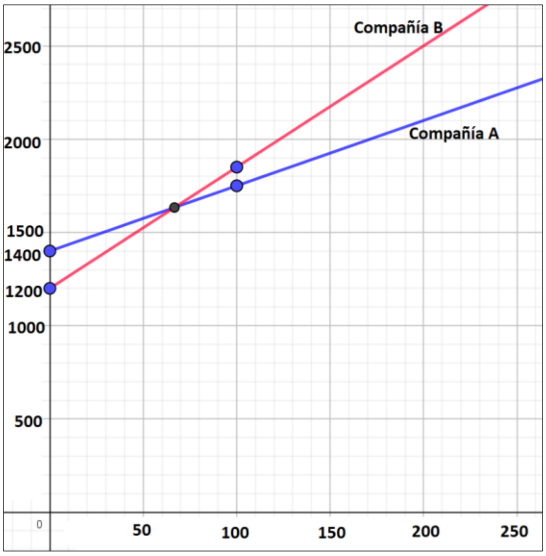


Figura 17. Procedimiento 8)iv).

- Procedimiento 8)v): Trabajar algebraicamente.

Podría suceder que algunos alumnos planteen que, para distancias pequeñas conviene la compañía B, mientras que, para valores mayores convenga la otra.

En ese caso, podrían intentar averiguar a partir de qué valor sucede tal cosa, haciendo lo siguiente:

$$y = 1400 + 3{,}5x \qquad y = 1200 + 6{,}5x$$

$$1400 + 3{,}5x = 1200 + 6{,}5x$$

$$3{,}5x - 6{,}5x = 1200 - 1400$$

$$-3x = -200$$

$$x = -\frac{200}{-3}$$

$$x \cong 66{,}7\ kilómetros$$

Entonces la conclusión sería: Conviene contratar la compañía B para viajes cuyas distancias sean menores a 66,7 kilómetros, mientras que para distancias mayores conviene contratar la compañía A.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS A POSTERIORI

5.1 Desarrollo de las clases

La secuencia didáctica diseñada consta de ocho problemas que pretendían que los alumnos construyan la noción de función como relación entre dos variables (dependiente e independiente) que puede ser representada a través de una fórmula específica (Variables y parámetros), a través de una tabla de valores o gráficamente utilizando un par de ejes cartesianos.

Por tal motivo, se llevaron al aula distintas actividades (pero similares entre sí) a fin de que los alumnos a medida que fueran avanzando en la resolución de las mismas, pongan en juego sus conocimientos y establezcan distintas relaciones entre las diferentes formas de representar a una función: partiendo de una tabla para armar un gráfico, analizando un gráfico para elaborar una fórmula, analizando una fórmula para predecir un gráfico, etc.

El tiempo previsto para el desarrollo de las clases fue de 400 minutos, equivalente a cuatro clases. Dicha estimación fue superada ampliamente en la realidad y fueron necesarias nueve clases para completar la implementación de la secuencia en el segundo año del CEP N° 43 y seis clases en la EPET N° 50.

Cabe aclarar que en el CEP N° 43 se trabajó con un total de siete grupos de cuatro integrantes cada uno y en la EPET N° 50 con cuatro grupos de cuatro integrantes. Al ser el primer grupo mayor que el segundo, fueron necesarias más clases para la implementación de la secuencia, ya que las puestas en común requirieron de más tiempo para poder recuperar las producciones de todos los grupos.

Para poder identificar a los alumnos y sus equipos de trabajo se nombraron a los once grupos con letras siguiendo el orden alfabético, precedidas por la letra G (GA, GB...GK) y a los alumnos con números (1, 2, 3, 4) precedidos por la letra correspondiente a su grupo. (A1: alumno 1 del grupo A; D3: alumno 3 del grupo D). Para hacer referencia al docente se utilizó la letra D.

En la Tabla 10 se resumen las siglas utilizadas para identificar a los alumnos y grupos de ambas escuelas.

Tabla 10. Identificación de los alumnos por escuela y grupo de trabajo.

CEP N° 43				
Grupos	**Integrantes**			
Grupo A	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GA	A1	A2	A3	A4
Grupo B	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GB	B1	B2	B3	B4
Grupo C	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GC	C1	C2	C3	C4
Grupo D	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GD	D1	D2	D3	D4
Grupo E	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GE	E1	E2	E3	E4
Grupo F	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GF	F1	F2	F3	F4
Grupo G	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GG	G1	G2	G3	G4
EPET N° 50				
Grupos	**Integrantes**			
Grupo H	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GH	H1	H2	H3	H4
Grupo I	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GI	I1	I2	I3	I4
Grupo J	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GJ	J1	J2	J3	J4
Grupo K	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4
GK	K1	K2	K3	K4

A continuación, se recuperan los procedimientos utilizados por los alumnos para resolver las diferentes actividades propuestas con el fin de determinar si existe correlación entre las anticipaciones realizadas por el docente y las actividades llevadas a cabo por los alumnos durante el desarrollo de las clases.

La Figura 1 corresponde a la primera actividad de la secuencia didáctica implementada en ambos cursos seleccionados para la presente investigación.

En la pregunta a), tal como se había anticipado, todos los grupos del CEP N° 43 contestaron correctamente ya que sólo debían sumar cuatro ladrillos a quince, que era la cantidad correspondiente al último nivel representado gráficamente. Así lo planteó el grupo C, como puede verse en la Figura 18:

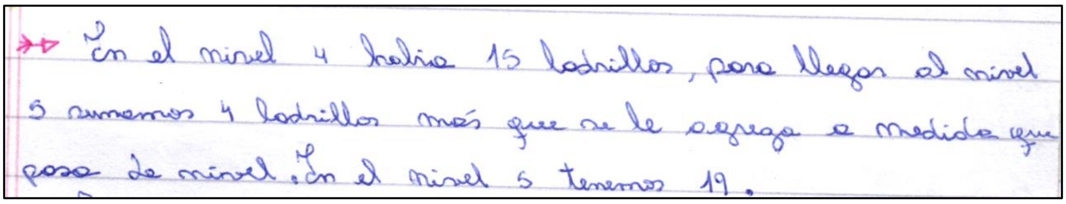

En el nivel 4 habia 15 ladrillos, para llegar al nivel 5 sumamos 4 ladrillos más que se le agrega a medida que pasa de nivel. En el nivel 5 tenemos 19.

Figura 18. Respuesta del GC a la primera pregunta de la consigna a) de la actividad 1.

Al preguntar por el nivel 12, la mayoría de los grupos coincidió en que, para responder a la pregunta, podían ir sumando de cuatro en cuatro hasta llegar a cuarenta y siete. Así lo expuso el grupo C, tal como se observa en la Figura 19.

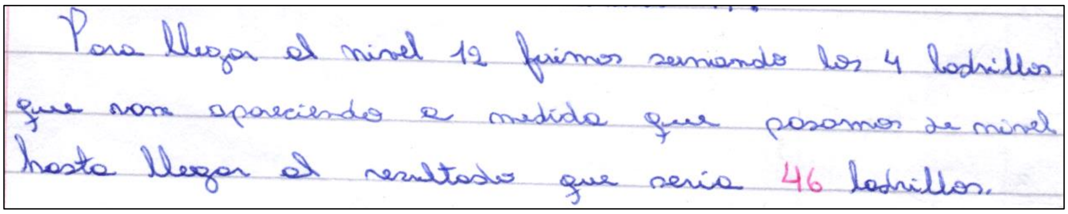

Para llegar al nivel 12 fuimos sumando los 4 ladrillos que nos apareciendo a medida que pasamos de nivel hasta llegar al resultado que sería 46 ladrillos.

Figura 19. Respuesta del GC a la segunda pregunta de la consigna a) de la actividad 1.

En este caso, aunque el razonamiento fue correcto, el resultado no lo es, ya que el valor correspondiente a 12 niveles es 47 ladrillos.

Este procedimiento se corresponde al procedimiento 1)a)ii) anticipado, aunque los alumnos no construyeron la tabla que relacionaba los niveles con la cantidad de ladrillos e hicieron uso de la calculadora para sumar cuatro ladrillos, sucesivamente.

El GE, también reconoció la necesidad de sumar cuatro unidades reiteradamente a 19 para llegar a conocer la cantidad de ladrillos correspondiente al nivel 12, pero lo hizo desde una multiplicación, como puede observarse en la Figura 20.

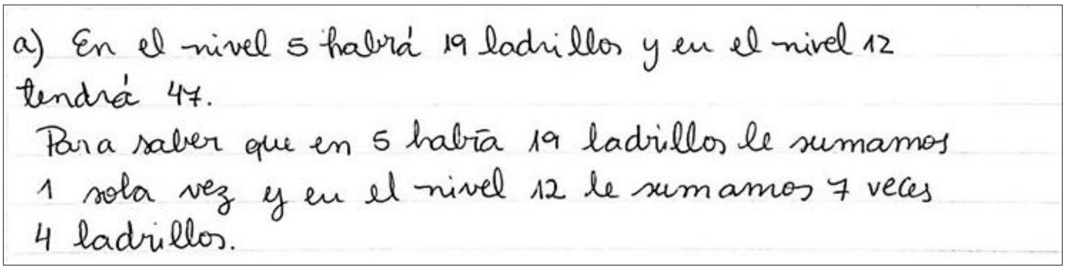

a) En el nivel 5 habrá 19 ladrillos y en el nivel 12 tendrá 47.
Para saber que en 5 habría 19 ladrillos le sumamos 1 sola vez y en el nivel 12 le sumamos 7 veces 4 ladrillos.

Figura 20. Respuesta del GE a la consigna a) de la actividad 1.

Este grupo evidenció un razonamiento distinto al de los demás grupos, ya que reconoció que sumar cuatro ladrillos por cada nivel era equivalente a sumar a la última cantidad de ladrillos conocida, el producto entre cuatro y la cantidad de niveles que se agrega. El cálculo aritmético en cada caso, hubiera sido: 15+1.4=19 y 19+7.4=47.

Este grupo trabajó de manera similar al procedimiento 1)a)iv) con la diferencia que no sumó cuatro reiteradas veces a 3 (ladrillos del primer nivel) sino a 15 (ladrillos del nivel 4), cuya cantidad era conocida a través de la imagen que incluía la consigna.

Sólo un grupo (GF) planteó en esta consigna, la correspondencia entre niveles y cantidad de ladrillos en forma escrita, tal como puede verse en la Figura 21.

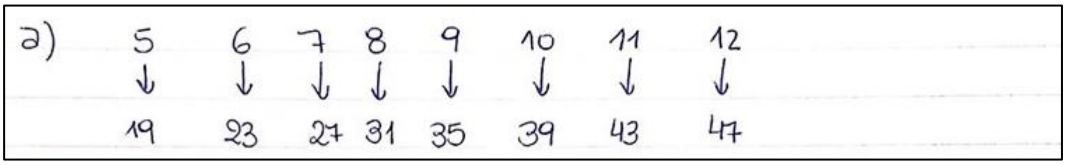
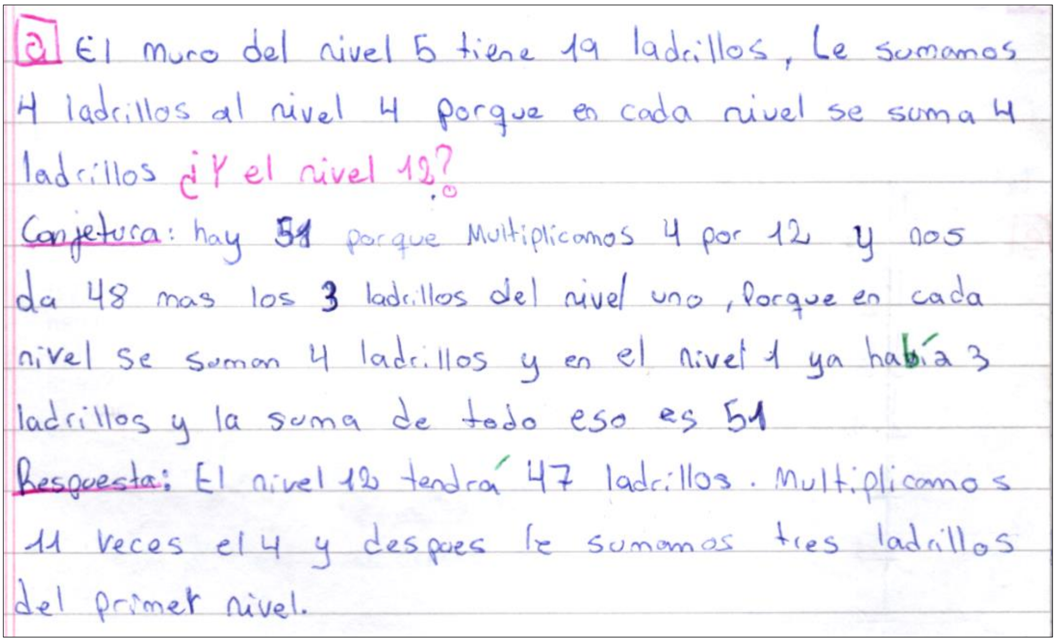


Figura 21. Procedimiento realizado por el GF en la consigna a) de la actividad 1.

Como puede observarse, ninguno de los grupos recurre a las tablas para organizar la información y establecer las correspondencias entre los niveles y la cantidad de ladrillos.

En el caso de la EPET N° 50, todos los grupos, al igual que en el CEP N° 43, respondieron que el nivel 5 tendrá 19 ladrillos porque se suman cuatro ladrillos a quince, que son los ladrillos correspondientes al cuarto nivel.

Las respuestas de los grupos GH y GI a la consigna a), pueden observarse en las Figuras 22 y 23, respectivamente.

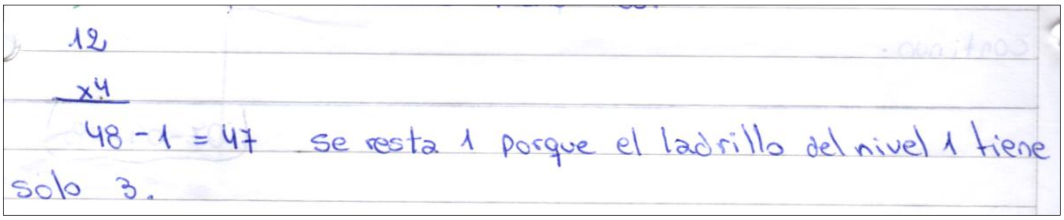


a) El muro del nivel 5 tiene 19 ladrillos, Le sumamos 4 ladrillos al nivel 4 porque en cada nivel se suma 4 ladrillos ¿Y el nivel 12?

Conjetura: hay 51 porque Multiplicamos 4 por 12 y nos da 48 mas los 3 ladrillos del nivel uno, Porque en cada nivel se suman 4 ladrillos y en el nivel 1 ya había 3 ladrillos y la suma de todo eso es 51

Respuesta: El nivel 12 tendrá 47 ladrillos. Multiplicamos 11 veces el 4 y despues le sumamos tres ladrillos del primer nivel.

Figura 22. Respuesta del GH a la consigna a) de la actividad 1.



12
x4
48 - 1 = 47 se resta 1 porque el ladrillo del nivel 1 tiene solo 3.

Figura 23. Respuesta del GI a la consigna a) de la actividad 1.

Puede observarse que, a diferencia de los procedimientos presentados anteriormente, estos alumnos resolvieron la consigna partiendo del nivel doce y no desde niveles anteriores cuya cantidad de ladrillos correspondiente era conocida.

Es importante destacar, que esta consigna fue resuelta por los grupos GH y GI, siguiendo procedimientos que no fueron anticipados por la docente.

Ambos grupos plantearon la necesidad de multiplicar doce por cuatro. El primero de ellos, sumó tres al producto obtenido y luego descartó ese procedimiento, proponiendo en lugar de ello, multiplicar once por cuatro y sumar tres. En este caso, los alumnos lograron darse cuenta que luego de multiplicar 12 por 4, no debían sumar tres ladrillos ya que estarían considerando un nivel más, por lo tanto, modifican su estrategia y multiplican 11 por 4 y luego suman los tres ladrillos correspondientes al primer nivel.

En este caso puede evidenciarse una reflexión y reorganización de la estrategia de resolución, que permite abandonar un ensayo erróneo y calcular correctamente el valor solicitado.

El segundo grupo, por su parte, restó uno al producto entre doce y cuatro argumentando que el primer nivel sólo tiene tres ladrillos. De esta manera, ambos grupos lograron responder correctamente a la pregunta planteada.

El cálculo utilizado por los integrantes de este grupo podría expresarse de la siguiente manera 12.4=48-1=47. Si bien el producto no está expresado como tal, esto podría evidenciar un error en el uso del signo igual ya que no se lo está usando para representar la equivalencia numérica de las cantidades que están a uno y otro lado del signo sino como un simple separador de las secuencias de operaciones que realizan los alumnos para llegar al resultado.

De acuerdo a Matthews y Fuchs (2020), este error se corresponde con una visión operacional del signo igual y es difícil de corregir y superar. Los alumnos que tienen esta concepción muestran también una mala comprensión del Álgebra básico.

En la consigna b) los alumnos del CEP N°43, trabajaron de distintas maneras. En las Figuras 24, 25 y 26 pueden observarse los procedimientos realizados.

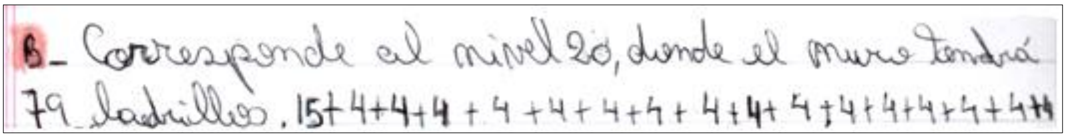
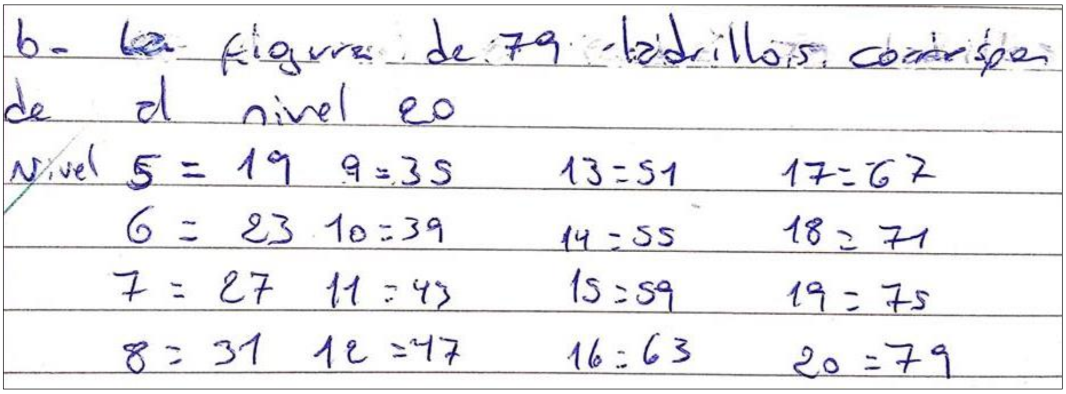

B_ Corresponde al nivel 20, donde el muro tendrá
79 ladrillos. 15+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4

Figura 24. Respuestas del GD a la consigna b) de la actividad 1.

En este caso, el cambio en la variable didáctica (valor 79), no produjo un cambio en la estrategia de resolución. Los alumnos, haciendo uso de la calculadora, sumaron cuatro a quince reiteradamente, hasta llegar a obtener setenta y nueve. Fue necesaria la intervención docente para que los integrantes del grupo reconocieran que estuvieron sumando cantidad de ladrillos y que, el número de nivel en ese caso, correspondía a la cantidad de veces que sumaron cuatro (o sea dieciséis veces) más cuatro, el nivel correspondiente a quince ladrillos (cantidad desde la que comenzaron a sumar).

Por su parte, los grupos B, C, E, F y G siguieron con el mismo razonamiento (agregar cuatro ladrillos) y registraron la correspondencia entre el número de nivel y la cantidad de ladrillos, llegando a la conclusión de que al nivel 12 corresponde la figura de 79 ladrillos. En la figura 25, puede observarse el trabajo del grupo B.


b- la figura de 79 ladrillos corresponde de el nivel 20

Nivel	5 = 19	9 = 35	13 = 51	17 = 67
	6 = 23	10 = 39	14 = 55	18 = 71
	7 = 27	11 = 43	15 = 59	19 = 75
	8 = 31	12 = 47	16 = 63	20 = 79

Figura 25. Respuestas del GB a la consigna b) de la actividad 1.

Si bien los grupos continuaron trabajando de la misma manera, a partir de la organización de la información, se empezó a ver la correspondencia entre niveles y cantidad de ladrillos.

Nuevamente, en la Figura 25 puede verse que los alumnos no reconocen que el sentido del signo igual es que ambas partes (izquierda y derecha) deben ser iguales.

Tal como lo expresan Caronía, Rivero, Operuk, y Mayol (2014), esta dificultad es un obstáculo a la hora de trabajar algebraicamente, porque produce la violación de las propiedades de simetría de la igualdad.

Solo en uno de los grupos surgió la idea de que era posible conocer el número de nivel correspondiente a 79 ladrillos, dividiendo 79 entre 4. Así lo planteó el grupo A y su respuesta puede observarse en la Figura 26.

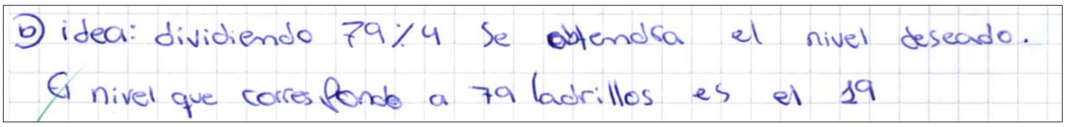

b) idea: dividiendo 79/4 se obtendría el nivel deseado.
el nivel que corresponde a 79 ladrillos es el 19

Figura 26. Respuesta del GA a la consigna b) de la actividad 1.

Esta idea fue retomada posteriormente en la puesta en común y se concluyó que, como el resto de la división, era igual a tres, esta cantidad representaba a los tres ladrillos del primer nivel, por lo tanto, la respuesta correcta no sería 19 niveles sino 20, ya que al cociente (19) habría que sumarle 1 y de esa manera se podrían hallar los niveles correspondientes a 79 ladrillos.

Este procedimiento se relaciona a lo anticipado en el procedimiento 1)b)iv), aunque los alumnos no consideran la posibilidad de sumar uno a la cantidad de ladrillos y luego dividir, como se había previsto que podría suceder.

Entre los procedimientos utilizados por los alumnos de la EPET N° 50 encontramos los planteados en las Figuras 27 y 28.


b- Corresponde al nivel 19. Le resté 3 ladrillos del primer nivel y le dividí por 4.

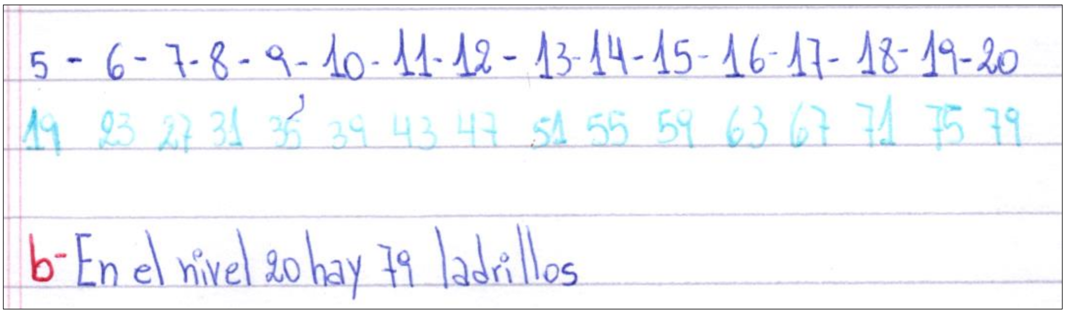
$79 - 3 = 76$

$76 : 4 = 19$

Corresponde al nivel 20.

Figura 27. Respuesta del GH a la consigna b) de la actividad 1.

En este caso, podemos observar que el grupo reconoció la necesidad de descontar los ladrillos correspondientes al primer nivel para luego dividir entre cuatro esa diferencia y poder hallar la cantidad de niveles correspondientes a una cantidad dada de ladrillos, sumando uno al cociente obtenido, aunque en un primer momento había planteado que 79 ladrillos correspondían al nivel 19.


5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20

19 23 27 31 35 39 43 47 51 55 59 63 67 71 75 79

b- En el nivel 20 hay 79 ladrillos

Figura 28. Respuesta del GJ a la consigna b) de la actividad 1.

El grupo J trabajó de la misma manera que los otros dos restantes (GI y GK), sumando cuatro y relacionando el número de nivel y la cantidad de ladrillos correspondiente.

Estos grupos trabajaron de acuerdo al procedimiento 1)b)ii) anticipado, con la única diferencia que no organizan los pares de valores en una tabla. No tuvieron la necesidad de hacerlo.

La consigna c) fue respondida por los grupos del CEP N° 43 como puede observarse en las Figuras 29, 30 y 31.

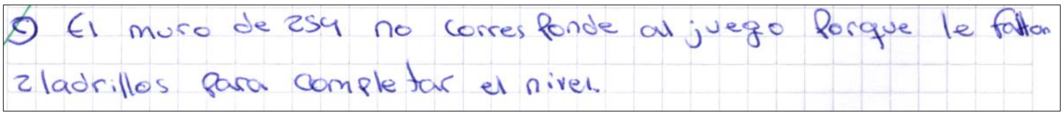


Figura 29. Respuesta del GA a la consigna c) de la actividad 1.

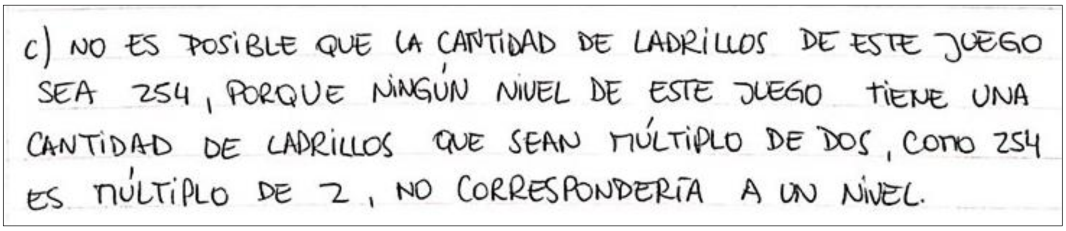


Figura 30. Respuesta del GB a la consigna c) de la actividad 1.

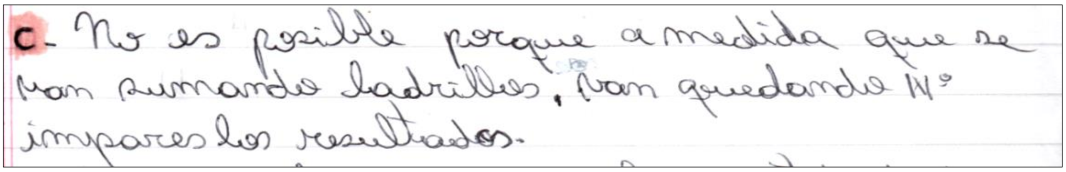


Figura 31. Respuesta del GD a la consigna c) de la actividad 1.

El grupo A es el que anteriormente había planteado que era posible conocer el número de nivel dividiendo 79 entre 4. En este caso, los alumnos dividieron 254 entre 4 y como el resto que obtuvieron fue dos, respondieron “le falta dos ladrillos para completar el nivel”. En realidad, la división indica que en 254 caben 63 grupos de 4 ladrillos y sobran dos, que no alcanzan a formar otro nivel, por tal motivo, y tal como lo plantearon, un muro de 254 ladrillos no corresponde a un nivel del juego. Si bien su conclusión es correcta, hay una interpretación errónea acerca del resto de la división. Si se agregaran dos ladrillos, tampoco se formaría un muro como los del juego ya que se tendrían 256 ladrillos que representarían 64 grupos de cuatro, y el primer nivel está formado solamente por tres ladrillos.

Los grupos B y D, por su parte, argumentaron que 254 no puede corresponder a la cantidad de ladrillos de un nivel porque se trata de un número par.

En este último caso, tal como se esperaba, la variable didáctica (es decir, el número considerado: 254) produjo un cambio en el procedimiento. Los alumnos de ambos grupos habían trabajado en las consignas anteriores “agregando cuatro ladrillos”, mientras que frente a esta consigna (y debido a que 254 es un número mayor) recurren a otro argumento para establecer que dicho número no puede corresponder a la cantidad de ladrillos de un nivel.

Tal como plantea Panizza (2003), el docente puede variar el tamaño de los números de tal manera que se modifiquen las estrategias posibles de resolución y, en consecuencia, el conocimiento a construir. Los procedimientos realizados por ambos grupos habilitaron la discusión sobre el tipo de números que corresponden a la cantidad de ladrillos del juego.

Los alumnos de la EPET N°50 respondieron a la misma consigna, basándose en otros argumentos, los cuales se recuperan en las Figuras 32 y 33.

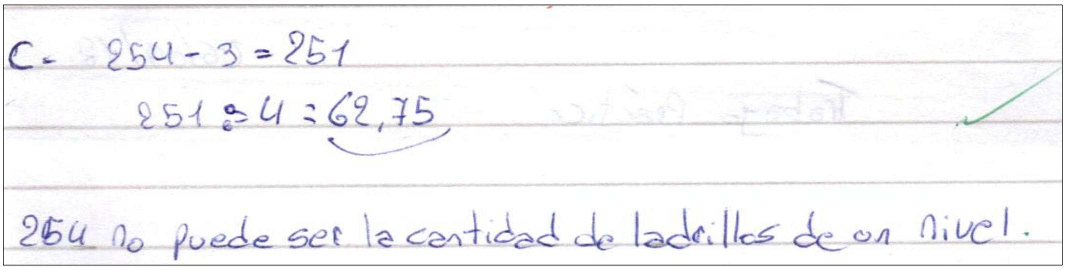
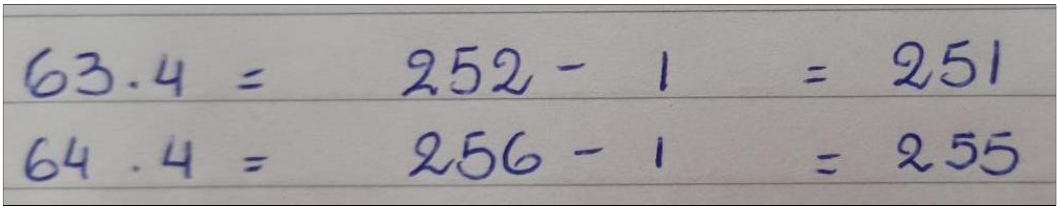


Figura 32. Respuesta del GH a la consigna c) de la actividad 1.

Siguiendo con el razonamiento utilizado para responder a la pregunta anterior, el grupo H descontó los tres ladrillos correspondientes al primer nivel y luego dividió la diferencia entre cuatro. Como el resultado que obtuvieron es un número decimal, concluyeron que 254 no podía ser la cantidad de ladrillos de un nivel.

Esta forma de trabajar se relaciona al procedimiento 1)c)iv) anticipado. El hecho de obtener un cociente decimal, permite a los alumnos establecer que 254 no puede ser la cantidad de ladrillos de un nivel.

El grupo K planteó un procedimiento que, aunque correcto, fue necesario corregirlo y completarlo durante la puesta en común. (Ver Apéndice C).



63 . 4 = 252 - 1 = 251
64 . 4 = 256 - 1 = 255

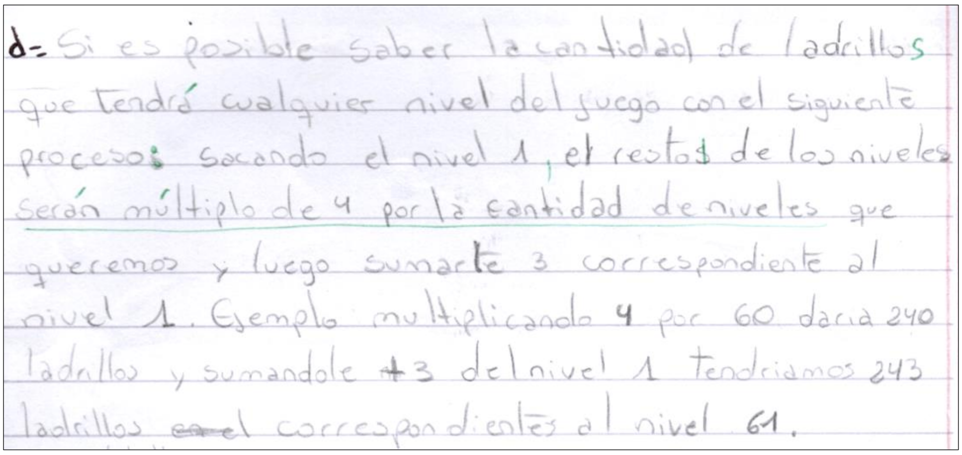
Figura 33. Respuesta del GK a la consigna c) de la actividad 1.

Como puede observarse en la imagen 33, los alumnos del grupo K reconocen que, si al número de nivel se lo multiplica por cuatro y se le resta uno, se obtiene la cantidad de ladrillos correspondiente. Trabajando con la calculadora y por tanteo lograron establecer que el nivel 63 tiene 251 ladrillos y que el nivel 64, tiene 255. Por lo tanto 254, no puede corresponder a la cantidad de ladrillos de un nivel.

En esta oportunidad, como en otros grupos se puede constatar que los alumnos hacen un uso incorrecto del signo igual, ya que lo usan como un separador de las secuencias de operaciones que realizan. En términos de Matthews y Fuchs (2020), el error fundamental que cometen los alumnos es que interpretan el signo igual como un indicador de “averigua el resultado” o “escribe el total”.

En la consigna d), solo uno de los grupos del CEP N°43 logró generalizar un procedimiento que permite calcular la cantidad de ladrillos para un nivel cualquiera.

En la Figura 34 puede observarse el razonamiento del grupo B.



d- Si es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá cualquier nivel del juego con el siguiente proceso: sacando el nivel 1, el restos de los niveles serán múltiplo de 4 por la cantidad de niveles que queremos y luego sumarle 3 correspondiente al nivel 1. Ejemplo multiplicando 4 por 60 daría 240 ladrillos y sumandole +3 del nivel 1 tendríamos 243 ladrillos ~~en~~ el correspondientes al nivel 61.

Figura 34. Respuesta del GB a la consigna d) de la actividad 1.

Si bien la respuesta del grupo no es del todo coherente en cuanto a la redacción, se entiende a través del ejemplo dado que su razonamiento es el siguiente: 4. n+3= cantidad de ladrillos del nivel n+1.

La respuesta anterior, no coincide totalmente con ninguna de las previsiones realizadas a priori, pero no deja de ser correcta ya que permite calcular la cantidad de ladrillos de un nivel dado.

Los demás grupos de esta escuela no llegaron a proponer ningún procedimiento y plantearon que no entendían qué tenían que hacer. Durante la puesta en común, primeramente, se retomó el procedimiento del grupo B, se analizó el planteo del mismo y se acordó que era correcto. Luego, en busca de un procedimiento óptimo, se confeccionó una tabla que relacionaba los niveles y la cantidad de ladrillos, se llamó "x" a los niveles e "y", a la cantidad de ladrillos y se propuso la siguiente fórmula: y=4x-1, a partir de identificar que "Si se multiplica 4 por el número de nivel y se resta 1, se obtiene la cantidad de ladrillos". (Ver Apéndice C).

En el caso de la EPET N°50, sucedió algo similar. Solamente un grupo (GH) logró generalizar un procedimiento para calcular la cantidad de ladrillos que tendrá el muro de un nivel cualquiera del juego. Este procedimiento es similar al propuesto por el grupo B del CEP N° 43 y se puede observar en la Figura 35.

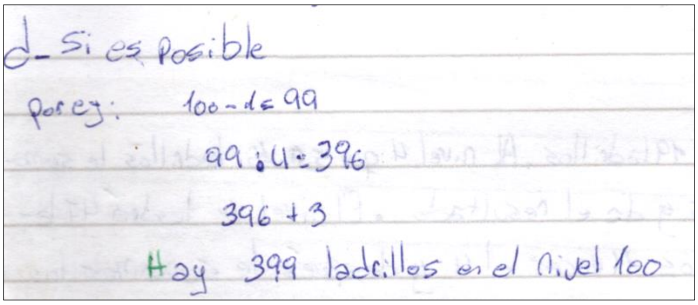


Figura 35. Respuesta del GH a la consigna d) de la actividad 1.

Se había anticipado que los alumnos podían plantear que: La cantidad de ladrillos de un nivel cualquiera podía calcularse haciendo: 3+4.(Nivel del juego-1). Así, por ejemplo, para el nivel 100 se tendría: 3+4.99= 399 ladrillos. Si bien los alumnos siguieron este razonamiento, no fueron capaces de generalizarlo utilizando letras para representar al número de nivel.

Es importante analizar cómo a través de las consignas a), b), c) y d) de la actividad 1 los alumnos pudieron avanzar desde resoluciones más básicas a otras más generales.

Por ejemplo, el grupo B, como puede verse en la Figura 25, responde a la consigna b) sumando sucesivamente cuatro ladrillos a 19 (cantidad de ladrillos correspondiente al nivel 5) hasta llegar a calcular la cantidad de ladrillos correspondiente al nivel 20. El mismo grupo, abandona este procedimiento para responder la consigna c) y tiene en cuenta que *"ningún nivel de este juego tiene una cantidad de ladrillos que sea múltiplo de 2"*, como puede verse en la Figura 30. De este modo, logra establecer que no es posible que 254 corresponda a la cantidad de ladrillos de un muro de este juego. En la consigna d), logran establecer que, si multiplican por cuatro a un número y le suman 3, podrán conocer la cantidad de ladrillos correspondientes al siguiente nivel, tal como puede observarse en el ejemplo que aparece en la Figura 34.

Por su parte, el grupo H también evidencia un avance en las resoluciones. Para responder a la primera pregunta de la consigna a) suma cuatro ladrillos a 15 (ladrillos correspondientes al nivel 4), tal como puede verse en la Figura 22. Para responder a la segunda pregunta no continúa sumando de 4 en 4, hasta llegar a calcular los ladrillos del nivel 12, sino que, multiplican 11 veces el 4 y después le suman los tres ladrillos correspondientes al primer nivel (Figura 22). En la consigna b) le restan al 79 los tres ladrillos del primer nivel y al resultado le dividen por 4, tal como puede verse en la Figura 27. En la consigna c) utilizan el mismo procedimiento y en la consigna d), aunque no lo explican utilizando el lenguaje verbal y tampoco haciendo uso del lenguaje simbólico, plantean un ejemplo que permite evidenciar una forma general de calcular la cantidad de ladrillos correspondientes a un nivel dado. (Figura 35).

En cuanto a la consigna e), en ambas instituciones, varios de los grupos lograron representar los pares de puntos correspondientes en un sistema de ejes cartesianos, pero en casi todos los casos, fue necesaria la intervención docente a fin de que los alumnos ubiquen correctamente las variables sobre los ejes. Muchos de los alumnos, al darse cuenta que obtenían puntos alineados contestaron que si tenía sentido unir los puntos con una línea de trazo continuo. Este aspecto se trabajó luego en la puesta en común, estableciendo que *"No tiene sentido unir los* *puntos porque es una variable discreta. No tiene sentido hablar de niveles intermedios. Ejemplo: ½.* (Respuesta GD).

Durante la puesta en común, en ambos cursos, se retomaron las producciones para armar la tabla, generalizar la relación a través de una fórmula (usando x e y) y graficar la función en un sistema de ejes cartesianos. (Ver Apéndice B y C). En la Figura 36 puede observarse una representación gráfica realizada por uno de los grupos de la EPET N° 50.

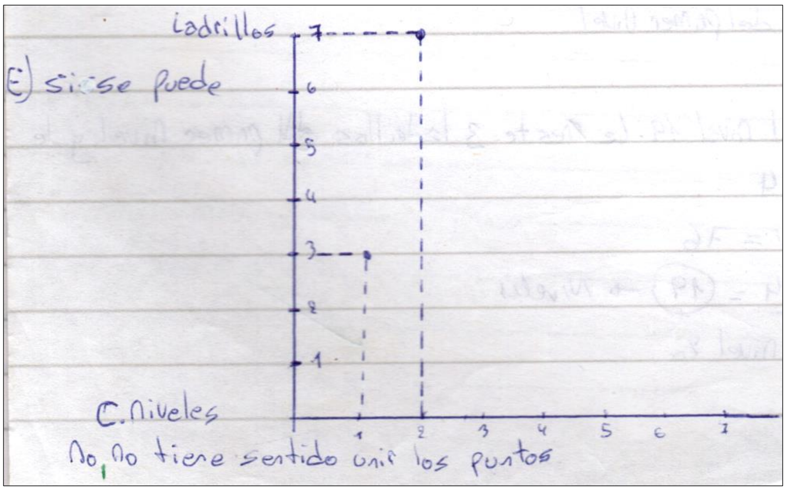
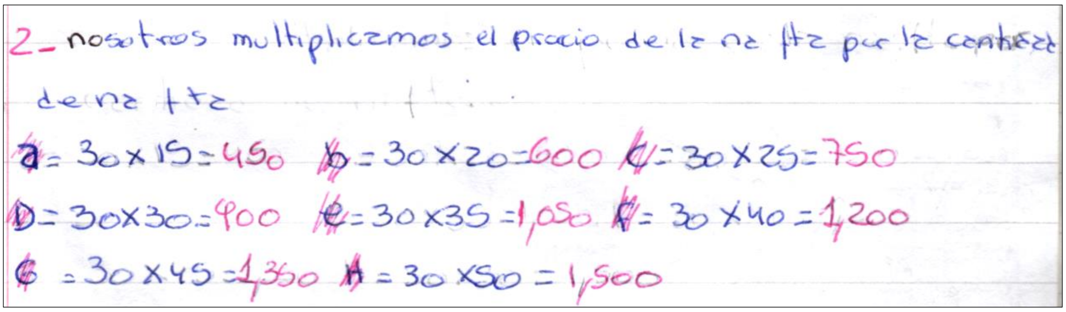


Figura 36. Gráfica realizada por el GH en la consigna e) de la actividad 1.

Una vez concluida la actividad 1 se trabajó con la actividad 2, cuyo enunciado se puede observar en la Figura 5.

Todos los grupos, de ambas escuelas, completaron la tabla sin inconvenientes. Hay quienes multiplicaron cada uno de los valores dados por treinta (precio de un litro de nafta) y otros que fueron sumando $150 sucesivamente acorde a lo previsto en los procedimientos 2)a)i) y 2)a)ii).

Las Figuras 37 y 38, corresponden a justificaciones realizadas por dos grupos al completar los valores de la tabla.


2- nosotros multiplicamos el precio de la nafta por la cantidad de nafta

a= 30x15=450 b=30x20=600 c=30x25=750

d=30x30=900 e=30x35=1,050 f= 30x40=1,200

g =30x45=1,350 h=30x50=1,500

Figura 37. Respuesta del GB a la consigna a) de la actividad 2.

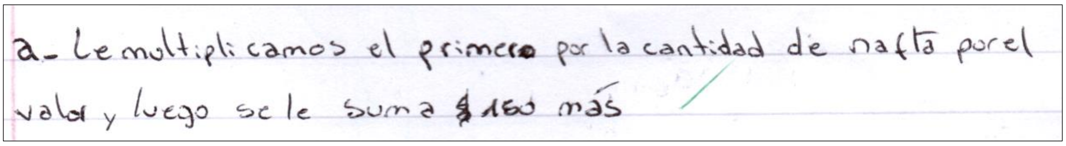

a- Le multiplicamos el primero por la cantidad de nafta por el valor y luego se le suma $160 más

Figura 38. Respuesta del GC a la consigna a) de la actividad 2.

Como puede observarse en la Figura 37, los alumnos plantean los productos que les permiten calcular el precio de las distintas cantidades de nafta solicitadas, sin hacer uso de las unidades de medida, hecho que se menciona en la puesta en común pero no se profundiza y tampoco se deja explícito.

Es importante reconocer que las unidades de medida surgen del contexto y si estas no se consideran, el trabajo aritmético termina siendo descontextualizado.

En la consigna b) todos los grupos respondieron que el precio a pagar depende de la cantidad de nafta a cargar. Pero antes de llegar a esta conclusión, algunos alumnos plantearon la posibilidad de que: la cantidad de nafta a cargar podría depender del precio del combustible. En esos casos fue necesaria la intervención docente para que dichos alumnos centren su atención en las variables que planteaba el problema.

En la consigna c), todos los grupos respondieron correctamente. Aquellos que tenían dudas acerca de la relación de dependencia establecida entre la cantidad de nafta que carga y el precio a pagar, habían consultado al docente en la consigna anterior.

El objetivo de identificar las variables que intervienen en una situación, tal como se plantea en la Clase 02 de Enseñanza del Álgebra y las Funciones correspondiente al Instituto Nacional de Formación Docente (2015), es estudiar su dependencia para caracterizar esta relación y empezar a construir un nuevo conocimiento sobre la situación o fenómeno considerado.

En la consigna d) algunas de las respuestas de los grupos del CEP N° 43 fueron las siguientes:

GA: "Son $150 cada 5 litros".

GC: "La multiplicación es la fórmula para obtener el precio a pagar por cualquier cantidad de nafta"

GD: "La fórmula para calcular el precio de la nafta, es multiplicar la cantidad de litros de nafta por el valor que es $30".

A partir de estas respuestas, se puede evidenciar que los alumnos no tienen incorporado el concepto de fórmula. Si bien entienden a qué hace referencia la pregunta, no logran hacer uso del lenguaje simbólico.

Tal como lo ha expresado Esquinas Sancho (2009), el carácter del Álgebra como lenguaje, hace que su comprensión sea un obstáculo en la evolución del pensamiento lógico de los estudiantes.

Durante la puesta en común, se hizo hincapié en la necesidad del lenguaje simbólico para poder expresar mediante una fórmula, la relación que existe entre el precio a pagar y la cantidad de nafta que se carga. Representando con "x" a la cantidad de nafta que se carga y con "y" al precio que se paga, se formuló con el grupo clase la siguiente expresión: $y=30.x$ (Ver Apéndice B)

En el caso de la EPET N° 50, dos de los grupos elaboraron por sí solos, una fórmula que permite calcular el precio a pagar cualquiera sea la cantidad de nafta que se cargue. Así el GA escribió: $30.\ x=y$ y el GC: $y=30.\ x$

Esto evidencia que, los alumnos pudieron establecer relaciones con las explicaciones correspondientes a la actividad 1 y utilizar el lenguaje simbólico, tal como se había propuesto, para representar la relación entre la cantidad de combustible que se carga y el precio a pagar.

En la consigna e), varios de los grupos manifestaron que se trataba de la tabla anterior. En esos casos, fue necesaria la intervención docente, para hacerles ver a los alumnos que se había modificado una de las variables involucradas. Una vez reconocido este hecho, todos los grupos (de ambas instituciones) completaron correctamente la tabla.

Algunas de las respuestas a la pregunta de la consigna f) fueron las siguientes:

GA: "Porque ya tiene 15 litros y cada 5 litros son $150 más".

GB: "Multiplicar la cantidad de nafta que se carga por el precio de la nafta".

GG: "Multiplicando la cantidad de nafta que hace falta por la cantidad que sale la nafta, así podemos saber el precio que nos va a salir".

GH: "Como en el tanque ya había 15 litros, le resto los 15 que ya había en el tanque y al resultado le multiplico por el precio de la nafta".

Nuevamente se evidencia, a partir de las respuestas elaboradas en los distintos grupos, que los alumnos pueden expresar con palabras la forma de calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque. Todos, de una u otra forma, tuvieron en cuenta que debían considerar solo la cantidad de combustible que se agregaba (a los quince litros de nafta que ya tenía el tanque) para poder calcular el precio a pagar y respondieron al interrogante planteado detallando la forma como habían trabajado para completar la tabla.

Si bien la pregunta no pedía explícitamente que elaboren una fórmula, el docente esperaba que los alumnos recurrieran al lenguaje simbólico para expresar de qué forma se puede calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque. Los alumnos pudieron resolver el interrogante planteado sin hacer uso del lenguaje simbólico, por tanto, lo que habría que revisar es la formulación de la pregunta para crear esta necesidad sino sucede lo que plantea Esquinas Sancho (2009), el Álgebra no aparece como una herramienta útil sino como un método impuesto por el profesor.

Recién en la puesta en común, con el aporte de todos los grupos y teniendo en cuenta el trabajo en torno a la consigna d) pudo formularse la siguiente expresión: $y = 30.(x - 15)$. (Se pueden consultar los registros de clase del CEP N° 43 y de la EPET N° 50 en los Apéndices B y C, respectivamente).

En la consigna g) se solicitaba la conversión de registro tabular a registro gráfico, la mayoría de los grupos tuvo inconvenientes para realizar las representaciones gráficas e hicieron consultas sobre: ubicación de las variables sobre los ejes y escala a utilizar.

En la Figura 39 puede observarse la representación realizada por uno de los grupos. Los errores de la misma se reprodujeron en varios de los grupos y fue necesario trabajar sobre ellos durante la puesta en común ya que los alumnos ubicaron sobre los ejes a los valores de la tabla sin tener en cuenta la ubicación del cero en la intersección de los ejes cartesianos. (Ver Apéndice B)

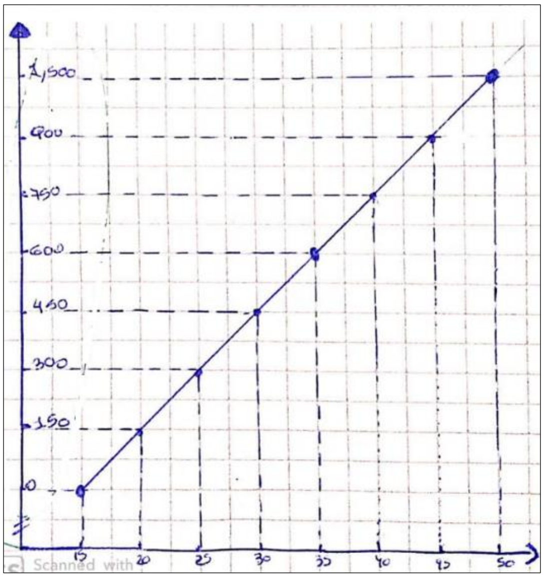


Figura 39. Representación gráfica del GG en la consigna g) de la actividad 2.

Si bien los alumnos respetan la correspondencia entre pares de valores (A 15 le hacen corresponder 0, a 20 le hacen corresponder 150, etc.), tuvieron dificultades para ubicar los valores de las variables sobre los ejes utilizando una escala adecuada. En esta imagen puede verse que además de no ubicar el cero en la intersección de los ejes, utilizan una escala de 5 en 5 sobre el eje horizontal, a partir del valor 15 sin considerar los valores anteriores (5 y 10).

En el caso de los alumnos de la EPET N° 50, el gráfico se realizó en el pizarrón con la participación de los distintos grupos. (Ver Apéndice C).

Aunque los alumnos habían desarrollado actividades de representación de puntos en el plano, fue necesario trabajar a partir de los errores cometidos para resignificar conocimientos anteriores y construir otros nuevos, como ser, recta que pasa por dos puntos. En este caso, tenía sentido unir los puntos con una línea de trazo continuo ya que la variable: cantidad de nafta, es continua y admite valores intermedios, como ser 15 litros y medio.

Seguidamente se trabajó con la actividad número 3, cuyas consignas pueden observarse en la Figura 7.

Antes de comenzar a trabajar con el problema 3 fue necesario explicar a los alumnos de ambas instituciones, qué significaba bajada de bandera. Una vez entendido el concepto comenzó el trabajo grupal.

Si bien este parece ser un problema muy sencillo de resolver, generó muchas dudas e inquietudes en los diferentes grupos. Sólo tres de los grupos (en el CEP N° 43) trabajaron desde el procedimiento óptimo, los demás fueron resolviendo por tanteo e incluso, calcularon mal las cuadras o precios correspondientes.

En la Figura 40 se puede observar cómo el razonamiento seguido por el grupo B es correcto, aunque tienen errores en cuanto al uso del signo igual en dos oportunidades. Este tipo de errores se registró en reiteradas ocasiones entre los alumnos por lo cual debió tratarse de forma individual frente a las consultas de los distintos grupos y de manera grupal, durante los momentos de puesta en común.

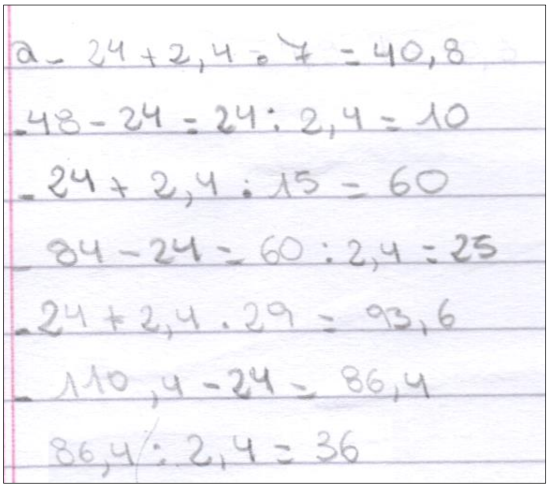


Figura 40. Procedimiento realizado por el GB en la consigna a) de la actividad 3.

Por otra parte, es importante resaltar cómo los alumnos no hacen uso de las unidades de medida fijadas por el contexto, y el trabajo realizado es meramente aritmético. Este aspecto no se retoma en la puesta en común, cuando en realidad es una característica importante que debía haberse profundizado.

Otros grupos siguieron el mismo razonamiento que el utilizado por el grupo B y resolvieron los cálculos utilizando la calculadora y, aunque obtuvieron los resultados correctos (en casi todos los casos), no lograron expresar de manera apropiada los cálculos realizados al momento de calcular las cuadras recorridas conocido el precio del viaje.

Por ejemplo, el grupo G planteó que para hallar la cantidad de cuadras correspondiente a un viaje de $48 se podía hacer: 48:2,4-24. En este caso, la cuenta realizada no permite calcular lo solicitado, ya que primero se divide el costo total entre el precio por cuadra y luego se descuenta la bajada de bandera, lo correcto hubiera sido hacer: (48-24):2,4.

Posteriormente, el mismo grupo planteó la cuenta: 84-24:2,4 para calcular la cantidad de cuadras recorridas en un viaje de $84. Si bien es cierto que, para calcular la cantidad de cuadras correspondientes es necesario restar 84-24 y luego dividir la diferencia entre 2,4, los alumnos no expresaron correctamente este cálculo ya que no hicieron uso de paréntesis. Lo correcto es plantear:

($84-$24): 2,4$/cuadra.

Este tipo de errores corresponde a lo que Caronía, Rivero, Operuk y Mayol (2014) caracterizan como "errores en el orden en que efectúan las operaciones", los estudiantes consideran que el orden del cálculo que deben realizar es de izquierda a derecha, de la manera como se presentan los términos.

En la Figura 41 puede observarse de qué manera las integrantes del grupo G, expresaron las cuentas realizadas en la consigna a) de la actividad 3. Nuevamente se evidencian problemas en la escritura de los cálculos, ya que, en primer lugar, no se tiene en cuenta las unidades de medida y por otro, no se hace uso de los paréntesis en los casos b) d) y f), considerando que las operaciones se resuelven de izquierda a derecha, evidenciando así dificultades en la jerarquía de las operaciones.

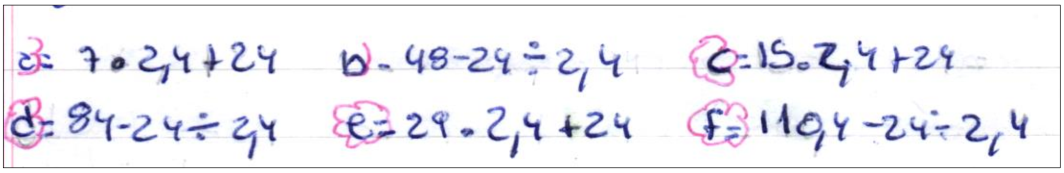


Figura 41. Procedimiento realizado por el GG en la consigna a) de la actividad 3.

El grupo D, por su parte, para justificar los resultados obtenidos en la tabla detalló en lenguaje coloquial las operaciones llevadas a cabo, las cuales pueden observarse en la Figura 42. Puede notarse que, en los casos donde debían calcular la cantidad de cuadras recorridas, conocido el precio del viaje, los alumnos resolvieron por tanteo, haciendo uso de la calculadora.

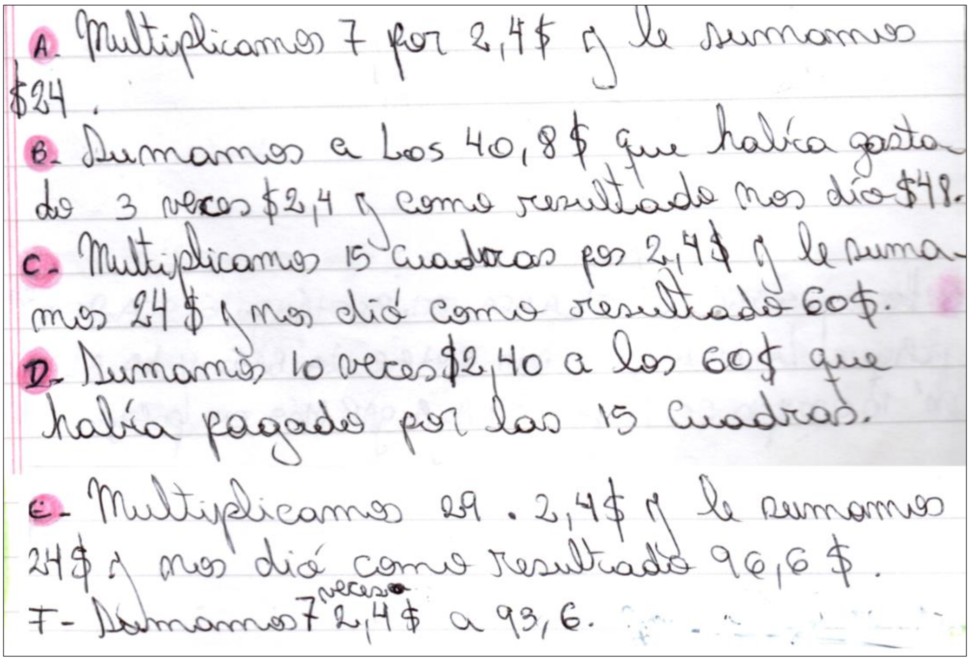

A- Multiplicamos 7 por 2,4$ y le sumamos $24.
B- Sumamos a los 40,8$ que había gastado 3 veces $2,4 y como resultado nos dió $48.
C- Multiplicamos 15 cuadras por 2,4$ y le sumamos 24$ y nos dió como resultado 60$.
D- Sumamos 10 veces $2,40 a los 60$ que había pagado por las 15 cuadras.
E- Multiplicamos 29 . 2,4$ y le sumamos 24$ y nos dió como resultado 96,6$.
F- Sumamos 7 veces 2,4$ a 93,6.

Figura 42. Explicaciones realizadas por el GD en la consigna a) de la actividad 3.

Este grupo hace uso de las unidades de medida, se refiere a pesos y cuadras en casi todas sus afirmaciones, a diferencia de los grupos anteriores.

En la EPET N° 50, los procedimientos utilizados se repitieron, al igual que, los errores en el orden en que efectúan las operaciones, como puede verse en la Figura 43.

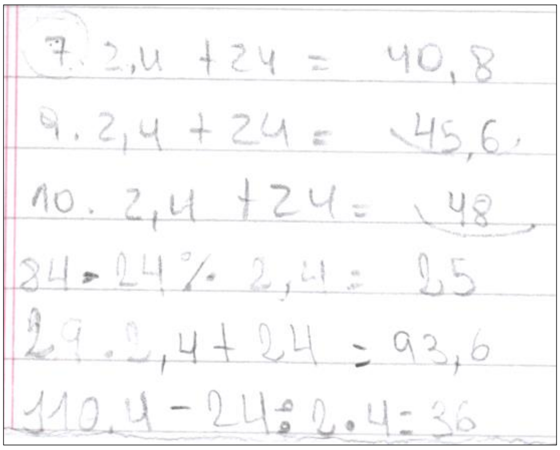

7 . 2,4 + 24 = 40,8
9 . 2,4 + 24 = 45,6
10 . 2,4 + 24 = 48
84 - 24 % 2,4 = 25
29 . 2,4 + 24 = 93,6
110,4 - 24 ÷ 2,4 = 36

Figura 43. Cálculos realizados por el GH en la consigna a) de la actividad 3.

Durante las puestas en común, la docente que ya conocía los procedimientos utilizados por los alumnos, retomó cada uno de estos, acordó con los alumnos cuál era el procedimiento óptimo en cada caso y estableció la importancia del uso del paréntesis durante los cálculos. (Ver Apéndices B y C).

En la resolución de la consigna b), todos los grupos trabajaron de acuerdo al procedimiento 3)b)ii) anticipado. Teniendo en cuenta el trabajo realizado en la consigna a), llegaron a la misma conclusión: *"Se pueden recorrer 240 cuadras"*.

Aunque el trabajo con las unidades de medida no se profundizó durante los cálculos realizados, sí se hizo hincapié en la interpretación de los resultados.

En la consigna c), la mayoría de los grupos pudo elaborar por sí solos la siguiente fórmula: $y=2,4x+24$, ya que reconocieron correctamente que era necesario sumar la bajada de bandera en todos los casos, más el importe correspondiente a las cuadras, siendo x la cantidad de cuadras recorridas en cada caso. Ya en este caso, la mayoría de los alumnos logran hacer la traducción de la representación verbal a la representación analítica, haciendo uso de las letras para simbolizar a las variables.

En la consigna d), todos los grupos coincidieron en que el gráfico que representaba a la situación era el c) porque:

GE: "Empieza a subir el precio a pagar desde una suma fija".

GI: "A medida que recorren las cuadras, aumenta el precio".

Al momento de la puesta en común de esta consigna, en ambos cursos, fue necesario hacer hincapié en la necesidad de justificar la elección, porque al decir, por ejemplo: *"A medida que recorren las cuadras, aumenta el precio"*, también se podía hacer referencia al gráfico a). Se hizo notar que, el primero de los gráficos comienza desde cero, mientras que el segundo desde un valor mayor que, en ese caso, correspondería a $24.

También se analizó el gráfico b) y se acordó que no representa a la situación porque a medida que aumentan las cuadras recorridas, disminuye el precio, lo cual no tiene sentido en el contexto planteado.

En este tipo de actividades tiene lugar la conversión del registro analítico al gráfico ya que a partir de la lectura e interpretación de la fórmula construida previamente se puede elegir un gráfico entre las tres opciones, considerando que la bajada de bandera, es decir, el costo fijo del servicio corresponde a la intersección de la recta con el eje de las ordenadas, mientras que el costo por cuadra recorrida determina, la inclinación de la recta.

Seguidamente se trabajó con la actividad 4, cuyas consignas se pueden observar en la Figura 8.

Antes de comenzar con el trabajo grupal fue necesario recordar cómo se calculaba el área de un rectángulo ya que los alumnos manifestaron no recordarlo. Además, fue necesario indicar que x representaba la longitud que se alargaba la base y 2 cm, la altura del rectángulo que se mantenía constante.

Luego de estas aclaraciones, la mayoría de los grupos eligió la última de las fórmulas, pero fue necesario trabajar posteriormente en la puesta en común, sobre la equivalencia de esta última con la tercera fórmula propuesta, además de analizar las fórmulas restantes.

Para que los grupos respondieran a la pregunta planteada en la consigna b), fue necesaria la intervención docente en varias oportunidades, a fin de que los alumnos pudieran reconocer las medidas originales del rectángulo y el área del mismo. Siete de los once grupos lograron establecer por sí solos que, no es posible que el área del rectángulo sea de 9 cm^2. Algunas justificaciones dadas fueron las siguientes:

GA: "El rectángulo alargado no puede tener 9 cm^2 porque multiplicando la base por la altura dará más que 9 cm^2".

GD: "No es posible que el área del rectángulo sea 9 cm^2, porque la multiplicación entre la base y la altura da 10 cm^2 y no se le pueden agregar más cm porque se pasaría de los 9 cm^2".

GJ: "No puede tener 9 cm^2 porque el área original tiene 10 cm^2".

Como puede observarse, los alumnos correspondientes a los grupos mencionados reconocen que el área del rectángulo original es de 10 cm^2, por lo cual, si se alarga el rectángulo el área resultante no podría ser de 9 cm^2.

De los siete grupos de trabajo del CEP N° 43, dos no resolvieron la actividad, dos sólo resolvieron la primera pregunta y los tres restantes resolvieron completamente la actividad.

De acuerdo a lo anticipado en el procedimiento 4)c)i), todos los grupos que respondieron a la primera pregunta planteada coincidieron que, si x vale 9 cm, la base mide 14 cm, entonces el área medirá 28 cm^2 porque 14 cm. 2 cm=28 cm^2.

El hecho de incluir dos variables didácticas en la consigna c), esto es, un número impar (29cm^2) y un número decimal (29,5 cm^2), representaron un obstáculo para los alumnos ya que menos del 50% de la clase logró responder a los interrogantes planteados.

La Figura 44 muestra el procedimiento realizado por el grupo B. Los alumnos haciendo uso de la calculadora, fueron probando distintos valores correspondientes a la base (cercanos a 14) y concluyeron que, si la base mide 14,5 cm el área sería de 29 cm^2 y que, si la base mide 14,75 cm, el área sería 29,5 cm^2.

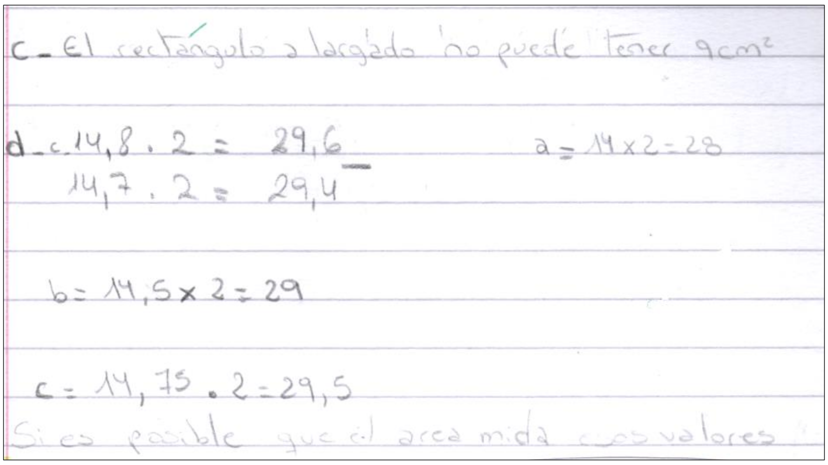


Figura 44. Procedimiento del GB en la consigna c) de la actividad 4.

De manera similar trabajaron los grupos A y G.

También en este problema se descuidó el trabajo con las unidades de medida, que en este caso es fundamental para expresar las longitudes de los lados y el área del rectángulo.

Durante la puesta en común se retomó el trabajo realizado por estos grupos y, además, se analizó la posibilidad de responder a las preguntas planteadas haciendo uso de la fórmula seleccionada al principio a través de la resolución de ecuaciones lineales. (Ver Apéndice B).

En el caso de los alumnos de la EPET N° 50, los alumnos no llegaron a plantear por escrito las ideas que tenían con respecto a la consigna c) de esta actividad, entonces la docente una vez que se compartieron las consignas a) y b) y retomando el cálculo mental realizado por uno de los grupos, planteó el uso de ecuaciones para determinar la medida de x, a fin de que el área del rectángulo sea igual a 28, 29 y 29,5 cm^2. (Ver Apéndice C).

Varios de los alumnos pudieron resolver la actividad desde el plano aritmético, aunque no todos. La consigna propuesta no generó la necesidad de recurrir a la fórmula. Nuevamente es el docente quien interviene para visibilizar el uso de la fórmula elegida anteriormente y el planteo de ecuaciones, como procedimiento óptimo de resolución.

En la Figura 9, pueden observarse las consignas de la actividad 5.

En la consigna a) todos los grupos terminaron eligiendo la tercera fórmula, pero se evidencia que anteriormente, algunos grupos, habían elegido la primera (y=80.000-5.000x) o la última (y=5.000x+60.000).

La elección de la primera de las fórmulas propuestas puede deberse a la consideración, únicamente, de los valores que contenía el enunciado del problema, mientras que la elección de la última, puede deberse a una interpretación errónea del enunciado (se llenó un cuarto de la pileta, y no tres cuartos de la misma).

Luego de la intervención docente y la insistencia en la lectura e interpretación del enunciado, los alumnos eligieron la tercera de las fórmulas propuestas.

Entre las respuestas a la pregunta de la consigna b) encontramos las siguientes:

GG: y=5.000. 2,5 + 20.000=32.500   Habrá en la pileta 32.500 litros.

GH: “Si es posible. En dos horas y media habrá 12.500 litros”.

GK: “Si es posible, si reemplazamos la x por el 2,5, en dos horas y media arroja 12.500 litros y la pileta tendrá 32.500 litros”.

Aunque la consigna b) pedía explícitamente el trabajo a partir de la fórmula elegida, la mayoría de los alumnos respondió teniendo en cuenta la información contenida en el enunciado: la pileta ya tenía 20.000 litros de agua y la bomba arroja 5.000 litros de agua por hora.

Varios de los grupos hicieron el cálculo mentalmente y a pedido del docente expresaron por escrito el razonamiento seguido. Sólo uno de los grupos escribió el cálculo realizado a partir de la fórmula.

Algunos grupos (por ejemplo, el grupo H) sólo consideraron la cantidad de agua que arroja la bomba en el tiempo solicitado olvidándose de los 20.000 litros que ya contenía la pileta.

En la consigna c), las respuestas obtenidas fueron dos: 12 horas y 16 horas, ya que algunos grupos no tuvieron en cuenta que ya se había cargado un cuarto de la pileta. Este hecho tuvo que retomarse en la puesta en común y se estableció que eran necesarias 12 horas para llenar la pileta.

El grupo E, por ejemplo, fue uno de los grupos que respondió que eran necesarias 16 horas para llenar la pileta, porque como puede verse en la Figura 45, fue calculando la cantidad de agua que tendría la pileta a medida que pasaban las horas sin tener en cuenta que la pileta ya contenía 20.000 litros de agua que se habían cargado el día anterior.

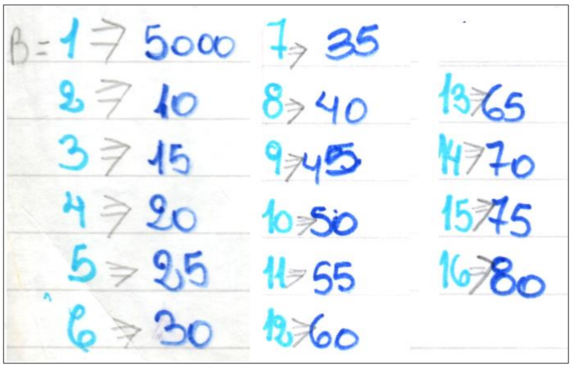


Figura 45. Cálculos realizados por el GE en la consigna c) de la actividad 5.

En este caso podemos ver cómo los alumnos relacionan las horas con los litros de agua que contiene la pileta (escriben 10, 15, 20… en vez de 10.000, 15.000, 20.000…). No identifican las variables relacionadas y tampoco utilizan una representación tabular para organizar la información.

Los integrantes del grupo J trabajaron de manera similar, pero tuvieron en cuenta los 20.000 litros de agua que ya contenía la pileta: *“Se llenaría en 12 horas, lo resolvimos sumando 5.000 en 5.000 a partir de los 20.000 que ya tenía”.*

Solo uno de los grupos del CEP N° 43 (GG) logró usar la fórmula, plantear una ecuación y despejar el valor desconocido, tal como puede verse en la Figura 46. Este hecho se retomó en la puesta en común a fin de aclarar dudas y explicitar el razonamiento seguido. (Ver Apéndice B).

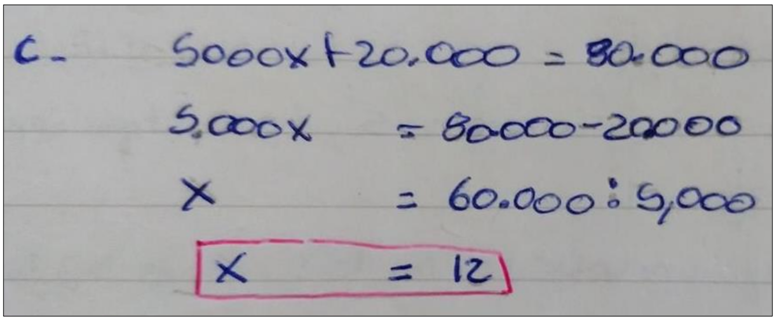


Figura 46. Procedimiento del GG en la consigna c) de la actividad 5.

La consigna c) suponía un trabajo de tratamiento dentro del registro de representación analítica, ya que una vez fijado el valor de una de las variables (y=80.000 litros, esto es la capacidad total de la pileta), se debía resolver la ecuación planteada a fin de hallar el valor de x, correspondiente.

Este tipo de consignas son las que permiten articular los conceptos de función y ecuación, ya que la fórmula seleccionada en la consigna a) muestra la relación existente entre las dos variables: Tiempo (medido en horas) y cantidad de agua que contiene la pileta (medida en litros). Una vez que una de las variables toma un valor particular, esa relación pasa a ser una ecuación, para la cual es posible hallar su solución.

La idea de variabilidad del símbolo algebraico frente a la particularidad del aritmético supone otro de los elementos más destacados de la ruptura aritmética-álgebra, tal como lo expone Esquinas Sancho (2009).

En la EPET N° 50, ningún grupo resolvió esta consigna a partir de una ecuación utilizando la fórmula elegida, pero el grupo H planteó durante la puesta en común: *“A los 80.000 litros, se descuenta 20.000 litros y luego al resultado le dividimos por 5.000, que es lo que la bomba carga en una hora y da de resultado 12 horas”.* Puede evidenciarse que, aunque este grupo no utilizó el lenguaje simbólico para plantear y resolver una ecuación, entendió la situación y la resolvió de manera correcta. Este hecho se retomó y se lo trabajó con el grupo clase. (Ver Apéndice C).

En el CEP N° 43, tres de los grupos no respondieron a la pregunta planteada en la consigna d), tres respondieron haciendo referencia a cómo se modificaron las operaciones en relación a la fórmula que habían seleccionado previamente y solo el grupo C, logró responder haciendo referencia al contexto de manera un poco más precisa. Por ejemplo:

GA: *"En la primera fórmula se le resta 5.000 a la pileta, en la segunda fórmula se le resta 5.000 litros a los 20.000 litros y en la última fórmula se le suma 5.000 litros a los 60.000 litros".*

GC: *"La fórmula que no marcamos:*

a) Marca que la pileta se vacía, se sacan 5.000 litros por hora.
b) Se vacía, se sacan 5.000 litros de agua por hora.
c) Se cargan 5.000 litros por hora siendo que ya tiene 60.000 litros."

Durante la puesta en común, se intentó construir el significado completo asociado a cada fórmula, con el aporte de los distintos grupos. (Ver Apéndice B).

En la EPET N° 50, tres de los grupos respondieron de manera casi totalmente correcta al significado de las tres fórmulas restantes. Por ejemplo:

GH: "En la primera fórmula dice que tiene 80.000 litros y se le vacía 5.000 litros. En la segunda fórmula tiene 20.000 litros en la pileta y se le vacía 5.000 litros. En la otra fórmula dice que tiene 60.000 litros en la pileta y se le carga 5.000 litros".

Este tipo de consigna permite trabajar sobre el significado de los parámetros involucrados en una expresión algebraica, los cuales al momento de graficar la función serán muy importantes: la cantidad de agua que contiene la pileta (esto es el término independiente de la función) se corresponde con la intersección de la recta con el eje de ordenadas en el registro gráfico y la cantidad de agua que arroja la bomba en una hora, determinará la inclinación de la recta en el registro gráfico (pendiente).

En el CEP N° 43, los distintos grupos no lograron realizar por sí mismos, las representaciones gráficas solicitadas en la consigna e), por tal motivo, la docente luego de mostrar cómo representar gráficamente la primera de las fórmulas a partir de la construcción de una tabla de valores, destinó tiempo para que cada uno de los grupos pudiera realizar los distintos gráficos. (Ver Apéndice C).

Mientras los distintos grupos realizaron sus construcciones se fueron haciendo las correcciones que resultaron necesarias, la mayoría de ellas, relacionadas a la escala utilizada, a la ubicación de las variables sobre los ejes y la representación de puntos en el plano.

En las Figuras 47, 48 y 49 se observan las tablas y gráficos construidos por los integrantes del grupo B.

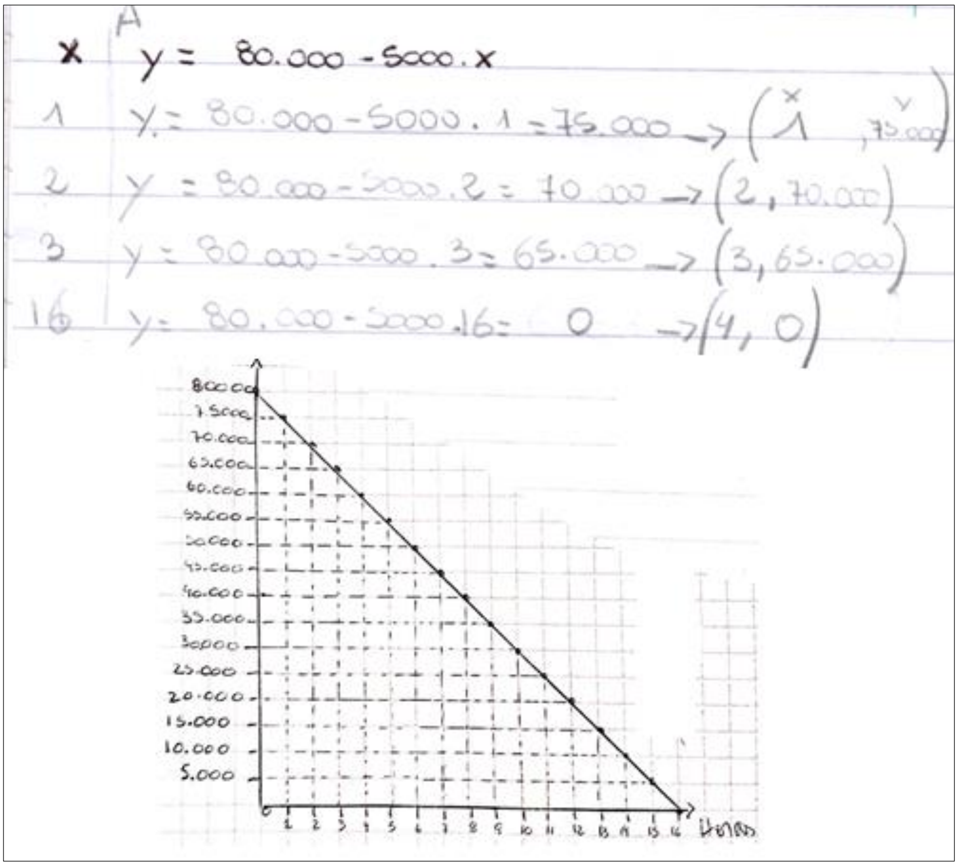


Figura 47. Tabla y gráfico construido para la función y=80.000-5.000x por el GB en la consigna e) de la actividad 5.

En este caso, los alumnos calculan cuatro pares de valores correspondientes. En el último de ellos cometen un error y escriben (4;0), cuando en realidad era (16; 0). Como han entendido que por cada hora se desagotan 5.000 litros, aunque no hagan todos los cálculos, representan todos los pares ordenados hasta desagotar la pileta por completo.

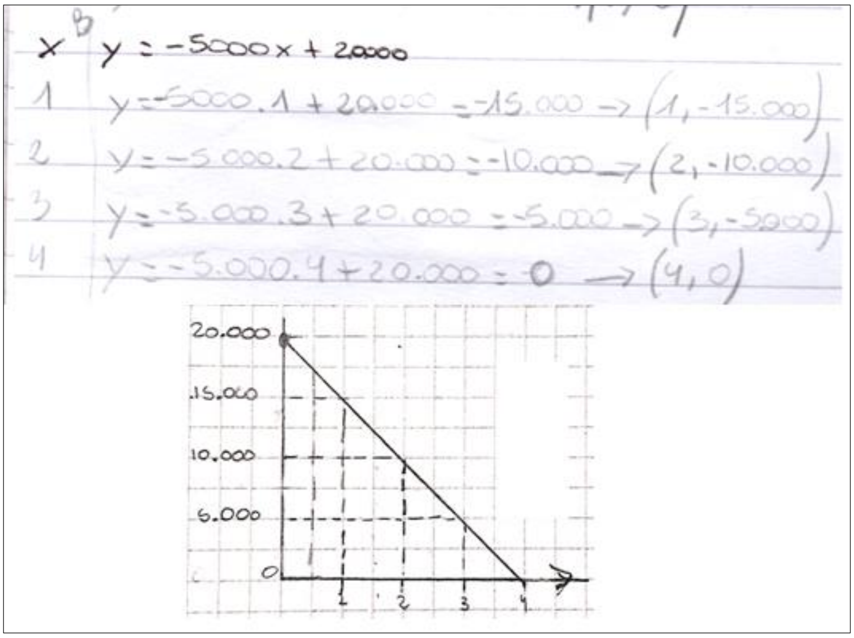


Figura 48. Tabla y gráfico construido para la función y=-5.000x+20.000 por el GB en la consigna e) de la actividad 5.

En este caso, los alumnos cometen un error, al considerar que las diferencias obtenidas son negativas, hecho que luego no tienen en cuenta al momento de graficar, ya que consideran valores positivos.

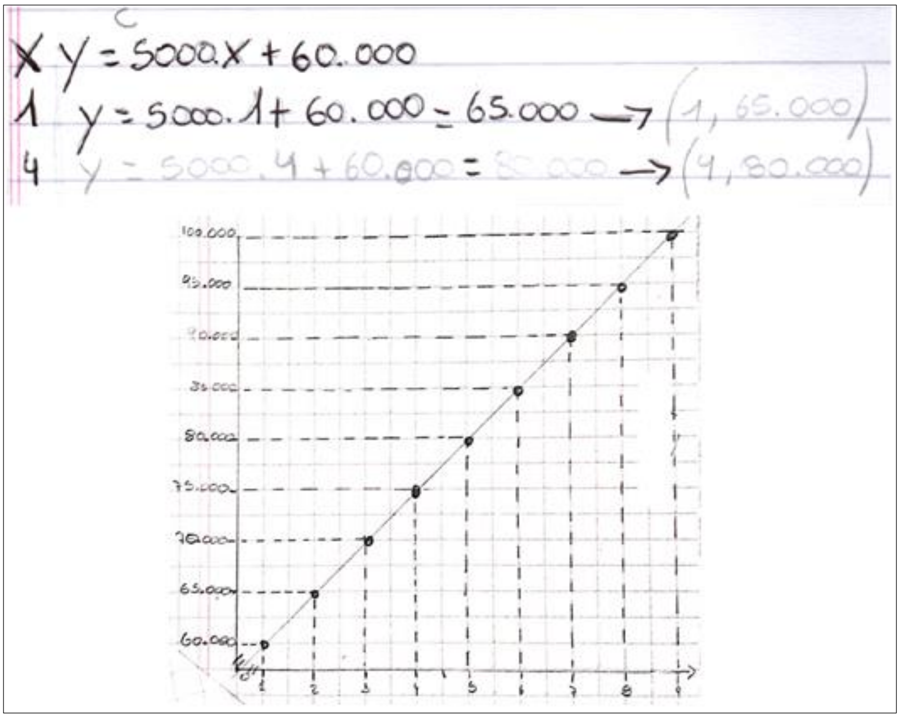


Figura 49. Tabla y gráfico construido para la función y=-5.000x+20.000 por el GB en la consigna e) de la actividad 5.

Si bien los alumnos calculan correctamente los pares de valores correspondientes, al momento de graficar no tienen en cuenta lo realizado y grafican erróneamente la relación presentada a través de la fórmula. Comienzan el gráfico representando el punto (1;60.000) descuidando el hecho de que a cero horas corresponde 60.000 litros, a partir de ahí tienen en cuenta que por cada hora se agregan 5.000 litros de agua, y mantienen esa variación uniforme para representar los demás puntos del gráfico.

Esta consigna planteaba la conversión, en primer lugar, del registro analítico al tabular y luego, del registro tabular al registro gráfico. Si bien los alumnos ya habían realizado representaciones gráficas en las actividades anteriores, en la actividad 1 y 2, no intervino el registro analítico en la representación gráfica, ya que los alumnos representaron, en el problema 1, los niveles y la cantidad de ladrillos observando la secuencia presentada en la consigna y en el problema 2, primero completaron la tabla (sin hacer uso de ninguna fórmula) y luego representaron los pares ordenados.

Esta actividad corresponde a un circuito privilegiado dentro de las actividades propuestas por los docentes al trabajar el concepto de función (fórmula→ tabla→ gráfico). En este caso, la actividad representó un obstáculo para varios de los alumnos ya que se pusieron en juego tres tipos de representación semiótica y no todos los alumnos fueron capaces de realizar las conversiones de manera correcta.

En la EPET N° 50, los alumnos trabajaron (tomando como referencia la actividad 3) con gráficos construidos sin escala y considerando simplemente, la información brindada por la fórmula, tal como puede verse en la Figura 50. (Ver Apéndice C).

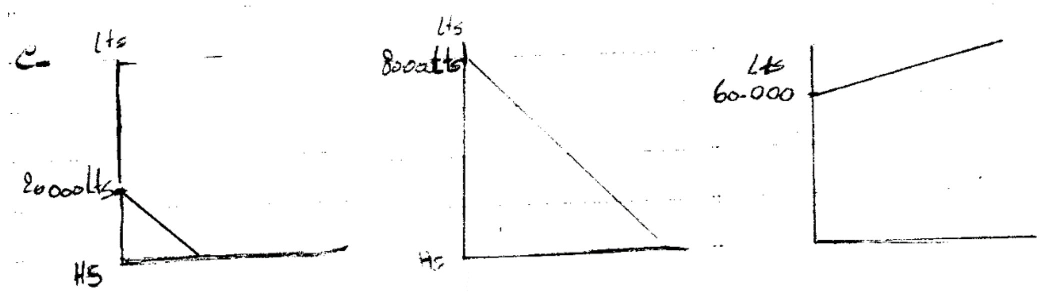


Figura 50. Gráficos construidos por el GJ en la consiga e) de la actividad 5.

En este caso, los alumnos trabajaron de acuerdo al procedimiento 5)e)ii), sin hallar pares de valores que pertenezcan a cada función realizaron esquemas que representan a las distintas situaciones, teniendo como referencia lo presentado en el problema 3. Justamente, porque la secuencia de problemas permite a los alumnos volver sobre las relaciones que se identificaron en problemas anteriores. Estos alumnos logran hacer la conversión del registro analítico al gráfico (sin necesidad de pasar por el registro tabular), logran identificar en todos los casos, la intersección de la recta con el eje de ordenadas como así también el crecimiento o decrecimiento de las rectas.

Hubiera sido importante realizar el trabajo de construcción de las tablas y representación gráfica a partir de las mismas, ya que en las actividades posteriores este trabajo no se propone.

Una vez finalizada la actividad 5, se trabajó con la actividad 6, cuyas consignas se pueden observar en la Figura 14.

Ocho de los grupos de trabajo resolvieron satisfactoriamente esta consigna y en todos los casos elaboraron la siguiente fórmula: $y = 10 - \frac{1}{2}.x$

En algunos casos, hubo grupos que indicaron que x, correspondía a las horas transcurridas e y, a los litros de agua. Dos de los grupos del CEP N° 43, además de elaborar la expresión simbólica expusieron (con más o menos palabras) lo siguiente:

GG: "10 es la cantidad de agua que hay en el tanque al principio, el menos es porque se desagota el tanque y pusimos ½ porque pasada una hora se desagota medio litro de agua y la x representa las horas que pasan."

Esta consigna proponía la conversión del registro gráfico al analítico, lo que implica la lectura e interpretación del gráfico para reconocer la pendiente (en este caso, la cantidad de agua que se desagota por hora) y la ordenada al origen (la cantidad inicial de agua en el tanque).

Determinar la cantidad inicial de agua en el tanque no generó inconvenientes para la mayoría de los alumnos, pero para determinar la razón de cambio entre los litros y las horas, en algunos casos, fue necesaria la intervención docente a fin de que los alumnos pudieran establecer que, una forma de calcular, es hallar el cociente entre 10 litros y 20 horas.

En la consigna b), la mayoría de los grupos planteó que observando el gráfico se podía saber la cantidad de tiempo que le llevaba al tanque desagotarse por completo ya que a 20 horas corresponden 0 litros.

La mayoría también coincidió en que no se puede leer en la fórmula esta misma información. Sólo dos de los grupos del CEP N° 43 (GB y GC) plantearon una ecuación con la ayuda de la docente. Ambos planteos no fueron iguales y se retomaron las dos producciones en la puesta en común (Ver Apéndice B) a fin de establecer en qué casos se podía trabajar de una u otra forma. En la Figura 51 pueden verse las ecuaciones planteadas en los grupos B y C, respectivamente.

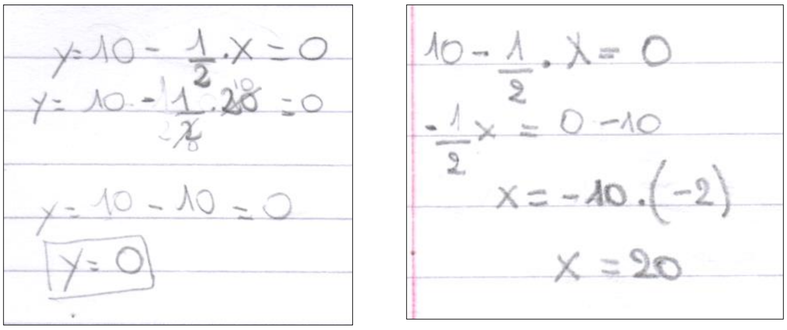


Figura 51. Ecuaciones planteadas por el GB y el GC en la consigna b) de la actividad 6.

La consigna solicitaba establecer si a través de la fórmula podría conocerse el tiempo que le llevaba al tanque desagotarse por completo. En el primer caso, los alumnos del grupo B, reemplazaron el valor x=20 en la expresión formulada anteriormente y corroboran que y=0, lo que indica que después de 20 horas, el tanque contiene 0 litros, es decir, está vacío. Se trata de un proceso de verificación, porque se parte del valor 20 para establecer que su correspondiente es 0.

En el segundo caso, los alumnos del grupo C, asignaron a “y” el valor 0, y despejaron el valor de x correspondiente. Este procedimiento es el óptimo, en términos algebraicos, ya que permite hallar el tiempo que debe transcurrir para que el tanque se vacíe por completo. Supone una actividad de tratamiento dentro del registro analítico.

En la consigna c) todos los grupos coincidieron en que 10 litros, corresponde a la cantidad inicial de agua que hay en el tanque, además plantearon que esta información podía leerse en el gráfico sobre el eje y “porque es el valor más alto”.

En la puesta en común se trabajó sobre el hecho de que diez corresponde a la cantidad inicial de agua en el tanque porque es el valor correspondiente a 0 horas. (Ver Apéndices B y C).

Todos los alumnos estuvieron de acuerdo en que, esta misma información podía leerse en la fórmula, pero no sintieron la necesidad de comprobarlo, por tal motivo, durante la puesta en común la docente retomó el hecho de que a cero horas correspondían diez litros y planteó la posibilidad de hacer uso de la fórmula elaborada anteriormente para verificar dicha información tal y como había trabajado el grupo B, en la consigna b).

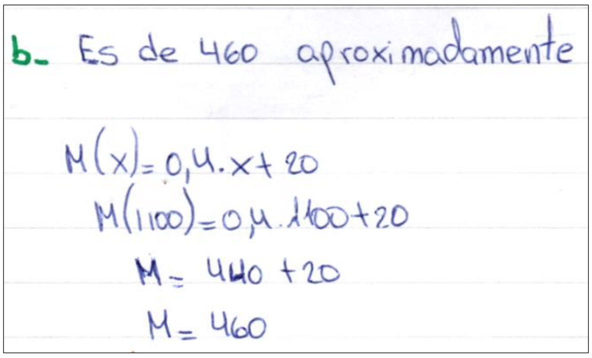
Continuando con la implementación de la secuencia se trabajó con la actividad siguiente. En la Figura 15 pueden observarse las consignas de la actividad 7.

Esta actividad presenta información sobre el monto a pagar en función del consumo de energía eléctrica, a través de un gráfico y la fórmula correspondiente.

Las preguntas planteadas en las distintas consignas pretendían que los alumnos reconozcan la información que brinda cada una de las representaciones.

Durante la primera consigna todos los grupos respondieron que el monto a pagar por un consumo de 200 kWh era $100, esto se podía saber mirando el gráfico y también usando la fórmula. Algunos grupos hicieron el cálculo M(200)=0,4. 200+20=100, mientas que otros recién usaron la fórmula para calcular el monto a pagar correspondiente a 900 kWh ya que a partir del gráfico sólo era posible estimar este valor porque no se trataba de un valor explícito en la escala del eje vertical.

En la consigna b), pocos grupos hicieron la estimación, por tal motivo, este hecho se trabajó durante la puesta en común. Todos los grupos hallaron el valor correspondiente reemplazando el valor 1.100 en la fórmula dada en el problema, tal como puede verse en la Figura 52.



b- Es de 460 aproximadamente

$M(x) = 0{,}4 . x + 20$

$M(1100) = 0{,}4 . 1100 + 20$

$M = 440 + 20$

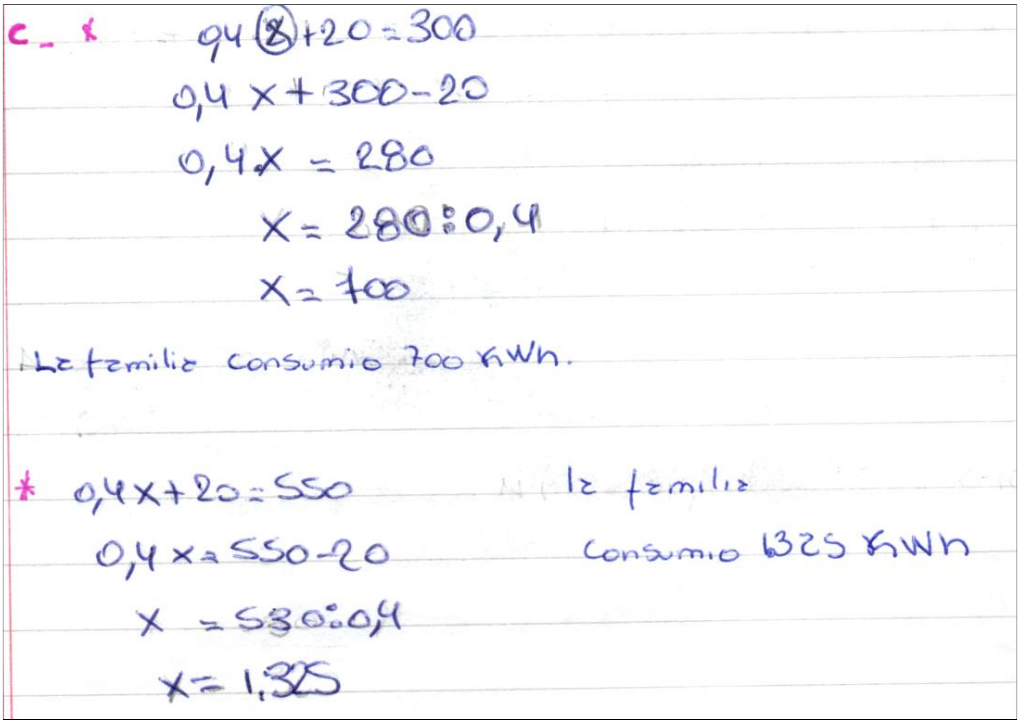
$M = 460$

Figura 52. Resolución del GJ a la consigna b) de la actividad 7.

En este problema, como en los anteriores se descuidó el trabajo con las unidades de medida.

En la consigna c) se esperaba que los alumnos respondieran mirando el gráfico, pero también haciendo uso de la fórmula. En la primera pregunta, todos los grupos respondieron (a partir de la observación del gráfico) que, si la familia debía pagar \$300 había consumido 700 kWh.

En el caso de \$550 algunos hicieron estimaciones (observando el gráfico) y solo cinco grupos plantearon las ecuaciones que pueden observarse en la Figura 53.



c- * $0{,}4 \, (x) + 20 = 300$

$0{,}4 \, x + 300 - 20$

$0{,}4 x = 280$

$x = 280 : 0{,}4$

$x = 700$

La familia consumio 700 KWh.

* $0{,}4x + 20 = 550$

$0{,}4 x = 550 - 20$

$x = 530 : 0{,}4$

$x = 1{,}325$

la familia consumio 1325 KWh

Figura 53. Procedimiento realizado por el GG en la consigna c) de la actividad 7.

Durante la puesta en común se retomó el trabajo a partir de la fórmula para conocer, en este caso, los kWh correspondientes a un monto dado.

Nuevamente el trabajo a partir de las consignas propuestas permite la articulación de los conceptos de función y ecuación, ya que la fórmula dada muestra la relación entre las dos variables (infinitos pares ordenados), en cambio, al sustituir una de las variables por un valor particular, esta relación se reduce a un único par ordenado.

En la última consigna, varios de los grupos respondieron que la familia debía pagar 20 pesos. La mayoría observó el gráfico y planteó que: “la línea no comienza en el cero”, otros directamente hicieron la cuenta: M(0)= 0,4. 0+20= 20.

Durante la puesta en común se trabajaron estos aspectos como así también el significado de los parámetros de la fórmula.

Esta consigna, al igual que la consigna c) de la actividad 6, habilita pensar en el significado de la ordenada al origen en el registro gráfico y en el analítico.

Seguidamente se presentó la actividad 8, que puede observarse en la Figura 16.

En este último problema no se especificaba qué hacer, ni qué tipo de representación usar para tomar una decisión. Se esperaba que los alumnos pudieran elegir entre las herramientas disponibles aquellas que les permitiesen llegar a una conclusión.

Como se ha planteado al principio y de acuerdo a lo expuesto por Esquinas Sancho (2009), la enseñanza del Álgebra a partir de situaciones concretas favorece la utilización de un lenguaje algebraico y posibilita la manipulación de un modelo con el fin de resolver problemas.

Para este momento, los alumnos habían trabajado los distintos registros de representación semiótica asociados a las funciones y se esperaba que pudieran hacer uso de ellos, para representar la situación y tomar una decisión en consecuencia.

Todos los grupos del CEP N° 43 trabajaron con valores particulares, calculando el costo del viaje para una misma distancia en ambas compañías. Comparando distintos valores todos concluyeron que:

GD: “Les conviene contratar la compañía B, si el viaje es de corta distancia y la compañía A, si es de larga distancia”.

Como los alumnos dieron por finalizada la actividad una vez que decidieron elegir la compañía B, se retomaron los cálculos realizados en algunos grupos y a partir del análisis de la situación y recuperando los distintos aportes, se estableció la necesidad de determinar a partir de qué valor convenía una compañía o la otra.

La docente tuvo que guiar el trabajo para poder hacerlo avanzar hacia el uso de ecuaciones y gráficos para poder realizar un análisis completo de la situación. (Ver Apéndice B).

Lo mismo sucedió en la EPET N° 50, por tal motivo, la docente intervino haciendo sugerencias de cómo avanzar en el trabajo a fin de que los alumnos resuelvan la actividad, haciendo uso de los contenidos desarrollados anteriormente. (Ver Apéndice C).

A partir de la resolución de esta actividad puede notarse que los alumnos no tuvieron la necesidad de generalizar y simbolizar, ya que elaboraron una conclusión a partir de considerar algunos casos particulares. Es nuevamente el docente quien, retomando lo planteado por ellos, insiste en la necesidad de avanzar en el trabajo algebraico, a partir de: la abstracción de la situación real, la modelización matemática del problema, la manipulación de los modelos y la aplicación de los resultados a la situación inicial para elegir, al final, la compañía que conviene contratar.

En la Figura 54 puede observarse la resolución de la actividad 8 por el grupo J.

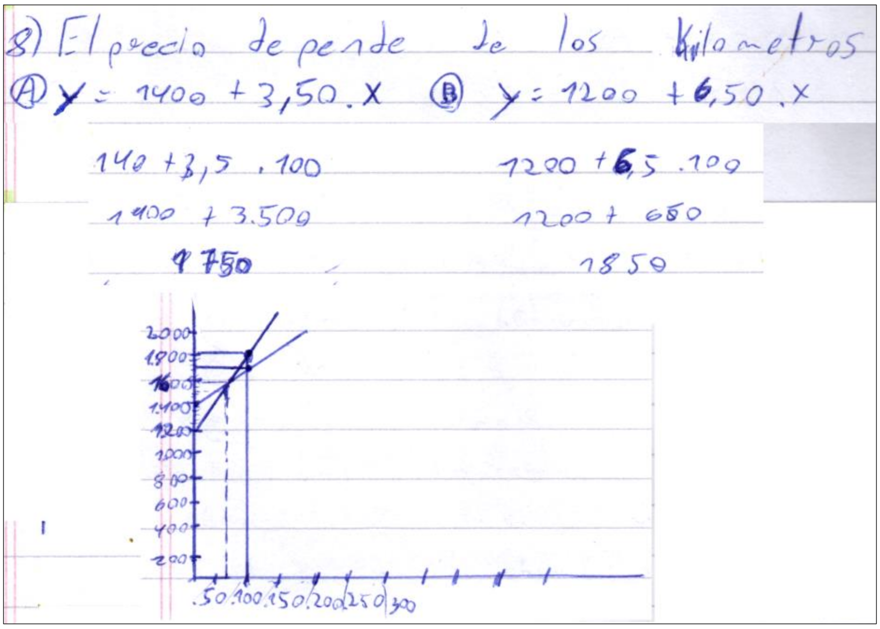


Figura 54. Resolución del GJ a la actividad 8.

En la imagen puede verse que el alumno tiene algunos errores, escribe 140 en lugar de 1.400, y 3.500 en lugar de 350. A pesar de ello, los resultados obtenidos son correctos. En este caso, el grupo J no escribe la conclusión a la que se llega luego de analizar el gráfico obtenido.

5.2 Resultados de las evaluaciones

Luego de haber implementado la secuencia didáctica y llevados a cabo los ejercicios de refuerzo, se evaluaron los contenidos desarrollados a través de un examen escrito cuyas actividades pueden encontrarse en el Apéndice F.

Se evaluaron 17 alumnos del segundo año de la EPET N° 50 y 26 alumnos del CEP N° 43.

A fin de describir, graficar, comparar y relacionar los datos obtenidos en los exámenes se usaron técnicas de análisis cuantitativo. Por otro lado, a fin de resumir, analizar e interpretar dichos datos, se usaron técnicas de análisis cualitativo.

En las Tablas 11 y 12 se resume información acerca del desempeño de los alumnos en relación a las distintas actividades propuestas en el examen.

Tabla 11. Desempeño de los alumnos de segundo año del CEP N° 43 en el examen.

CEP N° 43	**Total de alumnos evaluados: 26**		
	Responde correctamente	**Responde parcialmente**	**No responde**
Actividad 1	9 35%	12 46%	5 19%
Actividad 2	5 19%	16 62%	5 19%
Actividad 3	3 11%	21 81%	2 8%
Actividad 4	4 15%	7 27%	15 58%

Tabla 12. Desempeño de los alumnos de segundo año de la EPET N° 50 en el examen.

EPET N° 50	**Total de alumnos evaluados: 17**		
	Responde correctamente	**Responde parcialmente**	**No responde**
Actividad 1	6 35%	8 47%	3 18%
Actividad 2	4 23%	11 65%	2 12%
Actividad 3	2 12%	14 82%	1 6%
Actividad 4	2 12%	5 29%	10 59%

A continuación, se muestra el análisis de las actividades cognitivas llevadas a cabo por los alumnos para establecer en qué medida se alcanzó (o no) una comprensión integral del contenido funciones y sus distintas representaciones.

Se utilizó, a tal efecto, la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval, con el objetivo de reconocer las actividades de tratamiento y conversión que realizaron los estudiantes en la resolución del temario escrito.

En la Figura 55 puede observarse la actividad 1 del examen.

1) Un tanque de 2000 litros lleno de combustible abastece las máquinas de una fábrica que consumen, entre todas, 400 litros de combustible por hora.
   a) Confeccionar una tabla de valores que relacione las horas con la cantidad de combustible que sale.
   b) Escribir una fórmula que permita representar la relación anterior.
   c) Graficar la relación presentada en la tabla.

Figura 55. Actividad 1 del examen.

En este caso, la secuencia de actividades estuvo planteada de la siguiente manera: Registro verbal→ Registro tabular→ Registro analítico→ Registro gráfico.

Se trata de un circuito convencional, ya que el alumno a partir de la información contenida en el problema puede armar una tabla que relacione las dos variables indicadas, asignarle valores a la variable independiente y calcular los valores correspondientes de la variable dependiente, luego teniendo en cuenta los cálculos realizados anteriormente, escribir una fórmula que represente a la situación y, por último, graficar la relación a partir de los valores de la tabla.

De acuerdo a las producciones de los alumnos se confeccionó la Tabla 13 que indica la cantidad de alumnos y los porcentajes de resolución de la actividad 1.

Tabla 13. Porcentaje de resolución de la actividad 1 de acuerdo a cantidad de alumnos evaluados.

Porcentaje de resolución	Cantidad de alumnos
0%	8
40%	4
60%	5
80%	11
100%	15
Total	43

El 72% de los alumnos evaluados resolvió el 60% o más de la actividad planteada, pero solamente el 35% realizó en forma completa la secuencia de actividades, de acuerdo a las consignas planteadas.

En la Figura 56 puede observarse la resolución completa de la actividad 1, correspondiente al alumno G3, quien siguió la secuencia de actividades propuesta en las consignas. El alumno, a partir de la información contenida en el enunciado, logró completar la tabla con los pares de valores correspondientes, simbolizar la relación y graficarla.

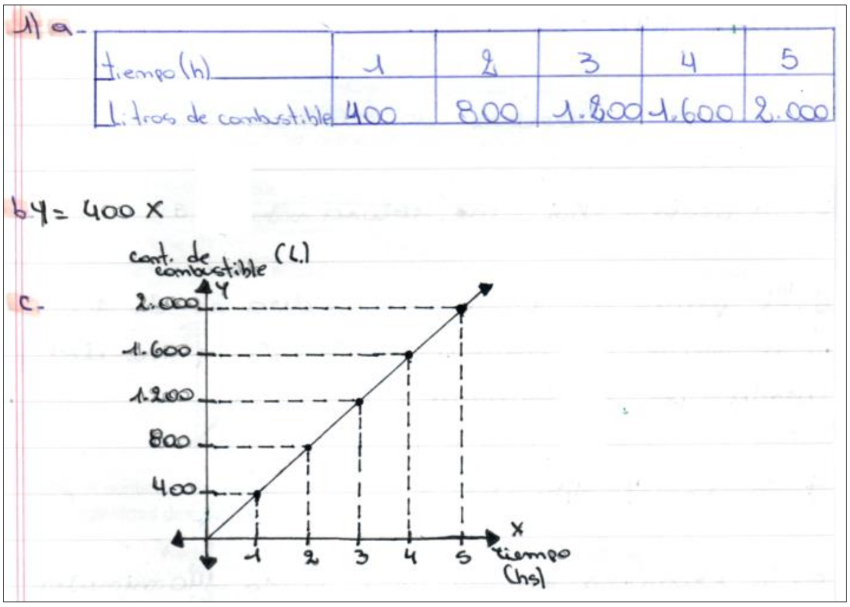


Figura 56. Conversiones de registros: tabular-analítico-gráfico.

Pudo observarse, a partir de las resoluciones de los alumnos, dificultades en todos los registros, el 85% presentó inconvenientes y errores al escribir la fórmula que representa a la situación planteada, el 60% al hacer el gráfico y el 15% al construir la tabla. Los mismos se describen en la Tabla 14.

Tabla 14. Porcentajes de alumnos de cada escuela que cometen errores en la actividad 1.

Actividad 1	CEP N° 43	EPET N° 50
a) Consideraron como variable dependiente a los litros que quedan en el tanque y en consecuencia, la tabla, la fórmula y el gráfico no coinciden con lo solicitado.	0 0%	2 13%
b) Plantearon incorrectamente la fórmula o no la plantearon.	11 42%	6 35%
c) Representaron gráficamente en forma errónea.	6 23%	2 12%

En ambas escuelas alrededor del 30% de los alumnos respondió correctamente, es decir, confeccionó la tabla, escribió una fórmula que expresa la cantidad de combustible que sale del tanque a medida que pasan las horas y graficó dicha relación en un sistema de ejes cartesianos.

Alrededor del 60%, tuvo algún error o no resolvió todos los ítems solicitados. La mayoría de los alumnos correspondientes a este grupo, confeccionó la tabla y representó correctamente los pares de valores correspondientes. Solamente dos alumnos (EPET N° 50) consideraron como variable dependiente a la cantidad de combustible que queda en el tanque y resolvió correctamente la consigna para dicha variable. Aunque la variable considerada no coincida con la solicitada, se evidenció un manejo de los conceptos.

La gran mayoría de los que resolvieron parcialmente la actividad, no plantearon la fórmula correspondiente, la plantearon mal o no lo hicieron.

Esto hace suponer que varios alumnos no lograron incorporar la idea de generalización ya que fueron capaces de hallar los pares de valores y confeccionar la tabla, pero no lograron expresar de forma simbólica el cálculo realizado. Esto puede deberse a que muchos trabajaron a partir de la suma. Por ejemplo, en una hora arroja 400 litros, en dos, 400+400=800, en tres 800+400=1200, etc. Y no lograron identificar que sumar 400 al valor anterior resulta equivalente a multiplicar las horas transcurridas por 400 litros por hora.

Algunos de estos alumnos, expresaron que y=2000+400x (Fila 1). En este caso, los alumnos hicieron una mala interpretación de la situación (consideraron que el tanque tiene 2.000 litros y se agregan 400 litros por hora, cuando en realidad lo que se plantea es que se está gastando el combustible). Otros plantearon que y= 3.000-500x (Fila 2), en este caso la fórmula se relaciona al problema ya que el tanque tiene 3.000 litros y se gastan 500 litros por hora, pero la variable dependiente solicitada es: cantidad de combustible que sale del tanque y no cantidad de combustible que queda. Por otra parte, pudo suceder que, los alumnos quisieron utilizar todos los números que aportaba el enunciado y plantearon equivocadamente la relación.

Uno de los aspectos a tener en cuenta en este problema es que en el enunciado se hizo referencia a la capacidad total del tanque, dato que no era necesario considerar para resolver las actividades propuestas y que, en algunos casos, pudo resultar un obstáculo para los alumnos. Por otra parte, en los problemas trabajados en la secuencia y en los ejercicios de refuerzo, se presentaron, en su mayoría, problemas cuya ordenada al origen era distinta de cero, a diferencia de lo que pasaba en este problema.

Un bajo porcentaje de alumnos, tuvo errores en la representación gráfica, relacionados a la ubicación de las variables sobre los ejes, escala elegida, uso de la regla y falta de precisión al marcar los puntos.

El porcentaje restante, directamente no resolvió la consigna. Esto podría deberse a la no interpretación de la misma. Pudo suceder que, a diferencia de otros ejercicios, los alumnos debían confeccionar la tabla, esto es, identificar las variables relacionadas, asignar valores para la variable independiente, calcular los valores de la variable dependiente para luego, generalizar la relación observada a través de una fórmula y posteriormente graficarla. Aquellos alumnos que no lograron comprender lo solicitado en el ítem a) difícilmente intentarían resolver los ítems siguientes ya que los mismos estaban relacionados al primero.

Otro aspecto importante a destacar es que, tanto en los problemas de la secuencia didáctica como en los ejercicios de refuerzo, no se propusieron actividades donde los alumnos debían construir por sí solos una tabla de valores, identificando las variables relacionadas, fijando valores de la variable independiente y calculando pares de valores correspondientes. En la mayoría de las actividades donde se propuso el trabajo a partir de la representación tabular, los alumnos sólo debían completar la tabla calculando algunos valores desconocidos.

Las consignas de la actividad N° 2 del examen pueden observarse en la Figura 57.

2) Por alquilar una moto, una empresa nos cobra \$500 de seguro más un adicional de \$2,5 por cada kilómetro recorrido.
   a) ¿De qué manera se puede calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos?
   b) Completar la tabla

Kilómetros recorridos	3		12	
Precio (\$)		517,5		535

   c) Marcar con una x el gráfico que corresponde a la situación. Justifica tu elección.

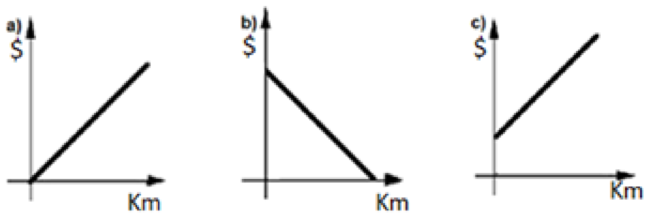


Figura 57. Actividad 2 del examen.

Se esperaba que los alumnos, una vez leído el enunciado, pudieran armar una fórmula que representara a la situación, luego haciendo uso de ella, lograran completar la tabla y teniendo en cuenta el trabajo anterior eligieran un gráfico y justificasen su elección.

La conversión entre registros no es lineal, ya que, para completar la tabla no es necesario armar la fórmula y para seleccionar el gráfico correspondiente se puede tener en cuenta cualquiera de los tres registros anteriores (verbal, analítico o tabular).

La Tabla 15 muestra la cantidad de alumnos y el porcentaje de resolución alcanzado en la actividad 2 del examen.

Tabla 15. Porcentaje de resolución de la actividad 2 de acuerdo a cantidad de alumnos evaluados.

Porcentaje de resolución	Cantidad de alumnos
0%	7
40%	6
60%	8
80%	13
100%	9
Total	43

En esta actividad sólo el 21% de los alumnos evaluados logró seguir la secuencia de conversiones entre registros de acuerdo a lo planteado en la consigna y resolverla completamente.

En la Figura 58 se observan actividades de tratamiento dentro del registro analítico ya que, en este caso el alumno H2, una vez elaborada la fórmula que representa a la relación entre los kilómetros recorridos y el precio, reemplazó la variable “y” (precio) por valores particulares, resolvió las ecuaciones que quedaron planteadas y obtuvo, en cada caso, los kilómetros recorridos.

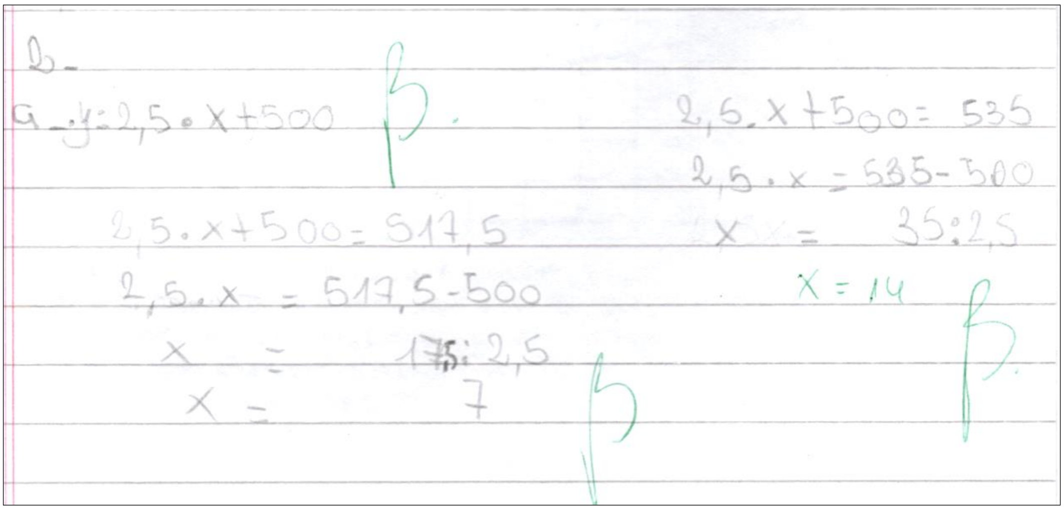


Figura 58. Actividades de tratamiento dentro del registro analítico.

Los alumnos que no lograron resolver completamente la actividad, tuvieron en su mayoría, dificultades al pasar del lenguaje natural al registro analítico (elaborar una fórmula a partir del enunciado del problema) y para justificar la elección del gráfico. Los errores cometidos se detallan en la Tabla 16.

Tabla 16. Porcentajes de alumnos de cada escuela que cometen errores en la actividad 2.

Actividad 2	CEP N° 43	EPET N° 50
a) Plantearon incorrectamente la fórmula o no la plantearon.	9 35%	7 41%
b) Calcularon incorrectamente el precio o los kilómetros recorridos	6 23%	3 20%
c) Seleccionaron incorrectamente el gráfico que representa la situación.	2 8%	2 13%
d) No justificaron la elección del gráfico	7 27%	7 41%

En relación a esta actividad, solo el 20% de los alumnos de ambas escuelas, resolvió correctamente el ejercicio, esto puede deberse a dos motivos: falta de lectura e interpretación de la consigna y la no incorporación de la idea de generalización.

En relación a la primera consigna, alrededor del 40% de los alumnos planteó mal la fórmula o no la planteó. Esto evidencia que los alumnos no logran generalizar la relación observada entre dos variables a través del lenguaje simbólico (que era lo esperado) o a través del lenguaje coloquial. Cinco alumnos, expresaron con palabras el modo de calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos. Responder a la pregunta ¿De qué manera se puede calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos? supone que los alumnos identifiquen las dos variables relacionadas, le asignen a cada una, una letra que las represente (x e y) y expresen el cálculo necesario para hallar los valores de una (precio) en función de la otra (kilómetros). La mayoría de los alumnos que resolvieron parcialmente esta actividad, no resolvió el ítem a).

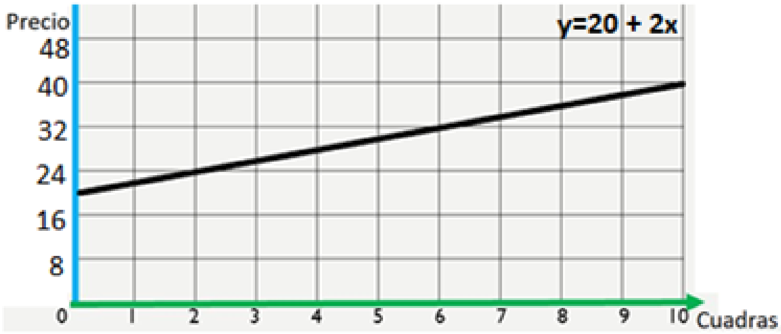
En relación al ítem b) se puede observar que, la gran mayoría de los alumnos pudo completar la tabla, solo algunos tuvieron errores en uno o dos de los cálculos. Esto permite afirmar que, un alto porcentaje de los alumnos no logran pasar a la etapa de generalización, ya que resuelven el problema para casos particulares, pero no consiguen establecer de qué manera calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos a través de una fórmula algebraica.

En relación al ítem c), la mayoría de los alumnos eligió correctamente el gráfico. Solo el 9% del total, seleccionó de manera equivocada el gráfico que representa a la situación. Esto puede deberse a que no tienen en cuenta que el precio comienza a calcularse a partir de los 500 pesos correspondientes al seguro y seleccionan la opción a) o no analizan correctamente la situación y eligen la opción b) que muestra que a medida que aumentan los kilómetros disminuye el precio.

Un alto porcentaje de alumnos no justificó su elección, esto puede deberse a la falta de lectura de la consigna o al hecho de no saber justificar. Varios de los alumnos que justificaron su elección lo hicieron correctamente, aunque hubo quienes dieron una justificación incompleta, mencionando el hecho de que a medida que aumentan los kilómetros recorridos, aumenta el precio, pero no establecieron que dicho monto comienza a calcularse a partir de 500 pesos.

En la Figura 59 se pueden observar las consignas de la actividad 3 del examen.

3) A continuación, se muestra cómo varía el precio de un viaje en taxi de acuerdo a la cantidad de cuadras recorridas.



a) ¿Cuánto cuesta un viaje de 6 cuadras? ¿Y de 7?

b) ¿Cuántas cuadras se recorren si se paga $40? ¿Y si se paga $300?

c) Si debo viajar 5 km ¿Cuánto me costará el viaje?

d) ¿Cuál es el precio de la bajada de bandera? ¿Y el precio por cuadra recorrida? Explica cómo te das cuenta.

Figura 59. Actividad 3 del examen.

En este caso, se trata de una actividad más compleja porque se parte de los registros semióticos gráfico y analítico, y el alumno para responder a las preguntas planteadas debería elegir el registro más adecuado para resolver la actividad.

En el caso de la consigna a), observando solamente el gráfico, puede responderse a la primera pregunta, pero para responder a la segunda, debería recurrirse al registro analítico y reemplazar x por el valor 7, lo cual sería una actividad de tratamiento dentro de ese registro.

En la consigna b) sucede lo mismo, ya que para conocer la cantidad de cuadras correspondiente a un viaje de $40 basta con observar el gráfico mientras que para un viaje que cuesta $300 se hace necesario usar el registro analítico. El valor $300 es una variable didáctica (un número de tres cifras que no aparece en el gráfico). Hacer referencia a este valor tenía como objetivo que los alumnos modifiquen su estrategia y no se limiten sólo a mirar el gráfico, sino que recurran a la fórmula para hallar la cantidad de cuadras recorridas.

La consigna c) contiene otra variable didáctica dada por la unidad de medida en la que está expresada la distancia recorrida (km) lo cual exige al alumno realizar una conversión de unidades dentro del registro numérico para luego trabajar sobre el registro analítico.

En la consigna d) es necesario que el alumno utilice el registro verbal a fin de explicar los datos contenidos en el registro gráfico o analítico.

A partir de los valores de la Tabla 17, puede establecerse que, solamente el 12% de los alumnos evaluados fue capaz de realizar todas las conversiones entre registros y actividades de tratamiento planteadas en esta actividad. Los alumnos restantes tuvieron dificultades para interpretar los datos que brindaba el gráfico, interpretar la fórmula y calcular pares de valores correspondientes.

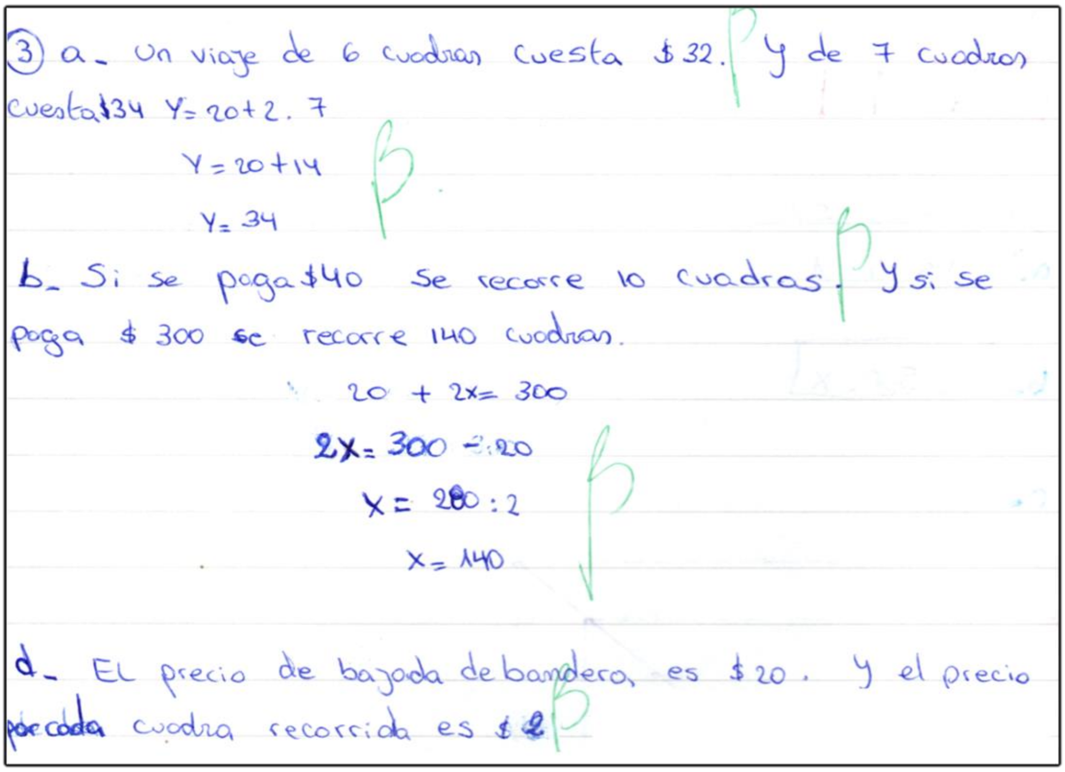
Tabla 17. Porcentaje de resolución de la actividad 3 de acuerdo a cantidad de alumnos evaluados.

Porcentaje de resolución	Cantidad de alumnos
0%	3
20%	14
40%	8
60%	7
80%	6
100%	5
Total	43

En la Figura 60 puede observarse la resolución de la actividad 3 de un alumno de la EPET N° 50. En la consigna a) puede verse que respondió a la primera pregunta a partir de la información contenida en el gráfico, mientras que, para responder a la segunda pregunta, realizó una actividad de tratamiento dentro del registro analítico y halló el precio correspondiente a un viaje de 7 cuadras.

En la consigna b) sucedió lo mismo que en la consigna anterior. Para responder a la primera pregunta se basó en el registro gráfico y expresó en lenguaje natural la información contenida en dicho registro. Para responder a la segunda pregunta recurrió al registro analítico y planteó una ecuación que le permitió hallar las cuadras recorridas si el costo del viaje fuese $300.

El alumno no resolvió la consigna c), lo que podría indicar que no logró hacer la conversión de unidades para expresar 5 km en su equivalente en cuadras. En la consigna d), aunque respondió correctamente acerca del precio de la bajada de bandera y el precio por cuadra recorrida, no realizó la justificación correspondiente.


3) a_ Un viaje de 6 cuadras cuesta $ 32. y de 7 cuadras cuesta $34 Y= 20+2. 7

Y = 20+14

Y= 34

b_ Si se paga $40 se recorre 10 cuadras. y si se paga $ 300 se recorre 140 cuadras.

20 + 2x= 300

2x= 300 -:20

X = 280 : 2

X= 140

d_ EL precio de bajada de bandera es $ 20. y el precio por cada cuadra recorrida es $ 2

Figura 60. Respuestas de las consignas a) b) y d) de la actividad 3.

En la Tabla 18, se resumen los errores cometidos por los alumnos de ambos cursos en la resolución de cada una de las consignas de la actividad N° 3 del examen.

Tabla 18. Porcentajes de alumnos de cada escuela que cometen errores en la actividad 3.

Actividad 3	**CEP N° 43**	**EPET N° 50**
a) Respondieron incorrectamente: hicieron una lectura errónea del gráfico o calcularon equivocadamente el valor solicitado.	12 46%	10 59%
b) Respondieron incorrectamente: hicieron una lectura errónea del gráfico o calcularon equivocadamente el valor solicitado.	13 50%	7 41%
c) Calcularon equivocadamente el valor correspondiente o consideraron la cantidad de kilómetros como cuadras.	18 69%	7 41%
d) No reconocieron los parámetros, lo hicieron equivocadamente o no justificaron adecuadamente.	10 38%	4 27%

En esta actividad, el 81% del total de los alumnos considerados respondió parcialmente bien. Las respuestas incorrectas pueden deberse a: escasa interpretación del gráfico, no utilización de la fórmula dada para calcular pares de valores correspondientes e incorrecta interpretación de la consigna.

En el ítem a) se observa que muchos alumnos respondieron correctamente el monto correspondiente a 6 cuadras (ambas filas) pero tuvieron errores al estimar o calcular el monto correspondiente a 9 o 7 cuadras (de acuerdo a la fila) ya que para ello era necesario utilizar la fórmula dada y calcular el valor correspondiente, que en el gráfico no aparecía con exactitud.

Lo mismo sucedió en el ítem b), ya que la mayoría de los alumnos respondió correctamente sobre la cantidad de cuadras recorridas si el precio a pagar era de 40 o 50 pesos (de acuerdo a la fila) pero cometieron errores al momento de calcular la cantidad de cuadras recorridas para montos mayores ($200 y $300), valores que no estaban incluidos en el gráfico y para los cuales era necesario considerar la fórmula dada por el ejercicio.

Todo esto hace suponer que, los alumnos establecen relaciones entre las dos variables consideradas (cantidad de cuadras y precio) a través del gráfico, pero tienen dificultades para hacerlo a través de la fórmula, esto es, a través del registro analítico y realizar actividades de tratamiento dentro del mismo registro a fin de calcular pares de valores correspondientes.

A los alumnos les cuesta reconocer que x o y, pueden tomar valores particulares que al reemplazarlos en la fórmula permiten, a través de la resolución de operaciones y ecuaciones, hallar su correspondiente.

En el ítem c) se vuelven a registrar los inconvenientes de la consigna a), ya que los alumnos debían reemplazar en la fórmula el valor de las cuadras (30 o 50 dependiendo de la fila) para hallar el costo correspondiente, sumado al hecho de que antes de calcular debían establecer cuántas cuadras representaba la cantidad dada ya que la misma estaba expresada en kilómetros.

La mayoría de los alumnos, logró establecer que era necesario primero conocer la cantidad de cuadras correspondiente a un kilómetro, para después calcular el precio del viaje, pero en muchos casos no lograron hacer las conversiones y cálculos solicitados.

En el ítem d) varios alumnos tuvieron dificultades para reconocer los parámetros, lo hicieron equivocadamente o no justificaron correctamente, esto puede deberse a la falta de lectura y análisis del problema, a reconocer que el precio no comienza a aumentar desde cero pesos sino desde $20 o $25 (de acuerdo a la fila), a centrarse sólo en el gráfico y no prestar atención a la fórmula, a no haber incorporado los conceptos de pendiente y ordenada al origen.

En la Figura 61 pueden observarse las consignas de la actividad 4 del examen.

4) Francisco anotó en una tabla lo que habló y pagó en los últimos tres meses.

Minutos hablados	75	95	110
Monto pagado (en $)	170	202	226

a) ¿Cuánto debe pagar Francisco si este mes habla 130 minutos?
b) Si Francisco debe pagar $290 ¿Cuántos minutos ha hablado?
c) ¿De qué forma puede calcular Francisco el precio a pagar de acuerdo a los minutos que habla?

Figura 61. Actividad 4 del examen.

En este caso, se esperaba que los alumnos reconociendo la información contenida en la tabla, pudieran armar una expresión simbólica que permita calcular el precio a pagar de acuerdo a los minutos hablados y responder a las preguntas formuladas.

Tabla 19. Porcentaje de resolución de la actividad 4 de acuerdo a cantidad de alumnos evaluados.

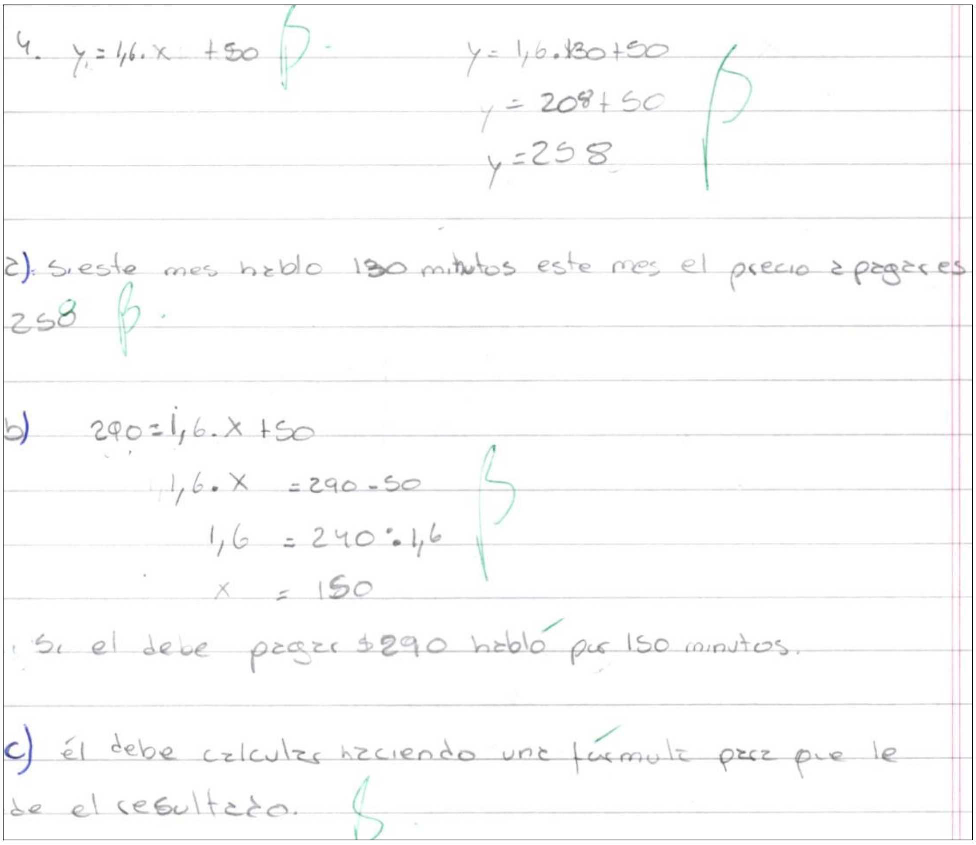
Porcentaje de resolución	Cantidad de alumnos
0%	25
40%	7
60%	4
80%	1
100%	6
Total	43

Los valores de la Tabla 19 evidencian que, el 14% de los alumnos resolvió correctamente la actividad propuesta convirtiendo el registro tabular en analítico (escribir una fórmula) y utilizarla para calcular los pares de valores correspondientes, realizando un tratamiento en el registro algebraico.

En este caso, la información del problema está dada a través del registro tabular. Lo que dificultó que los alumnos resuelvan el problema, puede ser el hecho de no contar con información específica acerca del costo fijo mensual y el precio por minuto.

En la Figura 62 puede observarse la resolución de la actividad 4 del examen por un alumno del CEP N° 43. Puede visualizarse que, en primer lugar, el estudiante planteó una fórmula que permite calcular el monto a pagar (y) de acuerdo a los minutos hablados (x), aunque no explicitó los cálculos realizados para hallar el costo fijo y el precio por minuto ni la identificación de las variables.

Luego reemplazó “x” por 130 e “y” por 290, planteó y resolvió dos ecuaciones que le permitieron responder a las preguntas a) y b). Estas actividades pueden considerarse de tratamiento dentro del registro analítico.


4. y = 1,6.x + 50

y = 1,6.130+50
y = 208+50
y = 258

a) Si este mes habló 130 minutos este mes el precio a pagar es 258

b) 290 = 1,6.x + 50
1,6.x = 290 - 50
1,6 = 240 : 1,6
x = 150

Si el debe pagar $290 habló por 150 minutos.

c) él debe calcular haciendo una fórmula para que le de el resultado.

Figura 62. Respuesta a la actividad 4 del examen.

En la Tabla 20, se resumen los errores cometidos por los alumnos de ambos cursos en la resolución de la actividad N° 4 del examen escrito.

Tabla 20. Porcentajes de alumnos de cada escuela que cometen errores en la actividad 4.

Actividad 4	**CEP N°43**	**EPET N° 50**
a) Cometieron errores en el cálculo de valores correspondientes.	10 38%	4 23%
b) Cometieron errores en el cálculo de valores correspondientes.	9 35%	4 23%
c) Plantearon incorrectamente la fórmula o no la plantearon.	13 50%	12 71%

En la actividad 4, cerca del 60% de los alumnos no responde, esto puede deberse, entre otras cosas a, falta de tiempo, falta de interés ("si ya resolví las anteriores alcanza") y/o dificultad para identificar el precio por minuto y el monto fijo a pagar y así poder calcular los valores correspondientes a las cantidades solicitadas.

Las respuestas incorrectas, se deben en algunos casos, al hecho de no identificar que además del precio por minuto, se cobra un monto fijo. Desconociendo este hecho, algunos alumnos dividieron un precio y la correspondiente cantidad de minutos hablados, y con este valor calcularon el precio a pagar por 130 o 140 minutos (dependiendo la fila) y los minutos hablados si se pagaba $285 o $290 (de acuerdo a la fila).

Algunas consideraciones a tener en cuenta:

Un aspecto central a tener presente es si todos los aspectos que se pretendían que los alumnos respondan estaban implícitamente pedidos en la consigna. En la actividad 1, como la variable analizada era: cantidad de combustible que sale del tanque, quizá haya sido motivo de confusión incluir en la consigna, la capacidad total del tanque, ya que muchos trataron de plantear la fórmula que representaba a la situación utilizando los valores 2000 y 3000 (capacidades del tanque, de acuerdo a la fila). No era necesario tener disponible esta información para resolver las consignas propuestas.

En la actividad 2, el mayor problema se presentó en la consigna a) donde se preguntaba: ¿De qué manera se puede calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos? En este caso se esperaba que los alumnos sean capaces de elaborar una fórmula que permita relacionar las dos variables consideradas para calcular valores de una de ellas, a partir de la otra. Esto no se logró en muchos casos, entonces resulta importante analizar si hubiese sido más favorable pedirles a los alumnos que elaboren una fórmula que represente a la situación.

En la actividad 3, se optó por no especificar en el enunciado del problema y haciendo uso del lenguaje coloquial el precio de la bajada de bandera y el precio por cuadra recorrida, ya que se consideró que los alumnos estarían en condiciones de poder identificarlo. No todos lograron hacerlo y consecuentemente, respondieron mal algunas de las preguntas.

En la actividad 4, no estaba especificado que además del precio por minuto se cobraba un costo fijo inicial. Este hecho pudo haber sido causante de interpretaciones erróneas por parte de los alumnos. Incluso, se podría haber colocado en la tabla, valores más sencillos de interpretar, que varíen de 10 en 10, por ejemplo. Además, en la consigna c) no se pedía explícitamente que escriban una fórmula, con lo cual los alumnos pudieron haber hecho otra interpretación de la consigna.

Continuando con el análisis de los resultados obtenidos en los exámenes, se presentan a continuación, en las Tablas 21, 22, 23 y 24 el porcentaje de alumnos que alcanzan niveles satisfactorios de desempeño en las diferentes actividades del examen, de acuerdo a los criterios de evaluación establecidos previamente (Ver Apéndice F). Las tablas refieren a los resultados obtenidos en ambas instituciones educativas. A fin de simplificar expresiones se utilizó la siguiente escala: 4: Excelente, 3: Bueno, 2: Regular y 1: Insuficiente.

Tabla 21. Niveles de desempeño de los alumnos en la actividad 1 del examen.

Actividad 1	**4**	**3**	**2**	**1**	**Nivel satisfactorio**
1) Identificaron y reconocieron las variables independiente y dependiente.	29 67,4%	3 7%	3 7%	8 18,6%	74,4%
2) Calcularon pares de valores correspondientes.	29 67,4%	6 13,9%	0 0%	8 18,6%	81,3%
3) Generalizaron la relación entre las variables consideradas.	14 32,6%	5 11,6%	4 9,3%	20 46,5%	44,2%
4) Utilizaron el lenguaje algebraico.	16 37,2%	6 13,9%	1 2,3%	20 46,5%	51,1%
5) Ubicaron las variables sobre los ejes cartesianos.	15 34,9%	9 20,9%	6 13,9%	13 30,2%	55,8%
6) Utilizaron una escala adecuada.	23 53,5%	4 9,3%	4 9,3%	12 27,9%	62,6%
7) Representaron correctamente puntos en el plano.	14 32,6%	12 27,9%	4 9,3%	13 30,2%	60,5%

Tabla 22. Niveles de desempeño de los alumnos en la actividad 2 del examen.

Actividad 2	4	3	2	1	Nivel satisfac-torio
1) Identificaron y reconocieron las variables independiente y dependiente.	24 55,8%	12 27,9%	1 2,3%	6 13,9%	83,7%
2) Generalizaron la relación observada entre las variables.	13 30,2%	7 16,3%	1 2,3%	22 51,2%	46,5%
3) Utilizaron el lenguaje algebraico.	13 30,2%	3 7%	1 2,3%	26 60,5%	37,2%
4) Calcularon pares de valores correspondientes.	26 60,5%	9 20,9%	1 2,3%	7 16,3%	81,4%
5) Plantearon y resolvieron ecuaciones.	1 2,3%	0 0%	0 0%	42 97,7%	2,3%
6) Seleccionaron una representación gráfica acorde a la situación planteada.	34 70,1%	0 0%	0 0%	9 20,9%	70,1%
7) Justificaron sus elecciones.	11 25,6%	4 9,3%	2 4,6%	26 60,5%	34,9%

Tabla 23. Niveles de desempeño de los alumnos en la actividad 3 del examen.

Actividad 3	4	3	2	1	Nivel satisfac-torio
1) Identificaron y reconocieron las variables independiente y dependiente.	31 72,1%	5 11,6%	0 0%	7 16,3%	83,7%
2) Analizaron e interpretaron el gráfico.	31 72,1%	3 7%	2 4,6%	7 16,3%	79,1%
3) Interpretaron los parámetros de la fórmula.	17 39,5%	5 11,6%	1 2,3%	20 46,5%	51,1%
4) Calcularon pares de valores correspondientes.	6 14%	12 27,9%	9 20,9%	16 37,2%	41,9%
5) Plantearon y resolvieron ecuaciones.	2 4,6%	2 4,6%	4 9,3%	35 81,4%	9,2%
6) Interpretaron las consignas.	6 13,9%	19 44,2%	11 25,6%	7 16,3%	58,1%
7) Formularon las respuestas a las preguntas planteadas.	8 18,6%	19 44,2%	9 20,7%	7 16,3%	62,26%

Tabla 24. Niveles de desempeño de los alumnos en la actividad 4 del examen.

Actividad 4	4	3	2	1	Nivel satisfac-torio
1) Identificaron y reconocieron las variables independiente y dependiente.	16 37,2%	5 11,6%	0 0%	22 51,2%	48,8%
2) Leyeron e interpretaron los datos contenidos en la tabla.	13 30,2%	8 18,6%	1 2,3%	21 48,8%	48,8%
3) Generalizaron la relación observada entre las variables.	10 23,2%	0 0%	4 9,3%	29 67,4%	23,2%
4) Calcularon los parámetros.	11 25,6%	1 2,3%	5 11,6%	26 60,5%	27,9%
5) Utilizaron el lenguaje algebraico.	10 23,2%	0 0%	2 4,7%	31 72,1%	23,2%
6) Calcularon pares de valores correspondientes.	6 13,9%	3 7%	5 11,6%	29 67,4%	20,9%
7) Plantearon y resolvieron ecuaciones.	2 4,7%	2 4,7%	0 0%	39 90,1%	9,4%

A continuación, en las Figuras 63, 64, 65 y 66 pueden observarse los porcentajes de desempeño en las distintas actividades del examen, de acuerdo a cada uno de los criterios de evaluación, de los alumnos del CEP N° 43 y de la EPET N°50, respectivamente.

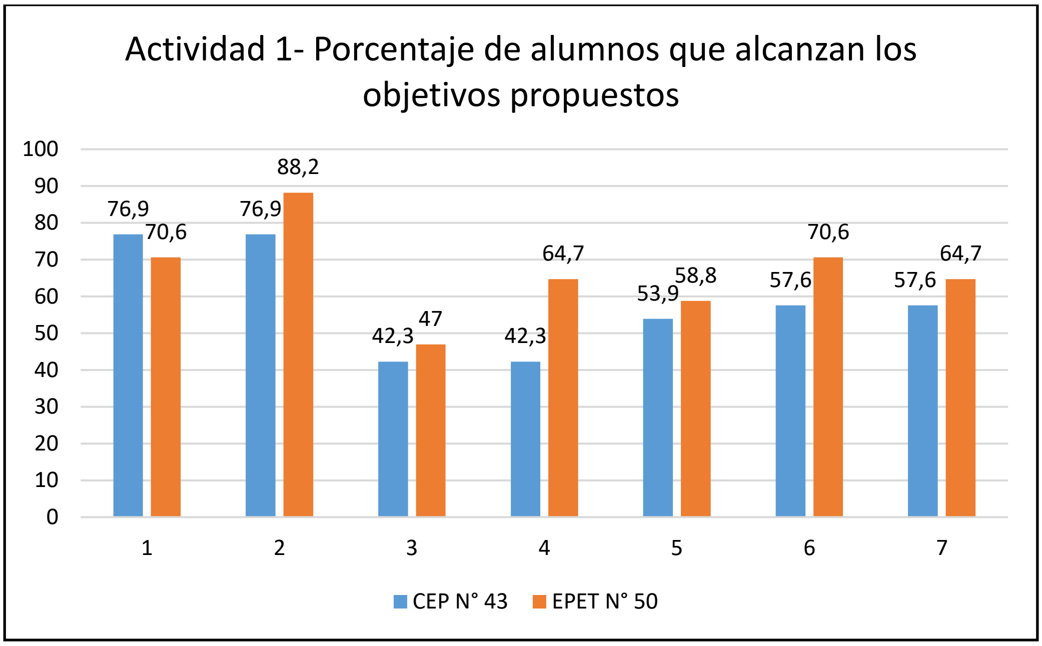


Figura 63. Comparación en el desempeño de los alumnos del CEP N° 43 y de la EPET N° 50 en la actividad 1 del examen, de acuerdo a los criterios de evaluación prefijados.

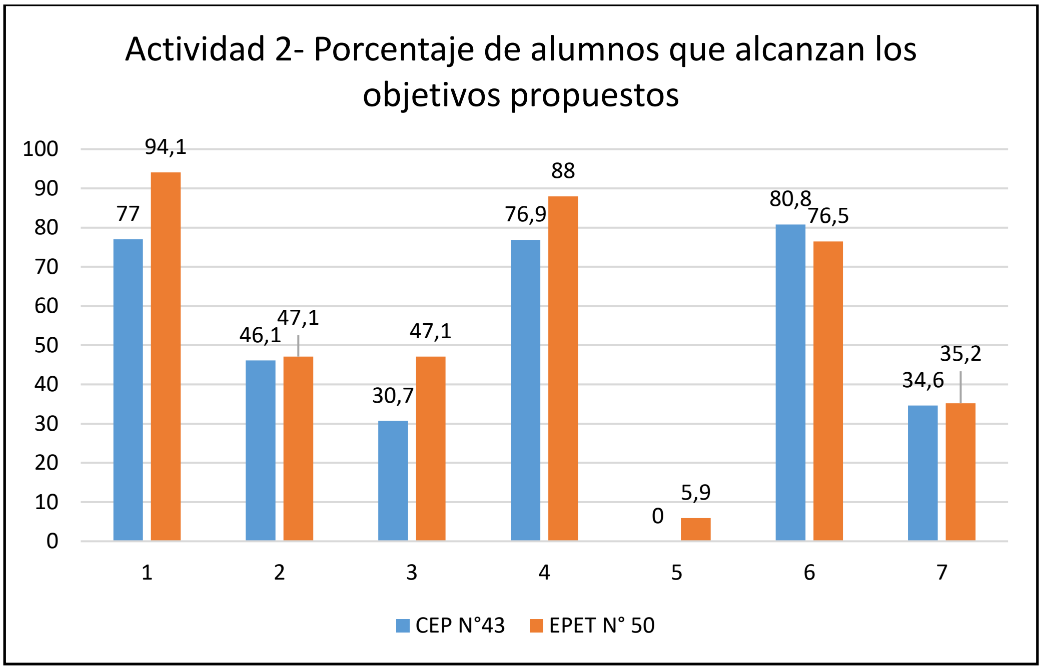


Figura 64. Comparación en el desempeño de los alumnos del CEP N° 43 y de la EPET N° 50 en la actividad 2 del examen, de acuerdo a los criterios de evaluación prefijados.

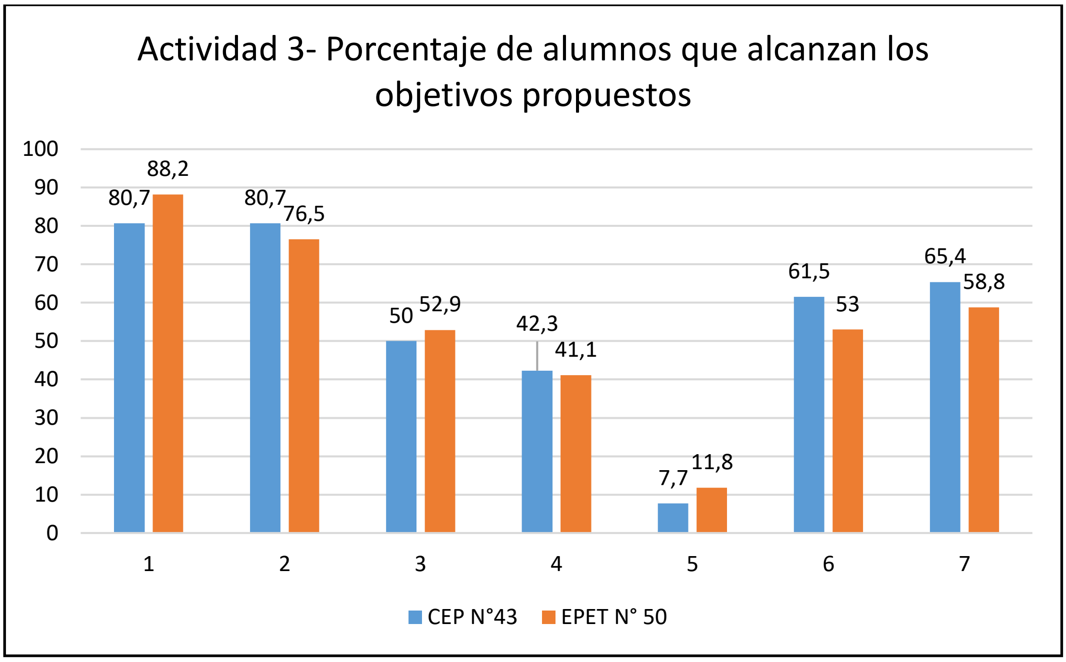


Figura 65. Comparación en el desempeño de los alumnos del CEP N° 43 y de la EPET N° 50 en la actividad 3 del examen, de acuerdo a los criterios de evaluación prefijados.

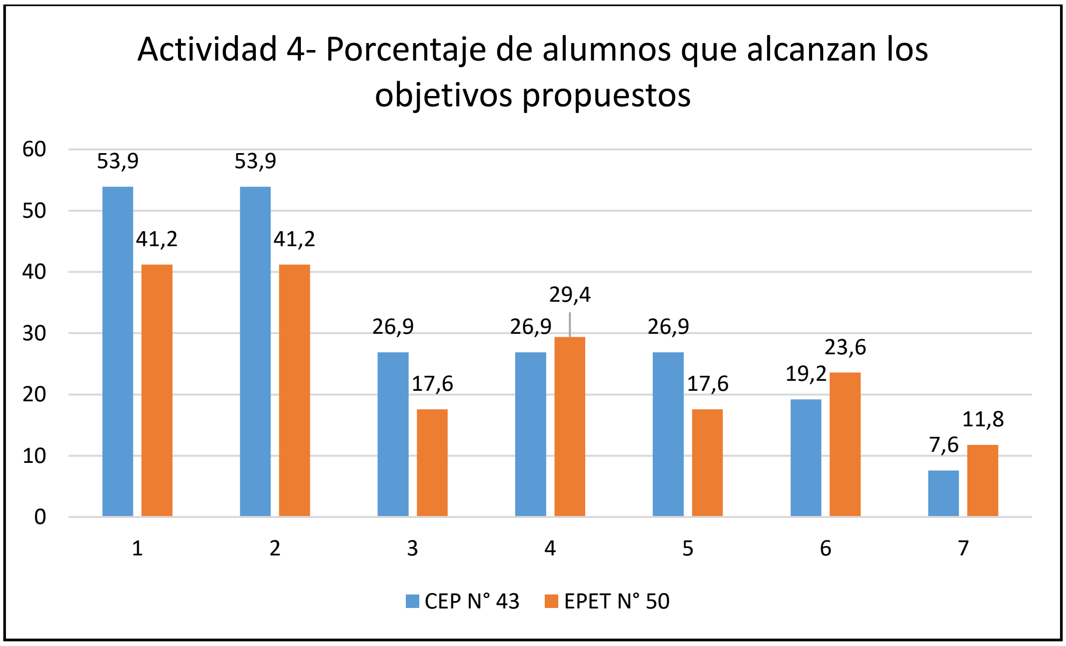


Figura 66. Comparación en el desempeño de los alumnos del CEP N° 43 y de la EPET N° 50 en la actividad 4 del examen. de acuerdo a los criterios de evaluación prefijados.

Las tablas y gráficos anteriores permiten elaborar conclusiones en torno al desempeño de los alumnos. A grandes rasgos puede observarse que el porcentaje de alumnos que alcanzó niveles satisfactorios de desempeño es bastante similar, para las distintas consignas, en ambas escuelas.

La mayor diferencia registrada es de 22,4 puntos mientras que la mínima es de 0,6 puntos. En veinte casos, la diferencia de puntos es menor a 10. Esto evidencia que el rendimiento de los alumnos de ambas instituciones educativas es bastante parecido, observándose en algunos casos las mismas dificultades en ambos cursos.

En relación a la identificación y reconocimiento de las variables independiente y dependiente, puede observarse que, en las actividades 1, 2 y 3, en ambas instituciones, más del 70 % de los alumnos identificó correctamente las variables relacionadas en las distintas situaciones problemáticas. En el problema 4, los porcentajes son menores, CEP N° 43: 53,9% y EPET N° 50: 41,2%.

En cuanto al cálculo de pares de valores correspondientes, puede observarse resultados semejantes para ambos grupos de alumnos: actividad 1 y 2, más del 75% resolvió correctamente; actividad 3, menos del 45% y para la actividad 4, menos del 25%.

Las actividades 1, 2 y 4, solicitaban (a través de distintas preguntas) hallar la fórmula que representa la relación entre las variables consideradas. Para los dos primeros problemas, en ambas escuelas, se registraron porcentajes muy próximos a 45 puntos, mientras que para el problema 4, los mismos descienden y son inferiores a 27%.

En cuanto al uso del lenguaje algebraico puede observarse que, en la resolución de los problemas 1 y 2, la EPET N° 50 supera por 16 puntos al CEP N° 43, mientras que, en el problema 4, los porcentajes disminuyen y el CEP N° 43 supera por 9 puntos a la EPET N° 50. Los porcentajes registrados son menores a 60%, lo que indica que gran parte de los alumnos, tienen dificultades para representar a través del lenguaje simbólico, relaciones entre variables.

En cuanto a la representación gráfica solicitada en la actividad 1 y los criterios relacionados a esta consigna (ubicación de las variables sobre los ejes, escala utilizada y representación de puntos en el plano) puede observarse que ambos grupos de alumnos tienen un desempeño bastante similar. Más del 50% de los alumnos de ambas instituciones alcanza niveles satisfactorios, aunque se observan mejores resultados para los alumnos de la EPET N° 50.

En la actividad 2, al momento de elegir una representación gráfica que representa a la situación planteada, ambos grupos de alumnos alcanzan porcentajes similares. Cerca del 80% de los alumnos eligió correctamente una representación gráfica pero aproximadamente solo el 35% de los alumnos justificó correctamente dicha elección. El porcentaje restante no lo hizo o lo hizo incorrectamente.

La resolución de ecuaciones formaba parte de los criterios de evaluación, ya que las mismas permitían hallar, en las actividades 2, 3 y 4 los valores solicitados en cada una de las consignas. En el enunciado de estas consignas no estaba explicitado que debían plantearse ecuaciones y resolverse, por lo tanto, la mayoría de los alumnos que resolvieron estas actividades no plantearon ninguna ecuación y hallaron los pares de valores correspondientes a través de cálculos mentales o haciendo uso de la calculadora, por tal motivo, los porcentajes registrados fueron tan bajos, inferiores a 12%, en ambas instituciones.

Para resolver los dos primeros ítems de la actividad 3 se podía realizar un análisis del gráfico brindado. En ambos cursos, más del 75% de los alumnos tuvo un desempeño bueno a excelente. En cambio, en lo que se refiere a la interpretación de los parámetros de la fórmula, los porcentajes registrados fueron menores y en ambos cursos, estuvieron por debajo del 55%.

Esto indica que, los alumnos tienen mayores dificultades para interpretar una expresión algebraica que un gráfico cartesiano, y que es necesario profundizar el trabajo de lectura e interpretación de las variables y los parámetros de una fórmula.

En cuanto a la interpretación de consignas y formulación de respuestas, los alumnos tuvieron un desempeño similar cercano al 60%, en ambos cursos.

En la actividad 4, se pretendía que los alumnos analicen e interpreten los datos contenidos en la tabla y a partir de ello, calculen el costo fijo mensual y el precio por minuto (parámetros), valores necesarios para calcular posteriormente, los pares de valores solicitados. En ambos cursos, solo un bajo porcentaje de alumnos logró resolver correctamente la situación.

Una vez desarrollado y evaluado el tema de funciones: fórmulas, tablas y gráficos, se continuó con el desarrollo del tema: Proporcionalidad directa e inversa, desde el punto de vista funcional: Función de proporcionalidad directa y función de proporcionalidad inversa.

Se trabajó en la resolución de problemas donde los alumnos, entre otras cosas, tenían que: identificar la constante de proporcionalidad, hallar pares de valores correspondientes, confeccionar tablas, representar gráficamente a las funciones, elaborar fórmulas para representar las relaciones observadas entre las variables e interpretar gráficos.

Se esperaba que a partir del desarrollo de esta unidad el concepto de función, distintas representaciones y relación entre ellas quedara más afianzado pero los resultados de los exámenes, no demuestran una mejoría importante, incluso para los alumnos del CEP N° 43, disminuyó el porcentaje de aprobados en relación al examen anterior. En la Tabla 25, pueden observarse los porcentajes de alumnos aprobados y desaprobados en cada examen.

Tabla 25. Porcentajes de alumnos aprobados y desaprobados, clasificados por escuela y contenidos de examen.

Escuela	Contenidos	Aprobados	Desaprobados
CEP N° 43	Funciones. Distintas representaciones	12/27 44,4%	15/27 55,6%
	Funciones de proporcionalidad directa e inversa	11/27 40,7%	16/27 59,3%
EPET N° 50	Funciones. Distintas representaciones	8/17 47,1%	9/17 52,9%
	Funciones de proporcionalidad directa e inversa	11/17% 64,7%	6/17 35,3%

CAPÍTULO 6

ENTREVISTAS, ENCUESTAS Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

6.1 Entrevistas a docentes

Contando con la colaboración de un entrevistador externo, se realizaron diez entrevistas a profesores de Matemática que se desempeñan en el CEP N° 43, en la EPET N° 50 y en escuelas cercanas a las seleccionadas en este estudio, a fin de conocer sus apreciaciones acerca del aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escolaridad secundaria, las dificultades que observan y las posibilidades que encuentran para mejorar la enseñanza y aprendizaje de esta rama de la Matemática.

Las preguntas que formaron parte de la entrevista, así como las respuestas de cada docente entrevistado pueden encontrarse en el Apéndice G.

En cuanto a la pregunta 1) ¿Considera importante el desarrollo del eje: ¿Álgebra y funciones? ¿Por qué?, los resultados fueron los siguientes:

El 100% de los docentes entrevistados coincidió en que es importante el desarrollo del eje Álgebra y funciones, y entre las razones dadas, las más mencionadas fueron:

- Porque permite modelizar diversas relaciones.
- Porque permite generalizar usando el lenguaje algebraico.
- Porque permite desarrollar el pensamiento lógico- deductivo.

Otras respuestas estuvieron relacionadas a la posibilidad que brinda el estudio del Álgebra en cuanto a la abstracción y formalización, y el Álgebra como la base y el sustento de todas las demás ramas de la Matemática. En la Figura 67 pueden observarse las respuestas dadas por los docentes a esta pregunta.

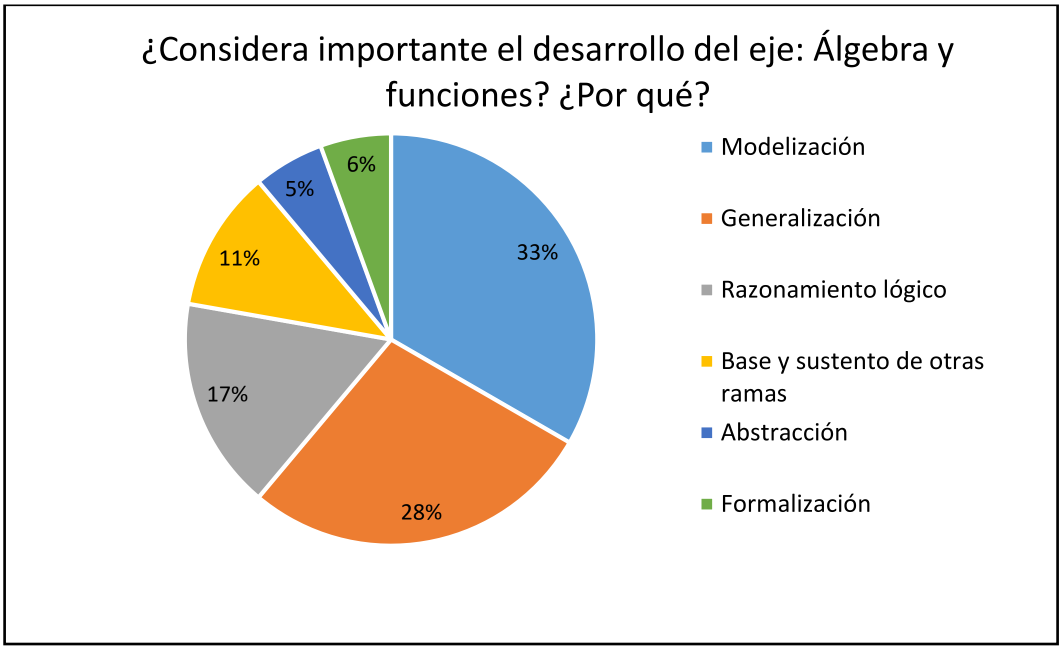


Figura 67. Respuestas de los docentes a la pregunta 1 de la entrevista.

En la segunda pregunta ¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?, el 100% de los docentes entrevistados respondió afirmativamente. Entre las razones más mencionadas figuran las siguientes:

- Permite resolver situaciones problemáticas a partir de la utilización de números y símbolos.
- Favorece el razonamiento lógico- matemático.
- Permite algebratizar el pensamiento y los contenidos.
- Ayuda a la abstracción.

Otras respuestas hicieron mención al hecho de: favorecer el pensamiento crítico, explicar variaciones de objetos y formar generalidades. En la Figura 68, pueden observarse las respuestas de los docentes a la pregunta 2.

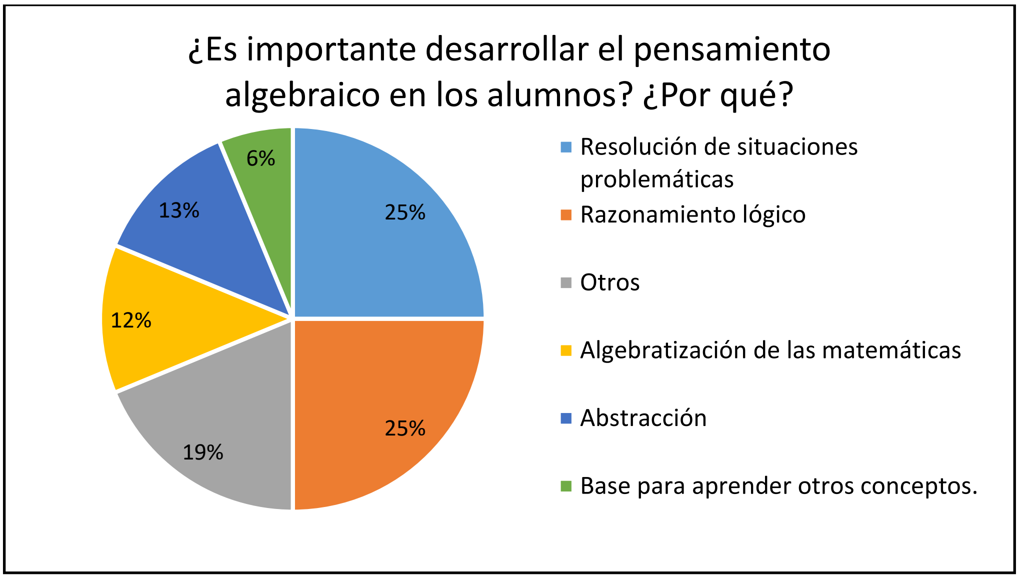


Figura 68. Respuestas de los docentes a la pregunta 2 de la entrevista.

En la tercera pregunta: ¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en sus clases?, la mayoría de los docentes mencionaron los contenidos y los cursos en los cuales los desarrollan.

En general, los temas que desarrollan en relación al eje Álgebra y funciones en los diferentes cursos se distribuyen, salvo pequeñas diferencias, de la siguiente manera:

Primer año: Ecuaciones de primer grado con números enteros. Lenguaje coloquial y simbólico.

Segundo año: Ecuaciones de primer grado con racionales. Análisis gráfico de funciones. Funciones de proporcionalidad. Representación de funciones.

Tercer año: Expresiones algebraicas enteras. Operaciones con polinomios. Factorización de polinomios. Función lineal. Sistemas de ecuaciones lineales.

Cuarto año: Función cuadrática. Función exponencial. Función logarítmica. Trigonometría.

Quinto año: Estudio completo de la función. Función definida por tramos. Función compuesta. Trigonometría.

En la cuarta pregunta ¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?, los docentes mencionaron las siguientes:

- Resolución de actividades prácticas.
- Actividades lúdicas.
- Resolución de problemas o situaciones cotidianas.
- Análisis de tablas y gráficos.

En la Figura 69 puede observarse el tipo de actividades que los docentes entrevistados proponen habitualmente en sus clases para desarrollar los temas mencionados anteriormente.

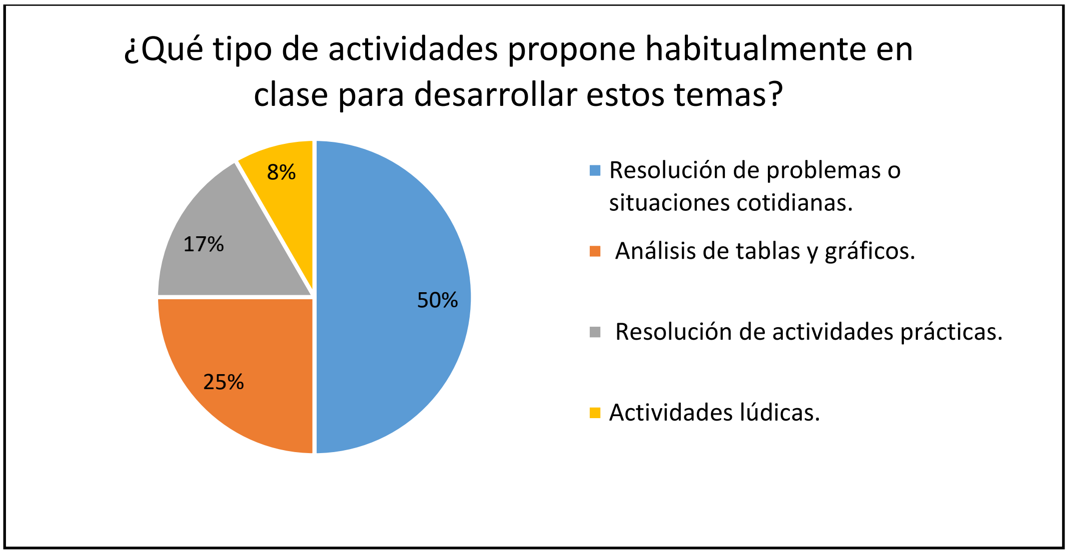


Figura 69. Respuestas de los docentes a la pregunta 4 de la entrevista.

En la pregunta ¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?, varios de los docentes entrevistados, consideraron que el Álgebra no ocupa un lugar preponderante frente a la Aritmética o la Geometría, en los primeros años de la escuela secundaria, mientras que otra parte planteó que se trata de un pilar fundamental.

La mayoría de los docentes sostuvieron que los alumnos no reconocen su importancia debido a que el Álgebra les resulta incomprensible o algo carente de sentido, incluso algunos, plantearon que son los docentes quienes no priorizan esta rama de la Matemática.

En la Figura 70, pueden observarse, de acuerdo a los docentes entrevistados, el lugar que ocupa el Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria.

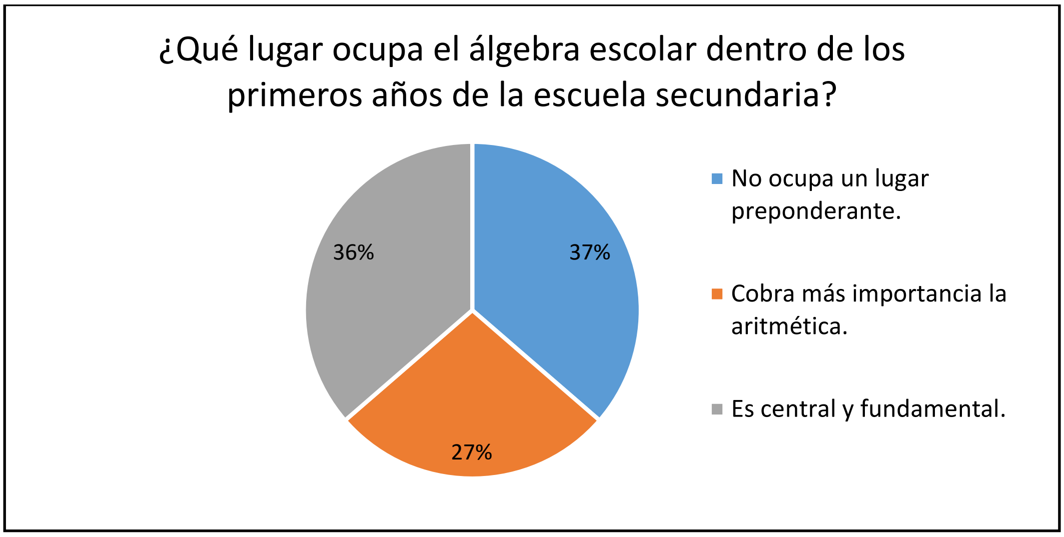


Figura 70. Respuestas de los docentes a la pregunta 5 de la entrevista.

En la pregunta 6) ¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen? la mayoría de los docentes entrevistados planteó que la mayor parte de los alumnos del Ciclo Básico ven a las letras como incógnitas y asignan a cada letra un valor, a raíz del trabajo con ecuaciones o fórmulas. El trabajo, en estos cursos, se reduce muchas veces, a hallar el valor desconocido representado con la letra x (actividad que comúnmente se realiza también durante la escuela primaria). Los docentes coincidieron que recién en los cursos superiores los alumnos logran visualizar a las letras como variables, en contextos funcionales.

En la pregunta 7) ¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?, el 100% de los docentes entrevistados coincidió en que los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra y mencionaron las siguientes:

- Generalización.
- Utilización de letras y símbolos.
- Identificación de letras con objetos.
- Asociación del uso de letras con el área de Lengua.

Por otra parte, entre las razones de estas dificultades aludieron a:

- Falta de razonamiento.
- Aprendizaje memorístico, repetitivo y mecánico.

- Bajo rendimiento aritmético.
- Dependencia del profesor.
- No considerar al error como parte del aprendizaje.
- Falta de trabajo algebraico en la escuela primaria (Matemática concreta)
- Se considera al Álgebra como una materia difícil de estudiar.
- No aplicación del Álgebra en la vida cotidiana.

Por último, en la pregunta 8) ¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?, los docentes entrevistados plantearon con mayor coincidencia que a partir de la resolución de problemas (modelización) y de su aplicación a la vida diaria (significación).

Otras respuestas fueron las siguientes:

- Con actividades lúdicas.
- Aprendizaje heurístico.
- Partiendo de una mejor base de Matemática, desde el nivel primario.
- Con paciencia y atendiendo al contexto de cada grupo.
- De lo concreto a la abstracto, de lo particular a lo general.

En la Figura 71, se presenta a través de un gráfico circular las respuestas más brindadas por los docentes a la pregunta anterior.

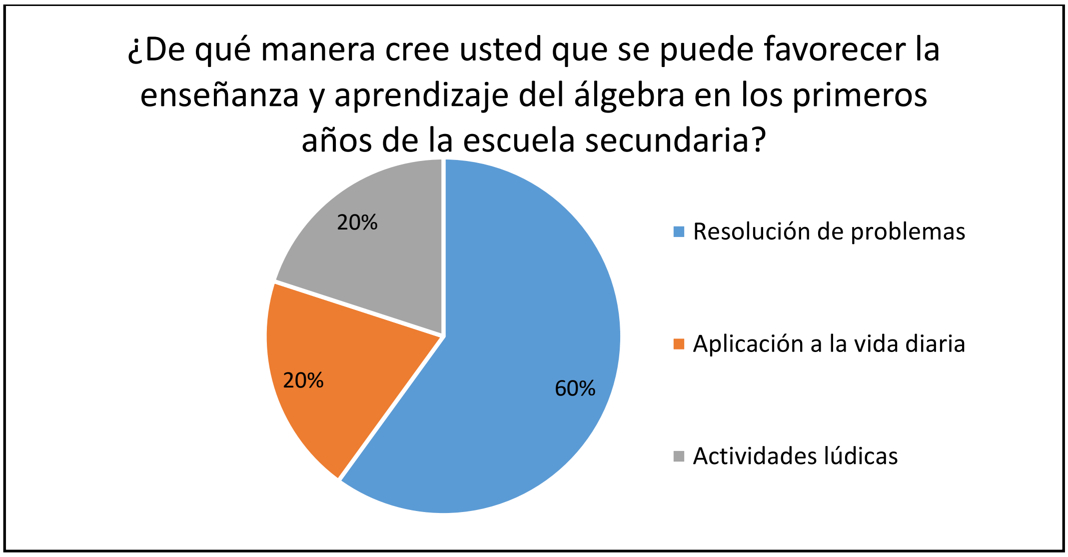


Figura 71. Respuestas de los docentes a la pregunta 8 de la entrevista.

6.2 Entrevistas a alumnos

A fin de conocer las opiniones de los alumnos acerca de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra y recuperar conocimientos en torno a los temas de interés del presente estudio, se seleccionó una muestra de veinte alumnos de ambas escuelas (diez de cada una), para realizar entrevistas personales. Se eligieron al azar dos alumnos por curso para recabar información acerca de los distintos años de la escuela secundaria y poder realizar comparaciones.

Las preguntas de la entrevista y las respuestas obtenidas en el CEP N° 43 pueden encontrarse en el Apéndice H mientras que, la de los alumnos de la EPET N° 50, en el Apéndice I.

En la primera pregunta ¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?, el 100% de los alumnos entrevistados respondió que considera importante el uso de las letras durante las clases de Matemática. Solo un alumno se refirió a las letras en tanto, explicaciones de los ejercicios (lenguaje coloquial) y no desde el uso de las letras como parte del lenguaje simbólico normalmente utilizado en Matemática.

En la Figura 72, se resumen las respuestas brindadas por los alumnos entrevistados en relación al uso de las letras en las clases de Matemática.

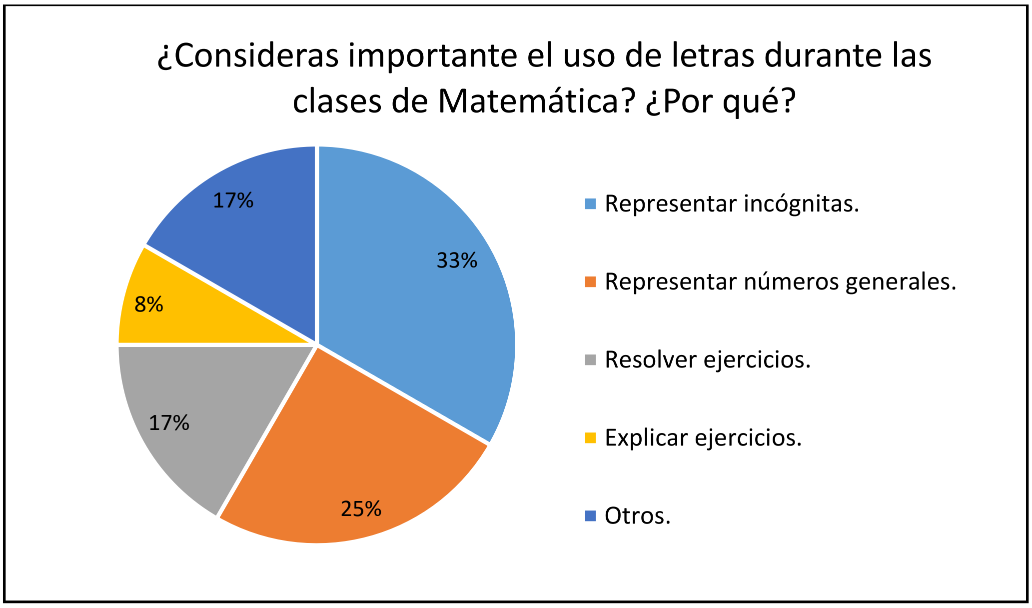


Figura 72. Respuestas de los alumnos a la pregunta 1 de la entrevista.

El 58% de los alumnos entrevistados coincidió en que el uso de las letras durante las clases de Matemática está relacionado al hecho de representar incógnitas y números generales. Incluso hubo alumnos que respondieron ambas cosas.

El 42% restante respondió que la importancia radica en resolver o explicar ejercicios y otras razones como ser: aprender cosas desconocidas o marcar un valor o un eje.

Respecto a la segunda pregunta: Durante las clases de Matemática, ¿Has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?

Todos los alumnos entrevistados manifestaron que trabajaron algunos o todos los temas mencionados (dependiendo del curso en el que se encontraban).

En la Tabla 26 se recupera información acerca de la cantidad de alumnos por curso que recordó cada uno de los temas mencionados en la pregunta.

Tabla 26. Cantidad de alumnos entrevistados de cada curso que recuerdan haber trabajado los temas: ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable y función.

Temas/Cursos	1ero	2do	3ero	4to	5to	Totales
Ecuación	3	4	4	4	4	19
Incógnita	4	2	3	3	4	16
Expresión algebraica	4	2	2	3	4	15
Variable	0	0	3	4	4	11
Función	0	0	3	4	4	11
Totales	11	8	15	18	20	72

El 95% de los alumnos entrevistados mencionó haber trabajado con ecuaciones.

El 80% de los alumnos entrevistados recordó haber trabajado con incógnitas.

El 75% de los alumnos se refirió a las expresiones algebraicas.

El 55% de los alumnos entrevistados manifestó haber desarrollado los temas variable y función. El porcentaje disminuye ya que los alumnos de primer y segundo año, todavía no han desarrollado estos temas.

Solamente uno de los alumnos de primer año no recordó haber trabajado con ecuaciones, mientras que los alumnos restantes manifestaron haberlo hecho. Si bien, casi todos recordaron a las ecuaciones, no todos fueron capaces de definir lo que es una incógnita e incluso indicaron no haber abordado ese tema. Respuestas similares se obtuvieron en relación a las expresiones algebraicas.

La mayoría de los alumnos de 4to y 5to año, manifestaron que han trabajado con todos los temas y dieron explicaciones más completas como ejemplos más variados.

En relación a la tercera pregunta ¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?, muchos alumnos recordaron contenidos relacionados a los temas mencionados en la pregunta dos, y no detallaron las actividades desarrolladas. Otros lo hicieron de manera muy general e incluso hubo alumnos que se refirieron a las diferentes operaciones.

Entre los temas mencionados aparecen: operaciones combinadas, ecuaciones e inecuaciones, lenguaje coloquial y simbólico, expresiones algebraicas, valor numérico de una expresión algebraica, ejes cartesianos, tablas, gráficos, fórmulas, funciones, polinomios, sistemas de ecuaciones.

La mayoría de los temas mencionados corresponden al eje: Álgebra y funciones del Diseño Curricular Jurisdiccional.

Algunas de las actividades mencionadas son las siguientes: Resolver operaciones combinadas, resolver ecuaciones, problemas, ejercicios e interpretar gráficos.

Solo un entrevistado mencionó la utilización de fotocopias, la resolución de trabajos prácticos, trabajo grupal y el uso del pizarrón.

En la pregunta 4: ¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?, todos los alumnos entrevistados coincidieron en que es significativo, aunque el 25% no justificó su respuesta.

Se han elaborado categorías que agrupan respuestas similares y estas revelan que el 50% de los alumnos entrevistados considera que es importante trabajar a partir de la resolución de problemas para aprender mejor o para poner en práctica lo aprendido (relacionándolo con la vida diaria).

El porcentaje restante mencionó otras razones como ser: comprender mejor los temas o los ejercicios, tener mejores resultados en un examen o evacuar dudas respecto a un tema. En la Figura 73, pueden observarse las respuestas de los alumnos en torno a esta pregunta.

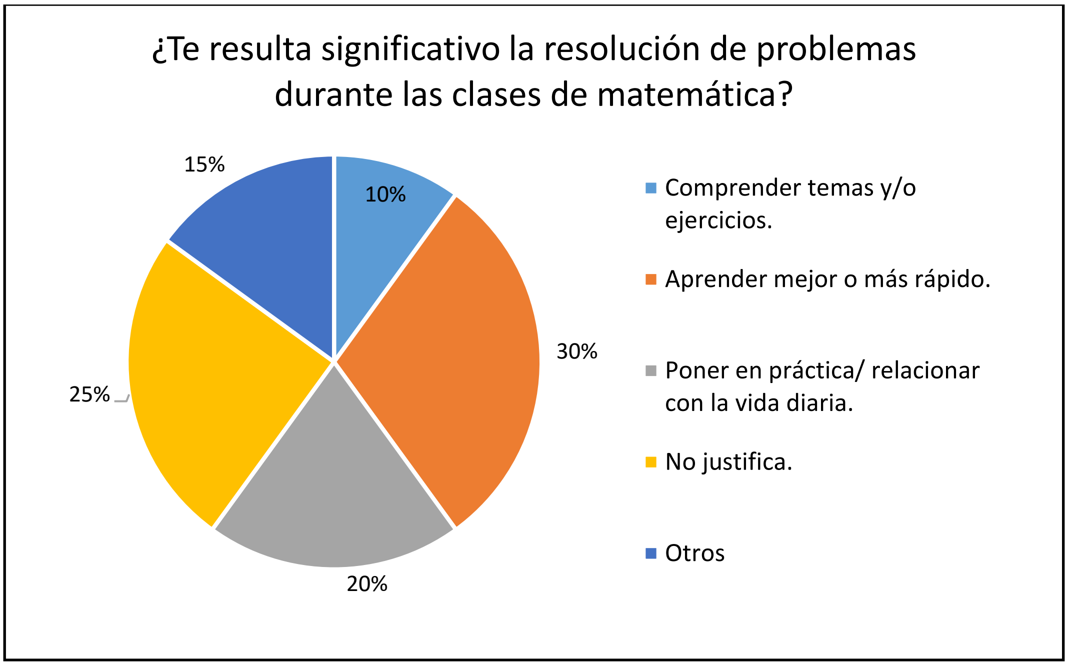


Figura 73. Respuestas de los alumnos a la pregunta 4 de la entrevista.

La última pregunta fue: ¿Qué entiendes por Álgebra? En la Figura 74, se resumen las respuestas dadas por los alumnos.

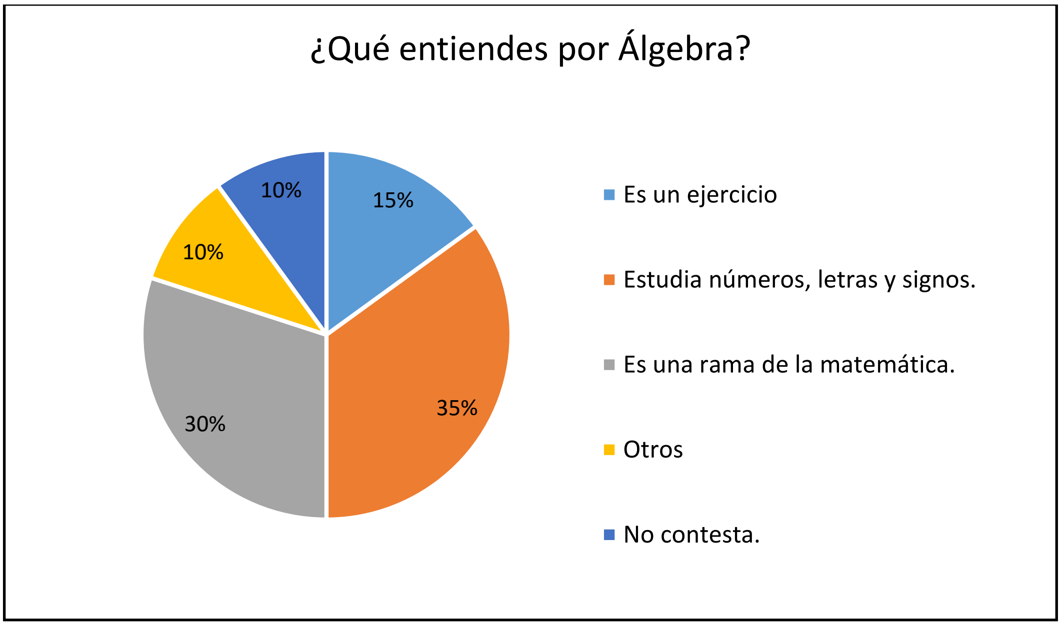


Figura 74. Respuestas de los alumnos a la pregunta 5 de la entrevista.

El 35% relacionó al Álgebra con los números, las letras y los signos. Hay quienes (30%) mencionaron, además, que es una rama de la Matemática que estudia, combina o emplea letras, números y signos.

Los demás plantearon que se trata de un tipo de ejercicio o de un problema. Dos de los alumnos entrevistados manifestaron no saber de qué se trata.

6.3 Encuestas a alumnos

Se realizaron encuestas a alumnos de primer y tercer año de cada una de las escuelas seleccionadas a fin de poder realizar un análisis de los conocimientos que detentan en relación al tema. El formato de la misma puede encontrarse en el Apéndice J.

Vale aclarar que los alumnos que cursaban el tercer año, al momento de la encuesta, fueron en su mayoría los que participaron en la implementación de la secuencia durante el ciclo lectivo 2018.

Se decidió encuestar precisamente a este grupo de alumnos, para evaluar los saberes disponibles en relación al tema que fuera tratado en detalle, el año anterior. En total se encuestaron a 36 alumnos de tercer año.

Los resultados de las entrevistas a los terceros años de la EPET N° 50 y del CEP N° 43 se detallan a continuación. En la Figura 75 puede observarse la primera pregunta de la encuesta y las opciones de respuesta.

1) Se entiende por Álgebra a la rama de las Matemáticas que estudia:

- □ Números
- □ Números y letras
- □ Números, letras y signos.

Figura 75. Pregunta 1 de la encuesta.

Las opciones seleccionadas por los alumnos pueden observarse en la Figura 76.

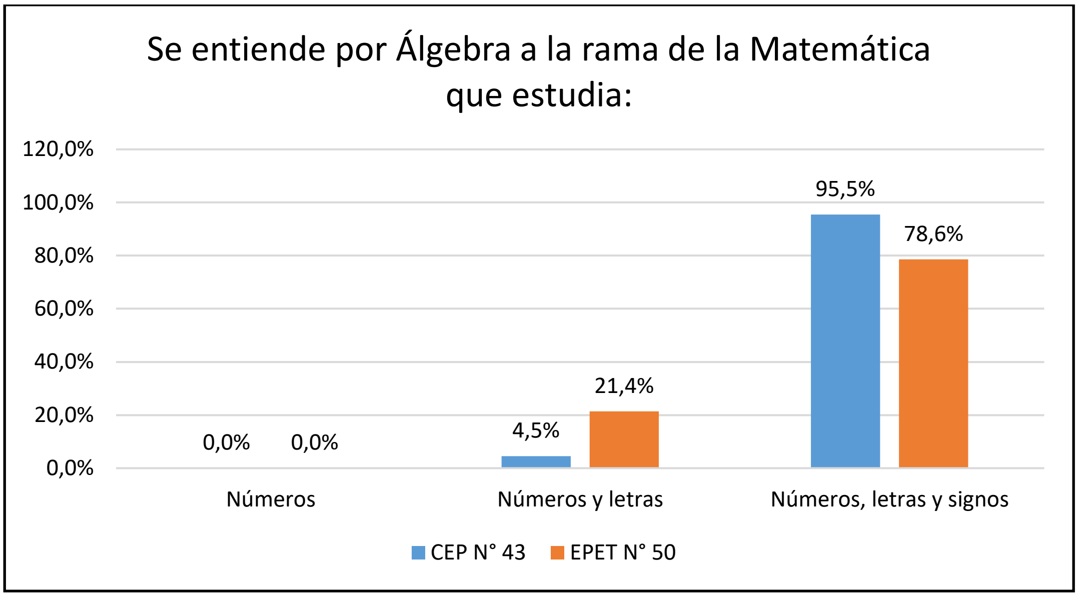


Figura 76. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 1 de la encuesta.

Puede observarse que, la mayoría de los alumnos responde correctamente, aunque un porcentaje elije la segunda opción: Números y letras. Es importante destacar que, en ninguna de las dos escuelas, los alumnos eligen la primera de las opciones, esto indicaría que efectivamente, reconocen que el Álgebra además de los números utiliza letras y signos.

La segunda pregunta y las opciones de respuesta pueden observarse en la Figura 77.

2) Durante las clases de Matemática, las letras pueden usarse…:
- ☐ Como incógnita.
- ☐ Como número general.
- ☐ En relaciones funcionales.

Figura 77. Pregunta 2 de la encuesta.

Las opciones seleccionadas por los alumnos pueden verse en la Figura 78.

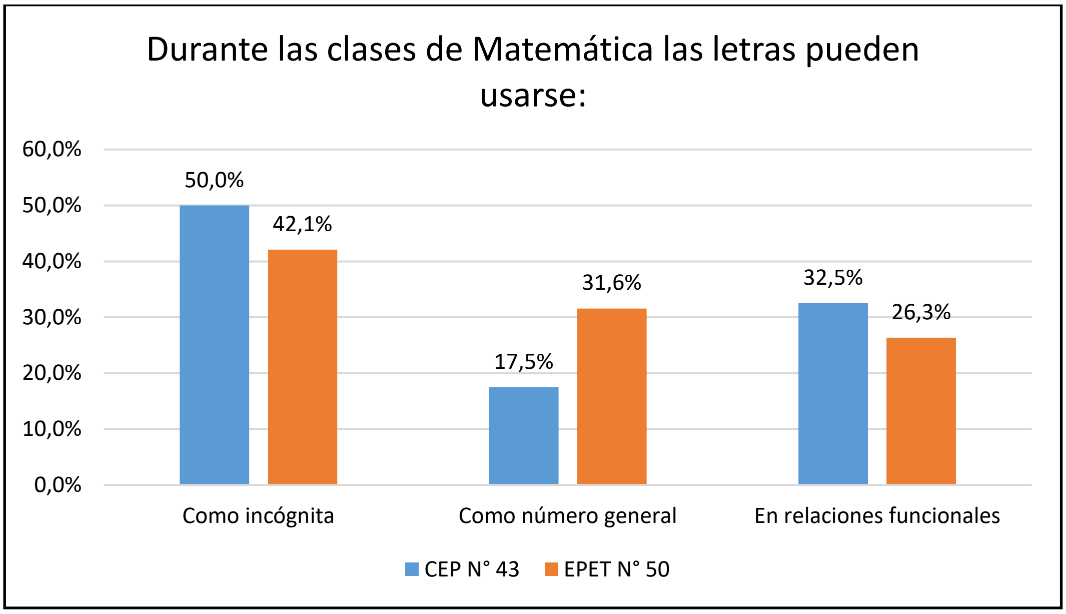


Figura 78. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 2 de la encuesta.

La mayoría de los alumnos encuestados consideran que, durante las clases de Matemática, las letras se usan como incógnitas, aunque también elijen las otras dos opciones.

Los alumnos no reconocen los tres usos asociados a las variables ya que como puede verse en la Figura 79, eligen una o dos de las opciones propuestas y no las tres como correspondiera.

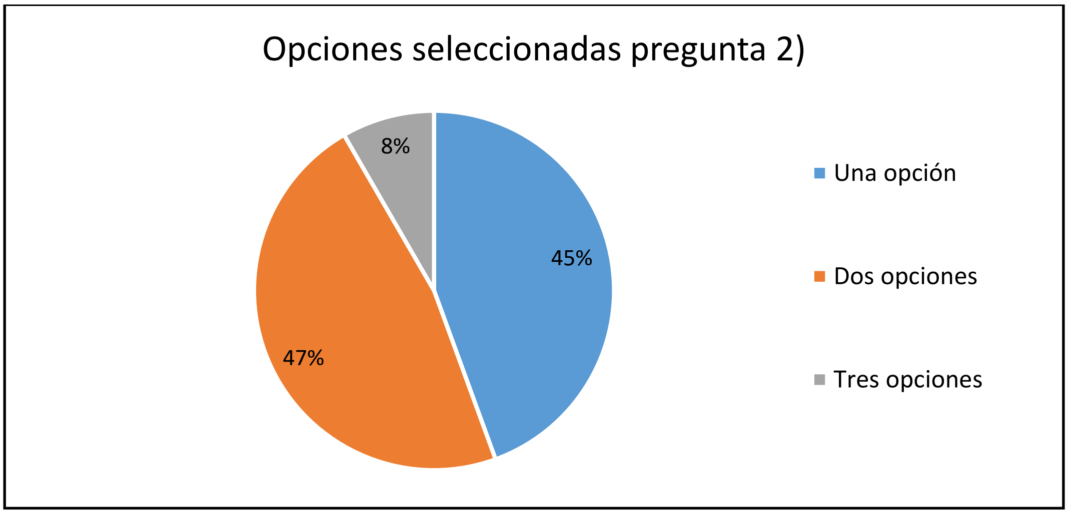


Figura 79. Cantidad de opciones seleccionadas por los alumnos de tercer año en la pregunta 2 de la encuesta.

La Figura 79 muestra que, del total de alumnos encuestados, sólo el 8% marcó las tres opciones de la pregunta 2, esto quiere decir que, el 92% de los encuestados no reconoce que las letras pueden usarse como incógnita, como número general y además en relaciones funcionales.

Si bien, todas y cada una de estas representaciones de la función fueron trabajadas durante la implementación de la secuencia didáctica, los alumnos en general, no lo reconocen.

En la Figura 80 puede verse la pregunta 3 de la encuesta y las opciones de respuesta.

3) ¿Por qué durante las clases de matemática, los profesores hacen uso de las letras?

- ☐ Para complicar los ejercicios.
- ☐ Para formular leyes generales.
- ☐ Para representar números desconocidos.

Figura 80. Pregunta 3 de la encuesta.

En este caso, se esperaba que ningún alumno eligiera la primera opción, ya que evidentemente el uso de las letras va mucho más allá del hecho de “complicar los ejercicios”. Su uso está relacionado al hecho de poder realizar generalizaciones.

En consonancia, con las respuestas obtenidas en la primera pregunta, la mayoría de los alumnos entrevistados respondió que el uso de las letras está asociado a la representación de números desconocidos, aunque algunos también marcaron: para formular leyes generales. Las opciones elegidas y los porcentajes que representan pueden observarse en la Figura 81.

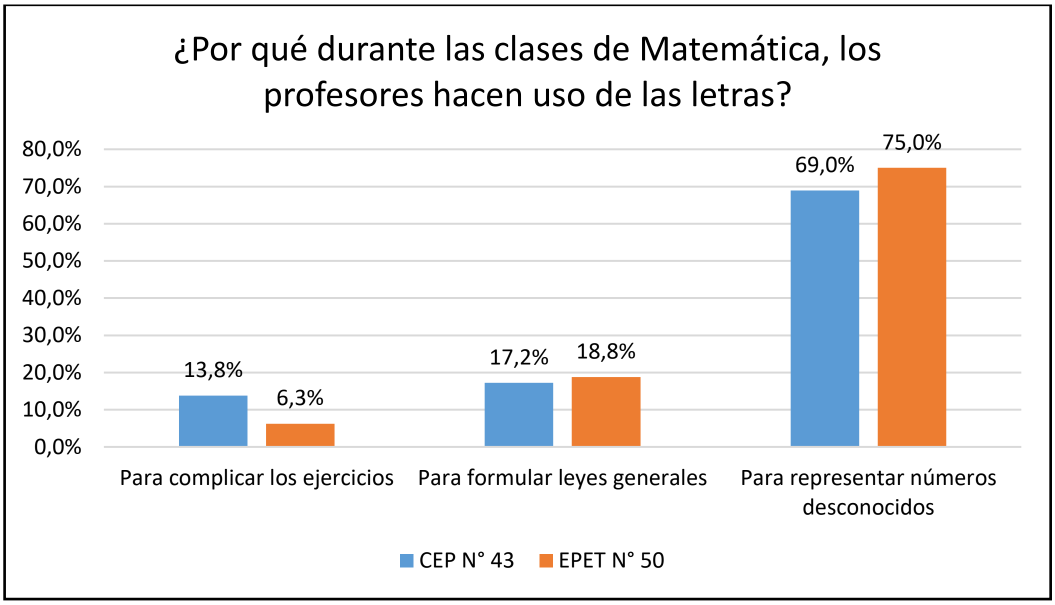


Figura 81. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 3 de la encuesta.

La pregunta 4 de la encuesta puede verse en la Figura 82.

4) ¿Cuáles de estos contenidos están relacionados al Álgebra?

- ☐ Triángulos y cuadriláteros.
- ☐ Ecuaciones y funciones.
- ☐ Números y operaciones.

Figura 82. Pregunta 4 de la encuesta.

Los contenidos relacionados al Álgebra, según los alumnos encuestados, pueden verse en la Figura 83.

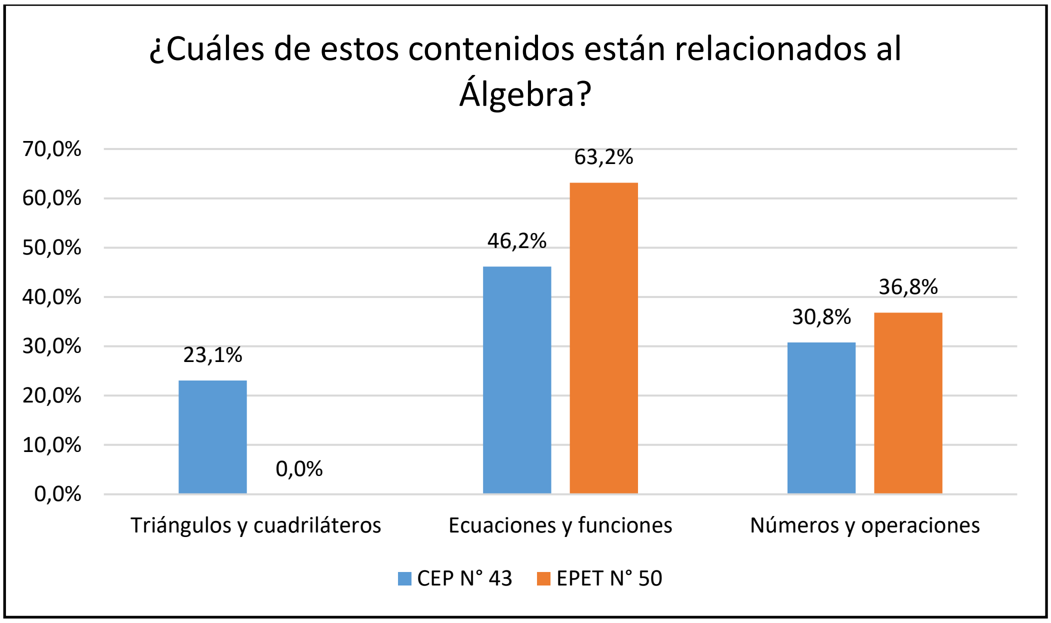
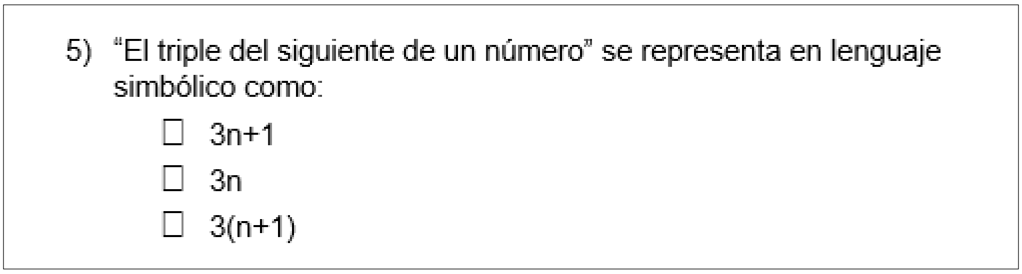


Figura 83. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 4 de la encuesta.

En esta pregunta, se esperaba que ninguno de los alumnos encuestados marcara la primera de las opciones propuestas. Esto no ocurrió ya que algunos de los alumnos del CEP N° 43, lo hicieron.

Si bien la mayoría eligió la respuesta correcta (ecuaciones y funciones), existe un gran porcentaje de alumnos que eligió: números y operaciones, lo cual está relacionado a otra rama de la Matemática que es la Aritmética. Este hecho puede deberse a que, por ejemplo, al resolver ecuaciones también aparecen las operaciones con números.

En la Figura 84 puede observarse la pregunta 5 de la encuesta.


5) "El triple del siguiente de un número" se representa en lenguaje simbólico como:

- ☐ 3n+1
- ☐ 3n
- ☐ 3(n+1)

Figura 84. Pregunta 5 de la encuesta.

Las opciones seleccionadas por los alumnos, en esta pregunta, pueden verse en la Figura 85.

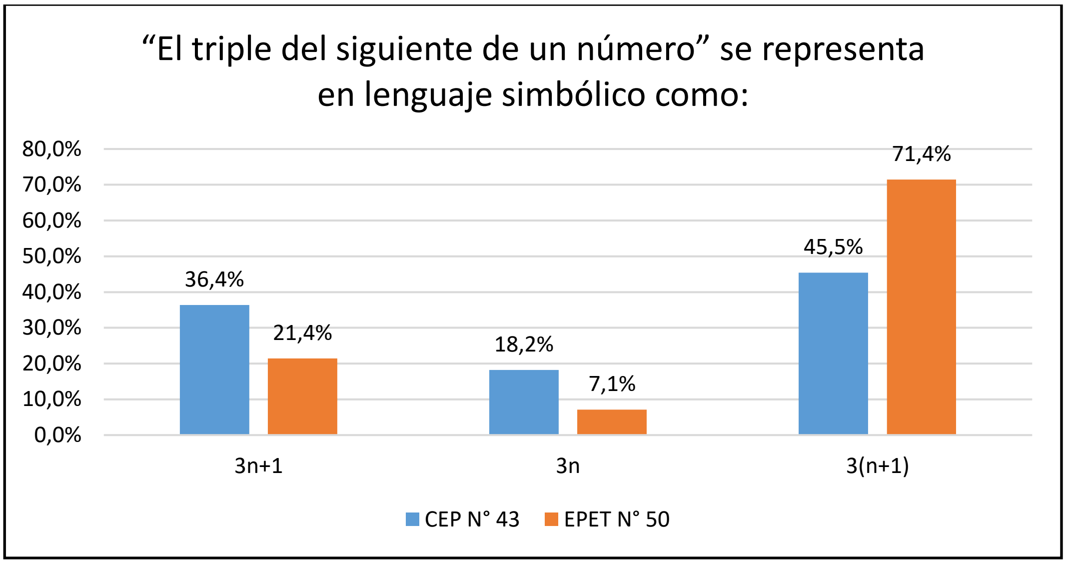


Figura 85. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 5 de la encuesta.

En este caso, la mayoría de los alumnos eligió la respuesta correcta, aunque muchos también eligieron las otras dos opciones. Esto muestra que no logran traducir correctamente una expresión en lenguaje coloquial a lenguaje simbólico.

En la pregunta 6, que puede verse en la Figura 86, la mayoría de los alumnos entrevistados eligió la opción incorrecta. Este hecho puede deberse a la presencia de la letra x, en la expresión algebraica. Cabe aclarar que, en general, desde los textos escolares y en la mayoría de las clases de Matemática, el trabajo en torno a las ecuaciones se reduce a hallar el valor de “x”, tal como lo plantea Sessa (2005) la mayor parte de las veces el verdadero “asunto” que se considera en el inicio de la enseñanza del álgebra es el aprendizaje de las técnicas para “despejar la incógnita” en una ecuación lineal con una variable.

6) ¿Cuál de las tres expresiones corresponde a una ecuación?

☐ 2+3=5

☐ 2a+1=8

☐ 3x+2

Figura 86. Pregunta 6 de la encuesta.

En la Figura 87, pueden observarse los porcentajes correspondientes a las opciones elegidas en la pregunta 6.

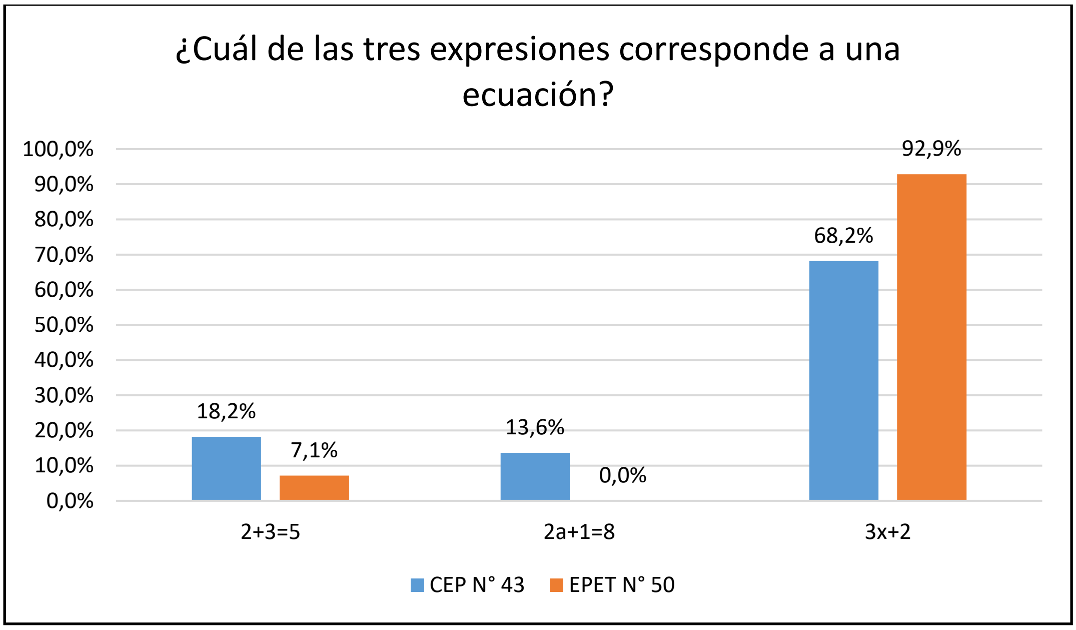


Figura 87. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 6 de la encuesta.

Puede concluirse que los alumnos no han construido completamente el concepto de ecuación ya que eligieron como tal, aquella que no contiene una igualdad (3x+2) o incluso aquella expresión que no contiene una incógnita (2+3=5).

En la EPET N°50 ninguno de los alumnos marcó la opción correcta y en el CEP N°43, solamente el 13,6% lo hizo. Estos porcentajes reflejan que los alumnos, en su mayoría, observaron una ecuación como una expresión que contiene una x. Este hecho podría deberse al uso excesivo por parte de los docentes y textos escolares de la letra x, como única posibilidad de representar a una incógnita.

Continuando con la encuesta, en la pregunta 7, que puede verse en la Figura 88, se hizo referencia a las formas de representación de una función.

7) ¿Cómo puede representarse una función?

- ☐ Con una tabla.
- ☐ Con una fórmula.
- ☐ Con un gráfico.

Figura 88. Pregunta 7 de la encuesta.

Como los alumnos podían elegir más de una opción, se esperaba que la mayoría marcara las tres opciones, pero esto no ocurrió y hubo alumnos que eligieron una o dos opciones solamente, tal como puede observarse en la Figura 89.

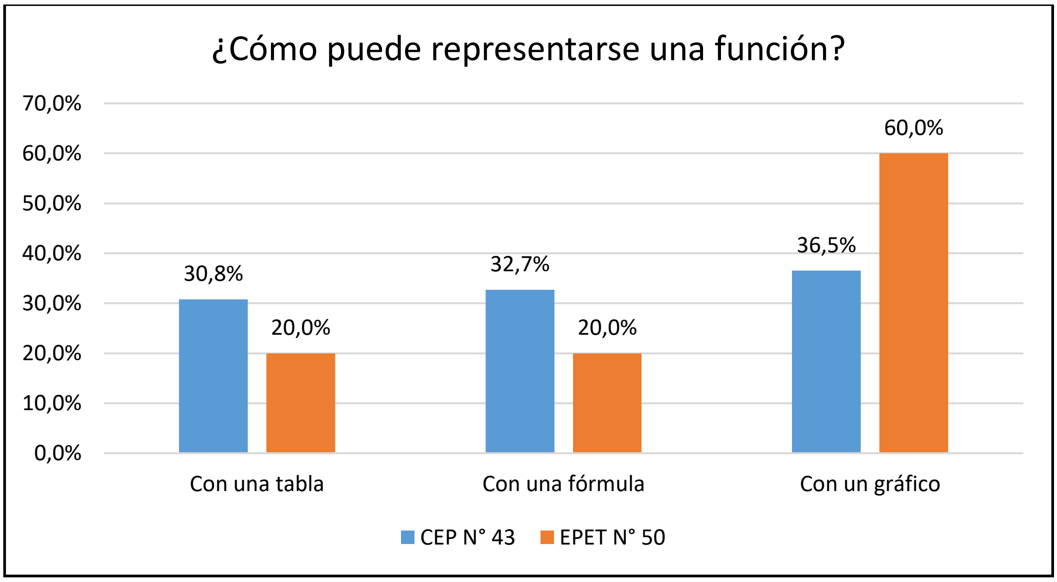


Figura 89. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 7 de la encuesta.

Puede observarse que la opción con un gráfico, fue elegida tres veces más sobre las otras representaciones en la EPET N° 50, mientras que en el CEP N° 43, todas las opciones fueron casi igualmente seleccionadas.

Los alumnos del CEP N° 43 tuvieron un mayor número de respuestas correctas que los alumnos de la EPET N° 50, lo que podría evidenciar una mejor construcción del concepto relativo a las distintas representaciones de una función. Los porcentajes indican que el gráfico de una función, para los alumnos encuestados, es la forma de representarla.

Al igual que en la pregunta 2, la respuesta correcta en este caso, estaba dada por las tres opciones.

En la Figura 90, puede observarse la cantidad de opciones seleccionadas por los alumnos al completar la encuesta.

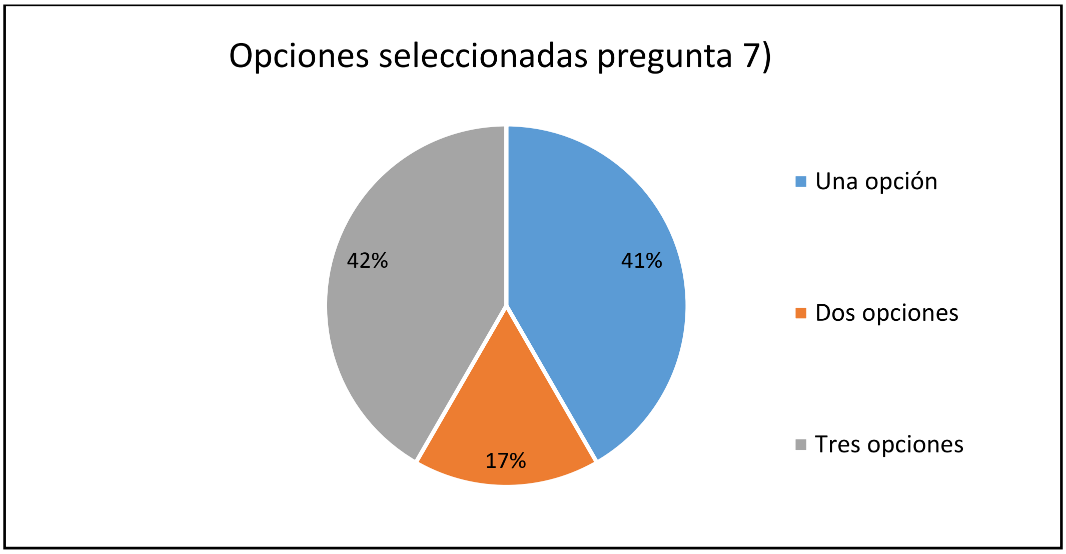


Figura 90. Cantidad de opciones seleccionadas por los alumnos de tercer año en la pregunta 7 de la encuesta.

Se sabe que una función puede representarse con una tabla, una fórmula o un gráfico. En la pregunta 7, el 42% de los alumnos encuestados eligieron las tres opciones, 17 % eligieron dos y el 41% restante, solamente una.

Menos de la mitad de los encuestados respondió correctamente, lo cual evidencia que, aunque se hayan abordado estos conceptos, la mayoría de los alumnos tiene inconvenientes en reconocer las distintas formas de representación de una función.

Por último, en la pregunta 8, que puede verse en la Figura 91, los alumnos eligieron de igual manera las tres opciones, cuando sólo es correcta la primera opción, variable independiente.

8) En la expresión y=2x+1, x representa:

- ☐ Variable independiente.
- ☐ Variable dependiente.
- ☐ Incógnita.

Figura 91. Pregunta 8 de la encuesta.

Los resultados de la encuesta para esta pregunta pueden verse en la Figura 92.

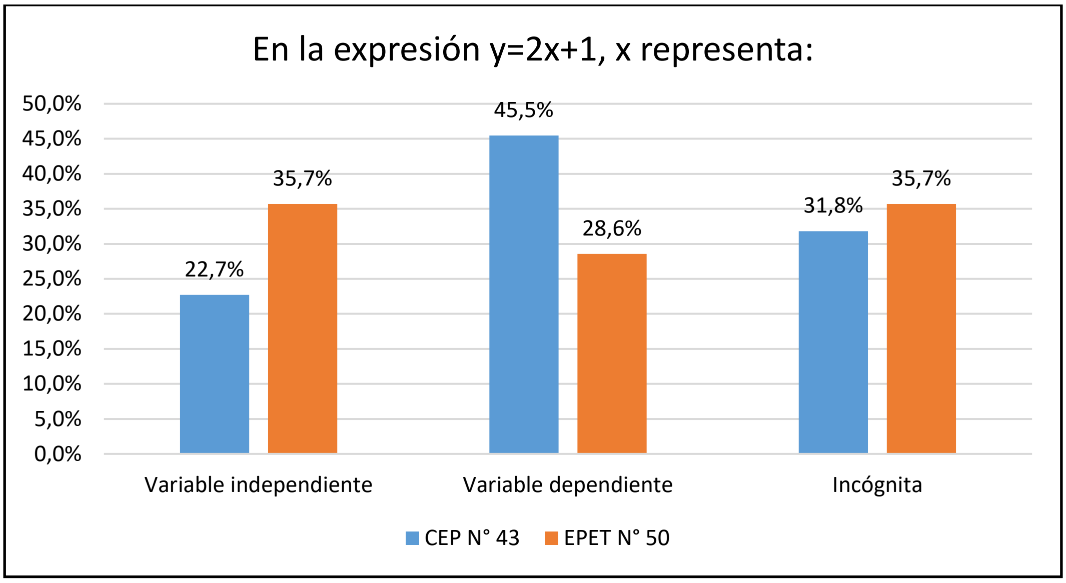


Figura 92. Respuestas de los alumnos de tercer año a la pregunta 8 de la encuesta.

En el caso de la EPET N° 50, el mismo porcentaje de alumnos seleccionó las opciones variable independiente e incógnita, mientras que la opción variable dependiente, fue la menos elegida.

En el caso del CEP N° 43, la opción más elegida fue variable dependiente, luego incógnita y en menor cantidad variable independiente.

Las respuestas obtenidas muestran que, en ambas escuelas, el concepto de variable independiente no ha sido construido o comprendido por los alumnos ya que en una de las escuelas (CEP N°43) fue la opción menos seleccionada y en el otro caso, fue igualmente seleccionada que la opción incógnita. Este último hecho puede deberse a que muchos alumnos relacionen la letra x al concepto de incógnita y no al de variable.

Por otra parte, se decidió encuestar a alumnos de primer año de la escuela secundaria para evaluar sus conocimientos previos en relación al Álgebra. Cabe aclarar que, estos alumnos no cuentan con conocimientos previos relacionados al concepto de función, por lo que las preguntas 7 y 8 de la encuesta no fueron consideradas.

En relación a la pregunta 1 puede observarse que, la mayoría de los alumnos respondió correctamente acerca de qué se entiende por Álgebra. En ambas escuelas, el porcentaje de respuestas correctas es cercano al 85%, tal como puede verse en la Figura 93.

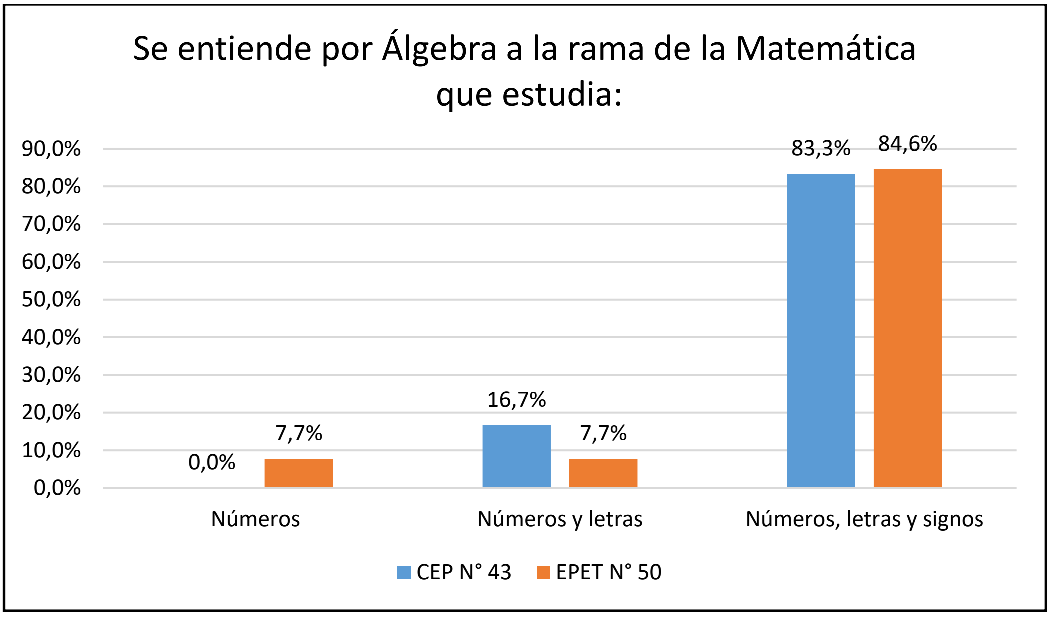


Figura 93. Respuestas de los alumnos de primer año a la pregunta 1 de la encuesta.

En la pregunta 2, las respuestas mayormente elegidas por los alumnos fueron como incógnita y número general, tal como puede observarse en la Figura 94. Era de esperarse que esto suceda ya que, como se aclaró antes, los alumnos no han trabajado hasta el momento con el concepto de función.

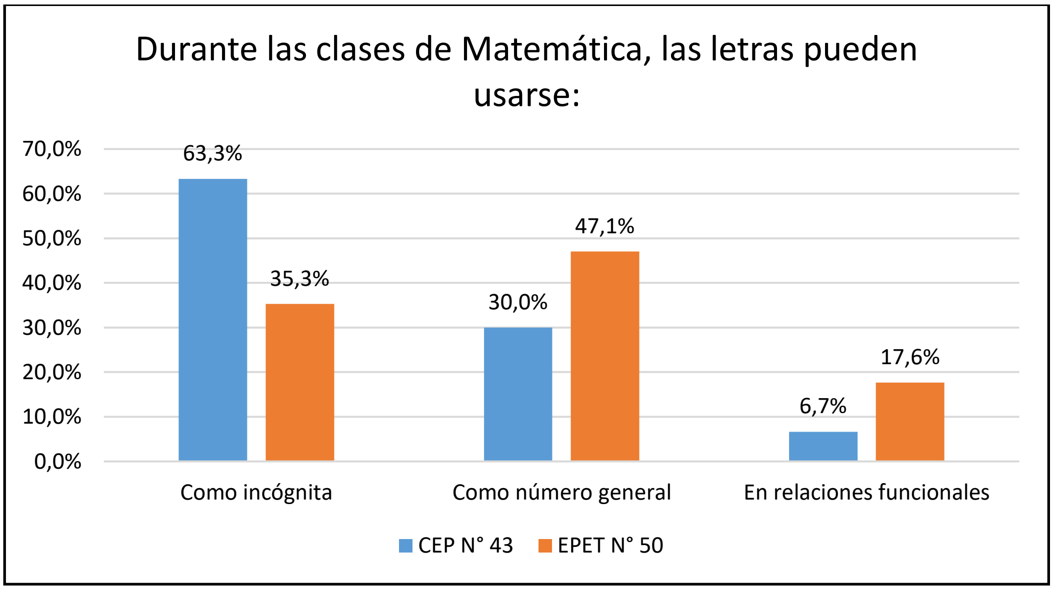


Figura 94. Respuestas de los alumnos de primer año a la pregunta 2 de la encuesta.

En la pregunta 3, la mayoría de los alumnos encuestados, eligió la tercera de las opciones, esto muestra que prevalece la idea de que las letras se utilizan para representar números cuyos valores se desconocen. Las opciones seleccionadas por los alumnos pueden verse en la Figura 95.

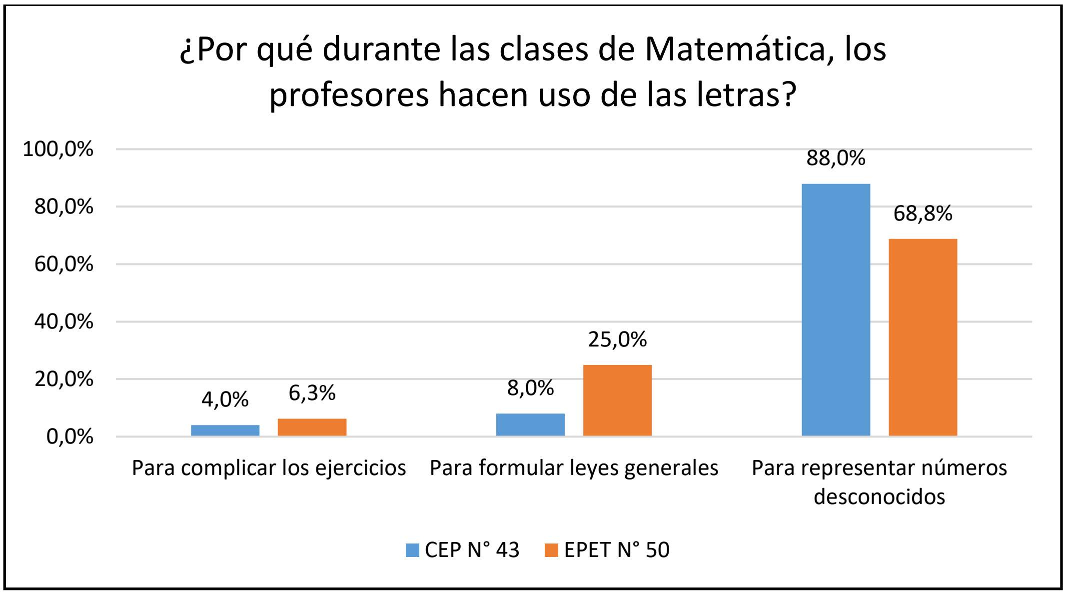


Figura 95. Respuestas de los alumnos de primer año a la pregunta 3 de la encuesta.

En la pregunta 4 los alumnos de ambas instituciones, eligieron en su mayoría la tercera de las opciones propuestas, tal como puede verse en la Figura 96.

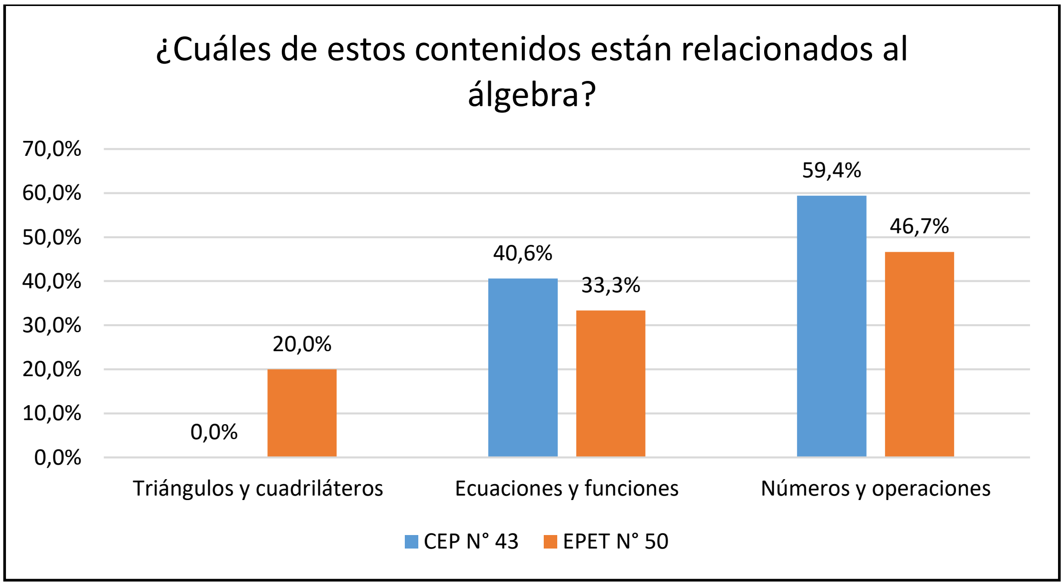


Figura 96. Respuestas de los alumnos de primer año a la pregunta 4 de la encuesta.

La mayoría de los alumnos encuestados relacionó el Álgebra a los números y operaciones, esto puede deberse a que, para la mayoría de ellos, la Matemática en general representa el trabajo con números y, por lo tanto, el Álgebra también.

Es importante aclarar que, el trabajo en el primer semestre del año, giró en torno a contenidos relacionados a la Aritmética: números enteros, específicamente y los temas relacionados al Álgebra, como ser: lenguaje simbólico y coloquial, valor numérico, operaciones con monomios y ecuaciones, comenzaron a desarrollarse posteriormente.

En la pregunta 5, las respuestas de los alumnos pueden observarse en la Figura 97.

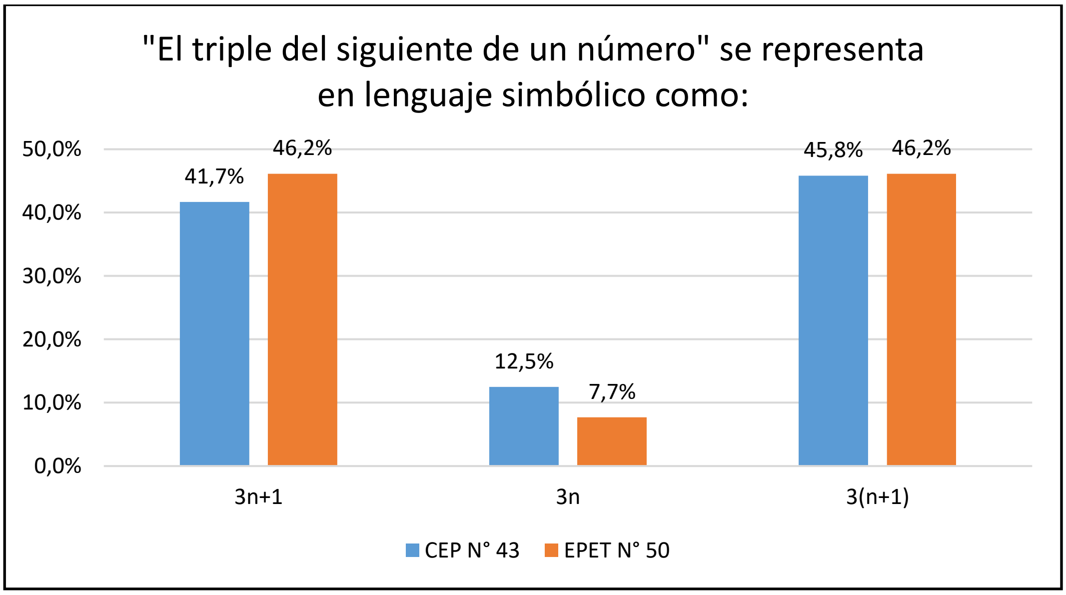


Figura 97. Respuestas de los alumnos de primer año a la pregunta 5 de la encuesta.

Las opciones uno y tres, fueron elegidas prácticamente en igual porcentaje, en ambas escuelas. Esto evidencia que, a pesar de haber trabajado con estos contenidos recientemente, menos del 50% de cada clase logró hacer una traducción correcta del lenguaje coloquial al simbólico. Los alumnos tuvieron dificultades en reconocer las implicancias del uso del paréntesis en una expresión algebraica.

En la pregunta 6, un porcentaje superior al 60% de los alumnos del CEP N° 43, pudo identificar correctamente a la expresión correspondiente a una ecuación. No sucedió lo mismo con los alumnos de la EPET N° 50, quienes eligieron mayormente a 3x+2, como respuesta correcta. Incluso hubo un porcentaje superior al 12% en ambas escuelas que seleccionó la opción 2+3=5, como puede verse en la Figura 98.

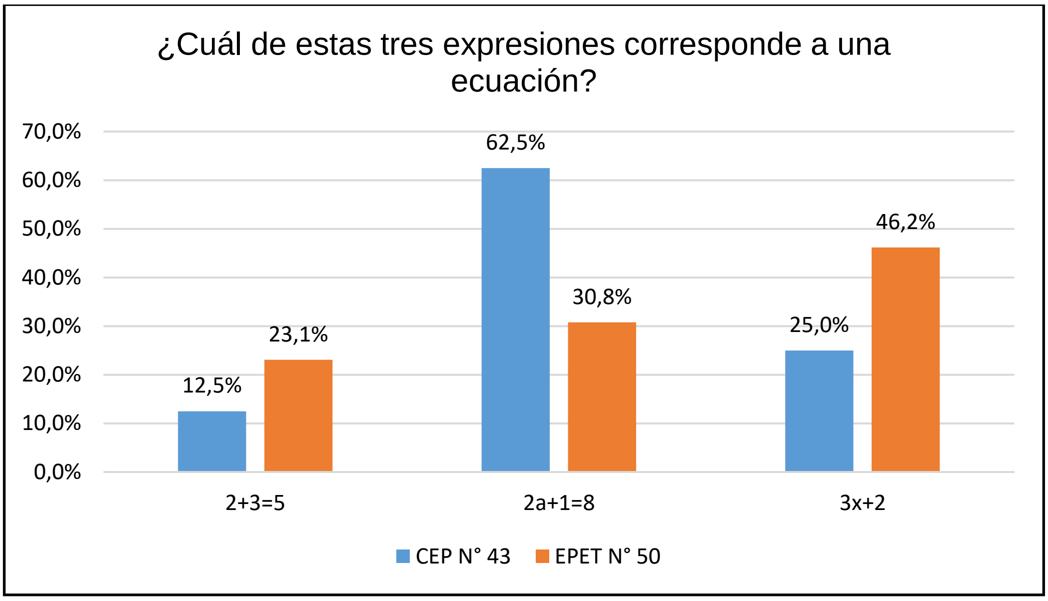


Figura 98. Respuestas de los alumnos de primer año a la pregunta 6 de la encuesta.

Estos resultados muestran que, los alumnos al comienzo de la escuela secundaria, no tienen nociones claras acerca de qué es una ecuación y cómo puede representarse.

6.4 Revisión bibliográfica

Se seleccionaron tres libros de Matemática correspondientes al ciclo básico de distintas editoriales, para poder analizar cómo plantean la introducción del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria.

Los libros seleccionados fueron los siguientes:

- Kaczor, P. J. & Outón, V. L. (2017). *Entre números II- Matemática.* Buenos Aires: Santillana.
- Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C., & Murúa, R. (2015). *Hacer Matemática ½.* Buenos Aires: Estrada.
- Itzcovich, H., Novembre, A., Borsani, V., Carnelli, G., & Lamela, C. (2018). *Nuevo Matemática 1*. Buenos Aires: Tinta Fresca.

Es importante mencionar que los libros elegidos están disponibles en las escuelas seleccionadas para el presente estudio, ya que son suministrados por el Ministerio de Educación, en forma gratuita.

Antes de realizar el análisis de los libros de texto, es importante recordar los contenidos propuestos para el Ciclo Básico Secundario, en la provincia de Misiones en el área de Matemática. Los mismos pueden verse en la Figura 99.

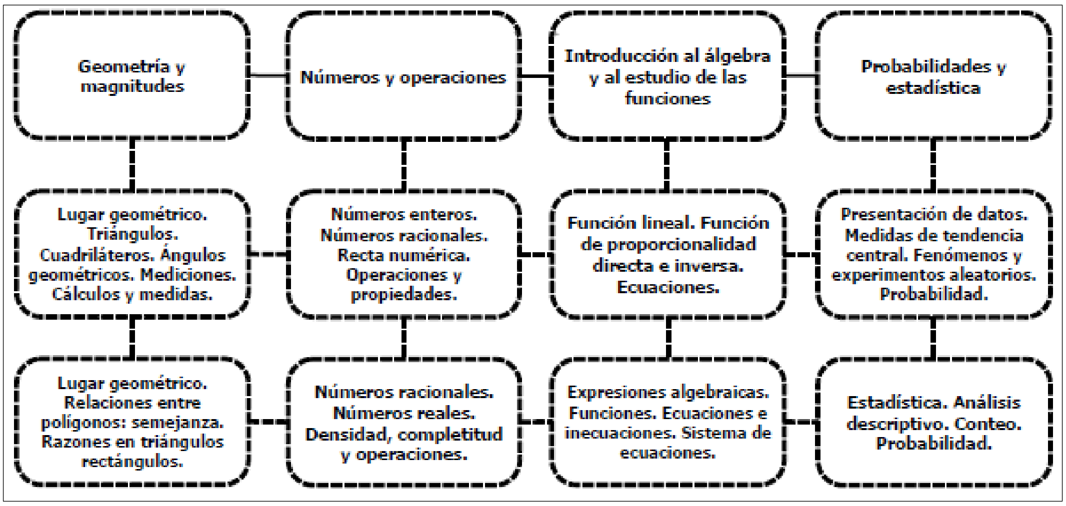


Figura 99. Esquema de contenidos por ejes y años para el CBCSO-Matemática.

Fuente: Ministerio de Cultura, Educación, Ciencia y Tecnología de la Provincia de Misiones. (2011). *Diseño Curricular Jurisdiccional. Ciclo Básico Secundario Común Obligatorio.* Misiones: Autor. (p. 38)

Como podrá verse más adelante, todos los temas propuestos en el Diseño Curricular Jurisdiccional son abordados en los diferentes capítulos de los libros seleccionados.

Los contenidos propuestos por Kaczor y Outón (2017, pp. 3-4) pueden observarse en la Figura 100.

Figura 100. Índice completo del libro Entre números II de la editorial Santillana.

Como puede observarse, de todas las unidades propuestas, dos corresponden al eje, Álgebra y funciones.

Capítulo 4: Lenguaje algebraico

Capítulo 5: Gráficos y funciones.

Los mismos son antecedidos por los capítulos 1 y 2, correspondientes a Aritmética (Números enteros y racionales) y el capítulo 3, correspondiente a Geometría (Ángulos. Triángulos. Criterios de Congruencia). Posteriormente, los capítulos 6 y 7, nuevamente hacen referencia a Geometría (Cuadriláteros. Cuerpos Geométricos. Perímetros y áreas. Teorema de Pitágoras. Volúmenes) y, por último, el capítulo 8, que propone contenidos relacionados a la Estadística y Probabilidad.

Los contenidos propuestos por Sessa, Borsani, Lamela, y Murúa (2015, pp. 4-6), pueden observarse en la Figura 101.

Figura 101. Índice completo del libro Hacer Matemática 1/2 de la editorial Estrada.

En este caso, los capítulos que abordan contenidos relacionados al Álgebra y las funciones son:

- Capítulo 3: Fórmulas para contar y medir.
- Capítulo 7: Relaciones entre variables: tablas, gráficos y fórmulas.
- Capítulo 11: Funciones de variación uniforme.

A diferencia del libro anterior, estos capítulos no son consecutivos, sino que, están distribuidos entre capítulos correspondientes a otras áreas de la Matemática.

Por su parte, Itzcovich, Novembre, Borsani, Carnelli y Lamela (2018, pp. 3-4) proponen dos capítulos relacionados al eje: Álgebra y funciones, los cuales pueden observarse en la Figura 102.

Capítulo 6: Iniciación en las prácticas algebraicas.

Capítulo 7: Introducción a la idea de variable.

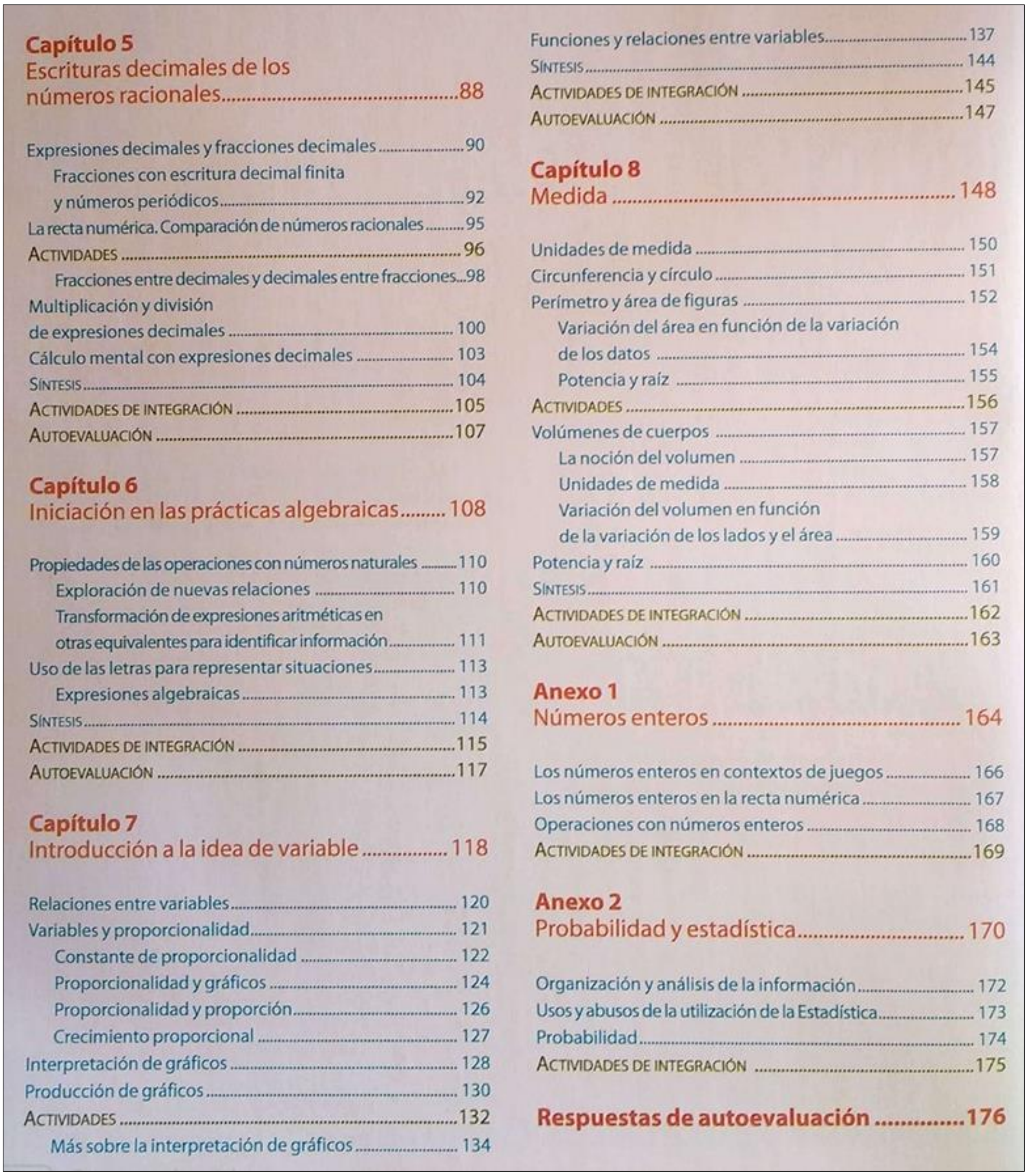


Figura 102. Índice completo del libro Nuevo matemática 1 de la editorial Tinta Fresca.

En la Tabla 15 se resume la distribución de los ejes y capítulos de cada uno de los libros considerados.

Editoriales	Santillana								Estrada												Tinta fresca							
Contenidos	Capítulos								Capítulos												Capítulos							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
Aritmética																												
Geometría																												
Álgebra																												
Estadística																												

Tabla 27. Contenidos desarrollados en los distintos capítulos de los libros analizados.

Puede observarse que, los capítulos relacionados al Álgebra y funciones, en todos los casos, representan el 25% de los temas abordados, mientras que, para los otros ejes, esta distribución no es homogénea ya que, por ejemplo, en Tinta Fresca, los capítulos destinados a Aritmética ocupan el 50% mientras que en Santillana es solamente del 25%. En el caso de Geometría, los capítulos dedicados a este eje representan entre el 25% y el 37,5% del total, en todas las editoriales. En el caso de Estadística, los porcentajes son menores a 12,5% y llega a ser nula en el caso de la editorial Tinta Fresca.

La editorial Santillana organiza los capítulos del libro de la siguiente manera:

Al comienzo de cada tema presenta en un recuadro lo que el libro denomina *"Explicaciones con ejemplos: machetes para estudiar"*. Seguidamente plantea una serie de actividades las cuales, de acuerdo al tema presentado, son situaciones problemáticas o serie de ejercicios para resolver.

En los márgenes derechos, figuran pequeños recuadros con el título *"Fijate bien"*, los cuales, según el libro, son alertas para no equivocarse.

Dentro de las actividades presentadas hay algunas identificadas como: *"Hacé de profe"*, pensadas para que el alumno descubra errores, otras identificadas como *"Tengo tarea"*, con actividades para el hogar y *"Estrategias"* actividades donde se sugiere una estrategia que favorezca la resolución.

Luego de desarrollados dos o tres temas, el libro presenta una página completa de actividades bajo el título "A ver cómo voy", donde se presentan una serie de actividades similares a las anteriores y algunas con un grado de dificultad mayor. A continuación, dos carillas completas con el título *"Repaso todo"* y, por último *"Saquen una hoja"*, lo que corresponde a una autoevaluación.

Para introducir a los alumnos al lenguaje algebraico, el autor comienza refiriéndose a las expresiones algebraicas y el papel del lenguaje simbólico. Luego de presentar varios ejemplos, propone una serie de actividades que se suponen pueden ser resueltas a partir de la información brindada al principio. De la misma manera desarrolla los temas: Valor numérico de una expresión algebraica; Operaciones con monomios; Propiedad distributiva; Factores comunes; Cuadrado de un binomio y Ecuaciones. Todos estos corresponden al capítulo 4.

Siguiendo con la misma metodología, en el capítulo 5, desarrolla el concepto de función y para ello, comienza la presentación de los siguientes temas y ordenados tal como se listan: Sistema de ejes cartesianos; Interpretación de gráficos cartesianos; Noción de función; Función lineal; Función de proporcionalidad directa y Función de proporcionalidad inversa.

Aunque no consten de manera explícita, a lo largo de las actividades propuestas, se trabajan las distintas representaciones: tablas, fórmulas y gráficos.

Por su parte, la editorial Estrada comienza su presentación en torno al Álgebra y las funciones desde, la resolución de problemas y el establecimiento de patrones o regularidades en contextos geométricos que permiten trabajar desde lo particular hasta lograr la generalización. Tal es así que, en el capítulo 3, se desarrollan los siguientes temas: Fórmulas para contar; Expresiones equivalentes; Igualdades con variables: ecuaciones; Fórmulas para medir; Otra vuelta a las ecuaciones.

En cada uno de estos apartados, el autor propone una serie de actividades muy variadas acompañadas de consejos, definiciones, aclaraciones y recordatorios ubicados en el margen derecho de las páginas y las conclusiones de los contenidos trabajados en las actividades y las definiciones en recuadros resaltados a color, en el cuerpo del texto.

Para finalizar el capítulo se presenta un apartado titulado *"Más actividades"*, donde se proponen tres carillas de consignas, a modo de revisión y repaso.

El trabajo en torno al eje Álgebra y funciones se retoma en el capítulo 7, titulado *"Relación entre variables: tablas, gráficos y fórmulas"*. En este caso, el autor propone, para comenzar a desarrollar el tema, una situación problemática donde se espera que el alumno analice un gráfico cartesiano y dé respuestas a las distintas preguntas formuladas. Seguidamente desarrolla los siguientes apartados: Gráficos de relaciones entre variables; Tablas y gráficos; Fórmulas, gráficos y tablas. Se abordan las distintas representaciones de una función y las relaciones que se establecen entre ellas, a partir de la resolución de problemas.

El décimo primer capítulo *"Funciones de variación uniforme"*, se inicia con una situación problemática, la cual, al igual que el problema inicial del capítulo 3, plantea una actividad donde se deben analizar estrategias de resolución, lo cual permite una mayor comprensión de la situación planteada ya que el alumno debe interpretar y otorgar sentido a la producción de un compañero.

El autor presenta diversas actividades para desarrollar los siguientes apartados: Funciones de variación uniforme; Representación gráfica de las funciones de variación uniforme; Pendiente de una función lineal; Fórmulas y gráficos; Funciones de proporcionalidad directa; Funciones lineales, gráficos y ecuaciones; Una última visita a las ecuaciones.

El libro seleccionado de la editorial Tinta Fresca inicia, en el capítulo 6, el estudio del eje: Álgebra y funciones. El mismo, a diferencia de los textos de las editoriales analizadas previamente, plantea un trabajo de formulación y validación de conjeturas sobre los números y las operaciones.

Itzcovich et al. (2018) al inicio del capítulo 6 *“Iniciación en las prácticas algebraicas”* plantea: “…se tratarán situaciones que pueden pensarse de manera general, no para algunos números, sino para todos. Para ello usaremos letras en lugar de números y analizaremos cuál es la mejor manera de trabajar con ellos.” (p. 109)

Los contenidos abordados en este capítulo son: Propiedades de las operaciones con números naturales; Uso de las letras para representar situaciones: expresiones algebraicas.

Los distintos temas que presenta el libro se desarrollan a partir de un problema, el cual es resuelto y analizado completamente por el autor. En los márgenes, identificados con distintos íconos se incluyen: definiciones, propiedades y conclusiones. Seguidamente, se presentan en una carilla las ideas principales trabajadas en el capítulo, en un apartado titulado *“Síntesis”* y al final de cada capítulo, se proponen actividades de integración y autoevaluación.

El capítulo 7 “Introducción a la idea de variable”, trabajando de la manera antes mencionada, el autor desarrolla los siguientes temas: Relaciones entre variables; Variables y proporcionalidad; Interpretación de gráficos; Producción de gráficos; Funciones y relaciones entre variables.

La editorial Santillana, para desarrollar los contenidos, incluye en primer lugar, una explicación teórica al inicio de cada tema acompañada de varios ejemplos para luego presentar actividades y problemas que podrían ser resueltos por los alumnos teniendo en cuenta las explicaciones anteriores.

Las editoriales Estrada y Tinta Fresca, a diferencia de la anterior, proponen una introducción al Álgebra a partir de la generalización. En el primer caso, mediante la obtención de expresiones generales a partir de problemas surgidos de la Geometría, y en el segundo, a partir de problemas relacionados a contextos aritméticos.

En ambos casos, primero se plantean actividades a ser resueltas por los alumnos y luego a partir de las conclusiones a las que se arriba luego de la resolución se presentan las definiciones y/o conclusiones en torno a cada tema.

Las actividades propuestas en estos dos últimos libros permiten al alumno explorar, elaborar conjeturas, buscar regularidades, creando la necesidad de generalizar a través del uso de las letras partiendo de contextos diferentes: aritmético y geométrico.

Por último, podemos mencionar el uso de las letras y el tratamiento dado en cada uno de los libros seleccionados.

En el libro Entre números II de la editorial Santillana, primero se detalla el uso de las letras para representar números que pueden tomar distintos valores, luego se utiliza el término incógnita al presentar el tema Ecuaciones y a continuación, se hace referencia al concepto de variable cuando se desarrolla la unidad de Gráficos y funciones.

En el libro Nuevo matemática de la Editorial Tinta Fresca, primero se desarrolla el tema: Uso de las letras para representar situaciones y luego se desarrolla la idea de variable relacionada a la proporcionalidad y la interpretación de gráficos.

En cambio, en el libro Hacer matemática ½ de la editorial Estrada, todas las unidades relacionadas al Álgebra, desarrollan los contenidos propuestos partiendo de la idea de variable.

En los dos primeros casos, el uso del concepto de variable se limita al contexto de las relaciones funcionales, mientras que, en el tercer caso, se trabaja la idea de variable cuando se desarrollan los temas: expresiones equivalentes, ecuaciones y funciones. En este caso, podría decirse que se trabaja a partir del modelo 3UV.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

A partir de la interpretación de toda la información recopilada se pudieron establecer algunas conclusiones que se detallan a continuación.

En relación a los objetivos propuestos:

- Describir procedimientos, estrategias y/o justificaciones utilizadas por alumnos de segundo año secundario del Centro Educativo Polimodal N°43 y la Escuela Provincial de Educación Técnica N°50.

Para resolver los problemas planteados los alumnos recurrieron en su mayoría a procedimientos relacionados al tanteo, al uso de la calculadora y a la resolución de operaciones aritméticas, por ejemplo, en el problema 1 de la secuencia: sumaron cuatro ladrillos hasta llegar a 79 ladrillos para conocer el nivel correspondiente, en el problema 3, fueron sumando $2,4 a un monto ya conocido para calcular el precio de un viaje de 36 cuadras, en el problema 4, fueron probando haciendo uso de la calculadora con valores próximos a 14cm, cuál podría ser la medida del segmento x, para que el área del rectángulo sea 29 cm^2 y 29,5cm^2, en el problema 5, también trabajaron desde la aritmética para calcular el tiempo que debía estar encendida la bomba hasta llenar la pileta.

La mayoría de los alumnos no lograron generalizar las relaciones observadas entre las variables porque pudieron trabajar desde la aritmética.

Utilizaron distintas estrategias de resolución, la mayoría de ellas, anticipadas por el docente en el análisis a priori. Los alumnos, en general, no sintieron la necesidad de escribir cómo razonaron, las conjeturas que elaboraron, trataron de buscar antes que nada, que el docente establezca que lo que estaban pensando era correcto para luego plasmarlo de manera muy sintética y sin mayor detalle en la carpeta, por ejemplo, en la actividad 1, algunos grupos anotaron los niveles y la cantidad de ladrillos correspondientes pero no tuvieron la necesidad de organizar la información en una tabla, algunos se conformaron incluso, con hacer los cálculos en la calculadora y sólo responder a las preguntas planteadas sin necesidad de escribir los cálculos realizados. Muchos de los procedimientos quedaron explícitos en la carpeta por pedido del profesor y no por iniciativa de los alumnos.

En cuanto a las justificaciones se puede concluir que son muy escuetas, los alumnos en general, no están habituados a justificar lo que realizan. Por ejemplo, en la actividad 3 la mayoría eligió correctamente el gráfico que representa a la situación, pero tuvieron dificultades para expresar con palabras el porqué de esa elección, algunos no lo hicieron y otros lo hicieron de manera incompleta.

A medida que se fue avanzando en la implementación de la secuencia y se realizaron las puestas en común de las primeras actividades, algunos grupos pudieron incorporar en sus resoluciones, procedimientos relacionados al Álgebra, como el planteo y la resolución de ecuaciones, pero no se trató de la mayoría. Incluso en el problema 8, luego de haber trabajado con todos los registros de representación y haber evidenciado la potencialidad de generalizar una relación a través de una fórmula o la lectura e interpretación que puede hacerse a partir de un gráfico, los alumnos consideraron valores particulares y calcularon el costo del viaje en ambas compañías basando su conclusión, únicamente en los resultados obtenidos.

- Detectar obstáculos y errores frecuentes.

Los errores cometidos más frecuentemente por los alumnos, al resolver los problemas de la secuencia didáctica, se relacionan al orden en el que efectúan las operaciones y la forma de ver el signo igual.

Entre los procedimientos realizados por los alumnos se registraron expresiones como la siguiente: H2: 84-24: 2,4=25. En este caso, el alumno H2 resolvió las operaciones de izquierda a derecha, sin tener en cuenta la jerarquía de las operaciones. Si bien, el razonamiento es correcto en relación al problema (Actividad 3 de la secuencia), no lo es la forma de expresarlo ya que esta debería ser: (84-24): 2,4.

En el mismo problema, el alumno B3 planteó: 84-24=60: 2,4=25. En este caso, se hizo un uso incorrecto del signo igual ya que se utilizó como separador de las secuencias de operaciones que se realiza para llegar al resultado. En este caso, el razonamiento también es correcto, pero se registran errores al momento de plasmarlo por escrito.

- Reconocer aspectos facilitadores u obstaculizadores del aprendizaje a partir de la implementación de la secuencia didáctica.

En primer lugar, se considera importante el hecho de desarrollar el tema de funciones a partir de una secuencia didáctica como la presentada en este trabajo de investigación que aborde las distintas representaciones semióticas y las actividades de tratamiento y conversión entre registros, ya que las mismas son las que permiten al alumno una construcción significativa de los conceptos.

Las actividades de la secuencia didáctica corresponden a distintos problemas contextualizados que permitieron abordar aspectos propios del pensamiento algebraico como ser: generalización, representación, variabilidad, favoreciendo así la comprensión y utilización del lenguaje algebraico y evitando la simbolización formal vacía de significado.

Un aspecto importante a abordar a partir de los problemas extra matemáticos es el trabajo con las unidades de medida de cada una de las variables involucradas en una situación, por ejemplo, no es lo mismo decir 2,4$/cuadra por 5 cuadras que 2,4$/cuadra por 500 metros. Si las unidades de medida no son tenidas en cuenta los cálculos terminan siendo abordados desde un punto de vista meramente aritmético, generando dificultades y errores en la interpretación de los resultados obtenidos.

Durante el desarrollo de las clases no se analizó en profundidad la importancia de las unidades de medida y tampoco, la distinción entre variable y etiqueta. Por ejemplo, en el problema 3 de la secuencia didáctica la variable independiente es: cantidad de cuadras y no solamente: cuadras, esta última corresponde a una etiqueta.

Las situaciones problemáticas de la secuencia didáctica tenían como propósito abordar la lectura e interpretación de cada registro de representación semiótica de una función, así como la conversión entre ellos, considerando que para lograr el aprendizaje es necesario que el alumno alcance la articulación entre los distintos registros. Se considera que, para ello es necesario revertir circuitos privilegiados y comúnmente desarrollados en clase como, por ejemplo: dada la siguiente función, completar la tabla y luego graficar.

El desarrollo de las clases a partir de una secuencia de problemas promueve la reflexión y reorganización de estrategias de resolución abandonando ensayos erróneos e intentando nuevas aproximaciones, como pudo observarse, por ejemplo, en la resolución del problema 1, consigna a) del grupo H (Figura 22). Por otro lado, permite a los alumnos volver sobre las relaciones que se identificaron en problemas anteriores, por ejemplo, el trabajo a partir del problema 3 consigna d) favoreció en algunos casos (alumnos de la EPET N°50) la representación gráfica en la actividad 5. Además, habilita a avanzar desde resoluciones más básicas a otras más generales, como pudo observarse, por ejemplo, en las resoluciones del problema 1, de los grupos B y H.

Trabajar de esta manera, tal como lo propone el Modelo de enseñanza Aproximativo o Apropiativo permite, por una parte, un trabajo de exploración y un segundo momento de sistematización por parte de los alumnos, en los cuales el rol docente es fundamental, ya que puede alentar la resolución a través de distintas estrategias y, además, en los momentos de puesta en común (y tal como se plantea en los registros de clase) recuperar las distintas producciones, discutir sobre los errores producidos, organizar los nuevos conocimientos, presentar nuevas formas de representación, etc.

El desarrollo de las clases permitió abordar la noción de función y cómo esta puede representarse a través de un enunciado, una tabla, una fórmula o un gráfico. Las consignas que mayores dificultades presentaron fueron aquellas que demandaban de los alumnos un razonamiento algebraico, como ser: generalizar la relación observada, hallar pares de valores correspondientes a partir de una expresión simbólica, interpretar los parámetros de una fórmula.

Muchos estudiantes fueron capaces de completar valores de una tabla realizando cálculos, por ejemplo 30.15=450, expresaron en palabras cómo lo hicieron, “multiplicamos el precio de la nafta por la cantidad de nafta” pero no fueron capaces de generalizar el cálculo realizado a través de una expresión algebraica como ser: y=30.x.

Además de trabajar específicamente la noción de función, dependencia y variabilidad, el trabajo en torno a los problemas de la secuencia didáctica y los ejercicios de refuerzo permitieron a los alumnos desarrollar distintas actividades como ser, representar, describir, generalizar y formalizar regularidades o patrones, actividades que permiten iniciar el aprendizaje del Álgebra y desarrollar la idea de la letra como variable.

Luego de haber implementado la secuencia didáctica y llevados a cabo los ejercicios de refuerzo, y a fin de identificar el razonamiento algebraico utilizado por los alumnos se realizó un examen escrito. Tal y como puede verse en el capítulo 5, los niveles de desempeño de los alumnos en las actividades del examen por debajo del 60%, en su mayoría, correspondieron a los siguientes criterios de evaluación: generalización de la relación entre las variables consideradas, utilización del lenguaje simbólico, planteo y resolución de ecuaciones, cálculo de pares de valores correspondientes, interpretación de parámetros de una fórmula. Esta situación refuerza la tesis de distintos autores consultados acerca de las dificultades de aprendizaje del Álgebra en el ciclo básico secundario.

En relación a las preguntas de investigación:

¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?

A partir de las entrevistas realizadas a los docentes se puede concluir que el Álgebra no ocupa un lugar preponderante frente a otras ramas de la Matemática, como ser, la Aritmética o la Geometría, ya que, en los primeros años de la escuela secundaria, se priorizan contenidos relacionados a estos ejes.

La mayoría de los docentes sostuvieron que los alumnos no reconocen su importancia debido a que el Álgebra les resulta incomprensible o algo carente de sentido, justamente porque son los mismos docentes quienes no priorizan el trabajo en torno a los contenidos de este eje. Es responsabilidad de los docentes abordar estas cuestiones para que los alumnos comprendan que la Matemática es más que solo números y que el poder de la misma reside en el hecho de realizar generalizaciones a través del uso de variables.

¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?

A partir de todo el trabajo realizado se puede concluir que, los alumnos en su mayoría, no reconocen el sentido del uso de las letras en las clases de Matemática, incluso hay quienes sostienen que las mismas son usadas por los profesores para complicar los ejercicios. A partir de los resultados arrojados en las encuestas se puede afirmar que: los alumnos no reconocen los tres usos asociados a las variables. Para la mayoría de los alumnos las letras en Matemática se usan para representar números desconocidos, o sea, incógnitas y no para representar números generales o en relaciones funcionales. Este hecho puede deberse a la falta de trabajo docente en este sentido. Los docentes suelen trabajar primero con ecuaciones y luego con funciones, como temas separados sin hacer hincapié en el significado de las letras en cada caso. Por ejemplo, para la mayoría de los alumnos la letra x, representa una incógnita independientemente del contexto en el que aparezca escrita.

Es importante trabajar con los alumnos el hecho de que la misma letra "x", de acuerdo al contexto, puede representar cosas diferentes. Por ejemplo: en la expresión $3x - 2$, "x" representa una indeterminada, mientras que, en la expresión $3x - 2 = 7$, "x" representa a un número particular que verifica una igualdad y en la expresión $y = 3x - 2$, "x" representa una cantidad variable, del cual va a depender el valor de "y".

¿Qué dificultades presentan en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuáles son las razones de estas dificultades? ¿Están relacionadas al Álgebra en sí misma o a la forma de enseñanza?

A partir de las entrevistas realizadas a los docentes se pudo constatar que los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra entre las cuales se pueden mencionar: generalización, utilización de letras y símbolos, identificación de letras con objetos.

En cuanto a las razones de estas dificultades, los docentes entrevistados aludieron a: la falta de razonamiento, aprendizaje memorístico, repetitivo y mecánico, bajo rendimiento aritmético, dependencia del profesor, falta de trabajo algebraico en la escuela primaria y no aplicación del Álgebra en la vida cotidiana.

El trabajo a partir de la secuencia ha evidenciado las dificultades y errores que tienen los alumnos, entre las que se pueden mencionar: carencia o mal uso de los paréntesis, orden inadecuado en que realizan las operaciones, significado y uso incorrecto del signo igual. Por tal motivo, resulta importante favorecer situaciones de enseñanza donde surjan dichos errores, y se trabaje sobre estos, para construir aprendizajes a partir de los mismos.

Las razones de estas dificultades están relacionadas en su mayoría con la complejidad de los objetos del álgebra (objetos abstractos), con el desarrollo cognitivo de los alumnos (transición aritmética- álgebra) y con actitudes emocionales de los alumnos hacia el álgebra (falta de sentido y aplicación).

¿Las actividades desarrolladas en el Ciclo Básico Secundario permiten a los alumnos desarrollar el concepto de función?

De acuerdo a las entrevistas realizadas este concepto se trabaja desde los primeros años de la escuela secundaria, pero de acuerdo a los docentes logra afianzarse recién en los últimos años, cuando los alumnos logran una mayor articulación de los distintos registros de representación de una función. De todos modos, no se puede asegurar que en todos los casos se logra desarrollar completamente el concepto de función, ya que varias investigaciones han demostrado que, incluso en el nivel superior, los alumnos tienen significativas confusiones y cometen errores en el manejo de los objetos y procesos algebraicos.

A partir de la implementación de la secuencia y de acuerdo a los resultados de los exámenes se pudo evidenciar que los alumnos no han construido totalmente la noción de función ya que evidenciaron dificultades en la articulación de los distintos registros de representación.

¿De qué manera puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje de las funciones, en los primeros años de la escuela secundaria?

A partir de todo el trabajo realizado se pudo concluir que se puede favorecer la enseñanza y aprendizaje de las funciones, en los primeros años de la escuela secundaria, a partir de la resolución de problemas (modelización) y de su aplicación a la vida diaria (significación).

El desafío docente entonces, es proponer a los alumnos actividades que permitan un desarrollo del razonamiento lógico- formal, lo cual puede lograrse, por ejemplo, a través de situaciones problemáticas que requieran del alumno percibir regularidades, comunicar patrones y expresarlos en lenguaje algebraico.

Se ha constatado que la mayoría de los alumnos no reconocen las distintas representaciones de una función, por tal motivo resulta pertinente trabajar a partir de estas para poder abarcar todos los aspectos que encierra el concepto, así como el tipo de información que revela cada registro de representación.

Es fundamental que el alumno logre comprender qué información encierra cada registro y en qué circunstancias conviene uno u otro, para poder tomar decisiones o elaborar conclusiones. Para ello se pueden proponer en clase distintas y variadas situaciones problemáticas donde el alumno pueda trabajar en forma secuenciada con tablas y gráficos, gráficos y fórmulas o fórmulas y tablas.

¿Se trabajan los distintos registros de representación?

Los docentes entrevistados mencionan la resolución de problemas o situaciones cotidianas y el análisis de tablas y gráficos, pero no hacen hincapié en los distintos registros de representación.

Por otra parte, en los libros analizados puede observarse que, Hacer Matemática ½ es el único que enfatiza el trabajo en torno a los distintos registros de representación, mientras que los otros lo hacen de una manera más superficial.

Coincidiendo con las investigaciones consultadas y a raíz del trabajo llevado a cabo, se concluye que la construcción del concepto de función se logra a partir de la coordinación entre los diferentes registros de representación.

¿Por qué es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos?

De acuerdo a las entrevistas realizadas se puede concluir que, es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos porque permite resolver situaciones problemáticas a partir de la utilización de números y símbolos, favorece el razonamiento lógico- matemático y ayuda a la abstracción.

Esto coincide con lo que plantean distintos autores cuando plantean que el pensamiento algebraico permite resolver problemas y diseñar modelos matemáticos, tanto dentro de la propia matemática como fuera de ella.

Conclusiones generales:

El concepto de variable resulta de difícil comprensión, tal como lo han señalado distintos autores, porque supone la conjunción de dos procesos: generalización y simbolización, por tal motivo, se considera fundamental comenzar a trabajar las nociones algebraicas y la introducción del pensamiento algebraico desde los primeros años de la escuela secundaria porque el Álgebra es el idioma de la Matemática y como tal, debiera ocupar un lugar preponderante dentro de las matemáticas escolares.

En este sentido, resulta interesante la propuesta que realiza la editorial Estrada en el libro Hacer Matemática ½ analizado en el capítulo 6, donde la introducción al Álgebra comienza en el capítulo 3 a través de la elaboración de fórmulas para medir y contar y las ecuaciones son presentadas como igualdades en las que intervienen expresiones con variables, a través de distintas actividades donde el trabajo del alumno no se reduce a despejar x. Luego se aborda la relación entre variables a través de la resolución de problemas que involucran tablas, gráficos y fórmulas y, por último, funciones de variación uniforme donde se retoma el tema ecuaciones en la resolución de problemas.

Otro aspecto que podría tenerse en cuenta y tal como se propone en la secuencia didáctica, es la posibilidad de trabajar articuladamente los conceptos de ecuaciones y funciones ya que ambos están íntimamente relacionados y no presentarlos como temas separados. De esta manera se puede favorecer el aprendizaje de ambos conceptos.

Como en toda propuesta siempre existen aspectos que se pueden discutir y mejorar, como es el caso de algunas de las consignas del examen, ya que es necesario que todo lo que el docente espera que el alumno haga esté explícito en las mismas, lo mismo que las informaciones necesarias para la resolución de las distintas actividades. Como se ha analizado en el capítulo 5, se podrían realizar modificaciones en las consignas del examen con el propósito de obtener mejores resultados.

Si bien los resultados de las evaluaciones no fueron los esperados y en varios casos, los alumnos no alcanzaron los objetivos propuestos, se considera que estos pueden deberse también, en cierta parte, a problemas socio económicos. Actualmente, son pocos los alumnos que asisten a la escuela secundaria y demuestran interés por las clases, deseos de aprender y superarse. Muchos de ellos tienen problemas familiares y económicos que afectan su desempeño en la escuela. Pero dejando de lado estas cuestiones, que exceden el objetivo del presente trabajo, puede concluirse que resulta significativo abordar el concepto de función desde la resolución de problemas y la introducción al Álgebra a través de la noción de función y sus distintas representaciones.

A raíz de todo lo expuesto puede concluirse que:

- Los alumnos no reconocen al Álgebra (particularmente al lenguaje simbólico y las ecuaciones) como una herramienta útil para resolver problemas.
- Los alumnos tienen dificultades asociadas a la resolución de problemas que implican la aplicación comprensiva de conocimientos algebraicos relacionadas a la complejidad de los objetos, a los procesos de pensamiento y a actitudes emocionales.
- Los alumnos no diferencian los distintos usos de las variables y tienen inconvenientes y errores para expresarse en lenguaje algebraico.
- La construcción del concepto de función y la comprensión de su utilidad en los alumnos requiere de tiempo y no se logra con la resolución de algunos problemas.
- La mayoría de los alumnos tiene inconvenientes para realizar las actividades de conversión y tratamiento entre los distintos registros de representación semiótica de una función. Las mayores dificultades se evidencian en la conversión al registro analítico (no pueden modelar problemas).
- Ambos grupos de alumnos evidenciaron dificultades y errores comunes, anticipados de antemano por las distintas investigaciones consultadas, lo que indicaría una situación generalizada que se repite en el tiempo y en diversos contextos.

A raíz de las consideraciones precedentes, surgen nuevos interrogantes de investigación: ¿De qué manera puede favorecerse la transición entre el trabajo aritmético y el trabajo algebraico? ¿Puede favorecerse esta transición a partir del uso de algún software adecuado, el cual contemple la posibilidad de trabajar los conceptos de ecuaciones y funciones?

Referencias bibliográficas

Aguirre, J.C., & Jaramillo, J.G. (2015). El papel de la descripción en la investigación cualitativa. *Cinta moebio* 53, 175-189.

Alurralde, F., & Ibarra, L. (2008). El uso de las letras en álgebra: Análisis de una evaluación de estudiantes de primer año de ingeniería. *Revista De Educación Matemática*. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10396

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *1*(3), pp. 24-35.

Becerril, M. M., Duarte B., García, P., Grimaldi, V., & Ponce, H. (2011). *Matemática en 7.° primaria CABA/ 1.° secundaria. Libro para el docente.* Buenos Aires: Santillana.

Betancur Aristizábal, Y. M. (2013). *Una propuesta metodológica para enseñar el concepto de función desde la experimentación.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional sede Medellín, Medellín.

Bocco, M., Canter, C., & Sayago, S. (2012). *La matemática en situaciones propias de la ingeniería Agronómica.* Investigación presentada en Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, N°19, (versión castellana 1993).

Calderón, D. I., & León C, O. L. (2012). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. En Castillo S. S. (Comp.), *Énfasis. Lenguaje y Educación: Perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio.* (pp. 71-104). Bogotá: Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Calderón Zambrano R. L., Franco Pesantez, F., & Alvarado Espinoza, T. M. (2018, agosto). Logros de aprendizaje en funciones lineales y cuadráticas mediante secuencia didáctica con el apoyo del Geogebra. *Polo del Conocimiento, 3* (8), 449-470.

Carnelli, G. F. (2004). *Una ingeniería didáctica para la función cuadrática.* (Tesis inédita de licenciatura). Universidad Nacional de General San Martín, Buenos Aires, Argentina.

Caronía, S., Rivero, M., Operuk, R., & Mayol, C. (2014). Los conocimientos matemáticos en el umbral de la universidad. *Revista de Ciencia y Tecnología, 16* (21), 5-11.

Caronía, S., Sklepek, G., Martyniuk, N., Operuk, R., & Abildgaard, E. (2018, octubre). *Objetos y procesos algebraicos: su uso en estudiantes universitarios.* Comunicación presentada en la Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires.

Chamorro, M. C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil.* Madrid: Pearson educación.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra, I. Saiz (Comps.), *Didáctica de Matemáticas: Aportes y reflexiones.* (pp. 51-64). Buenos Aires: Paidós Educador.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique àl'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. *Petit X,* 5, pp. 51-94. IREM de Grenoble.

Ciriquián, J. P. (2014). *Uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de funciones gráficas en 1° de Bachillerato de Ciencias y Tecnología*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Internacional de La Rioja, Sevilla.

D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista científica,* (11), 150-164.

Detzel, P. (2006). *La enseñanza de las funciones y la condición de univalencia.* Memorias I REPEM, 43-52. Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Subsecretaría de Educación. (2004). *Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la EGB.* Buenos Aires: Autor.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* (pp. 61-96). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* ULP, IREM Strasbourg. 5. 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne, Peter Lang.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II.* (pp. 101- 120). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Vega, M. Trad.). (Obra original publicada en 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*). (2da ed.). Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

Esquinas Sancho A. M. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente* (Tesis inédita de doctorado). Universidad Complutense de Madrid, España.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra, I. Saiz (Comps.), *Didáctica de Matemáticas: Aportes y reflexiones.* (pp. 39-50). Buenos Aires: Paidós Educador.

Godino, J. D., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., & Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (10), 91-110.

González Trujillo, E. S. (2012). *Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Götte, M. E., & Dal Maso, M. S. (2015). *Una propuesta para favorecer la comprensión del concepto de función en la formación de profesores.* Trabajo presentado en la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y Actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Guevara Sánchez, C. A. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Instituto Nacional de Formación Docente. (2015). *Clase 02. Las funciones como herramientas de modelización. Enseñanza del Álgebra y las Funciones.* Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Iturbe, A., & Garelik, C. (2014). *Una propuesta de enseñanza de la función racional con el uso del software GeoGebra.* Ponencia presentada en la V Reunión Pampeana de Educación Matemática, Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Itzcovich, H., Novembre, A., Borsani, V., Carnelli, G., & Lamela, C. (2018). *Nuevo Matemática 1*. Buenos Aires: Tinta Fresca.

Jaimes Gómez, N. M. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Juárez López, J. A. (2011, marzo). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números, 76*, 83-103.

Kaczor, P. J., & Outón, V. L. (2017). *Entre números II- Matemática.* Buenos Aires: Santillana.

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7* (3), 229-240.

López Cahun, J., & Sosa Moguel, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 21. México.

Matthews, P. G., & Fuchs, L.S. (2020, January/February). Keys to the Gate? Equal Sign Knowledge at Second Grade Predicts Fourth-Grade Algebra Competence. *Child Development, 91* (1),14-28.

Ministerio de Cultura, Educación, Ciencia y Tecnología de la Provincia de Misiones. (2011). *Diseño Curricular Jurisdiccional. Ciclo Básico Secundario Común Obligatorio.* Misiones: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. (2018). *Prácticas de enseñanza.* Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Autor.

Morales Peral, L., & Díaz Gómez, J. L. (2003, diciembre). Concepto de variable: Dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos* (11), 109-114.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Ospina García, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales.

Oviedo, L. M. M. (2005). Las Funciones. un Obstáculo para Nuestros Alumnos. *Aula Universitaria, 1*(7), 89-97.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. (Tesis inédita de doctorado). Universidad de la Laguna, Tenerife, España.

Palarea, M. M., & Socas Rabayna, M.M. (2010). Algunos Obstáculos Cognitivos en el Aprendizaje del Lenguaje Algebraico. *SUMA, 16,* 91-98.

Panizza, M. (Comp.). (2003). *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* Buenos Aires: Paidós.

Philipp, R. A. (1992). The many uses algebraic variables. *The Mathematics Teacher, 85* (7), 557-561.

Pollio, A. (2016). *La conceptualización de la noción de función en estudiantes de ciclo básico.* Conferencia presentada en el 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática, Uruguay.

Posada Balvin. F., & Villa, O.J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F. Posada Balvin & G. Obando Zapata (Ed.), *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico.* (pp. 127-163). Antioquia: Gobernación de Antioquia.

Prada-Nuñez, R., Hernández-Suarez, C., & Jaimes, L. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *Panorama, 11*(20), 34-44.

Puig, L., & Monzó, O. (2008). *Competencias algebraicas en el proceso de modelización.* Comunicación presentada a las VIII Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana. (Por aparecer en las Actas).

Ricaldi Echevarria, M. L. (2011). *Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización.* (Tesis inédita de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Rojas G., P. J., Rodríguez B., J., Romero C., J.H., Castillo E., E. & Mora V., L. O. (1999). *La Transición Aritmética-Álgebra.* Santa Fe de Bogotá, D.C: gaia grupo editorial.

Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Volumen I. (Tesis inédita de doctorado). Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

Sadovsky, P., & Sessa, C. (2004). Para estar seguros. El conocimiento matemático en la clase. *La Educación en Nuestras Manos, 71*, 36-40.

Sadovsky, P., & Sessa, C. (2005). The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: A milieu for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 85-112.

Serres Voisin, Y. (2011, enero-junio). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens, 12* (1), 122-142.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C., & Murúa, R. (2015). *Hacer Matemática ½.* Buenos Aires: Estrada.

Soto, M., Herrera, C. G., & Pereyra, N. E. (2019, abril). Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *Unión, 15* (55), 71-84.

Tobon Tobon, S., Pimienta Prieto, J., & García Fraile, J. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson.

Torres, L., Valoyes, E., & Malagón, R. (2002). Situaciones de Generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *EMA, 7* (2), 227-246.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática. 6*(3), 90-108.

Ursini, S., & Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En F. Hitt. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *EMA, 4* (1), 16-31.

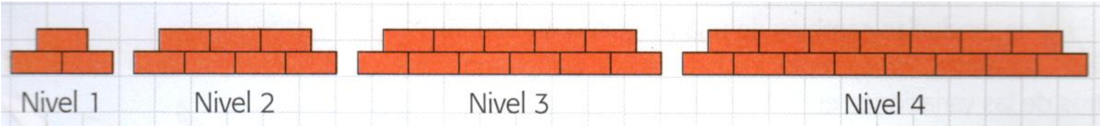
Apéndices

Apéndice A

Secuencia Didáctica

Actividad 1

En los niveles de un juego de computadora se construyen muros cada vez más largos usando ladrillos iguales. En cada nivel se agregan 4 ladrillos, 2 en cada fila. Estos son los primeros:



a) ¿Cuántos ladrillos tendrá el muro del nivel 5? ¿Y el del nivel 12?

b) ¿A qué nivel corresponde la figura que tenga 79 ladrillos?

c) ¿Es posible que la cantidad de ladrillos de un muro de este juego sea 254? ¿Por qué?

d) ¿Es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá el muro de un nivel cualquiera del juego?

e) ¿Puedes representar gráficamente la situación? ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea de trazo continuo?[1]

Actividad 2

Un automovilista entra en una estación de servicio para cargar combustible. El precio de 1 litro de nafta es de $30.

a) Completar la tabla

Cantidad de nafta que carga	15	20	25	30	35	40	45	50
Precio a pagar								

[1] Problema 1. Adaptado de: Becerril, M. M., García, P., Grimaldi, V., & Ponce, H. (2011). *Matemática en secundaria 1.°/2.°: Libro para el docente*. Buenos Aires: Santillana. (p. 116)

b) ¿Existe una relación de dependencia entre la cantidad de nafta que carga y el precio a pagar? ¿Cuál?

c) La cantidad de nafta que carga y el precio a pagar son variables, ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y cuál es la variable dependiente?

d) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el precio a pagar cualquiera sea la cantidad de litros de nafta que se cargue?

A continuación, otro automovilista, que trae 15 litros de nafta en su tanque, entra a la misma estación de servicio para cargar más combustible.

e) Completar la tabla

Cantidad de nafta en el tanque	15	20	25	30	35	40	45	50
Precio a pagar								

f) En este caso ¿De qué forma se puede calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque?

g) Representa gráficamente los valores de la tabla. En este caso ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea?[2]

[2] Problema 2. Adaptado de: Becerril, M. M., García, P., Grimaldi, V., & Ponce, H. (2011). *Matemática en secundaria 1.°/2.°: Libro para el docente*. Buenos Aires: Santillana. (p. 86)

Actividad 3

Una empresa de taxis cobra $24 la bajada de bandera y $2,4 por cada cuadra de 100m recorrida.

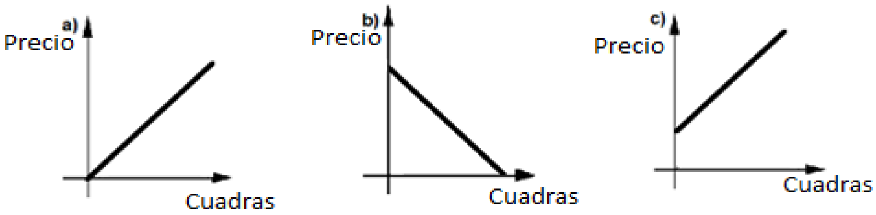
a) Completar la tabla

Cuadras recorridas	7		15		29	
Precio		48		84		110,4

b) Calcular cuántas cuadras se pueden recorrer con $600.

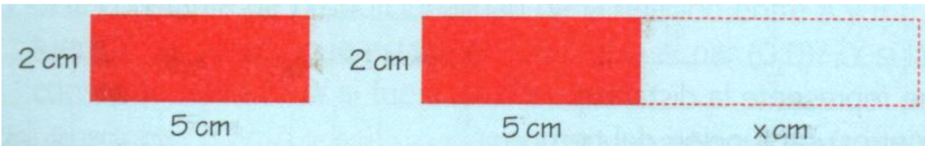
c) ¿Es posible escribir una fórmula que permita conocer el precio cualquiera sea la cantidad de cuadras recorridas?

d) Marcar con una x el gráfico que corresponde a la situación. Justifica tu elección.[3]



Actividad 4

Un rectángulo que originalmente tenía 5cm de base y 2 cm de altura se ha alargado una cierta cantidad, conservando su altura.



a) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas les parece que podrían servir para calcular el área A del nuevo rectángulo, suponiendo que x representa la longitud que se alarga su base?

A=2+5+x A=10+2.5+x A=x. 2+10 A=x. 5 +10 A=(5+x). 2

b) ¿Es posible que el área de este rectángulo sea de 9 cm^2? ¿Por qué?

c) ¿Es posible que el área mida 28 cm^2? ¿Y 29 cm^2? ¿Y 29,5cm^2? ¿Por qué?[4]

[3] Problema 3. Adaptado de: Becerril, M. M., García, P., Grimaldi, V., & Ponce, H. (2011). *Matemática en secundaria 1.°/2.°: Libro para el docente*. Buenos Aires: Santillana. (p. 95)
[4] Problema 4. Extraído de: Becerril, M. M., García, P., Grimaldi, V., & Ponce, H. (2011). *Matemática en secundaria 1.°/2.°: Libro para el docente*. Buenos Aires: Santillana. (p. 117)

Actividad 5

Una pileta de 80.000 L de capacidad se llena mediante una bomba que arroja 5.000 L de agua por hora. Ayer se llenó un cuarto de la pileta y hoy se encenderá la bomba nuevamente para terminar de llenarla.

a) ¿Cuál de estas fórmulas describe la situación?

y=80.000-5.000x   y=-5.000x+20.000   y=5000x+20.000   y=5000x+60.000

b) Utilizando la fórmula elegida ¿Es posible saber cuánta agua habrá en la pileta después de dos horas y media de volver a encender la bomba?

c) Continuando el trabajo a partir de la fórmula ¿Es posible saber el tiempo que debe estar encendida la bomba hasta llenar la pileta?

d) ¿Qué representa cada una de las tres fórmulas que no señalaste? Tené en cuenta que, para vaciar la pileta, la extracción del agua también se hace por medio de la bomba.

e) Representar gráficamente cada una de las situaciones anteriores.[5]

Actividad 6

Un tanque de 10 litros de agua se desagota tal como se plantea en el siguiente gráfico.

[5] Problema 5: Adaptado de: Kaczor, P. J., López, A. E., Outón, V. L., & Pérez, M. M. (2011). *Matemática II: Saberes clave.* Buenos Aires: Santillana. (p. 127)

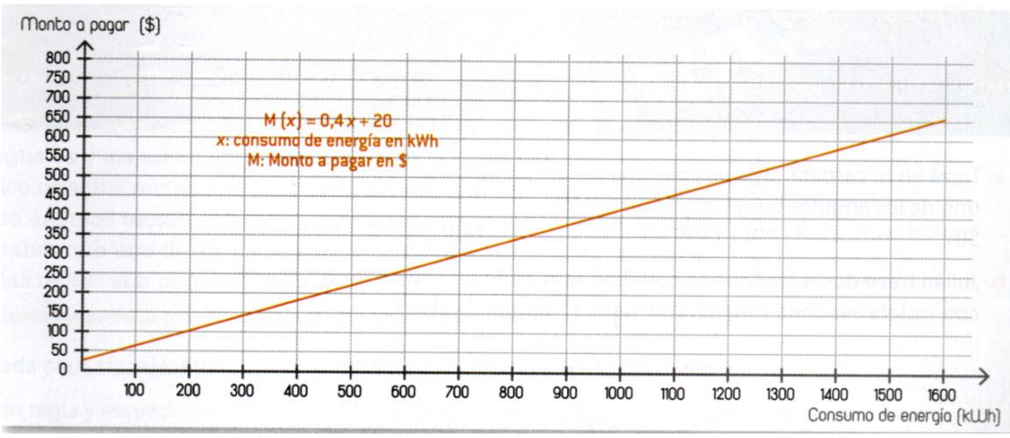
a) Elabora una fórmula que represente la cantidad de agua que queda en el tanque a medida que se desagota en función del tiempo.

b) ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo? ¿Es posible leer esta misma información en la fórmula?

c) ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad inicial que hay en el tanque? ¿Es posible leer esta misma información en la fórmula?

Actividad 7

Una empresa de energía eléctrica le presentó a sus usuarios que consumen hasta 1600 kWh, la siguiente información sobre el monto a pagar en función del consumo realizado.



a) ¿Se puede averiguar el monto a pagar correspondiente a un consumo de 200 kWh mirando el gráfico? ¿Y usando la fórmula? ¿Y el monto correspondiente a un consumo de 900 kWh?

b) Estimá, mirando el gráfico, cuál es el monto a pagar si el consumo es de 1.100 kWh. Usá la fórmula para verificar la estimación realizada.

c) Si una familia debe pagar $300 ¿Cuántos kWh ha consumido? ¿Y si debe pagar $550?

d) Si una familia no consumió energía durante todo el mes porque estuvieron de viaje ¿Tienen que pagar algo? En caso que así sea, ¿Cuánto tienen que pagar? Explicá cómo lo resolviste.[6]

---

[6] Problema 7. Adaptado de: Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C., & Murúa, R. (2015). *Hacer Matemática ½*. Buenos Aires: Estrada. (p. 111)

Actividad 8

Alumnos de 3er año de la escuela están organizando una excursión de estudio. Necesitan alquilar un micro que los transporte y averiguaron los costos en dos compañías.

- La compañía A cobra $1400 fijos y $3,50 por cada kilómetro recorrido.
- La compañía B cobra $1200 fijos y $6,50 por cada kilómetro recorrido.

¿Qué compañía les conviene contratar? ¿Por qué?[7]

[7] Problema 8. Extraído de: Ministerio de Educación. (2018). Jornada N° 2. Abordaje General. *La resolución de problemas en el aula*. (p. 26)

Apéndice B

Registros de clase- CEP N° 43

Total de alumnos: 28

Miércoles 29/08/2018

Horario: 16:00 a 18:05 hs

Distribución de los grupos:

GA	GB	GC
	GD	
GE		GF

Integrantes de los grupos:

GA: A1, A2, A3, A4

GB: B1, B2, B3, B4

GC: C1, C2, C3, C4

GD: D1, D2, D3, D4

GE: E1, E2, E3, E4

GF: F1, F2, F3, F4

GG: G1, G2, G3, G4

D: Docente.

Para dar comienzo a la clase, la docente hace la devolución de los exámenes realizados la clase anterior sobre ejes cartesianos e interpretación de gráficos.

A continuación, explica en qué consistirá el trabajo que se llevará a cabo durante las próximas clases. Aclara que las actividades realizadas formarán parte de la tesis de maestría de la docente y que, a raíz de ello, se contarán con observadores durante las clases, se podrán tomar fotografías e incluso se filmarán los momentos de puesta en común. El trabajo será desarrollado en forma grupal, manteniéndose los grupos desde el primer día hasta el último.

Los integrantes del grupo G, están ausentes ese día. La alumna G2, trabaja con el grupo E.

Comienza el trabajo en torno a la actividad 1 a las 16:51 horas.

La docente solicita que saquen una hoja y coloquen la fecha. Explica que cada uno va a recibir un problema a resolver y van a trabajar en grupo para llegar a la solución.

La docente se acerca a los grupos para ver si tienen dudas.

El grupo C realiza consultas a la docente y luego el grupo B.

Frente a la pregunta de un grupo acerca del uso del celular, la docente les recuerda que pueden usar la calculadora. (En ese momento, algunos alumnos sacan el celular y lo comienzan a usar, otros ya lo estaban haciendo).

El grupo C solicita que la docente intervenga ante sus dudas para resolver el problema.

Luego el grupo A solicita la presencia de la docente ante sus dudas. Lo mismo que el grupo D.

La docente se acerca al grupo E, ya que los mismos no logran resolver el problema, alienta a los alumnos a pensar y resolver.

17: 20 Recreo. La docente solicita a los alumnos que dejen todo como está para continuar luego.

17:32 comienza la puesta en común. La docente pide a los alumnos que cuenten como fueron resolviendo los problemas. Se da lectura al enunciado del mismo y se comienzan a compartir las respuestas.

En la primera pregunta: ¿Cuántos ladrillos tendrá el muro del nivel 5? ¿Y el del nivel 12? todos los alumnos plantean que el muro del nivel cinco, tiene diecinueve ladrillos porque se van sumando cuatro ladrillos por cada nivel, como el muro del nivel cuatro tiene quince ladrillos, si se suma cuatro, se obtiene diecinueve.
En la segunda pregunta, todos coinciden que: El nivel doce tiene cuarenta y siete ladrillos. A continuación, se establece el siguiente diálogo:

D: ¿Cómo hicieron para llegar a ese resultado?

E2: Sumamos siete veces cuatro ladrillos. Tomamos siete veces cuatro ladrillos.

D: ¿Por qué siete?

E2: Para llegar a cuarenta y siete ladrillos.

D: Del nivel cinco…

E2: Del nivel cinco al nivel doce, fuimos sumando cuatro ladrillos.

D: ¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero? ¿Es una forma de hacer?

Todos: Sí.

D: ¿Cómo expresaríamos el cálculo que plantea el compañero?

A2: Una multiplicación.

D: ¿A qué número le tenemos que sumar?

B2: Tres.

E2: Cuatro.

D: ¿A qué número inicial le tenemos que sumar?

La docente vuelve a insistir en lo que planteó el grupo.

D: En el nivel cinco ¿Cuántos ladrillos había?

Todos: Diecinueve.

La docente escribe 19 en el pizarrón y pregunta:

D: A ese diecinueve ¿Le sumamos qué cosa?

Todos: Cuatro.

D: El cuatro. ¿Cuántas veces?

Todos: Siete.

D: ¿Y cómo se escribiría eso? Siete veces cuatro, en una operación ¿Cómo se escribe?

B2: Siete por cuatro.

La docente escribe en el pizarrón: 19+4.7

D: ¿Es lo que dijo el compañero? (Y analiza la expresión). En el nivel cinco había diecinueve ladrillos, del nivel cinco al nivel doce hay siete niveles y por cada nivel se agregan cuatro.

Seguidamente se resuelve el cálculo planteado y se obtiene cuarenta y siete.

Pizarrón

19+4.7=19+28= 47

D: ¿Quién hizo de otra forma?

B3: Yo hice así.

D: Pasá y copiá en el pizarrón.

La alumna pasa y copia lo siguiente:

Pizarrón

N=5→19	*9→35*	*13→51*	*17→67*
6→23	*10→39*	*14→55*	*18→71*
7→27	*11→43*	*15→59*	*19→75*
8→31	***12→47***	*16→63*	***20→79***

D: ¿Otro grupo hizo algo parecido?

F3: Sí.

La docente comenta lo que hizo este grupo.

D: ¿Qué se hace para ir anotando los distintos valores? Veintitrés, veintisiete, treinta y uno.

Todos: Sumar cuatro.

Mientras la alumna sigue copiando la docente, pasa al ítem b)

D: ¿A qué nivel corresponde la figura que tenga 79 ladrillos?

B1 y D2: Al nivel veinte.

C3: Ninguno (No se retomó esta respuesta).

A2: Nivel diecinueve.

D: Vamos a ver si nos ponemos de acuerdo.

Antes de retomar lo que está escrito en el pizarrón, la docente aclara el uso del signo igual, ya que, la alumna no utiliza la flechita (→) sino el signo igual para indicar que, por ejemplo, el nivel 5 tiene 19 ladrillos. La docente sugiere que en lugar del signo igual se escriba →.

Se analiza lo que está escrito en el pizarrón, y todos coinciden en que es correcto ya que, si se sumaba 4, se podían ir obteniendo los ladrillos correspondientes a los diferentes niveles. Se acuerda que el nivel veinte tendrá setenta y nueve ladrillos y luego se retoma el aporte del grupo A.

D: ¿Por qué a ustedes les dio diecinueve?

En este momento, la docente hace referencia al error como parte del aprendizaje y retoma lo realizado por el grupo.

Un alumno lee lo que ha escrito en su carpeta:

A2: Dividiendo setenta y nueve dividido cuatro, se obtendrá el nivel deseado.

La docente hace la división en el pizarrón y se analiza entre todos.

Pizarrón

79 | 4
39   19
3

B2: Setenta y nueve no es múltiplo de cuatro.

Se llega a la conclusión de que el resultado indica que son diecinueve niveles con cuatro ladrillos. El resto de la división representa a los tres ladrillos del primer nivel, entonces, si se suma un nivel más correspondiente al primero, que tiene tres ladrillos, se obtiene veinte niveles.

Se continúa con el ítem c)

Luego de que la docente da lectura a la pregunta: ¿Es posible que la cantidad de ladrillos de un muro de este juego sea 254? ¿Por qué?, la mayoría de los alumnos expresa que no es posible que dicho número corresponda a la cantidad de ladrillos de un muro del juego.

El grupo D dice que es par y que los niveles del juego son números impares. El grupo B plantea que ningún nivel del juego tiene una cantidad de ladrillos par y doscientos cincuenta y cuatro es múltiplo de dos, por lo tanto, no es posible que doscientos cincuenta y cuatro corresponda a la cantidad de ladrillos de un muro del juego.

Como una manera de validar esta respuesta la docente plantea recurrir a la división por cuatro, como en el ítem anterior. Escribe la división y se resuelve entre todos.

Pizarrón

254 | 4
14   63
2

En este caso, los alumnos plantean que doscientos cincuenta y cuatro no puede ser una cantidad de ladrillos del juego porque el resto es dos, lo que significa que no se completa el primer nivel.

En el ítem d) ¿Es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá el muro de un nivel cualquiera del juego?, el grupo B plantea que sí, mientras que los demás grupos permanecen callados. Uno de los integrantes del grupo (B2) lee lo que ha escrito en su carpeta: "Si es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá cualquier nivel del juego con el siguiente proceso: sacando el nivel uno, el resto de los niveles serán múltiplos de cuatro, multiplicando cuatro por la cantidad de niveles que queremos y luego sumarle tres correspondientes al nivel uno". Los compañeros plantean que no entienden y la docente le pide al alumno que pase al pizarrón a dar un ejemplo.

Pizarrón

4.60=240

240+3=243

61→243

Mientras explica que: "Por ejemplo, si multiplicamos cuatro por sesenta obtenemos doscientos cuarenta ladrillos, pero si a ese número le sumamos tres del primero y ahí serían, doscientos cuarenta y tres ladrillos. Sesenta más uno, nos da sesenta y uno. O sea, que el nivel sesenta y uno, tiene doscientos cuarenta y tres ladrillos."

Como todos los alumnos plantearon que entendieron el planteo hecho por su compañero, la docente continúa la puesta en común y propone armar una tabla. Para ello pregunta, qué variables se deben considerar. Todos responden niveles y cantidad de ladrillos. Se confecciona la tabla y se llama "x" a los niveles e "y" a la cantidad de ladrillos.

Pizarrón

Niveles *x*	*Cantidad de ladrillos* *y*
1	*3*
2	*7*
3	*11*
4	*15*

A través de distintas preguntas, la docente logra que los alumnos establezcan que: "Si se multiplica cuatro por el número de nivel y se resta uno, se obtiene la cantidad de ladrillos". Entonces propone plantear eso en lenguaje simbólico, haciendo uso de las letras x e y. De esta manera, se logra escribir:

Pizarrón

$y = 4x - 1$

Para verificar la validez de la fórmula propuesta, se calcula la cantidad de ladrillos correspondientes al nivel sesenta y uno, resolviendo en el pizarrón: 4.61-1=243.

En este momento, se da por finalizada la clase, ya que restan cinco minutos para la salida y es necesario acomodar el curso, devolver mesas y sillas prestadas de otras aulas y guardar los útiles.

Se acuerda comenzar la clase siguiente desde el ítem e).

Lunes 03/09/2018

Horario: 16:40 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

	GA	GG
GB	GD	GC
GE		GF

Ausentes: A1, D1 y G3.

16:40 horas comienza la clase. Se dedica un tiempo a que los alumnos conformen los grupos de trabajo y luego se retoma la actividad de la clase anterior.

D: Vamos a recordar de qué hablaba el ejercicio de la semana pasada. ¿Se acuerdan de qué era?

Todos: Sobre los ladrillos.

D: Era un juego donde en cada nivel se agregaban cuatro ladrillos ¿Se acuerdan? Habíamos analizado que, la forma para encontrar la cantidad de ladrillos correspondiente a un nivel ¿Cómo era?

Todos: Sumando cuatro.

D: ¿Y de qué manera se puede generalizar esa relación? Se acuerdan que el ítem d) decía: ¿Es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá el muro de un nivel cualquiera del juego?
E2: Sumarle cuatro y cuatro.

D: Esa era una forma, pero si yo quiero averiguar cuántos ladrillos tiene el nivel sesenta, el nivel setenta ¿Cómo había que hacer?

E2: El primero tres, le sumo cuatro me da siete, le sumo cuatro y da once y así…

D: Imagínate que tengamos que hacer así hasta llegar al nivel sesenta.

E2: Bueno, es la única forma.

D: No es la única forma, ¿Cuál era la relación que habíamos observado entre los niveles y los ladrillos?

La docente vuelve a construir la tabla donde relaciona los niveles y la cantidad de ladrillos correspondientes.

D: Si a los niveles llamamos “x” y a los ladrillos ¿Y a los ladrillos como le vamos a llamar?

Todos: “y”

D: Podíamos establecer una relación. ¿Cómo puedo calcular una cantidad de ladrillos conociendo el número de nivel?

B2: Multiplicando el nivel por cuatro y restándole uno.

D: ¿Se acuerdan de eso? Lo habíamos analizado. (Y en ese momento, prueba esa regla con los casos particulares de la tabla. 4.1-1=3; 4.2-1=7, etc.)

D: Y esto tiene relación con lo que habíamos hablado antes, pero había comentado el compañero, todos los niveles tienen ¿Cuántos ladrillos?

Todos: Cuatro.

D: ¿Y el primero?

Todos: Tres

A continuación, con la participación del grupo clase la docente escribe en el pizarrón:

y=4.x-1 y plantea la siguiente pregunta:

D: A ver ¿De dónde surge esta relación?

En ese momento, la docente vuelve a explicar que cada nuevo nivel se obtiene agregando cuatro ladrillos (por eso se escribe 4x) y que se resta uno porque el primer nivel tiene tres ladrillos. A continuación, plantea un ejemplo, y con la participación de los alumnos se establece que el nivel setenta y cinco tiene doscientos noventa y nueve ladrillos porque 4.75-1=299.

D: ¿Qué tipo de número es este?

Todos: Impar.

D: Se acuerdan que todos los resultados eran impares. Entonces, estamos de acuerdo que esta expresión (y=4.x-1) permite calcular la cantidad de ladrillos cualquiera sea la cantidad de niveles. ¿Por qué llamamos "x" a los niveles e "y", a la cantidad de ladrillos?

B2: Porque los ladrillos son dependientes y los niveles, independientes.

D: ¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero?

Todos: Sí.

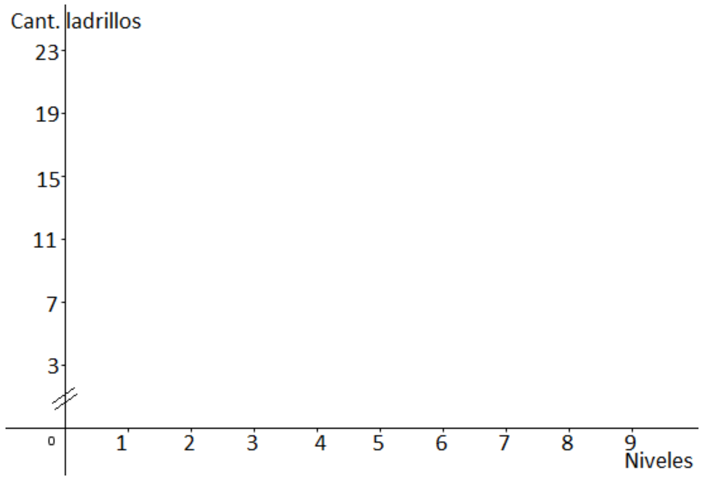
D: Entonces ¿Quién depende de quién?

Todos: Los ladrillos dependen de los niveles.

D: Siempre la variable independiente es "x" y la variable dependiente es "y". Teniendo en claro esto, ¿Lograron hacer la representación gráfica?

Algunos grupos manifiestan que sí, otros que no. Entonces la docente propone hacer la gráfica en el pizarrón y pide que un alumno pase al frente.

Una alumna pasa al pizarrón y dibuja los ejes cartesianos correspondientes al primer cuadrante, con intervenciones de la docente y algunos compañeros marca una escala sobre cada uno de los ejes y la docente retoma la palabra para explicar la escala utilizada sobre el eje vertical. En el pizarrón se observa:



D: ¿Cómo vamos a marcar los puntos chicos?

C1: En el nivel uno hay tres ladrillos.

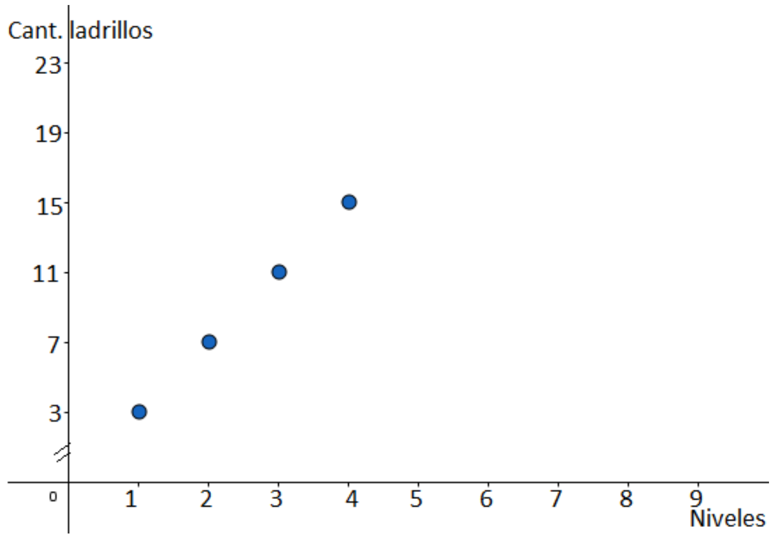
La docente usando una escuadra marca el primer punto: (1;3)

D: ¿Cómo marco el segundo punto? ¿Al valor dos quien le corresponde?

Todos: Siete.

Mientras los alumnos van diciendo los pares de valores correspondientes, la docente marca los puntos (2;7), (3; 11) y (4; 15).

Pizarrón



D: Una vez que marcaron los puntos, ¿Qué más preguntaba el ejercicio?

B2: Si tenía sentido unir los puntos.

D: ¿Y ahí que contestaron? ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Sí o no? ¿Se pueden unir los puntos con una línea recta?

Todos: Sí.

D: Sí porque los puntos están alineados. Si quiero puedo trazar una línea recta que pasa por cada uno de los puntos. Pero la pregunta no apunta a eso, apunta a analizar si tiene sentido o no.

B2: Pero siembre sube, no va a bajar.

D: Pero no tiene que ver con eso, sino con el tipo de variable que estamos analizando.

La docente une los dos primeros puntos y pregunta cuál es el valor correspondiente a uno coma cinco, los alumnos responden: cinco.

D: ¿Tiene sentido hablar del nivel uno coma cinco?

Todos: No.

La docente concluye la puesta en común explicando el concepto de variable discreta.

A las 17:10 comienza la actividad 2.

(Hay mucha dispersión en el aula, dos alumnas se retiran del curso para reunión de delegados).

Comienza el trabajo grupal, se identifican las siguientes dificultades: los alumnos no identifican la relación de dependencia entre las variables en la consigna a), en la consigna e), les cuesta visibilizar el cambio de variable y como ella, modifica el trabajo a realizar.

17: 20 Recreo.

A la vuelta del recreo se continúa con el trabajo grupal. La mayoría de los grupos alcanza a terminar las actividades con reiteradas intervenciones docentes. Se establece que la próxima clase, comienza con la puesta en común de las producciones realizadas en torno a la actividad propuesta.

(Se decide hacer esto, a pesar de que no estaba previsto así en el cronograma ya que, varios grupos tuvieron dificultades en identificar las variables y su relación de dependencia, además de poder expresar en lenguaje simbólico o coloquial, la

forma de calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que se carga o la cantidad de nafta en el tanque).

Miércoles 05/09/2018

Horario: 16:00 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

	GG	
GB	GA	GC
GE	GD	GF

Ausentes: F1 y G3.

La docente comienza la puesta en común dando lectura a la consigna y luego pregunta:

D: ¿Cómo hicieron para completar la tabla?

C3: Multiplicamos el litro por el precio.

D: ¿Qué es litro por el precio?

B1: El litro de nafta por el precio.

D: ¿Pero qué litro multiplicaron?

B3: Quince litros por treinta.

D: Ah… multiplicaron cantidad de litros que se cargan ¿Por quién?

Todos: Por treinta.

D: ¿Por qué por treinta?

C3: Porque es el valor del litro.

A continuación, la docente completa la tabla en el pizarrón con los valores que le dictan los alumnos.

Pizarrón

Cantidad de nafta que carga	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*	*45*	*50*
Precio a pagar	*450*	*600*	*750*	*900*	*1050*	*1200*	*1350*	*1500*

D: Ahora vamos a ver de qué manera fueron hallando esos valores. Por ejemplo, ¿Cómo hallaron el cuatrocientos cincuenta?

Todos: Multiplicamos quince por treinta.

D: ¿Por qué?

A2: Porque son quince litros y treinta pesos el litro.

D: ¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero?

Todos: Sí.

D: ¿Así se puede hacer con los otros valores?

Todos: Sí.

D: ¿De qué otra manera se puede hacer? Dijeron algo de sumar.

B3: Como en cada número de los litros se va agregando cinco, se va sumando cada cinco litros ciento cincuenta pesos.

La docente retoma lo que plantea la alumna, y lo muestra en la tabla: “De quince a veinte, se aumentan cinco litros y de cuatrocientos cincuenta a seiscientos aumenta ciento cincuenta pesos”. Se acuerda que, esa relación se cumple para todos los valores de la tabla ya que cinco litros de nafta cuestan $150 porque:

Pizarrón

$$5\ litros\ .\frac{\$}{litro}30 = \$150$$

Se cierra la idea y se pasa a la siguiente consigna.

D: ¿Qué decía el ítem b)? ¿Existe una relación de dependencia entre la cantidad de nafta que carga y el precio a pagar? ¿Cuál?

Silencio

D: ¿Existe una relación? ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Y cuál es esa relación?

E2: La nafta depende del precio.

D: ¿La nafta depende del precio?

Varios alumnos hablan al mismo tiempo, y dicen: el precio de los litros, el precio de la cantidad de litros, el precio de la nafta.

D: Hay que analizar el contexto del problema. En este problema, ¿Cómo está planteada la relación de dependencia? ¿Quién depende de quién?

E2: El precio depende de la cantidad de nafta que se carga.

D: Si nosotros cargamos más combustible ¿Qué pasa con el precio?

Algunos: Aumenta.

D: ¿Podría pensarse al revés? ¿Que la cantidad de nafta que se carga dependa del precio?

Algunos: Sí.

Entonces la docente explica que, uno podría establecer que la cantidad de nafta que se carga depende del precio que cueste el combustible, pero vuelve a insistir en la necesidad de mirar cómo está planteado el problema en cuestión, en este caso, el precio a pagar depende de la cantidad de combustible que se cargue.

En la consigna c) La cantidad de nafta que carga y el precio a pagar son variables, ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y cuál es la variable dependiente? Se retoma el concepto de variable y se acuerda con el grupo clase que la variable independiente es la cantidad de nafta que se carga y el precio a pagar es la variable dependiente porque depende de la cantidad de combustible que se cargue.

Se pasa a la consigna d) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el precio a pagar cualquiera sea la cantidad de litros de nafta que se cargue?

El grupo C, plantea que multiplicando la cantidad por el precio del litro y plantea un ejemplo: 150. 30= 4500.

La docente interviene para dejar en claro que lo que se mantiene fijo es el precio del litro de nafta y lo que va cambiando, son los litros de nafta que se cargan. Se puede multiplicar treinta por veinte litros, veinticinco, cincuenta y se obtiene en todos los casos, el precio a pagar.

Los alumnos acuerdan con esto y la docente vuelve a hacer hincapié en lo que pedía la consigna: ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el precio a pagar cualquiera sea la cantidad de litros de nafta que se cargue? (resaltando la palabra fórmula).

Explica la necesidad de trabajar con el lenguaje simbólico para poder llegar a la fórmula pedida. A continuación, se establece el siguiente diálogo:

D: ¿Cómo podemos representar a la cantidad de nafta y al precio?

A2: La cantidad de nafta sería “x” y el precio sería “y”.

D: ¿Están de acuerdo con el compañero? ¿Por qué le vamos a llamar “x” a la cantidad de nafta e “y” al precio?

B2: Porque “x” es la variable independiente e “y” es la variable dependiente.

D: Y eso se acuerdan que habíamos establecido que siempre es así. ¿Se acuerdan? Siempre en cualquier contexto, ya sea nafta y precio, horas y litros, minutos y consumo en kilowatt, la variable independiente se representa con la letra x y la variable dependiente con la letra y. Entonces, esa relación entre la cantidad de nafta y el precio, específicamente el hecho de poder calcular el precio que se paga de acuerdo a la cantidad de nafta que se carga, escrito en lenguaje simbólico, usando la letra x y la letra y ¿Cómo sería? ¿Qué es lo que quiero calcular?

A2: El precio a pagar.

D: Entonces, ¿Cómo va a empezar mi fórmula? ¿Cómo vamos a llamar al precio?

Todos: “y”.

D: ¿El precio es igual a qué? (Mientras escribe en el pizarrón y=) ¿Qué cálculo tengo que hacer para conocer el precio?

E2: Multiplicar.

D: ¿Qué cosa?

A2: Treinta por x.

D: (Mientras escribe) Treinta que es el precio de un litro de nafta por x, que representa la cantidad de nafta.

A continuación, aclara que siempre que la consigna pida hallar una fórmula, se debe escribir una expresión como la anterior, donde x e y representan a las variables independiente y dependiente. Esa fórmula representa a las operaciones que se tienen que hacer para calcular en ese caso, el precio a pagar de acuerdo a los litros de combustible que se carguen.

Seguidamente, se continúa con el ítem e). Una alumna da lectura a la consigna.

A continuación, otro automovilista, que trae 15 litros de nafta en su tanque, entra a la misma estación de servicio para cargar más combustible. Completar la tabla.

D: ¿Qué notan de diferente, chicos, entre esta tabla y la anterior?

B2: Que en la primera dice: cantidad de nafta que carga y en la segunda, cantidad de nafta en el tanque.

D: ¿Ven esa diferencia que establece el compañero? Acá dice (señalando el pizarrón) cantidad de nafta que carga y acá dice, cantidad de nafta en el tanque. ¿Se entiende que cambió la variable? Una cosa es la cantidad de nafta que entra al tanque, que arroja el surtidor y otra es la cantidad de nafta que va quedando dentro del tanque. Entonces, teniendo en cuenta este cambio ¿Cómo hicieron para completar los datos de la tabla?

B3: Al quince le corresponde cero.

D: A ver, dice la compañera que al quince le corresponde cero ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Por qué?

B1: Porque él ya tenía quince litros en el tanque.

D: Él tenía quince litros cuando entró a la estación, entonces si la cantidad de nafta en el tanque es quince litros y él ya tenía quince ¿Cargó algo más?

Todos: No.

D: No, entonces ¿Por qué es cero? ¿Qué significa el cero?

Todos: Que no pagó nada.

D: Bien, si no cargó nada, no pagó nada. ¿Qué precio le corresponde a veinte litros?

Todos: Ciento cincuenta.

D: ¿Por qué?

B3: Porque cargó cinco litros.

B2: Y ahí hasta el final se le suma ciento cincuenta.

La docente retoma lo que plantea este alumno, devuelve el interrogante a la clase y se establece que, como la cantidad de combustible aumenta de cinco en cinco, el precio a pagar aumenta de ciento cincuenta en ciento cincuenta. Se completa la tabla en el pizarrón, con el aporte de los alumnos.

D: (Señalando la tabla) Ahora les hago esta pregunta: si él tiene cincuenta litros en el tanque ¿Cuánto cargó de combustible?

Todos: Treinta y cinco litros.

D: ¿Sí o no? ¿Es treinta y cinco?

Todos: Sí.

D: ¿Y cuánto costaba el litro de nafta?

Todos: Treinta pesos.

D: En vez de ir sumando, por ejemplo, si no estuvieran estos valores anteriores y yo les pido el valor correspondiente a cincuenta ¿De qué otra manera lo podrían haber hecho?

A2: Multiplicando cincuenta por treinta.

D: ¿Cincuenta por treinta?

B2: Treinta por la cantidad de litros.

D: Ese cincuenta ¿Es la cantidad de nafta que carga?

Todos: No.

B2: Esa es la cantidad que hay en el tanque.

D: Ah…

B2: A cincuenta le restas quince y ahí podés multiplicar.

D: ¿Están de acuerdo? Eso es lo que les estoy preguntando.

A continuación, la docente propone calcular el precio correspondiente a setenta litros, aclarando que no tienen que ir sumando ciento cincuenta cuatro veces hasta llegar al precio correspondiente, sino utilizando otra forma. Los alumnos no logran responder directamente, entonces la docente, vuelve a plantear otras preguntas.

D: (Señalando el número setenta) ¿Cuántos litros de nafta cargó?

Todos: Cincuenta y cinco.

D: ¿Por qué?

B1: Porque se le resta quince.

D: ¿A quién se le resta quince?

Todos: A setenta.

D: Si ahora tiene setenta litros, cargó cincuenta y cinco porque entró a la estación con quince litros. Y si yo sé que él cargó cincuenta y cinco litros, ¿Cómo hago para saber cuánto tiene que pagar?

C2: Cincuenta y cinco por treinta.

D: ¿Sí o no?

En este momento, la docente hace la cuenta en el pizarrón y pregunta.

D: Si el cargó cincuenta y cinco litros tiene que pagar mil seiscientos cincuenta pesos. ¿En esto hay alguna duda?

Todos: No.

D: Porque si yo multiplico la cantidad de nafta por el precio de un litro, nos da el precio a pagar. Pero la pregunta es: Este mil seiscientos cincuenta ¿es el precio que va acá? (Señalando el cuadradito vacío correspondiente a setenta)

Todos: Sí.

D: Sí, ¿Por qué?

La docente vuelve a aclarar que: si tiene setenta litros de nafta en el tanque, cargó cincuenta y cinco litros porque ya tenía quince litros. Haciendo cincuenta y cinco litros por treinta pesos, se obtiene el precio a pagar: $1650.

Se continúa con el ítem f) En este caso ¿De qué forma se puede calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque?

B2: Multiplicando la cantidad de nafta que se agregó por treinta.

D: ¿Sí o no? ¿Entienden lo que dice el compañero? Él dice que hay que multiplicar la cantidad de nafta que se agrega (y resalta esta palabra) por treinta.

O sea que, en este caso (y señala la tabla) no hay que multiplicar veinte por treinta, ¿sino?

A2: Cinco por treinta.

D: ¿Y en este caso? (Señalando el número 25). Si tenía quince y ahora tiene veinticinco ¿Cuánto cargó?

Todos: Diez.

D: Y diez por treinta ¿Nos da?

Todos: Trescientos. (Mientras la docente señala el número en el pizarrón).

D: Entonces, ¿De qué forma nosotros podemos expresar el cálculo que nos permita llegar al precio de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque? ¿Cómo vamos a simbolizar, cómo vamos a representar ese cálculo haciendo esto chicos (Señala la fórmula del ítem d), usando una fórmula como hicimos anteriormente?

Silencio en los alumnos, la docente insiste:

¿Qué es lo primero que tenemos que hacer? ¿Qué hicimos antes de llegar a eso? (Señala la fórmula y=30x)

B2: Identificar la cantidad de nafta que hay en el tanque.

D: La cantidad de nafta que se carga sería porque la cantidad de nafta que hay en el tanque dice acá. (Señala la tabla), pero antes de eso incluso ¿Qué hay que hacer? Identificar las variables, porque ustedes dicen “x” e “y” pero ¿Quiénes son “x” e “y”?

En esta parte del problema, ¿Quién es “x” y quien es “y”?

B1: “x” es la cantidad de nafta en el tanque.

D: ¿Y el precio a pagar?

Todos: “y”.

D: ¿Qué dice la pregunta? ¿De qué forma se puede calcular el precio? Entonces, ¿Qué queremos calcular nosotros?

B2: El precio de la nafta que se cargó.

D: ¿Cómo va a empezar la expresión simbólica?

Todos: Con y.

La docente escribe en el pizarrón y= mientras dice:

D: Yo quiero calcular el precio a pagar ¿Y cómo voy a hacer eso?

A2: Treinta por x menos quince.

D: A ver (mientras escribe en el pizarrón 30x-15). Vamos a analizar esta expresión entre todos. ¿Qué era “x”?

Todos: La cantidad de combustible.

D: Entonces, ¿Cuál es el razonamiento que está planteado acá? (señala 30x)

B1: El litro y el precio sería.

D: Treinta es el precio de un litro y ¿Por quién estamos multiplicando?

G1: Por la cantidad de nafta que hay en el tanque.

D: ¿Y por qué restamos quince?

G1: Porque el entró con quince litros.

D: Vamos a hacer la lectura de esto, así como está. Si ustedes tuvieran que resolver esto ¿Cómo se separa en términos?

B2: Treinta por x y ahí menos quince. (Mientras la docente señala ambos términos de la expresión).

D: Así es la lectura que tengo que hacer, treinta ¿por qué?

B3: Por la cantidad de nafta en el tanque.

D: Y cuando yo multiplico la cantidad de nafta por treinta ¿Qué me da?

B2: El precio a pagar.

D: ¿Al precio a pagar le tengo que restar quince?

B2: No.

Algunos alumnos dicen que sí.

D: ¿Sí o no? ¿Ese quince que era?

Todos: Los litros que ya tenía.

D: Y a un precio, por ejemplo $600 (señala la tabla) ¿Le puedo restar 15 litros?

Todos: No.

D: Voy a restar pesos menos pesos y litros menos litros. Tengo que mantener la unidad.

B2: Quedaría bien si quince por treinta y ahí abajo te daría el resultado.

D: Piensen bien ¿Por quién tengo que multiplicar ese treinta? No está mal, le está faltando algo a esa expresión. Ese treinta ¿Por quién tengo que multiplicar?

D1: Por litros.

B2: Por x.

D: x como esta dado son estos valores. ¿Cómo hago para descontar los quince litros que ya tenía? No está mal la resta, pero para que la expresión sea correcta ¿Qué le tengo que agregar? Para que yo multiplique treinta por la cantidad de nafta que se carga.

B2: Un paréntesis.

D: Un paréntesis ¿dónde?

B2: x menos 15 entre paréntesis.

La docente vuelve a escribir la expresión y=30x-15 pero ahora con paréntesis: y=30(x-15).

D: Si hacemos la lectura de esta expresión. Si miro acá. ¿qué tengo que analizar primero? Primero el paréntesis y después multiplicar por treinta.

En ese momento se toman algunos ejemplos, para analizar si la fórmula planteada es correcta.

Pizarrón:

$$y = 30.x - 15$$

$$30.(70 - 15)$$

$$30.55 = 1655$$

Se continúa con el ítem g) Representa gráficamente los valores de la tabla. En este caso ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea?

D: En el eje x ¿Qué valores tienen que ir?

Todos: Litros.

D: 15, 20, 25 pueden trabajar con los valores de cinco en cinco. ¿Pero qué pasa con los valores que van de cero a quince? ¿Cómo se pueden incorporar en el gráfico? (Mientras borra el pizarrón). ¿Hicieron los cuatro cuadrantes para el gráfico?

Todos: No.

D: ¿Cuántos hace falta?

G1: El primero. (Mientras la docente dibuja dos ejes perpendiculares correspondientes al primer cuadrante)

En ese momento la docente explica de qué manera se puede trabajar con las escalas sobre cada uno de los ejes para poder representar todos los valores de la tabla. También hace referencia a la ubicación del cero en la intersección de los dos ejes y la importancia de escribir junto a cada uno de los ejes, las variables consideradas.

D: ¿Cómo se representa esto, a quince litros le corresponde cero pesos?

B2: Haciendo el puntito sobre el quince. (La docente lo marca sobre el gráfico).

D: ¿Acá? ¿Sí o no? ¿Y dónde queda marcado el punto veinte y ciento cincuenta?

Se marcan los puntos (20;150), (25; 300) siguiendo las indicaciones de los alumnos.

D: ¿Cómo salieron los puntos?

Todos: Alineados.

D: La pregunta era ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea?

Todos: Sí.

D: Si ¿Por qué? ¿Cuál es la diferencia con el ejercicio anterior donde no se podían unir los puntos?

A2: Porque si el litro esta treinta se puede comprar medio litro a quince pesos.

D: ¿Tiene sentido entonces?

Todos: Sí.

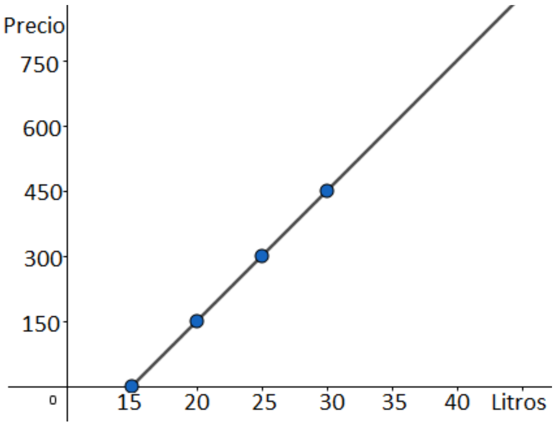
D: ¿Con qué tiene que ver esto del sentido? Que existan valores intermedios ¿Entre quince y veinte (señala el gráfico), puede haber 16, 17, 18 litros?

Todos: Sí.

D: Pero también puede haber como dice Pablo dieciocho litros y medio, dieciocho litros doscientos cincuenta ¿Se entiende? La variable cantidad de nafta que se mide en litros es una variable continua, no es discreta.

Retoma el problema 1 y recuerda que para la variable independiente: niveles, hablar de un nivel y medio no tenía sentido, pero en este caso hablar de quince litros y medio, si lo tiene.

Pizarrón:



16: 50 Finaliza la puesta en común y comienza el trabajo en torno a la actividad 3. La docente reparte las consignas a los distintos grupos y éstos comienzan a resolver las actividades propuestas.

La docente se acerca a los grupos para brindar ayuda en forma particular a quien lo necesita.

17:20 Recreo

17: 30 Regreso al aula.

17: 35 Comienza la puesta en común.

Se decide aprovechar el tiempo que resta para cerrar dicha actividad ya que la próxima clase es asueto por el día del docente y la próxima clase sería dentro de una semana. La clase siguiente comenzaría con la actividad cuatro.

Antes de comenzar con la puesta en común la docente, copia en el pizarrón la tabla que contiene la actividad y propone en primer lugar completar con los datos que faltan.

D: ¿Qué valor le corresponde a siete?

Todos: Cuarenta con ochenta. (La docente escribe 40,8 en la tabla)

D: A ver, el grupo de las chicas ¿Cómo hizo para calcular ese valor?

C3: Multiplicamos los 2,4 por siete, que son las cuadras recorridas y después le sumamos veinticuatro pesos.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Quién más hizo de esa manera?

(Levantan la mano todos los grupos).

D: Y esta misma forma de calcular ¿Se puede aplicar a otra parte de la tabla?

Todos: Sí.

D: ¿Cuál?

Todos: A la de quince y veintinueve.

D: ¿Y en este caso cómo sería? (Señalando el quince)

A1: Quince por 2,4 más veinticuatro.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Cuál es el precio de un viaje de quince cuadras?

Todos: Sesenta pesos. (Mientras la docente escribe 60 en la tabla).

D: ¿Y un viaje de veintinueve cuadras?

Todos: Noventa y tres con sesenta.

D: ¿Hasta ahí no hubo problema?

Todos: No.

D: Yo vi que algunos grupos hicieron, quince por 2,4 y anotaron ese valor. ¿Por qué eso es incorrecto?

D1: Porque tienen que sumarle los veinticuatro de la bajada de bandera.

D: Cierto. Siempre nos cobran ese veinticuatro. ¿Cuántas veces nos cobran la bajada de bandera en un viaje?

Todos: Una sola vez.

D: Una vez te cobran veinticuatro y a partir ahí dos con cuarenta por cada cuadra recorrida. Ahora ¿Qué pasó cuando tuvieron que calcular las cuadras recorridas conociendo el precio?

B2: ¿Puedo explicar?

D: Esperá, vamos a darle la palabra a la compañera. ¿Cómo hiciste para calcular el valor correspondiente a cuarenta y ocho?

D2: Sumamos al cuarenta con ochenta que habíamos pagado por las siete cuadras tres veces dos con cuarenta y ahí obtuvimos cuarenta y ocho.

La docente escribe en el pizarrón: *40,8+2,4+2,4+2,4= 48*

D: ¿Y ahí como saben la cantidad de cuadras recorridas?

D2: Sumamos a siete la cantidad de veces que sumamos dos con cuarenta.

D: ¿Entienden lo que hizo el grupo? ¿Acá que valor iría? (Señalando el cuadradito correspondiente a $48).

D2: Diez.

D: Los demás ¿Están de acuerdo que es diez?

Todos: Sí.

La docente retoma lo que hizo el grupo y lo vuelve a explicar.

B2: Yo hice de otra forma.

D: Está bien si hicieron de otra forma. Pero esta ¿Sería una forma correcta?

B2: Sí, pero es más larga.

D: Si es más larga, porque (dirigiéndose al alumno D2) ¿Qué pasó cuando tuvieron que llegar al ochenta y cuatro?

D2: Tuvimos que sumar muchas veces.

D: Lo que dice el compañero (refiriéndose al alumno B2) es cierto, es una forma correcta pero más larga. ¿De qué otra forma se podría haber hecho?

B2: ¿Puedo explicar yo?

A1: Se buscaba diez por lo menos, se le multiplicaba 2,4 y se sumaba veinticuatro y ahí te daba cuarenta y ocho.

D: ¿Este grupo que hizo? ¿Fue probando?

A1: Si.

D: Acá en vez de ir sumando, ellos fueron probando, entonces dijeron: acá puede que sea diez, entonces probaron. ¿Cómo probaron?

A1: Diez por 2,4 más veinticuatro. (Mientras la docente escribe en el pizarrón: 10. 2,4 + 24.).

El grupo explica que probaron tres veces y ahí obtuvieron cuarenta y ocho.

D: Fíjense es otra manera de hacer, pero hay que ir probando. ¿Hay otra manera de hacer donde uno calcule directamente el resultado?

Algunos: Si.

D: A ver ahora sí, (dirigiéndose al alumno B2) contanos cómo hicieron.

B2: La del 110,4. Yo le puse así: 110,4 menos 24 es igual a 86,4 (La docente escribe en el pizarrón). Aparte 86,4 dividido 2,4 es igual a 36 cuadras recorridas.

D: A ver, entonces con este cálculo ¿qué se pudo hallar? (Señala lo escrito en el pizarrón). Que, si se gastan ciento diez pesos con cuarenta centavos ¿se recorren?

B2: Treinta y seis cuadras. (La docente completa la tabla).

D: ¿A los demás les salió así?

Todos: Sí.

D: ¿Entendieron lo que dijo el compañero? ¿Por qué él dice 110,4 menos 24?

A1: 110,4 es lo que él pagó y 24 es la bajada de bandera.

D: Hay que restar primero la bajada de bandera ¿Por qué? Porque 24 es un costo fijo que se cobra una única vez por cada viaje. ¿Y después que se hace?

B1: Se divide por 2,4.

D: ¿Y que es 2,4?

B2: El precio por cada cuadra.

En ese momento la docente explica el sentido de dividir 86,4 entre 2,4 y concluye diciendo:

D: Se puede hacer como dijo la compañera, se puede hacer como dijo este grupo, probando. ¿Pero cuál sería la manera óptima de resolver?

Todos: Esa. (Los alumnos señalan el pizarrón)

D: Esta forma me permite hallar de una sola vez el resultado. Entonces ¿Cómo haríamos, siguiendo esta forma de trabajo, para calcular el valor correspondiente a 84 pesos?

B2: 84 menos 24 es igual a 60 y ahí aparte, 60 dividido 2,4 es igual a 25.

En este momento la docente analiza la escritura: 84-24=60/2,4. Explica el uso correcto del signo igual.

Entonces, con 84 pesos se pueden recorrer 25 cuadras. (Mientras escribe 25 en la tabla).

Se pasa el ítem b) Calcular cuántas cuadras se pueden recorrer con $600.

Todos: Doscientas cuarenta cuadras.

D: ¿Cómo hicieron (refiriéndose al grupo E) para llegar a ese valor?

E2: Yo hice la resta de la bajada de bandera. A 600 pesos le resté 24 y salió 576, y después le dividí 576 con 2,4. Con los $600 se puede recorrer 270 cuadras.

D: ¿Todos están de acuerdo?

Todos: Sí.

D: Coincide con lo que habíamos planteado anteriormente. A ver, esta es la forma más práctica, más rápida para encontrar el resultado. ¿Se entiende por qué primero se descuenta la bajada de bandera?

Todos: Sí.

D: Porque es un costo fijo. De esos 600 si o si me van a cobrar los 24. Al descontar los 24, esos 576 se destinan a las cuadras recorridas. Dividiendo por 2,4 ese valor, obtengo la cantidad de cuadras que se pueden recorrer.

Se pasa el ítem c) ¿Es posible escribir una fórmula que permita conocer el precio cualquiera sea la cantidad de cuadras recorridas?

Algunos: Sí.

B2: ¿Le digo la mía?

D: Acá las chicas no hablaron. ¿Llegaron a una fórmula? Dictame.

G1: y es igual a 2,4 por x menos 24 (mientras la docente escribe en el pizarrón: y=2.4.x-24).

B2: No. Más veinticuatro.

D: Vamos a mirar lo que escribieron las compañeras. ¿Qué fórmula me pedía el ejercicio? ¿Qué es lo que quiero calcular?

B2: Precio.

D: Precio cualquiera sea la cantidad de cuadras. ¿Por qué aparece “x” e “y” acá? (Señala la fórmula escrita anteriormente. ¿A qué le llamo “x” y a qué le llamo “y”?

B2: “y” al precio, “x” a las cuadras.

D: ¿Están de acuerdo?

La docente vuelve a aclarar el concepto de variable independiente y dependiente. Se acuerda que la variable independiente son las cuadras recorridas y la variable dependiente es el precio.

D: Como a mí el ejercicio me pide, calcular el precio, la fórmula empieza con “y” ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: El precio es igual (señala en el pizarrón y=). ¿De dónde sale la fórmula? De la cuenta que voy a hacer para calcular ese precio. ¿Están de acuerdo que el precio se calcula así? (Señala la expresión escrita en el pizarrón).

Algunos: Sí.

Otros: No.

D: ¿Qué habría que cambiar acá?

B2: Se le suma veinticuatro.

D: ¿Por qué? Este primer término ¿Qué me indica? (Señala 2,4.x)

B2: El precio por cada cuadra recorrida.

La docente pregunta sobre el significado del 24 a algunos integrantes del grupo D, y estos no supieron contestar. Entonces la docente, vuelve a insistir en el significado de un trabajo grupal: “Todos tienen que trabajar, no solamente que uno trabaje y los demás copien”

D1: Es la bajada de bandera.

D: El costo fijo, la bajada de bandera.

Se pasa a la consigna d) Marcar con una x el gráfico que corresponde a la situación. Justifica tu elección.

D: ¿Cuál de los tres gráficos corresponde a la situación planteada?

Todos: La c.

D: ¿Todos coinciden que es la c?

Todos: sí.

D: ¿Por qué? Vamos a darle la palabra al compañero (Refiriéndose al alumno A4).

El alumno no responde. La docente insiste en el significado del trabajo grupal. "Si todos trabajan en el grupo, y en el grupo llegaran a la conclusión de que es el gráfico c, todos en el grupo, tienen que saber por qué es el gráfico c"

B3: Es la c, porque empieza a subir el precio a pagar desde una suma fija.

La docente dibuja en el pizarrón la gráfica c) y se analiza sus características: Para cero cuadras corresponde veinticuatro, para una cuadra, me van a cobrar un poco más que veinticuatro, para dos… (Mientras la docente va indicando esto sobre el gráfico).

Se observa que, a medida que aumentan las cuadras recorridas, aumenta el precio, a partir de un valor inicial de veinticuatro pesos.

Posteriormente, se analiza el gráfico a), los alumnos plantean que a medida que aumentan las cuadras aumenta el precio a partir de cero y en el gráfico b, a medida que aumentan las cuadras, disminuye el precio.

Concluida la puesta en común, se da por finalizada la clase ya que son las 18:00 horas.

Lunes 10/09/18: No hay clases. Asueto Día del docente

Miércoles 12/09/18

Horario: 16:00 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

GA		
GB	GC	GG
GE	GD	GF

Ausentes: A4, B2, B4, C1, C4, F3.

Alumna E4, realiza un recuperatorio para cierre del trimestre.

16:15 horas comienza el trabajo en torno a la actividad 4. Los distintos grupos manifiestan que no entienden lo que tienen que hacer, entonces la docente toma la palabra y recuerda el concepto de área de un rectángulo. En el pizarrón se analiza que, si la base del rectángulo original mide 5 cm, la base del rectángulo ampliado será 5+x, la altura siempre mide 2cm y es necesario expresar el área del rectángulo, la cual se calcula multiplicando base por altura.

Aclaradas estas ideas, los alumnos comienzan a trabajar. La mayoría identifica correctamente la fórmula correspondiente al área del rectángulo, aunque tienen inconvenientes al resolver los ítems b y c.

En todos los casos, es necesaria la intervención del docente a fin de guiar el trabajo, sugerir alternativas o alentar la resolución y el diálogo grupal.

En el ítem b) fue necesario sugerirles que tengan en cuenta las medidas del rectángulo original y analicen su área respecto a los 9cm^2 que planteaba el ejercicio.

En el ítem c) tres de los grupos fueron probando con distintas medidas, haciendo uso de la calculadora y encontraron la medida de x, en cada caso. El grupo C planteó al principio que, el área no podía ser de 29 cm^2 o 29,5cm^2 porque no eran números pares (considerando que no era posible multiplicar un número por dos y que el resultado sea impar). El mismo grupo posteriormente se da cuenta que, la base podría ser un número decimal, ya que se trataba de medidas, entonces tenía sentido hablar de 14,5 cm.

A las 16:50 horas, habiendo terminado los grupos el trabajo con la consigna 4, se reparte la consigna 5, que debiera ser trabajada hasta el recreo (30 minutos).

Nuevamente, los alumnos tienen dificultades para comenzar a trabajar, manifiestan que no entienden el problema. La primera recomendación de la docente, es que identifiquen las variables relacionadas. Algunos expresan que 80.000 es la variable independiente, otros que 5000 es “x” y 80000 es “y”. Se evidencia que los grupos no logran entender el concepto de variable. Además del hecho de poder usar una fórmula para hallar pares de valores correspondientes.

Algunos grupos logran avanzar, eligen una fórmula, y responden al ítem b y c, sin hacer uso de la misma.

17:20 horas. Recreo.

A la vuelta del recreo la docente decide comenzar la puesta en común de la actividad 4, a fin de aclarar conceptos que permitan avanzar de mejor manera con la actividad 5.

17: 30 horas. Comienza la puesta en común.

La profesora lee la consigna, y hace hincapié en la necesidad de leer bien el enunciado del problema a fin de poder entenderlo correctamente.

D: Entonces ¿Qué tengo? Un rectángulo original ¿Con qué medidas?

Todos: Cinco y dos (mientras la docente escribe 5cm y 2cm en la representación gráfica del rectángulo que hizo recientemente)

D: Si yo estoy suponiendo que este rectángulo se alarga ¿Qué le va a pasar al área?

Todos: Va a aumentar.

D: Sí, porque si es más largo el rectángulo, mayor será la superficie. Sabiendo que el área de un rectángulo se calcula haciendo base por altura. ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas les parece que podrían servir para calcular el área A del nuevo rectángulo, suponiendo que x representa la longitud que se alarga su base?

D: Fíjense que utiliza la letra A para identificar al área, ¿Qué variable sería el área? ¿Dependiente o independiente?

A2: Dependiente.

D: ¿Por qué dependiente? ¿De quién depende?

A1: De la base.

D: El área depende de la medida de la base, mientras más se alargue la medida de la base del rectángulo, mayor será el área. Entonces las variables involucradas en este problema ¿Quiénes son chicos?

Se define a x, como la medida que se alarga la base del rectángulo original y A, el área del rectángulo ampliado. (La docente escribe en el pizarrón). La docente vuelve a recalcar la necesidad de identificar siempre las variables relacionadas.

D: Entonces ¿Qué fórmula marcaron?

Todos: La quinta.

D: ¿Todos marcaron la quinta? Vamos a escribir cada una y vamos a ir analizando. (La docente copia todas las fórmulas en el pizarrón). La mayoría entonces marcó esta (señala a A=(5+x).2) ¿Por qué?

A2: Porque le sumamos cinco a x y ahí le multiplicamos por dos.

D: 5+x ¿Es la medida de quién?

Todos: De la base.

D: Y esta multiplicado por dos, ¿qué es…?

Todos: La altura.

A continuación, se analizan las fórmulas 1 y 2, y los alumnos plantean que la primera no corresponde al área porque se están sumando las medidas de la base más la altura y la segunda porque se está sumando dos veces el área del rectángulo original más la medida de x. Lo que no permite hallar, en ningún caso, el área del rectángulo ampliado.

D: Ustedes me dicen que esta es correcta (Señala a A=(5+x).2) ¿A partir de esta se puede obtener alguna de estas dos? (Señalando la tercera y cuarta fórmula). ¿Son equivalentes?

Si yo tengo (5+x). 2 (mientras lo vuelve a escribir en el pizarrón) ¿Qué se puede hacer?

G3: Distribuir.

D: Si, podemos aplicar la propiedad distributiva. Si yo hago eso ¿Cómo va a quedar la expresión?

Todos: Diez más dos x.

D: ¿Esto se corresponde con alguna de las fórmulas que tenemos ahí?

Los alumnos plantean que la expresión hallada 10 + 2x se corresponde con la tercera fórmula planteada: A= x.2 + 10. En ese momento la docente aclara el hecho de que son equivalentes por la propiedad conmutativa de la suma y el producto. Concluye diciendo que:

D: Entonces, esta otra fórmula también era correcta.

Se descarta la fórmula cuatro ya que contiene x. 5.

Se pasa al ítem b) ¿Es posible que el área de este rectángulo sea de 9 cm^2? ¿Por qué?

Algunos: Si.

D: ¿Es posible?

C3: No, porque si multiplicamos la base por la altura nos da diez.

D: Claro. ¿Quién tiene 10cm^2 de área?

A1: El rectángulo original.

D: Y si yo estoy alargando el rectángulo ¿El área puede medir 9 cm^2?

Todos: No.

D: Ahora en la c) el área ¿Puede medir 28 cm^2?

Todos: Sí.

D: ¿Por qué? A ver ¿Quién explica?

C2: Si la base original tiene 5 cm, la x es de nueve, entonces la suma de estos dos, nos daría catorce que, si multiplicamos por dos, nos daría como resultado veintiocho, que es el área.

D: ¿Cuánto tiene que medir x para que el área sea de 28 cm^2?

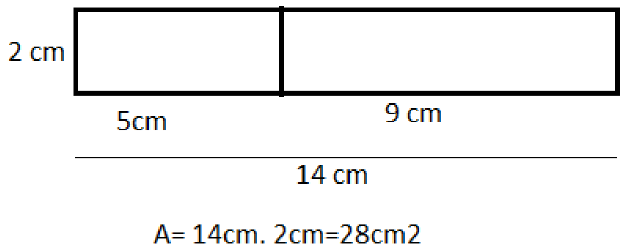
Todos: Catorce.

D: ¿Escucharon la pregunta? ¿Cuánto tiene que medir x para que el área sea de 28 cm^2?

Todos: Nueve.

La docente explica en el pizarrón con la ayuda de una representación gráfica que si x=9, entonces la base mide 14 cm y el área se calcula haciendo 14cm. 2cm= 28 cm^2.

Pizarrón



D: ¿Cómo hicieron para encontrar el valor nueve?

A1: Probando.

D: ¿Pudieron encontrar el valor de x para 29 cm^2?

GA y GB: Sí

D: ¿Cuánto es?

A2: 14, 5.

D: Pero en realidad x ¿Cuánto tiene que medir?

A1: 9,5.

D: Y después ¿Para 29,5?

B3: 14,75.

D: Pero en realidad el valor de x ¿Cuánto es?

B3: 9,75.

En este momento, la docente escribe en el pizarrón los resultados calculados por los alumnos y explica nuevamente el procedimiento utilizado por ambos grupos. “Se dejó fijo el valor correspondiente a la altura y se fue modificando la medida de la base, a fin de que el producto de ambos sea 28, 29 y 29,5 respectivamente”.

Seguidamente plantea la siguiente pregunta:

D: ¿De qué otra manera se podría hacer? Por algo ustedes ya eligieron una fórmula. ¿Qué es lo que tenían que averiguar en este ejercicio?

A1: El valor de x.

D: Exacto. Y acá (Señalando la fórmula elegida al principio) ustedes me están diciendo que, si hacen cinco más x, y a eso le multiplican por dos, se obtiene el valor del área. Entonces qué podemos escribir: cinco más x, todo por dos es igual a veintiocho. (mientras escribe (5+x). 2=28)

¿Se entiende? Si ustedes me están diciendo que de esta forma se calcula el área, todo esto (refiriéndose a (5+x). 2) igual a 28, me va a permitir hallar el valor de x, que cumpla esa igualdad. ¿Qué es lo que nos quedó planteado?

A2: Una ecuación.

La docente resuelve la ecuación siguiendo las indicaciones de los alumnos y se observa en el pizarrón:

$$(5+x).2 = 28$$

$$5+x = \frac{28}{2}$$

$$x = 14 - 5$$

$$x = 9$$

D: Esto es lo que ustedes hicieron, solo que lo hicieron mentalmente, pero si hacen uso de la fórmula elegida podrían encontrar directamente el valor de 9 sin necesidad de ir probando. ¿De qué manera hubieran trabajado con el 29?

A1: De la misma forma, cambiando el 28 por 29.

En ese momento se acuerda que, igualando la expresión (5+x). 2 a 28, 29 y 29,5 respectivamente, es posible hallar las medidas de x: 14, 14,5 y 14,75, que corresponden a la solución de cada una de las ecuaciones planteadas.

La docente concluye explicando el hecho de poder reemplazar los datos en la fórmula, plantear una ecuación y resolverla, a fin de poder hallar los pares de valores correspondientes.

Lunes 17/09/18

Horario: 16:40 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

		GC
GB	GA	GG
GE	GD	GF

Ausentes: A1, B2, B4, C4, D1, D4, G3.

A las 16:45 horas los alumnos retoman el trabajo en torno al problema 5. Los distintos grupos continúan resolviendo las actividades propuestas. Muchos manifiestan que no saben cómo seguir, otros avanzan más rápidamente.

A las 17:00 horas comienza la puesta en común.

La profesora da lectura al enunciado del problema y pregunta:

D: ¿Qué información me está dando esta parte del problema? La pileta ¿Qué capacidad tiene?

Todos: Ochenta mil litros.

D: La bomba ¿cuánta agua arroja?

Todos: Cinco mil litros de agua por hora.

D: ¿Qué dice la segunda parte? Ayer se llenó un cuarto de la pileta ¿Qué significa eso? ¿Qué en el día de ayer se cargaron…?

Todos: Veinte mil litros.

D: ¿Están de acuerdo? ¿De dónde sacan ese veinte mil?

A3: Un cuarto.

D: Y un cuarto ¿Cómo se calcula?

C2: La mitad de la mitad.

D: ¿La mitad de la mitad? O sea ochenta dividido cuatro, que nos da veinte mil litros que se cargaron en el día de ayer. Entonces, en la pregunta a) dice: ¿Cuál de estas fórmulas describe la situación?

Todos: La tercera.

La docente escribe la fórmula seleccionada en el pizarrón: y= 5000x+20000 y pregunta:

D: ¿Por qué se elige esta fórmula? Siempre que nosotros vamos a trabajar con una fórmula tenemos que interpretar, en primer lugar, qué significa “x” y qué significa “y”. En este problema chicos, ¿Qué es “x” para nosotros?

B3: Horas.

D: Las horas que tarda en llenarse la pileta. En realidad, podemos decir que es el tiempo medido en horas. Entonces ¿”x” es nuestra variable…?

Todos: Independiente.

D: Mientras que “y” es la dependiente. ¿Y quién depende de las horas?

D2: Los litros de agua.

D: Los litros de agua que hay en la pileta. (Luego escribe, y: Cantidad de agua de la pileta medida en litros). Entonces, si eso es “x” y eso es “y” ¿Qué me muestra la fórmula? Que la pileta tiene originalmente…

Todos: Veinte mil litros.

D: ¿Y ese signo más qué me está indicando?

Todos: Estoy sumando.

D: ¿Qué estoy sumando?

A2: Cinco mil litros de agua por hora.

D: Entonces cuando hago la suma, ¿Qué me devuelve el cálculo?

Todos: La cantidad de agua.

D: La cantidad de agua que tiene la pileta en un momento dado. Fíjense chicos ¿Qué es lo que muestra la fórmula? Cuando x toma un valor particular, yo voy a calcular la cantidad de agua que tiene la pileta en ese momento. Si yo pienso en una hora de encendida la bomba ¿Cuánta agua va a tener la pileta?

A2: Cinco mil litros.

D: Arrojó cinco mil litros de agua, la bomba. Pero la pileta ¿Cuánta agua va a tener?

D2: Veinticinco mil.

D: Entonces yo puedo decir que: Si x es igual a una hora entonces el valor de y será veinticinco mil, porque cuando x asume el valor 1, la cantidad de agua que hay en la pileta es veinticinco mil. La fórmula me muestra eso, la cantidad de agua que tiene la pileta a medida que pasa el tiempo ¿Se entiende?

Todos: Sí.

Pizarrón

Si $x=1 \rightarrow y=25.000$

D: Ahora en la consigna b) Utilizando la fórmula elegida ¿Es posible saber cuánta agua habrá en la pileta después de dos horas y media de volver a encender la bomba?

Todos: Sí.

D: ¿Cuánta agua habrá en la pileta?

B1: Doce mil quinientos litros.

D: ¿Cómo calcularon?

B3: Si en una hora, cinco mil litros súmale más cinco mil más dos mil quinientos litros.

D: ¿Esa es la cantidad de agua que tiene la pileta o que arroja la bomba?

A2: Que arroja la bomba.

D: En dos horas y media, la bomba arroja doce mil quinientos litros, entonces ¿Cuánta agua habrá en la pileta?

B1: Treinta y dos mil quinientos.

D: ¿Por qué?

B1: Porque se suma lo que ya tenía.

D: ¿Alguien pudo hacer ese cálculo usando la fórmula? ¿Qué es eso de usar la fórmula? Fíjense, ustedes ya saben que esa es la fórmula que describe la situación. La consigna decía: Usando la fórmula ¿Es posible saber cuánta agua habrá en la pileta? ¿Qué es lo que quiero conocer? ¿El valor de x o el valor de y?

A2: El valor de y.

D: El valor de y, porque dice ¿Cuánta agua…? Entonces “y” es lo que no conozco. Cuánta agua habrá después de dos horas y media, dos horas y media. Ese valor ¿a quién corresponde?

B3: A “x”.

D: Estamos diciendo, (mientras escribe) si x es igual a 2,5 horas, entonces ¿Cuál es el valor de y? ¿Se entiende la pregunta? Si x toma el valor 2,5 ¿Cuál es el valor de y correspondiente? ¿Cómo se hace eso usando la fórmula?

Pizarrón

Si x=2,5 →¿y?

D: Si la fórmula es y=5.000x+20.000 y x es 2,5 ¿Qué hay que reemplazar?

D2: La x por 2,5.

D: Si yo digo usar la fórmula, significa reemplazar. En este caso estamos preguntando por un caso particular, no por cualquier hora, sino por 2,5. (Mientras habla escribe en el pizarrón: y= 5.000.2,5 +20.000) ¿Cómo se resuelve ese cálculo?

Los alumnos indican que primero se multiplica y luego se suma.

Pizarrón:

y= 5.000.2,5 +20.000

y= 12.500 + 20.000

y= 32.500

D: Ese treinta y dos mil quinientos ¿Qué significa? Los litros que tiene la pileta pasadas dos horas y media de encendida la bomba. ¿Se entiende? La fórmula me muestra eso, la correspondencia entre “x” e “y”, es decir, entre horas y litros. Algunos hicieron mentalmente, esta sería la forma de hacer usando la fórmula. Se reemplaza x por el valor correspondiente y se resuelven las operaciones.

En la c) la pregunta era parecida. Continuando el trabajo a partir de la fórmula ¿Es posible saber el tiempo que debe estar encendida la bomba hasta llenar la pileta?

Mayoría: Doce horas.

Grupo E: Dieciséis horas.

D: A este grupo (señalando al grupo C) también les dio dieciséis ¿Y después de qué se dieron cuenta?

C3: Que no le habíamos restado el cuarto.

Grupo E: Ah…

D: ¿Entonces qué pasó? ¿Estamos de acuerdo que doce horas tiene que estar encendida la bomba?

Todos: Sí.

D: No son dieciséis porque dieciséis sería si estuviese vacía. (Mientras tanto una integrante del grupo G, pasa al pizarrón a copiar lo que han hecho).

La pregunta dice: ¿Es posible saber el tiempo…? Es importante que lean bien, ¿Qué me está preguntando el ítem c) a diferencia del ítem b)?

Todos: El tiempo.

D: O sea que, lo que me está pidiendo ¿Es un valor de “x” o un valor de “y”?

Todos: De “x”.

D: Si me dice que quiere llenar la pileta ¿Qué información es la que me está dando? ¿Cuántos litros quiero que tenga la pileta?

A2: Ochenta mil.

D: Y fíjense lo que hizo la compañera, tomó la fórmula y ¿Qué hizo? ¿Qué valor reemplazó?

Todos: El valor de y.

D: Y en “y” ¿Qué valor escribe?

B3: Ochenta mil.

D: Si, ochenta mil porque yo quería llenar la pileta. Al igualar la fórmula a ochenta mil estamos queriendo averiguar en cuanto tiempo voy a alcanzar esos 80.000 litros. Cuando ese valor de “y” se reemplaza por un número, en este caso ochenta mil, esa expresión que antes era una fórmula pasa a ser…

A2: Una ecuación.

D: ¿Por qué es una ecuación? Porque es una igualdad que contiene una…

Todos: x

D: Una incógnita. ¿Y yo puedo resolver una ecuación de ese tipo?

Todos: Sí.

A continuación, se analiza la ecuación resuelta en el pizarrón por el grupo G. La docente, refiriéndose a la solución pregunta:

D: ¿Doce qué?

Todos: Doce horas.

D: Doce horas que tarda en llenarse la pileta. Fíjense que esto es prácticamente lo mismo que uno haría mentalmente porque si yo sé que la pileta ya tenía 20.000 litros, a los 80.000 primero le descuento esos 20.000 y ahí me queda 60.000 que tengo que dividir entre 5.000 que representan…

C3: Los litros de agua que arroja la bomba.

D: ¿Por…?

Todos: Hora.

Pizarrón

5.000x+20.000=80.000

5.000x=80.000-20.000

x=60.000/5.000

x=12

D: Así se usa la fórmula. Usar la fórmula significa convertirlas en ecuaciones reemplazando uno de los valores conocidos para hallar su valor correspondiente.

Pasamos al siguiente: d) ¿Qué significa cada una de las fórmulas que no señalaste? Si todos marcaron la tercera quedaron sin marcar la primera, la segunda y la última. ¿Sí o no?

Todos: Sí.

La docente copia cada una de estas fórmulas en el pizarrón y pregunta:

D: ¿Qué significaría la primera fórmula chicos? ¿Qué estaría representando en el contexto del problema?

Grupo B: La pileta estaba llena y se están vaciando 5.000 litros de agua por hora.

D: Fíjense, que al 80.000 se le resta 5.000x, es decir, 5.000 litros de agua por hora. ¿Y en esta? (refiriéndose a la segunda fórmula) ¿Se está llenando o se está vaciando la pileta?

Todos: Se está vaciando.

D: Se está vaciando fíjense, porque es lo mismo que está escrito arriba solo que está escrito en otro orden, pero la suma es conmutativa, esto podría estar escrito atrás y sería lo mismo. Entonces, se sacan 5.000 litros de agua por hora ¿A qué cantidad?

A2: A veinte mil.

D: A 20.000 litros se le restan 5.000 litros de agua por hora. ¿Y la última cómo sería?

B3: Se está cargando la pileta.

D: ¿Cuánta agua tiene la pileta?

Todos: Sesenta mil.

D: ¿Y se están cargando?

Todos: 5.000 litros de agua por hora.

D: ¿Se entiende como cada fórmula está representando una situación diferente? ¿Pudieron hacer el gráfico de cada una de estas situaciones?

Algunos: No.

D: ¿Qué tendrían que hacer primero para poder hacer el gráfico?

A3: Ejes cartesianos.

D: Aparte de los ejes cartesianos, siempre que le pedía graficar, ¿Qué información tenían?

G1: Lo que vale la “x” y la “y”.

D: Y esa información casi siempre estaba contenida en una tabla (Recuerda ejercicios resueltos anteriormente). ¿Se puede hacer el gráfico, solo mirando la fórmula?

Todos: No.

D: Para que esté bien hecho no, se puede hacer una estimación. Entonces para cada una de las fórmulas es necesario construir una tabla de valores, esos números que están en la tabla después se pasan al gráfico. Les muestro con la primera, pueden hacer así vertical ¿Qué valores pueden asignar? Los valores de x, porque x es la variable independiente. Si x son horas ¿Qué números podrían ir acá?

B1: 1, 2, 3…

La docente explica cómo confeccionar la tabla y cómo considerar los pares de valores hallados para luego hacer el gráfico. A continuación, destina un tiempo para que cada uno de los grupos, realice las distintas representaciones.

17:25 toca el recreo, los alumnos salen al patio.

Al regreso del recreo los alumnos continúan el trabajo grupal a fin de realizar las representaciones gráficas correspondientes a cada una de las funciones analizadas.

18:05. Termina la clase.

Lunes 24/09/18

Horario: 16:40 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

	GA	
GB	GC	GG
GE	GD	GF

Ausentes: B2, B4, C1, D1, D2, E2, F1, F4, G1, G2, G4.

16:50 horas comienza el trabajo en torno a la actividad 6. Los distintos grupos resuelven la actividad propuesta, algunos hacen consultas, la docente sugiere que tengan en cuenta el trabajo realizado en la consigna anterior.

17:30 a la vuelta del recreo, comienza la puesta en común. Para ello, la docente copia en el pizarrón la representación gráfica de la consigna. Se lee el enunciado y la docente pregunta:

D: La cantidad de agua en el tanque ¿Va aumentando o disminuyendo?

Todos: Disminuyendo.

D: ¿Eso se ve en el gráfico?

Todos: Sí.

D: ¿Qué lectura hago rápidamente mirando el gráfico? A medida que pasan las horas…

A1: Disminuye la cantidad de agua que hay en el tanque.

D: Entonces ¿Qué me pide el ítem a)?

A3: (Lee la consigna). Elabora una fórmula que represente la cantidad de agua que queda en el tanque a medida que se desagota en función del tiempo.

D: ¿Lograron hacer eso?

Todos: Sí.

D: ¿Cómo expresaron esa fórmula?

A1: Que el tanque tiene diez litros y en una hora se resta medio litro sería.

D: ¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero?

Todos: Sí.

D: Si, porque acá por ejemplo (señala el gráfico) tenían marcado el valor dos. Al valor dos, ¿Qué valor le correspondía?

Todos: Nueve.

D: O sea que, en dos horas, ¿Cuánta agua se sacó?

Todos: Un litro.

D: Entonces ¿En una hora?

Todos: Medio litro.

D: Es fundamental saber qué cantidad de agua se desagota por hora. ¿Sí? Porque si no, no voy a poder armar la fórmula. En la fórmula ¿Quiénes van a aparecer?

Todos: “x” e “y”.

D: Y siempre tengo que identificar qué representa cada una. ¿Qué representa “x”?

B3: Tiempo.

D: El tiempo medido en horas. ¿”y”?

Todos: Litros de agua en el tanque.

D: Si la idea es… ustedes vuelvan a leer la consigna, ahí dice bien clarito: una fórmula que represente la cantidad de agua que queda en el tanque… Eso es lo que quiero calcular, a medida que pasa el tiempo. ¿Entonces cómo empieza la fórmula?

Todos: “y”.

D: Cuando escribo y= ¿Qué estoy diciendo?

Todos: Litros.

D: Litros de agua en el tanque, es igual…

Varios: Diez menos un medio por x. (Mientras la docente escribe y=10-1/2.x)

D: ¿Se entiende por qué es esa fórmula? Porque esta expresión me permite calcular la cantidad de agua que va quedando en el tanque a medida que pasa el tiempo. ¿Por qué pusieron el diez primeramente?

A1: Los diez litros de agua.

D: Los diez litros de agua en el tanque. ¿Y qué representa este término? (señalando a 1/2x)

A1: A medida que pasan las horas va saliendo medio litro de agua.

D: Medio litro de agua por hora. La x representa las horas, x va a ser una hora, dos horas, tres horas… el valor que yo quiera. Al hacer esa multiplicación, es decir, la hora por un medio, me va a decir, la cantidad de agua que sale en ese tiempo ¿Se entiende? Al restarle a diez, que era la cantidad inicial, vamos a saber la cantidad de agua que tiene el tanque en ese momento. ¿Se entiende? Bueno ese es el a). Ahora seguimos con el b). (Dirigiéndose al alumno A1) ¿Podés leer?

A1: ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo? ¿Es posible leer esta misma información en la fórmula?

D: A ver chicas ¿Qué respondieron? ¿Es posible leer esta información en el gráfico?

GB: Sí.

D: ¿Los demás están de acuerdo?

Todos: Sí.

D: ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo?

B3: En el eje x.

D: ¿Por qué? En el eje x está representado el…

Todos: Tiempo.

D: ¿Cómo me doy cuenta el tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo?

Todos: Veinte.

D: ¿Por qué en el veinte?

A1: Porque queda en cero los litros.

D: ¿Es así?

Todos: Sí.

D: Claro, va disminuyendo hasta que llega a cero. Esta altura ¿a qué valor de y corresponde?

Todos: Cero.

D: Si yo digo, eje x, el dieciocho, el dieciséis todos están en el eje x. Pero ¿Cómo me doy cuenta que se desagota a las veinte horas? Porque a veinte le corresponde cero litros. ¿Todos entendieron eso?

Todos: Sí.

D: Ahora esa misma información ¿Es posible leer en la fórmula?

Muchos: Sí.

D: Si yo miro la fórmula, ¿Veo que al tanque le lleva veinte horas desagotarse?

Varios: No.

B3: Se puede leer, pero allá en “y” (señalando la fórmula) hay que escribir igual a cero.

D: ¿Se entiende lo que dice la compañera?

Varios: Sí.

D: Vamos por parte. Mirando la fórmula ¿Es posible leer veinte horas?

Todos: No.

D: No, porque no aparece explícito. ¿Pero qué se puede hacer?

B3: Se puede plantear una ecuación.

D: Si, se puede plantear una ecuación. A ver ¿Quién pasa a mostrar?

B3: Yo paso.

D: Fíjense bien lo que va a hacer la compañera. Cuando el tanque se desagota por completo ¿Qué es lo que yo sé? ¿Las horas que le lleva desagotarse o los litros de agua que tiene en ese momento?

La alumna resuelve la ecuación en el pizarrón. El resto de la clase permanece callado frente a la pregunta de la docente. Esta vuelve a insistir:

D: Fíjense, yo estoy diciendo: El tanque se desagotó por completo. ¿Qué se sabe? ¿La cantidad de agua que tiene el tanque o el tiempo que transcurrió? ¿Qué es lo que sé?

B2: Que no tiene agua.

D: Qué no tenga agua ¿Qué significa? Qué "y" ¿Cuánto vale?

Todos: Cero.

D: ¿Se entiende? Si yo sé que el tanque se desagotó, sé qué "y" es igual a cero. Vamos a ver qué hizo la compañera.

Pizarrón

$y=10-1/2.x=0$

$y=10-1/2.\ 20=0$

$y=10-10=0$

$y=0$

B3: En lugar de x pongo veinte, simplifico por dos, queda diez y ahí me da cero.

D: Vamos a analizar lo que hizo la compañera. ¿Por qué reemplazó el veinte en la fórmula?

Varios: Porque son veinte horas.

D: Claro, x representaba las horas y según el gráfico, a veinte horas corresponde cero litros. Está bien, es una forma de trabajar que nos permite verificar lo que observamos en el gráfico. (La docente borra el =0 en todos los renglones diciendo que eso es lo que se quiere probar). Si x toma el valor veinte, se puede resolver como dijo la compañera, se simplifica y diez menos diez es cero. ¿Qué significa eso chicos? Que cuando x vale veinte, ¿Cuál es el valor de "y" que le corresponde?

Todos: Cero.

D: Muy bien, eso es lo que nos muestra el gráfico. ¿Pero qué pasa? Acá la compañera sabe que se desagotó en veinte horas. Lo que hace es, reemplazar el valor veinte y obtiene que "y" es cero. Efectivamente, a veinte horas corresponde cero litros, es decir que, está vacío.

Pero qué pasa si yo tengo la fórmula y no tengo el gráfico, yo no sé qué tarda veinte horas en desagotarse ¿Cómo hago uso de la fórmula para calcular ese valor veinte? Ese veinte ¿Es un valor de x o de y?

Todos: De "x".

D: Y a ese veinte ¿Qué valor de "y" le correspondía?

Todos: Cero.

D: ¿Entonces cómo quedaría?

La alumna C4 pasa al pizarrón y copia lo siguiente:

Pizarrón:

10-1/2x=0

-1/2x=0-10

x=-10 . (-2)

x=20

D: A ver, fíjense. ¿Qué hizo la compañera? Tomó la fórmula y a toda esa expresión la igualó a cero. ¿Qué significa ese cero?

A1: Cero litros de agua.

D: Con esto estoy diciendo que, si esta es la forma de calcular la cantidad de agua en el tanque, si yo igualo a cero estoy diciendo que el tanque está vacío. Lo que está planteado es una ecuación, no se conoce el valor de x, que representan las horas. Hago el despeje (la docente comenta todos los pasos seguidos por el grupo para resolver la ecuación) y se obtiene x= 20. ¿Qué significa eso entonces? Que si y=0 entonces x=20. Son parecidos los dos procedimientos, pero no son iguales.

A1: Para mí es más fácil este (señalando el primero).

D: Pero ¿Qué pasa? ¿Cuál es la diferencia? En el primer caso la compañera ya sabía que se desagotaba en 20 horas, lo que hizo fue comprobar que, a 20 horas, le correspondían 0 litros. Pero qué pasa si yo no sé cuántas horas le lleva al tanque desagotarse ¿Qué tendría que hacer?

Todos: Hacer así (señalando la segunda ecuación).

D: Tendríamos que hacer así, igualar a cero y despejar el valor de x correspondiente. ¿Se entiende?

Todos: Si.

D: Vamos a la última. ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad inicial que hay en el tanque?

B3: En el eje “y”.

D: ¿En el eje “y”?

Todos: Sí.

D: En el eje vertical, sobre el eje “y”. ¿Dónde chicos?

A2: En la parte superior.

D: Pero ¿Cómo podríamos ser más específicos?

A1: En diez, el más alto.

D: ¿Y qué más podría decir? Esos diez litros ¿A qué hora corresponde?

B3: A cero.

D: A cero. A las cero horas, al momento inicial sería, tenemos diez litros de agua en el tanque. Esa información ¿Puede leerse en la fórmula?

Todos: Sí.

D: ¿Aparece el número diez en la fórmula?

Todos: Sí.

D: (Señalando en la fórmula). A diez litros le restamos lo que se desagota por hora. Ahí si aparece, pero de que otra forma, como hicimos recién para verificar justamente que la cantidad inicial de agua en el tanque es diez ¿Cómo voy a hacer? Si yo estoy diciendo que la cantidad inicial es diez ¿A qué valor dijimos que le corresponde?

Todos: A cero.

D: ¿Y quién es cero? ¿”x” o “y”?

Todos: “x”.

D: Entonces ¿Cómo hago el reemplazo? (Mientras comienza a escribir y=)

Varios: Diez menos un medio por x.

D: ¿Por quién?

C2: Por cero.

D: Un medio por cero es…

Todos: Cero.

D: ¿Entonces qué me queda?

Todos: Diez.

D: Me está diciendo que, si “x” es igual a cero, entonces “y” es igual a diez. ¿Estamos? Ustedes tienen que ver esa correspondencia, eso es lo que muestra la fórmula. Yo le doy valores a “x” y lo que me devuelve la fórmula es el correspondiente valor de “y”. Fíjense acá (señalando el pizarrón). Le dí un valor a “x”, veinte, a través de la fórmula le corresponde un determinado valor de “y”, en este caso, cero. ¿Se entiende?

Todos: Si.

D: A ver, ¿Qué valor le corresponde a diez horas? ¿Cuántos litros le corresponde?

Todos: Cinco.

D: Eso ven el gráfico. ¿Y cómo se vería eso en la fórmula? ¿Se puede calcular?

Todos: Sí.

D: Si se puede. ¿Cómo voy a hacer eso?

A1: Diez menos un medio por cinco.

D: Yo les pedí diez horas. X es horas.

A1: Por diez.

D: ¿Cómo se resuelve eso? (La docente resuelve las cuentas en el pizarrón y continúa explicando).

Pizarrón

y=10-1/2.10

y=10-5

y=5

D: ¿Qué es lo que veo entonces? Si “x” es igual a diez, le corresponde un valor de “y” igual a cinco. ¿Se entiende? Todo el tiempo puedo trabajar con la fórmula y me permite calcular pares de valores correspondientes. Para un determinado valor de x, ¿Cuántos valores de “y” le corresponden?

Todos: Uno.

D: Un único valor de “y”. Para cada hora hay una cantidad de litros correspondiente.

18: 00 horas termina la clase del día.

26/09/18 Jornada de Formación Situada.

Lunes 24/09/18

Horario: 16:40 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

	GG	GC
GA	GB	
GE	GD	GF

Ausentes: C4.

Comienza la clase con la lectura del enunciado de la actividad N° 7 y con el análisis de la fórmula presentada en la consigna. Los distintos grupos trabajan y en algunos casos es necesaria la intervención docente. Puede verse que en los distintos grupos surgen interrogantes en torno a las consignas que se refieren al uso de la fórmula, no así, en cuanto a la interpretación del gráfico.

17:10 horas comienza la puesta en común con la lectura de la consigna por parte de la docente.

D: ¿Se puede averiguar el monto a pagar correspondiente a un consumo de 200 kWh mirando el gráfico?

Todos: Sí.

D: ¿Todos consideran que sí?

Todos: Sí.

D: ¿Y cuál es ese monto?

Todos: Cien pesos.

D: Y usando la fórmula ¿Se puede hacer ese cálculo?

Todos: Si.

D: ¿Qué pasó cuando quisieron calcular el consumo correspondiente a 900 kWh? ¿Pudieron hacer mirando el gráfico?

Algunos: Sí.

D: ¿Qué valor le corresponde?

B3: Trescientos setenta y cinco.

A2: Trescientos ochenta.

D: ¿Qué pasa con 900 kWh?

B3: Que no es justo.

D: Claro, no está en la intersección de los cuadraditos. Si yo miro, yo puedo estimar que es trescientos setenta y cinco, pero en realidad no podemos saber si es exacto. ¿Cómo se puede calcular el monto a pagar tanto para 200 kWh como para 900 kWh, usando la fórmula?

A2: Cambiar la x por 900.

La docente le pide a este alumno que pase al pizarrón a mostrar el procedimiento utilizado. También pasa al pizarrón la alumna C2 a mostrar cómo calcularon el valor correspondiente a 200 kWh.

Pizarrón

M(900)=0,4. 900+20

M(900)=360+20

M(900)= 380

M(200)=0,4. 200+20

M(200)=80+20

M(200)= 100

D: ¿Hicieron algo parecido?

Todos: Si.

D: Si esta es la fórmula (señalando en el pizarrón). ¿Qué me decía la fórmula? El monto depende de los kWh, al poner este paréntesis no es que tenemos que calcular algo, sino que es una forma de indicar que el monto depende de x, es decir depende de los kWh consumidos. Entonces, si x pasa a ser 200 kWh, esa x que aparece en la fórmula se cambia por 200, se reemplaza, multiplico por 0,4, le sumo veinte y efectivamente nos da cien. De esta forma nosotros podemos corroborar que el monto a pagar por 200 kWh es $100. ¿Y el monto a pagar por 900 kWh es…?

Todos: $380.

D: Mirando el gráfico, como no es exacto nosotros podemos estimar, pero la fórmula me devuelve el valor exacto. ¿Se entiende? En algunos casos, usando el gráfico es más fácil. ¿Pero el gráfico responde todas las situaciones?

Todos: No.

D: En esos casos, conviene o es más útil usar la fórmula.

En la b) dice: Estimá, mirando el gráfico, cuál es el monto a pagar si el consumo es de 1.100 kWh. Cuando miraron el gráfico ¿Qué estimación realizaron?

Todos: Cuatrocientos sesenta.

D: Les parecía que era cuatrocientos sesenta. ¿Por qué?

D2: Porque está un poquito más arriba que cuatrocientos cincuenta.

D: ¿Y cómo puedo hacer para estar segura o seguro que es cuatrocientos sesenta?

D2: Cambiar la x por mil cien.

D: (Señalando el ejercicio resuelto anteriormente en el pizarrón). En vez de poner 200 acá, pondría 1100, multiplico 1100 por 0,4 le sumo 20 y efectivamente se obtiene 460. ¿Se entiende cómo se usa la fórmula? x toma un valor particular en relación a los kWh y al hacer esa cuenta que se propone acá, me devuelve el monto a pagar por esa cantidad de energía consumida.

Qué pasó con la c) Si una familia debe pagar $300 ¿Cuántos kWh ha consumido?

Todos: Setecientos.

D: ¿Cómo respondieron eso?

A2: Mirando el grafico.

D: ¿Todos hicieron así?

Todos: Sí.

D: ¿Por qué era fácil saber la respuesta mirando el gráfico?

Todos: Porque era exacto.

D: ¿Y qué pasó con $550?

A2: Mil doscientos veinticinco.

D: ¿Seguro? ¿De qué manera puedo saber exactamente?

GG: Despejando x.

La docente pide a un integrante de este grupo que pase al pizarrón y que muestre el procedimiento realizado.

Pizarrón

0,4.x+20=550

0,4.x=550-20

x=530/0,4

x=1325

Mientras la alumna escribe en el pizarrón la docente pregunta:

D: ¿Qué es lo que está planteando la compañera?

Todos: Una ecuación.

D: Fíjense, deja esta parte tal y como está y en vez de escribir igual a M ¿Qué hace?

A2: Puso el precio que debe pagar.

D: El precio que debe pagar. Fíjense, estoy diciendo 0,4 por x más 20 igual a 550 pesos. Le estoy dando un valor particular al monto y en base a ese monto despejo, calculo, resolviendo la ecuación ¿Qué cosa?

Todos: Los kWh.

D: Los kWh correspondientes a 550 pesos. (La docente comenta los pasos utilizados para resolver la ecuación). Estamos usando la fórmula, pero en otro sentido ¿Se entiende? Conociendo el precio podemos despejar el valor de kWh correspondiente.

Volvemos un poquito sobre la fórmula chicos, ¿Qué sería este 20 acá? ¿Qué representa ese más veinte en el contexto del problema? ¿El precio de que…?

B2: De la boleta.

D: No, porque el precio de la boleta está dado por el monto total. El 20 sería un costo fijo que hay que pagar por el servicio ¿Y el 0,4?

C2: El precio del kWh.

D: Sí, el precio de cada kWh. Cada kW cuesta 0,4 pesos, cuando yo hago la multiplicación me devuelve el precio a pagar por los kW consumidos y después le tengo que agregar el 20 que es un costo fijo. Si ustedes tienen presente eso ¿Cómo respondieron a la última pregunta? Si la familia no está, estuvo de vacaciones ¿Tiene que pagar algo?

Todos: Sí.

A2: Porque 20 es el costo fijo.

D: Eso yo dije ahora, pero la mayoría que miró.

Todos: El gráfico.

D: ¿Y cómo se dieron cuenta que, si no gastaba nada, igual tenía que pagar?

A1: Porque la línea comienza más arriba del cero.

D: Exacto, me está indicando que para cero kWh corresponde este valor (marca sobre el gráfico que acaba de hacer en el pizarrón), que no es cero pesos, más arriba esta cincuenta. ¿Qué valor es este?

A1: Veinticinco.

Varios: Veinte.

D: ¿Veinte o veinticinco?

Varios: Veinte.

D: ¿Por qué veinte?

B2: Porque veinte es el valor fijo.

D: Si. Es el costo fijo que muestra la fórmula ¿Y cómo puedo conocer ese valor haciendo una cuenta? ¿Cómo usamos la fórmula para conocer el monto correspondiente a 0 kWh?

B2: 0,4 por cero más 20. (La docente escribe en el pizarrón y luego resuelve mientras pregunta a la clase)

D: ¿Y cuánto es 0,4 por cero?

Todos: Cero.

D: ¿Y cero más veinte?

Todos: Veinte.

D: Entonces, el monto correspondiente a 0 kWh es 20 pesos.

A las 18:00 horas se da por finalizada la clase del día.

Miércoles 03/10/18

Horario: 16:00 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

GA		
GB	GC	GG
GE	GD	GF

Ausentes: Ninguno.

La clase comienza a las 17: 00 horas ya que anteriormente los alumnos participaron de una charla sobre Bullying.

Comienza el trabajo grupal, los alumnos plantean que el precio va a depender de los kilómetros recorridos. Algunos dividen 1400 entre 3,5 y 1200 entre 6,5 y pretenden con ello dar una respuesta inmediata. Los alumnos del grupo B, toman distintos valores y comienzan a calcular el precio correspondiente en ambas compañías.

A las 17: 40 horas comienza la puesta en común. El alumno E2, lee el enunciado del problema. La docente pregunta:

D: Cuando ustedes leyeron ¿Qué fue lo primero qué dijeron?

Todos: Que depende de los kilómetros que recorra.

D: ¿Todos coinciden en eso?

Todos: Sí.

D: Claro, porque el problema no dice que los alumnos van a realizar un viaje de tantos kilómetros, dice que quieren hacer un viaje y tienen dos opciones. ¿De qué va a depender que elijan la A o B?

Todos: De los kilómetros.

D: ¿A qué conclusión llegó la mayoría?

A2: Depende de los kilómetros que van a recorrer. Si es un viaje de corta distancia le conviene la compañía B, pero si es de larga distancia le conviene la compañía A.

D: ¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero?

Todos: Sí.

D: ¿Por qué pasa eso?

C4: Porque cuando contratan el colectivo A, para hacer un viaje de larga distancia le va a convenir porque le cobran la mitad de lo que cobra el otro colectivo el recorrido y si hacen uno de corta distancia le va a convenir el B porque le cobran 200 pesos menos y, además, cuando se suma eso, le va a dar un resultado más bajo que lo que le va a dar el A.

D: ¿Entienden lo que dice la compañera? Para un viaje corto conviene la compañía B porque inicialmente el costo fijo es más bajo, aunque los kilómetros sean más caros. ¿Ustedes pudieron probar que eso es efectivamente así?

Todos: Si.

B2: Aproximadamente a partir de los 25 km para abajo le conviene la compañía B y de los 25 para arriba la compañía A.

C4: A nosotros nos dio 100, porque probamos con 95 y nos dio más bajo.

D: Bueno tenemos que ver a partir de qué valor conviene una compañía o la otra. Copiá primero lo que hicieron (Hablándole a la alumna C4 que está en el pizarrón) y ahora vamos a analizar.

Pizarrón (Grupo C)

A: 600. 3,5+1400= 3500

B: 600. 6,5 +1200=5100

Fíjense como hicieron las chicas ¿Alguien más hizo de esa manera?

Varios: Sí.

A continuación, una alumna del grupo G pasa a copiar otro cálculo realizado.

Señalando lo escrito en el pizarrón.

D: 600 por 3,5 más 1400 ¿Es la forma de calcular el precio para la compañía A?

Todos: Sí.

D: Nos cobran 3,5 por cada kilómetro recorrido y un costo fijo de 1400. Entonces el viaje cuesta 3500. El mismo viaje de 600 kilómetros en la compañía B cuesta 5100. Si yo miro esos valores, obviamente ¿Qué compañía elijo?

Todos: La A.

D: Vamos a ver cómo hicieron las compañeras del otro grupo. ¿Con qué valor probaron?

G1: Con diez.

D: Un valor mucho más chico. Si se prueba con 10 kilómetros se hace lo mismo.

Pizarrón (Grupo G)

A: 10. 3,5+1400= 1435

B: 10. 6,5 +1200=1265

D: Si comparamos los precios de un viaje de 10 km en la compañía A y en la compañía B, conviene la compañía B. En base a estos valores seguimos manteniendo lo que dijimos anteriormente, para un viaje largo conviene la compañía A y para un viaje corto conviene la compañía B.

B2: Yo traté de buscar más o menos el centro, lo que sería el punto… no sé cómo explicarle.

D: Ustedes (refiriéndose al grupo C) estaban haciendo lo mismo.

C4: Sí, y encontramos que era 100.

D: Ellos dicen que es 100. ¿Entienden lo que dice el compañero? (Refiriéndose al alumno B2).

C4: Si, buscar el centro para ver desde qué punto te conviene elegir una compañía o la otra.

D: En realidad, cuando ustedes dicen buscar el centro sería buscar qué cosa…

B2: La cantidad de kilómetros.

D: La cantidad de kilómetros o la distancia a partir de la cual te conviene cada compañía.

B2: Yo dije 25 hoy, pero es 44 o 45, por ahí.

D: ¿Estamos de acuerdo que sería importante conocer ese valor? ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: Suponiendo que ese valor fuera 50, por debajo de ese valor convendría la compañía…

Todos: B

D: Y por encima de ese valor…

Todos: La compañía A.

D: Entonces la pregunta es, en vez de estar probando ¿Cómo podría hacer para encontrar exactamente ese valor?

Varios: Una ecuación.

D: Muy buena idea. Pero ahora ¿Cómo armamos la ecuación? Lo primero que tendríamos que hacer, volviendo a lo que ya aprendimos es expresar de forma simbólica cómo se calcula el precio en cada compañía. ¿Cuáles son las variables involucradas en este problema chicos?

A2: Dependiente e independiente.

D: ¿Y cuáles son?

C4: El precio y la cantidad de kilómetros.

D: ¿Están de acuerdo?

Todos: Sí.

D: Vamos a trabajar con las mismas letras de siempre. ¿Quién sería "x" y quien sería "y"?

A2: "x" sería kilómetros e "y" sería el precio. (Mientras la docente escribe en el pizarrón)

D: ¿Por qué "y" es el precio?

Varios: Porque el precio depende de los kilómetros recorridos.

D: Entonces si nosotros llamamos "y" al precio, siempre queremos calcular el precio ¿Cómo calculo el precio en la compañía A sabiendo que los kilómetros se representan con la letra x?

A2: x por 3,5 más 1400.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: A la cantidad de kilómetros del viaje (que puede ser 10 o 600, como pusimos acá), le multiplico por el precio del kilómetro y le sumo el costo fijo que es de 1400. ¿Y cómo sería el pecio correspondiente en la compañía B?

Varios: x por 6,5 más 1200.

D: ¿Sí o no?

Todos: Si.

D: ¿Qué es cada una de estas expresiones que escribimos acá? Una fórmula que me permite calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos en la compañía A y esta (señalando la segunda), el precio a pagar de acuerdo a los kilómetros recorridos en la compañía B.

Para encontrar ese valor que nos interesa a nosotros tenemos que trabajar a partir de estas dos expresiones que tenemos acá. ¿Qué es lo que quiero buscar? Una distancia ¿que cumpla que condición?

B2: Llegar a un precio similar.

D: ¿Similar o igual?

Todos: Igual.

D: Nosotros tenemos que encontrar para qué distancia el precio de la compañía A es igual al precio de la compañía B. Por debajo de ese valor elegiríamos la B y por encima de ese valor, elegiríamos la A.

Si yo estoy diciendo que el precio debe ser igual en las dos compañías y el precio represento por "y", entonces:

Pizarrón

3,5.x+ 1400=6,5.x +1200

D: ¿Se entiende lo que digo acá? El precio de la compañía A debe ser igual al de la compañía B y acá nos quedó planteada una ecuación porque se trata de una igualdad que contiene una incógnita. ¿Se puede resolver?

Todos: Si.

A continuación, los alumnos resuelven la ecuación.

A las 18:00 horas finaliza la clase.

Lunes 08/10/18: No hay clases, cambio de actividad.

Miércoles 10/10/18

Horario: 16:00 a 18:05 horas.

Distribución de los grupos:

	GG	GC
GA	GB	
GE	GD	GF

Ausentes: Ninguno.

La clase comienza a las 16:00 horas y se retoma la ecuación que se había propuesto la clase anterior.

Una alumna pasa el pizarrón y copia la resolución de la misma.

Pizarrón

$$3{,}5x + 1400 = 6{,}5x + 1200$$

$$3{,}5x - 6{,}5x = 1200 - 1400$$

$$-3x = -200$$

$$x = -\frac{200}{-3}$$

$$x = 66{,}6$$

D: ¿Qué significa este valor?

C4: La distancia a partir de la cual conviene una compañía o la otra.

D: ¿Cuál sería nuestra conclusión entonces?

B2: Para un viaje de menos de 66,6 km conviene la compañía B y para un viaje de más de 66,6 km, conviene la compañía A.

D: ¿Estamos de acuerdo?

Todos: Sí.

D: ¿De qué otra forma hubiéramos podido llegar a la misma conclusión? Se acuerdan que a lo largo de todas las actividades que estuvimos realizando trabajamos con tablas de valores, con fórmulas y también con…

Todos: Gráficos.

D: ¿Qué tendríamos que graficar? Por un lado, el gráfico correspondiente al precio de la compañía A y por otro, el precio de la compañía B. Como nos interesa comparar los precios de ambas compañías podríamos trabajar sobre un mismo sistema de ejes cartesianos.

A continuación, la docente muestra en el pizarrón cómo se podría graficar la primera de las funciones y a continuación pide que cada uno de los grupos represente a la segunda.

Luego se completa el gráfico en el pizarrón y se analiza, confirmando la conclusión a la que se había llegado anteriormente.

16: 30 horas comienza la institucionalización.

17:00 horas comienza el trabajo en torno a los ejercicios de refuerzo.

Apéndice C

Registros de clase- EPET N° 50

Total de alumnos: 16

Jueves 06/09/2018

Horario: 12:30 a 13:50 horas

14:35 a 15:15 horas

Distribución de los grupos:

GB GA

Integrantes de los grupos

GH: H1, H2, H3, H4

GI: I1, I2, I3, I4

GJ: J1, J2, J3, J4

GK: K1, K2, K3, K4

D: Docente.

Durante esta clase, solamente trabajan dos de los grupos conformados ya que varios alumnos deben realizar una evaluación que tenían pendiente para el cierre de trimestre.

Hacen la evaluación los alumnos: I2, I4, J2, J3, J4, K2, y K3.

Ausentes: H4, J1, K1, K4.

La profesora explica la metodología de trabajo y luego reparte las consignas.

13: 10 comienza el trabajo grupal en torno a la actividad 1.

La clase está dividida entre quienes hacen las evaluaciones del tema anterior y quienes comienzan el trabajo en relación a la secuencia. La docente recorre los grupos e interviene respondiendo a interrogantes planteados por los alumnos. Además, también responde a interrogantes acerca de los exámenes.

El grupo H avanza más rápidamente que el I. Entienden más rápidamente las consignas y logran escribir las respuestas. El grupo I, avanza muy lentamente, no hay discusión entre los integrantes y la docente tiene que intervenir continuamente para corroborar que los alumnos estén trabajando.

El trabajo grupal se extiende hasta el primer recreo, a las 13:50 horas. Antes de salir, los alumnos que estaban rindiendo, entregan las evaluaciones.

14:35 horas, se retoma la clase de Matemática (ya que de 13:55 a 14:35 los alumnos tienen Historia). Se reparte la consigna del problema a los alumnos que estaban haciendo la evaluación y se destinan veinticinco minutos más para el trabajo grupal. De esta manera, los alumnos que estuvieron haciendo la evaluación pudieron avanzar sobre las consignas de la actividad propuesta.

A las 15:00 horas comienza la puesta en común. Se comenta en qué consiste el juego y cómo van aumentando los ladrillos a medida que aumentan los niveles del mismo.

D: ¿Respondieron a la primera pregunta? ¿Cuántos ladrillos tendrá el muro del nivel cinco?

Todos: Diecinueve ladrillos.

D: ¿Sí? ¿Por qué?

I1: Porque en el nivel cuatro hay quince ladrillos, más cuatro son diecinueve ladrillos.

D: ¿Todos están de acuerdo con eso?

Todos: Sí.

D: Y en el nivel doce ¿Cuántos ladrillos hay?

Todos: Cuarenta y siete.

D: ¿Todos llegaron a cuarenta y siete? ¿Y cómo fueron haciendo?

H2: Multiplicamos once veces el cuatro y luego le sumamos tres.

D: A ver cómo sería eso ¿Querés mostrarnos? (Refiriéndose a la alumna H2).

Un alumno del grupo pasa al pizarrón y escribe: 11. 4 +3=44+3=47. Mientras tanto explica que, no considera al primer nivel por eso hace 11 por 4, a ese resultado le suma 3, que corresponde a los tres ladrillos del primer nivel.

D: ¿Entienden lo que planteó el compañero?

Algunos: No.

D: ¿De dónde salió el once?

En ese momento, el alumno vuelve a explicar que considera once niveles de cuatro ladrillos y solamente al primero de tres. Con ayuda de la docente se explica el procedimiento al grupo clase y se concluye que el nivel doce (y no el once) tiene cuarenta y siete ladrillos, porque sólo el primer nivel tiene tres ladrillos y por cada nuevo nivel se agregan cuatro.

D: ¿Cómo hicieron acá chicos, ustedes?

K3: Sumamos los ladrillos, si en el nivel cuatro tenía quince ladrillos, le sumamos cuatro más y ahí nos dio diecinueve.

D: Fueron sumando, fueron sumando ¿Hasta obtener cuánto?

K3: Cuarenta y siete.

D: En realidad ¿Ustedes sabían que era cuarenta y siete? O ¿Fueron sumando hasta llegar a doce? ¿Cómo hicieron?

Ningún integrante del grupo quiere pasar al pizarrón entonces, la docente explica la importancia de compartir las producciones para favorecer el aprendizaje. "Todos tienen que pasar, no tengan miedo ni vergüenza"

Luego continúa diciendo:

D: Estamos de acuerdo que al nivel doce corresponden cuarenta y siete ladrillos, pero al principio, algunos grupos multiplicaron cuatro por doce. ¿Por qué no es correcto hacer cuatro por doce?

H1: Porque el nivel uno, tiene tres ladrillos.

D: Porque cuatro por doce les da cuarenta y ocho (mientras escribe en el pizarrón: 4.12=48). ¿Pero cuál es el problema?, si yo estoy considerando doce niveles, es lo que ya dijimos, el primero no tiene 4 ladrillos, tiene tres, entonces esta (señalando a 4. 12=48) no es la solución.

D: ¿A qué nivel corresponde la figura que tenga setenta y nueve ladrillos?

A2: Veinte.

D: ¿Todos encontraron el nivel veinte?

Todos: Sí.

D: ¿A ver ustedes chicos qué hicieron? (Se refiere al grupo I, que no quiso pasar al pizarrón).

La docente escribe en el pizarrón el procedimiento utilizado por los alumnos del grupo para responder a los ítems a y b. Una alumna del grupo le dicta los números hallados.

Pizarrón:

4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
15	*19*	*23*	*27*	*31*	*35*	*39*	*43*	*47*	*51*	*55*	*59*	*63*	*67*	*71*	*75*	*79*

D: Ellos hicieron así (señalando al grupo I) y se dieron cuenta que el nivel veinte tiene setenta y nueve ladrillos. ¿Cómo hicieron ustedes? (refiriéndose al grupo H).

H2: Le sumamos ocho veces cuatro al cuarenta y siete.

D: ¿Por qué ocho veces? ¿Cómo llegaron a que era ocho veces? ¿Fueron probando? (Refiriéndose al grupo H)

H2: Sí.

D: Dice la compañera que fue probando. Ella sabía esta relación (Marca en el pizarrón 12 y 47), que en el nivel doce había cuarenta y siete ladrillos, entonces le sumó ocho veces cuatro.

La docente escribe en el pizarrón, con la ayuda de los alumnos, la siguiente operación: 47+ 8. 4, que expresa el cálculo realizado por el grupo. Se resuelve, se analiza el procedimiento y se concluye que es otra forma de resolver.

D: ¿Cómo me doy cuenta en este caso el número de nivel?

H1: Cuarenta y siete ladrillos tenía el nivel doce y si le sumo ocho, nos da veinte.

D: O sea que, coincidimos en que el nivel veinte tiene setenta y nueve ladrillos. ¿Es posible que la cantidad de ladrillos de un muro de este juego sea doscientos cincuenta y cuatro? ¿Por qué?

H2: No.

D: Allá dicen que no, ustedes chicos dicen ¿Sí o no?

K3: No, no da profe. Por 63 da 252 y por 64, 256.

D: A ver, ¿Ustedes dicen que en el nivel sesenta y tres hay doscientos cincuenta y dos ladrillos y en el nivel sesenta y cuatro, doscientos cincuenta y seis? (Mientras escribe en el pizarrón).

Pizarrón:

N°63→252

N°64→256

D: ¿De dónde salieron estos números? (Refiriéndose al grupo K)

H1: sesenta y tres por cuatro es doscientos cincuenta y dos y sesenta y cuatro por cuatro, doscientos cincuenta y seis.

D: Entonces ¿Cómo me doy cuenta que doscientos cincuenta y cuatro no es una cantidad de ladrillos del juego?

K3: Porque si restamos uno, no nos da.

D: Contanos qué relación observaste cuando miraste esto. (Refiriéndose al alumno K3 y señalando los valores correspondientes a niveles y ladrillos escritos en el pizarrón).

K3: Que si multiplicas cuatro por cuatro da dieciséis y menos uno da quince. Cinco por cuatro veinte, menos uno, diecinueve. Seis por cuatro, veinticuatro, menos uno, veintitrés.

D: ¿Se cumple para todos esto?

K3: Sí.

D: ¿Y por qué pasa eso? ¿Por qué si yo multiplico por cuatro al número de nivel y le resto uno, me da la cantidad de ladrillos?

H2: Porque en el primer nivel solo hay tres ladrillos.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

Entonces, la docente retomando esta idea, vuelve a preguntar cuál es la cantidad de ladrillos correspondiente al nivel sesenta y tres y al nivel sesenta y cuatro. Se corrige lo que está escrito en el pizarrón:

Pizarrón:

N°63→252-1= 251 ladrillos

N°64→256-1= 255 ladrillos

D: El doscientos cincuenta y cuatro, no está. Además, ¿No se dieron cuenta de otra cosa chicos? ¿Qué tipo de números son…? (señala las cantidades de ladrillos)

H2: (Antes de que la docente termine la pregunta) Impar.

D: ¿Son impares?

Todos: Sí.

D: ¿Y el número doscientos cincuenta y cuatro cómo es?

Todos: Par.

D: Entonces, también podríamos haber dicho que doscientos cincuenta y cuatro no puede ser una cantidad de ladrillos porque es un número par. ¿Es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá el muro de un nivel cualquiera del juego?

GH: Sí.

Una alumna del grupo comienza a leer un ejemplo, entonces la docente le pide que pase al pizarrón. La alumna escribe:

Pizarrón

100-1=99

99. 4= 396

396+3=399

La alumna, junto con la docente explican al grupo clase el ejemplo realizado. “Si quiero saber la cantidad de ladrillos que tendrá el nivel 100, le resto uno, es decir el primer nivel, me da 99, ahí a eso le multiplico por cuatro porque por cada nuevo nivel se agregan cuatro ladrillos, eso me da 396. A ese número le sumo tres ladrillos del primer nivel y nos da 399. Entonces el nivel 100 tiene 399 ladrillos”

D: Muy bien, esta sería una forma. Pero ¿Cuál sería la otra que acabamos de decir?

H1: Cien por cuatro menos uno.

La docente escribe en el pizarrón: 100. 4-1, se resuelve con la participación de los alumnos y se observa que se llega al mismo resultado.

D: De las dos formas llegamos al mismo resultado. Pero ¿Cuál es la forma más rápida? ¿Más económica?

Todos: La segunda.

Toca la campana y termina la clase.

Viernes 07/09/2018

Horario: 12:30 a 13:50 horas

Distribución de los grupos:

GK	GH
GI	GJ

Ausentes: H4, I4, J3, CJ, K1, K2.

El alumno J1 se encuentra realizando una evaluación que adeudaba para el cierre del trimestre.

Comienza la clase con la puesta en común de los ítems restantes del problema 1. Para ello la docente propone pasar a una tabla, los datos que se tienen en los dibujos. El diálogo comienza de la siguiente manera:

D: Tanto los niveles como los ladrillos son variables ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: Sí, justamente porque van cambiando a lo largo del problema. ¿Quién depende de quién? ¿Los niveles de la cantidad de ladrillos o al revés?

Todos: Los ladrillos dependen de los niveles.

D: Muy bien. Al nivel uno ¿Qué cantidad de ladrillos corresponde?

Todos: Tres.

La docente completa la tabla con el aporte de los alumnos.

Pizarrón:

Niveles	*Cantidad de ladrillos*
1	*3*
2	*7*
3	*11*
4	*15*
5	19

D: Ahora, si nosotros miramos el número de nivel ¿Qué cuenta nos permitía conocer la cantidad de ladrillos?

H2: El nivel por cuatro menos uno.

D: Si yo tomo el número de nivel, lo multiplico por cuatro y le resto uno, nos da la cantidad de ladrillos. ¿Y por qué teníamos que restar uno?

H2: Porque el nivel uno tenía tres ladrillos.

D: Exactamente. Ahora fíjense, nos dimos cuenta de esa relación, pero ¿Cómo se puede expresar esa relación? Se acuerdan que nosotros ya habíamos trabajado con lo que se llama lenguaje simbólico para expresar, por ejemplo, el enunciado de un problema a través de una expresión algebraica que nos permitía resolver.

¿De qué manera nosotros podemos identificar al número del nivel? El número de nivel no es algo que se mantiene fijo y justamente, es variable ¿Con qué letra representamos al nivel?

H2: “x”

D: “x”, muy bien ¿Por qué es la variable…?

Todos: Independiente.

D: ¿Por qué simbolizamos con “x”? Porque al decir “x”, justamente puede ser cualquier número. Al poner una letra, estamos diciendo que “x” puede tomar cualquier valor. Y ¿De qué manera vamos a representar a la cantidad de ladrillos?

Todos: “y”.

D: ¿Por qué con la letra “y”?

I3: Porque es la variable dependiente.

D: Siempre la variable dependiente se representa con la letra "y", ese es un acuerdo que se tiene. Ahora, ¿qué decía la pregunta d?

B3: ¿Es posible saber la cantidad de ladrillos que tendrá el muro de un nivel cualquiera del juego?

D: Entonces, ¿Qué me está pidiendo que calcule? Cantidad de ladrillos. ¿Cómo va a empezar la expresión que voy a utilizar?

La docente escribe en el pizarrón y= mientras dice: la cantidad de ladrillos es igual… Y de este lado (haciendo referencia a la derecha del signo =), tengo que escribir la expresión que me permita calcular la cantidad de ladrillos. ¿Cómo voy a expresar esa relación que ya dijimos antes? ¿Se acuerdan?

Silencio por parte de los alumnos. La docente insiste:

D: Multiplico por cuatro y le resto uno, me dijeron ustedes. ¿Cómo voy a escribir eso, usando el lenguaje simbólico?

I3: x por cuatro menos uno.

D: Sí, comúnmente se escribe primero el número, después por x y ahí, menos uno. (Mientras escribe 4.x -1)

La docente termina explicando que dicha expresión algebraica corresponde a la fórmula que permite calcular la cantidad de ladrillos cualquiera sea la cantidad de niveles.

Se pasa a la última consigna:

I1: ¿Puedes representar gráficamente la situación?

D: ¿Se puede sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Cómo hicieron?

I3: Con los ejes.

La docente pregunta cuántos cuadrantes hicieron, le responden solo el primero, entonces ella traza en el pizarrón los dos ejes y se ubican las variables y una escala adecuada sobre cada uno de ellos. Con la participación de los alumnos se marcan los puntos (1;3), (2;7), (3; 11), (4; 15). Luego continua el diálogo:

D: ¿Cómo salieron todos los puntos?

I2: Iguales.

D: ¿Iguales? ¿A qué se refieren con iguales?

D3: Sobre la misma línea.

D: Muy bien, están alineados. Y ¿que decía la segunda pregunta del ítem d?

I1: ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea de trazo continuo?

D: O sea hacer esto, trazar la línea (Hace ademán de trazar una recta sobre los puntos representados)

Todos: Sí.

D: Por cómo están representados los puntos se podría hacer, porque esa línea pasaría por todos los puntos que están dibujados. En ese sentido uno podría trazar la línea. Pero ¿De qué depende que se pueda o no se pueda? Tiene que ver con el tipo de variable que nosotros estamos trabajando.

La docente explica que, si se traza la recta, al valor 1,5, le correspondería 5, y que esto no tendría sentido ya que los niveles del juego no pueden ser números decimales, sino enteros. Concluye diciendo que, en este caso, la representación gráfica de la situación son los puntos y no la línea que pasa por ellos, la variable es discreta, solo admite valores enteros a diferencia de las variables continuas, como por ejemplo horas, que sí admite valores decimales.

13: 10 comienza el trabajo en torno a la actividad 2.

13: 50 termina la clase. La mayoría de los grupos termina de desarrollar todas las consignas.

Jueves 13/09/18

Horario: 12:30 a 13:50 horas

14:35 a 15:15 horas

Distribución de los grupos:

GK		GH
GI	GJ	

Ausentes: I1, I4, J1, J3, K2.

12: 35 horas, comienza la puesta en común de la actividad 2. Para ello la docente, copia en el pizarrón la tabla del ítem a) y una alumna se ofrece a pasar y completar.

Pizarrón:

Cantidad de nafta que carga	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*	*45*	*50*
Precio a pagar	*$450*	*$600*	*$750*	*$900*	*$1050*	*$1200*	*$1350*	*$1500*

D: ¿Cómo hicieron para calcular los distintos precios?

Silencio de los alumnos.

D: ¿Por qué al quince le corresponde cuatrocientos cincuenta?

H1: Se multiplica el precio de la nafta por los litros que se cargan.

D: ¿Sí o no?

Como los alumnos no están participando, la docente vuelve a recordar el enunciado del problema y nuevamente pregunta:

D: Si se cargan quince litros ¿Cómo sé que tengo que pagar $450?

H2: Multiplicamos el precio de la nafta por la cantidad de litros.

D: Claro. Quince litros por treinta pesos cada uno, nos da $450. ¿Así hicieron con los demás valores de la tabla?

Todos: Sí.

La docente realiza un ejemplo en el pizarrón.

Pizarrón

$$30\frac{\$}{lts}.15\ lts = \$450$$

D: ¿Existe una relación de dependencia entre la cantidad de nafta que carga y el precio a pagar? ¿Cuál?

Todos: Sí.

H2: El precio a pagar depende de la cantidad de nafta.

D: ¿Están de acuerdo con la compañera?

Todos: Sí.

D: Exactamente. ¿Qué pasa si yo cargo más combustible…?

I3: Aumenta el precio.

D: Exacto. De acuerdo a la cantidad de combustible que yo cargue es el precio que voy a tener que pagar finalmente.

La cantidad de nafta que carga y el precio a pagar son variables, ¿Cuál es la variable independiente?

Todos: La cantidad de nafta

D: ¿Y cuál es la variable dependiente?

Todos: El precio.

D: Justamente por lo que dijimos recién, el precio a pagar va a depender de los litros de nafta que se carguen.

En ese momento la docente pregunta cuál será el precio a pagar por 60 litros, se establece que, 30 litros cuestan $900, 60 litros, es decir, el doble, costarán $1800. Lo mismo se hace con 20 litros y 40 litros. “Si se duplica la cantidad de nafta, se duplica el precio”.

D: Si estamos diciendo que la cantidad de nafta que se carga es la variable independiente ¿Con qué letra se representa?

H2: Con “x”.

D: Siempre la variable independiente se representa con “x”. (Mientras escribe x en la tabla). Y el precio a pagar ¿Sería?

Todos: “y”.

D: Teniendo en cuenta esto vamos a responder el ítem d) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el precio a pagar cualquiera sea la cantidad de litros de nafta que se cargue?

H2: Treinta por “x” igual a “y”.

D: ¿Están de acuerdo con la compañera? (Mientras escribe en el pizarrón: 30.x=y). ¿Qué significa esto? ¿Treinta qué era chicos?

I3: El precio de un litro de nafta.

D: Y estoy multiplicando por… x

I3: Porque no se sabe cuántos litros son.

D: Claro porque x puede ser 15 litros, 20 litros, 25… x es una variable, representa la cantidad de nafta que se carga. Si a esa cantidad la multiplico por treinta. Esa multiplicación ¿Qué me devuelve?

I3: El valor de la “y”.

D: ¿O sea?

H2: El precio a pagar.

La docente explica que, comúnmente se escribe y=30. x en vez de 30. x=y.

D: Vamos a pasar a la segunda tablita ¿Les parece? ¿Todos pudieron completar?

Todos: Sí.

D: ¿Y que tuvieron que tener en cuenta?

J2: Descontarle quince litros que ya tenía en el tanque.

D: ¿Qué cambió de la primera tabla a la segunda?

J2: Cantidad de nafta que tenía en el tanque.

H2: Que ya tenía quince litros.

D: ¿Cambió qué variable entonces chicos?

H2: La independiente.

La docente muestra que ambas tablas son casi iguales, pero en la primera se considera la cantidad de nafta que carga y en la segunda, la cantidad de nafta que hay en el tanque. “Se están relacionando otras dos variables, por lo tanto, los resultados van a ser diferentes”.

Mientras la docente explica esto, copia la tabla en el pizarrón y a continuación, completa los cuadritos vacíos con los valores que le van diciendo los alumnos.

Se detiene a analizar en primer lugar por qué a quince litros le corresponde cero. “Si no carga nada, no paga nada”. Luego continúa el diálogo:

D: A ver, ¿Cómo hicieron para calcular el valor que le correspondía a treinta y cinco?

C2: Restándole quince.

D: A este treinta y cinco le descuentan quince y ¿Cuánto queda?

H2: Veinte.

D: Si yo sé que cargó veinte litros ¿Cómo sé que paga $600?

H2: Multiplicando treinta por veinte.

Luego se analiza el cálculo realizado para obtener el valor correspondiente a cincuenta litros.

D: En este caso ¿De qué forma se puede calcular el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de nafta que hay en el tanque? Nuevamente me está pidiendo una fórmula, vamos a llamar "x" a la cantidad de nafta a pagar e "y", al precio a pagar. ¿Cómo empieza la fórmula?

H2: "y"

D: ¿El precio es igual a qué? ¿De qué manera se fue calculando el precio en cada caso?

H2: Hay que multiplicar por treinta.

D: Sí, hay que multiplicar por treinta ¿A quién?

I3: La x.

D: x es la cantidad de nafta en el tanque, pero para saber el precio a pagar ¿cómo se hacía?

Como los alumnos no logran responder, la docente vuelve a plantear el ejemplo de 50 litros, los alumnos le responden que a cincuenta le restan quince, y al resultado que es treinta y cinco le multiplican por treinta. La profesora continúa:

D: Entonces, ¿Cómo se generaliza eso que ustedes me están diciendo? x es la cantidad de nafta que hay en el tanque. A esa cantidad ¿Qué le hago primero?

H2: Le resto quince. (Mientras escribe x-15).

D: Si estos son los litros que hay en el tanque, le resto 15 litros (señala x-15), me da la cantidad de litros que se cargan.

H2: Y le multiplico por treinta.

D: Y a todo esto (señala x-15), le multiplico por 30. ¿Escribo así: x-15. 30? o ¿Tendría que agregarle algo a esa expresión?

H2: Paréntesis.

En ese momento la docente explica la importancia del uso del paréntesis y termina diciendo que la fórmula permite generalizar el cálculo que se había utilizado antes para calcular el precio a pagar.

Se continúa con el ítem g). Como la mayoría plantea que no hizo el gráfico, la docente propone hacer en el pizarrón, dibuja los ejes cartesianos correspondientes al primer cuadrante, se analiza cuál sería la escala conveniente a utilizar sobre cada uno de los ejes y se marcan los puntos (15;0), (20; 150), (25;300) y (30; 450).

Una vez marcados los puntos se analiza que los mismos están alineados y la docente lee la pregunta del ítem g) ¿Tiene sentido unir los puntos con una línea?

Todos: No.

En ese momento, la docente recuerda el problema 1 y por qué no era posible unir los puntos y explica que, en este caso, sí tendría sentido unirlos ya que la variable: cantidad de nafta es una variable continua que admite valores decimales. “Para 17,5 litros el precio a pagar sería $75”

12:55 horas, concluye la puesta en común, haciendo notar que la recta es creciente, es decir que, a medida que aumentan los litros, aumenta el precio a pagar.

Seguidamente se reparte el problema 3 y se presenta un primer inconveniente, los alumnos plantean que no saben qué es la bajada de bandera, entonces la docente, explica dicho concepto y comienza el trabajo en los distintos grupos.

El trabajo grupal se extiende hasta las 13:25 horas.

Seguidamente se da comienzo a la puesta en común, la cual se extiende hasta el recreo: 13:50 horas.

Para comenzar, la docente completa de acuerdo a lo que le indican los alumnos, la tabla con los valores correspondientes a las cuadras recorridas o el precio de distintos viajes.

D: ¿Todos llegaron a esos resultados?

Todos: Sí.

D: Ahora me van a contar cómo hicieron.

I3: Hay que multiplicar por el 2,4, que sería el precio ese y el resultado que sale ahí, sumarle 24.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: A las cuadras recorridas le multiplico por 2,4. ¿Por qué hay que multiplicar por 2,4?

I3: Porque es el precio.

D: ¿El precio de qué?

H2: El precio de una cuadra.

D: ¿Y sumar 24 por qué?

I3: Porque es la bajada de bandera.

D: ¿Cuántas veces nos cobran la bajada de bandera?

K3: Una sola vez.

D: Ese procedimiento ¿En qué casos se aplica?

H2: Siete, quince y veintinueve.

D: ¿Por qué? Porque se conocen las cuadras recorridas. ¿Cómo hicieron en cada uno de los casos?

Se repasan las operaciones hechas en cada caso. La docente continúa preguntando:

D: Ahora, ¿Qué se hace cuando es al revés? Cuando les da como dato el precio y ustedes tienen que averiguar las cuadras.

I3: Hay que ir sumando, sumando.

D: ¿Cómo?

H2: 48 menos 24 dividido 2,4.

D: A ver… (mientras escribe en el pizarrón: 48-24: 2,4) y ¿Qué se resuelve primero?

H2: La resta.

D: Si ustedes quieren resolver esto y lo escriben en la calculadora, la calculadora ¿Va a resolver primero la resta?

Todos: No.

D: ¿Por qué? Porque la calculadora ¿Dónde separa en términos?

H1: En el menos.

D: Si yo escribo esto en la calculadora la calculadora primero va a dividir 24 dividido 2,4 y luego va a restar 48 menos ese resultado. Para que eso quede escrito de acuerdo a lo que dijo la compañera, que primero hay que resolver la resta ¿Qué tendría que agregar a esa expresión?

H2: Paréntesis.

D: ¿Paréntesis en dónde?

H2: cuarenta y ocho menos veinticuatro.

A continuación, se resuelve el cálculo.

Pizarrón:

$$(48-24): 2{,}4 =$$

$$24: 2{,}4 = 10$$

D: Entonces podemos decir que si el viaje costó $48, se recorrieron 10 cuadras. ¿Cuántas cuadras se recorren con $85?

K3: Veinticinco.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Y cuántas cuadras se recorren con 110,4?

Todos: Treinta y seis.

D: ¿Cómo hicieron en todos los casos? Si conocen la plata, por ejemplo, en el ítem b) ¿Cómo se hace la cuenta para saber cuántas cuadras se pueden recorrer con $600?

H2: Restando.

D: Al seiscientos ¿Qué se le resta?

H2: Veinticuatro.

D: Y al resultado de restar seiscientos menos veinticuatro ¿Qué se le hace? (Mientras escribe en el pizarrón: 600-24)

J2: Se divide.

D: Se le divide por 2,4. Y ahí, ¿Cuánto se obtiene?

Todos: Doscientos cuarenta.

D: ¿Doscientos cuarenta qué?

H1: Cuadras.

La docente insiste en la necesidad de prestar atención y lee la consigna c) ¿Es posible escribir una fórmula que permita conocer el precio cualquiera sea la cantidad de cuadras recorridas?

H2: Sí.

D: Cuando el ejercicio les pide una fórmula, ¿Qué van a usar en la fórmula siempre?

Todos: la “y” y la “x”.

D: Y hay que definir quién es “x”, y quién es “y”. ¿Cuál es la variable independiente?

K3: Cuadras.

D: Las cuadras recorridas (mientras escribe esto en el pizarrón). ¿Y quién es “y”?

H2: Precio.

D: El precio a pagar va a depender de las cuadras recorridas. La consigna dice bien clarito: escribir una fórmula que permita conocer el precio… Entonces ¿Cómo empieza la fórmula chicos?

H2: y igual a x por 2,4 más 24.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: La fórmula permite calcular el precio (y) de acuerdo a esta cuenta (señalando a y=x. 2,4 +24). A la cantidad de cuadras representadas por x, le multiplico por 2,4 que es el precio de una cuadra y a esa cantidad le sumo 24, que corresponde a la bajada de bandera.

¿Qué nos muestra una fórmula? Justamente, la relación que hay entre las dos variables, cómo, en este caso, los valores del precio se obtienen a medida que cambian las cuadras recorridas.

D: En la consigna d) ¿Qué gráfico representa a la situación?

Todos: El c.

D: ¿Por qué es el c? (Mientras realiza este dibujo en el pizarrón)

A continuación, se analiza la ubicación de las variables sobre los ejes y el comportamiento de la gráfica: a medida que aumentan las cuadras, aumenta el precio. La docente pregunta:

D: ¿Por qué eligieron el gráfico c) y no el a)?

K3: Porque el a) empieza desde cero.

D: El a) empieza desde cero. Y en este caso, el precio a pagar ¿Desde qué valor empieza a calcularse?

K3: 40,8.

A raíz de esta respuesta la docente explica que el gráfico representa a toda la situación y no solo los valores de la tabla, por lo tanto, se debe considerar el precio correspondiente a cero, uno, dos… cuadras. El precio va aumentando a partir del valor fijo veinticuatro.

D: Y el gráfico b) ¿Por qué no sería?

H1: El precio baja.

D: Claro, a medida que aumentan las cuadras, el precio va disminuyendo. ¿Esa es la relación que se observa?

Todos: No.

Concluye la puesta en común y los alumnos salen al recreo.

Tercera hora:

14:35 a 15:00 horas tiene lugar el trabajo grupal en torno al problema 4.

El primer inconveniente que se registra es que los alumnos, no recuerdan cómo se calcula el área de un rectángulo. Es necesaria la intervención docente para recordar la fórmula que permite hacerlo y establecer cómo debe considerarse la medida de la base del rectángulo.

La docente agiliza el trabajo grupal y comienza la puesta en común antes de que finalice la clase, ya que no tendrá clases al día siguiente y la próxima semana debido a:

Viernes 14/09/18: Asueto municipal: 85° Aniversario de la fundación de Cerro Azul

Jueves 20/09/18: Actividades por la Semana del Estudiante.

Viernes 21/09/18: Asueto: Día del estudiante.

A las 15:00 horas comienza la puesta en común. La docente pregunta en primer lugar, ¿Cuál fue la fórmula elegida para calcular el área?

Todos los alumnos responden que fue la última.

D: ¿Se podría trabajar un poquito con esta expresión? (Señalando a (5+x). 2) ¿Qué se podía hacer en una expresión como esta, si tenemos un paréntesis multiplicado por un número?

H2: Distributiva.

D: Si se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, ese dos multiplica a cada uno de los términos. Entonces ¿Cómo quedaría?

La docente aplica la propiedad y escribe en el pizarrón: A=10+2x. Se establece con los alumnos que también la fórmula tres (que aparece en el enunciado del problema), permite hallar el área del rectángulo ampliado a medida que se varía x, porque es equivalente a la primera que habían seleccionado, debido a la propiedad conmutativa de la suma y el producto.

D: Fíjense, acá ya nos da la fórmula ¿Cuál es la variable independiente?

H2: El 2.

D: No, nunca la variable es un número.

H2: Ah… la “x”.

D: ¿Y qué representa la “x”, en este problema?

H2: Lo largo.

D: Lo que se alarga el rectángulo original. La medida de este segmento que alarga la base del rectángulo. Cuando yo modifique la medida de “x”, ¿qué va a cambiar en consecuencia?

H2: El largo.

D: Obviamente cambia el largo, pero como cambia la longitud de la base, ¿Qué se modifica?

Los alumnos no saben que responder, la docente insiste preguntando, ¿De qué habla el problema? Hasta que un alumno, dice área.

D: Si yo alargo mi rectángulo, ¿Qué va a pasar con el área del rectángulo?

H2: Se alarga.

D: ¿Se alarga? Aumenta. A medida que se modifica la medida de “x”, va a modificarse el área del rectángulo. Eso es lo que me muestra la fórmula: “x” es lo que se alarga la base del rectángulo, a medida que se modifica el valor de “x”, también se modifica en consecuencia el área del rectángulo. ¿Es posible que el área de este rectángulo sea de 9 cm^2? ¿Por qué?

Todos: No.

D: ¿Por qué no?

H2: Porque el rectángulo original ya tiene una superficie mayor a $9cm^2$.

D: ¿Están de acuerdo? ¿Cuál es la superficie del rectángulo pintado? (Señala al pizarrón)

H3: 10 cm^2.

D: ¿Por qué? ¿Cómo se calcula la superficie?

H3: Cinco por dos.

D: Cinco centímetros por dos centímetros son diez centímetros cuadrados. Si yo alargo el rectángulo, se supone que la superficie tiene que ser mayor. Entonces, ¿El área podría ser de 28 cm^2?

H2: Sí.

D: Y ¿Cómo se puede saber la medida que tiene que tomar x, para que el área sea de $28cm^2$?

A2: Catorce por dos.

D: ¿Están de acuerdo con la compañera?

Todos: Sí.

D: Como dos se mantiene fijo, dice ella que toda la base tiene que medir 14cm. ¿Y cuánto tiene que medir x?

H1: Nueve.

D: ¿Por qué?

H2: Porque ya hay cinco.

D: ¿Y de qué otra manera se podría hacer? A ver (refiriéndose a la alumna J4) ¿Vos cómo hiciste? ¿Qué planteaste?

La alumna durante el trabajo grupal, intenta plantear una ecuación, pero no lo hace correctamente, entonces la docente le explica que puede igualar (5+x). 2 a 28 y despejar x.

J4: Una ecuación.

D: Eso mismo que hicieron los chicos se resuelve con una ecuación porque acá ya está dada la fórmula, me está diciendo que el área es igual a cinco más x, todo eso por dos (mientras escribe (5+x). 2). Y qué me está preguntando el ejercicio, ¿Puede que el área sea de 28 cm^2? Ese 28, ¿Corresponde a un valor de x o un valor de A?

H2: de A.

D: Si yo hago, cinco más la medida que tome x, todo multiplicado por dos tiene que ser igual a 28. Esa fórmula que teníamos ahí, al tomar un valor determinado ¿En qué se convierte?

J4: Una ecuación.

D: Sí, porque pasamos a tener una igualdad que contiene una incógnita. ¿Cómo se puede hacer para hallar el valor de x?

Se resuelve la ecuación en el pizarrón.

D: Se dan cuenta que es lo mismo que hicieron los chicos, sólo que ellos lo hicieron mentalmente. Pero entonces, si yo ya conozco la fórmula, lo que hago es cambiar A por el valor que me da el ejercicio y despejar x. ¿Se puede hacer lo mismo con 29 y 29, 5?

H2: Con veintinueve sí.

D: ¿El área puede ser un número con coma chicos?

Todos: Sí.

D: Entonces completen esa parte.

Algunos alumnos llegan a plantear las ecuaciones en sus carpetas, otros no. Termina la clase.

Jueves 27/09/18

Horario: 12:30 a 13:50 horas

14:35 a 15:15 horas

Distribución de los grupos:

GK	GH
GJ	GI

Ausentes: I2, J4, K3.

A las 12:50 horas comienza el trabajo en torno a la actividad 5. Después de que cada grupo lee la consigna, muchos plantean que no entienden. La docente propone analizar el enunciado del problema con el grupo clase, se identifican las variables y luego los alumnos continúan el trabajo por sí solos.

Se evidencia que los alumnos no saben trabajar en grupos, porque esperan que uno del grupo redacte por sí solo una respuesta y después los demás copian. La docente realiza intervenciones para alentar el trabajo grupal y marcar aquellas actitudes que no favorecen el trabajo cooperativo.

13:40 horas, comienza la puesta en común.

Como ya se había leído y analizado el enunciado al inicio del trabajo grupal, la puesta en común comienza directamente con la pregunta:

D: ¿Qué fórmula eligieron?

Todos: La tercera. (La docente escribe en el pizarrón y=5000x+20000)

D: ¿Por qué eligieron esta fórmula chicos? ¿Y no las otras que estaban ahí?

I3: Porque era esa la que representaba.

D: Pero ¿Cómo se dieron cuenta?

I3: Porque ya tenía los cinco mil litros.

D: ¿Tenía cinco mil litros?

Todos: No, veinte mil litros.

D: Ah, veinte mil litros. ¿Y por qué no eligieron la que estaba al lado?

K2: Porque ahí le restaba.

D: En la fórmula dos, se están restando cinco mil litros de agua por hora. Acá me está mostrando con esta suma (señala la fórmula escrita en el pizarrón) que la pileta ya tiene veinte mil litros y se van agregando cinco mil litros de agua por hora, porque acá dice cinco por x, aunque no se escriba se entiende que se está multiplicando cinco mil por x o sea por hora. Por cada hora que pasa cinco mil litros de agua arroja la bomba. Hasta ahí ¿Todos de acuerdo?

Todos: Sí.

D: En la b): Utilizando la fórmula elegida ¿Es posible saber cuánta agua habrá en la pileta después de dos horas y media de volver a encender la bomba?

H2: Doce mil quinientos.

D: ¿Doce mil quinientos?

GJ: Treinta y dos mil quinientos.

D: Treinta y dos mil quinientos dice este grupo ¿Por qué?

K2: Porque ya tenía veinte mil litros.

D: Ah… ¿Y cómo hicieron para sacar ese treinta y dos mil quinientos?

J3: Le agregamos cinco mil litros por hora y dos mil quinientos más, por la media hora.

La docente retoma este planteo lo vuelve a explicar y continúa diciendo:

D: ¿Todos hicieron así?

Algunos alumnos contestan que no, y comentan que ellos se olvidaron de sumar los veinte mil litros de agua que ya tenía la pileta. Se aclara el error y se continúa con la puesta en común.

D: Pero la consigna decía bien clarito: Utilizando la fórmula elegida… Todos hicieron un cálculo mental que no está mal, está perfecto, pero ¿Cómo voy a hacer para usar la fórmula y calcular la cantidad de agua que habrá en la pileta pasadas dos horas y media?

H2: Una ecuación.

D: Muy bien, hay que plantear un cálculo, una ecuación. ¿Qué es lo que quiero conocer? ¿La cantidad de litros o la cantidad de horas?

Todos: Litros.

D: Quiero saber la cantidad de litros, entonces, la pregunta es ¿Cuál es mi incógnita? ¿"x" o "y"?

Todos: "y".

D: "y" porque, "y" eran los litros. Quiero conocer la cantidad de agua correspondiente a… ¿Cuántas horas?

Todos: Dos horas y media.

D: ¿Cómo se escribe eso en número decimal?

H1: 2,5.

D: Entonces, ¿Dónde deberíamos ubicar a ese 2,5 en la fórmula?

J2: En la "x".

D: En el lugar de la "x", si yo escribo 5.000 por 2,5 más 20.000 (Mientras escribe 5000.x+20000) y resuelvo eso, esta cuenta me tendría que dar la cantidad de agua que hay en la pileta pasadas las dos horas y media. ¿Se entiende? Porque la fórmula representa la situación. ¿Cómo se resuelve eso?

J4: Se multiplica primero.

D: ¿Y cuánto da la multiplicación?

H2: Doce mil quinientos.

D: La pregunta es: Sumar cinco mil más cinco mil más dos mil quinientos, como ustedes hicieron ¿No es lo mismo que hacer 5000 por 2,5?

Todos: Sí.

La docente explica que multiplicar cinco mil por la cantidad de horas que estuvo encendida la bomba permite hallar la cantidad de agua arrojada en ese tiempo.

D: Y ahí como habían hecho mentalmente había que sumar veinte mil ¿Entonces cuál era el resultado?

Todos: Treinta y dos mil quinientos.

Pizarrón:

y=5000. 2,5 +20.000

y=12.500+20.000

y=32.500

D: Este (señalando al 32.500) es el valor correspondiente a “y”. De esa forma se hace uso de la fórmula. Por algo yo ya les di a elegir cuál era la fórmula. Está muy bien el cálculo mental porque pudieron resolver la consigna de todas maneras, pero es importante que también entiendan que, si yo ya conozco la fórmula esa “x” que representa las horas puede tomar el valor 2,5, se puede hacer el cálculo y lo que me va a devolver la cuenta es el valor correspondiente a los litros en ese tiempo. ¿Se entiende?

Entonces si pasamos al ítem c) ¿Qué pedía? Fíjense el detalle… Continuando el trabajo a partir de la fórmula. Ustedes ¿Lograron responder la pregunta? ¿Qué decía? ¿Es posible saber el tiempo que debe estar encendida la bomba hasta llenar la pileta?

Algunos: Doce.

Otros: Dieciséis.

D: ¿Doce o dieciséis?

J2: Si tenía veinte, doce. Si tenía cero, dieciséis.

D: ¿Y tenía veinte o no tenía?

Todos: Tenía.

D: Ah… la pileta ya tenía veinte mil litros, entonces ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para llenar la pileta?

Todos: Doce.

D: Doce horas para completar ¿Cuántos litros?

Todos: Ochenta mil.

D: Bueno, todos llegaron a esa conclusión y está perfecta, pero… ¿Cómo se puede llegar a ese mismo resultado haciendo uso de la fórmula? La fórmula, ¿Se acuerdan que era esta? (mientras escribe y=5.000x+20.000). En ese caso, la pregunta c) ¿qué me está pidiendo que calcule?

H2: Horas.

D: Me está pidiendo que yo llene la pileta, entonces ¿Qué es lo que conozco? ¿El valor de “x” o el valor de “y”?

Todos: “y”

D: Esa “y” ¿Qué valor tiene si la pileta está llena?

Todos: Ochenta mil.

D: Y acá es donde se formula una ecuación, porque yo estoy diciendo, 5.000 litros por hora, pero todavía no sé cuántas horas, más los 20.000 tendrá que ser igual a 80.000. ¿Ustedes saben resolver esa ecuación?

Todos: Sí.

La docente resuelve la ecuación en el pizarrón siguiendo las indicaciones de los alumnos y se halla x=12.

D: Esto que está escrito acá, ¿No es lo mismo que pensaron mentalmente?

Todos: Sí.

D: Ustedes dijeron, la pileta ya tiene 20.000, tengo que restar esos 20.000 a los 80.000 y son 60.000, dividido los 5.000 que arroja por cada hora, nos da 12.

Toca la campana, los alumnos salen al recreo.

14:35 horas se continúa con la clase y la docente retoma la puesta en común del ejercicio 5) a partir de la consigna d.

D: ¿Qué representa cada una de las tres fórmulas que no señalaste? Tené en cuenta que, para vaciar la pileta, la extracción del agua también se hace por medio de la bomba. Yo voy a escribir cada una y ustedes me van a decir que representan.

La docente escribe en el pizarrón

y=80.000-5.000x   *y=-5.000x+20.000*   *y=5000x+60.000*

D: ¿Qué situación representa la primera fórmula?

J3: La extracción del agua.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Cuánta agua tiene la pileta en el momento inicial?

Todos: Ochenta mil litros.

D: Tiene ochenta mil litros, por algo ya aparece este número acá. ¿Y cómo me doy cuenta que se está extrayendo el agua?

I3: Por el menos.

D: Porque le estamos restando ¿Qué cantidad?

K2: Cinco mil litros de agua.

D: Cinco mil litros de agua por hora, no es que resto sólo cinco mil, si digo resto cinco mil se entiende que se resta una sola vez, no, resto cinco mil litros por cada hora que pasa. ¿Qué representa la segunda?

J3: Lo mismo.

D: Lo mismo dice el compañero, pero ¿Con qué diferencia?

H1: La pileta tiene veinte mil litros.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Y cómo se dan cuenta que es una extracción?

H2: Porque tiene un menos.

D: Sí, porque acá dice menos cinco mil (Señalando a -5.000). Podría haber estado escrito 20.000-5000x porque podemos cambiar el orden de los sumandos. ¿Y la última?

H2: Aumenta.

D: Aumenta ¿Desde qué cantidad?

Todos: Sesenta mil.

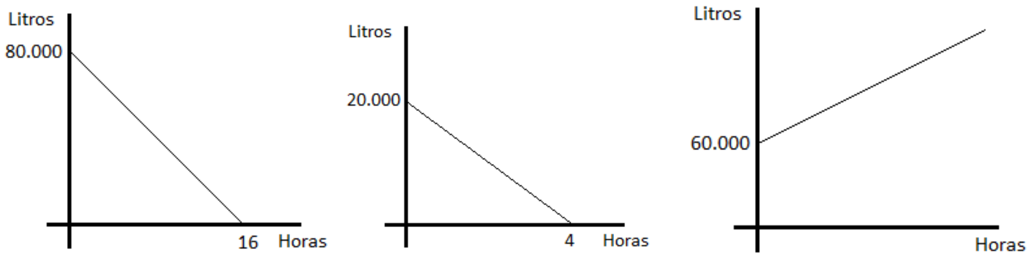
D: La pileta tiene sesenta mil litros y la bomba arroja…

Todos: Cinco mil litros por hora.

D: Y ahora los gráficos. ¿Quién pasa al pizarrón a hacer?

El alumno J1 pasa al pizarrón y realiza los gráficos correspondientes a cada una de las tres fórmulas analizadas anteriormente.

Pizarrón:



D: Mientras el compañero va dibujando ¿Cómo vamos a representar gráficamente la situación? ¿Qué vamos a dibujar primero?

H2: Los ejes cartesianos.

D: Bien. ¿Y cómo vamos a ubicar las variables sobre los ejes?

H1: Horas, horizontal; Litros, vertical.

D: Si, porque los litros dependen de las horas. Una forma de hacer, es como hizo el compañero, sólo los esquemas, obviamente con regla. No son gráficos exactos, son gráficos como planteaba el ejercicio 3 ¿Se acuerdan? Podemos hacer esto, justamente porque hay una variación uniforme. ¿Cuál es la variación uniforme? Por cada hora que pasa cinco mil litros que se vacían o se cargan en la pileta. ¿Qué tipo de gráfico se obtiene en todos los casos chicos?

H2: Una línea recta.

D: En todos los casos se obtiene una línea recta. Ahora vamos a analizar lo que hizo el compañero.

Se analizan todos los gráficos que están en el pizarrón, el tipo de recta (creciente o decreciente), el valor correspondiente a x=0 (intersección de la recta con el eje y) y la intersección de la recta con el eje x.

Por último, la docente se refiere a la variación uniforme ejemplificando a través de los gráficos el hecho de que por cada hora que pasa, se agregan (o se extraen) cinco mil litros de agua.

14:55 horas se hace entrega de la consigna 6.

Se realiza una introducción de la misma, analizando el gráfico con el grupo clase. Los alumnos continúan el trabajo grupal hasta las 15:15, cuando termina la hora. Todos los grupos concluyen la actividad, así que se acuerda comenzar la clase siguiente con la puesta en común de mencionada actividad.

Viernes 28/09/2018

Horario: 12:30 a 13:50 horas

Distribución de los grupos:

GK		GH
GI	GJ	

Ausentes: I2, J1.

12:35 horas comienza la clase con la puesta en común de la consigna 6.

D: En el ítem a), elabora una fórmula que represente la cantidad de agua que queda en el tanque a medida que se desagota en función del tiempo. ¿Lograron armar esa fórmula?

Todos: Sí.

D: ¿Cuál es? ¿Quién me dice?

J4: "y" es igual a diez menos un medio por "x". (Mientras la docente escribe en el pizarrón y=10-1/2x)

D: ¿Todos lograron esa fórmula?

Todos: Sí.

D: ¿Qué significaba en ese caso la "x" y la "y"? ¿"x" qué representaba en este problema chicos?

J2: Horas.

D: "x" era el tiempo medido en horas, mientras que "y" era….

J4: Los litros.

D: Los litros de agua que quedan en el tanque. Siempre las variables se identifican al leer la consigna porque decía: "Elabora una fórmula que represente la cantidad de agua que queda en el tanque a medida que se desagota en función del tiempo." Entonces ¿Qué significa cada una de las partes de la fórmula? Si yo digo y=, estoy diciendo que los litros de agua en el tanque son iguales a esta cuenta, este cálculo (Señala 10-1/2x) ¿Sí? ¿Qué era 10?

K2: La cantidad de agua que tenía el tanque.

D: Sí. ¿Y qué era un medio?

J3: Lo que perdía el tanque.

D: Lo que se sacaba del tanque por hora. Y por eso necesitábamos escribir el menos ¿Se acuerdan? Le resto medio litro por hora.

La docente da lectura a la consigna b).

D: ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo?

Algunos: En el eje x.

Otros: En el eje y.

D: A ver si yo tengo el gráfico. (La docente lo dibuja en el pizarrón). Vuelvo a leer la pregunta: ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse por completo?

Todos: En el eje x.

D: En el eje x, en el eje horizontal, porque me habla de tiempo. ¿Cuánto tiempo le lleva al tanque desagotarse?

H1: Veinte horas.

D: ¿Por qué yo sé que el valor es veinte y no dieciséis, por ejemplo?

J3: Porque a veinte le corresponde cero.

D: ¿Escucharon lo que dijo el compañero? A veinte le corresponde cero. El valor correspondiente a veinte horas es cero litros, por eso yo me doy cuenta que el tanque se desagota en veinte horas. Por ejemplo, si yo les pregunto, a las doce horas ¿Qué cantidad de agua hay en el tanque? ¿Qué me hubieran respondido?

H2: Cuatro.

D: ¿Están de acuerdo con la compañera?

Todos: Sí.

D: ¿Es posible leer esta misma información en la fórmula?

Varios: Sí.

D: Ustedes mirando la fórmula, ¿Pueden saber que el tanque se desagota en veinte horas?

Varios: Sí.

D: Si ¿por qué?

J2: Porque pierde un litro cada dos horas, medio litro cada hora.

D: Sí, pero por eso les digo, sólo con mirar la fórmula, ¿Ustedes saben que el tanque se desagota en veinte horas? ¿Aparece explícito el veinte ahí?

Todos: No.

D: Si uno hace el cálculo puede llegar a ese resultado, pero mirando nada más, no. ¿Cómo se tendría que hacer el cálculo…?

H1: Una ecuación.

D: Yo quiero calcular la cantidad de tiempo que le lleva al tanque desagotarse.

H1: “x” es veinte.

D: Claro, “x” es veinte, está bien lo que dice la compañera, pero en realidad si yo quiero calcular ese veinte, ¿Qué es lo que tengo que hacer? ¿Cómo va a quedar planteada la ecuación? Si el tanque ya está desagotado, ¿Qué es lo que tengo que reemplazar?

H1: Cero.

D: ¿Quién es cero? ¿”x” o “y”?

H1: “y”.

D: ¿Qué dicen los demás? Si el tanque está vacío “y” es igual a cero ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Entonces qué vamos a decir? Que diez menos un medio “x” es igual a cero. (Mientras escribe 10-1/2x=0). Yo quiero saber qué valor tiene que tomar “x” para que los litros sean cero. Al escribir cero yo puedo despejar el valor de “x” y… ¿Cuál debería ser el resultado?

Todos: Veinte.

D: Porque a cero litros, corresponden veinte horas. ¿Cómo se resuelve la ecuación?

La docente resuelve la ecuación siguiendo las instrucciones de los alumnos y halla que x=20.

D: Entonces, cuando “y” es igual a cero, el valor correspondiente a “x” es 20. Con la fórmula, al reemplazar “y” por cero, obtenemos la información que nos brinda el gráfico, pero tenemos que hacer esa ecuación, no es que podemos decir solo mirando cual es el resultado. Fíjense ¿Qué es lo importante de esto? Que hay información que aparece explícita en el gráfico: si yo miro el gráfico es fácil darse cuenta que tienen que pasar veinte horas para que se desagote el tanque. Mirando la fórmula no, hay que hacer la ecuación. ¿Ven la diferencia? Cada una de las representaciones aporta un tipo de información.

¿Y la última? ¿En qué parte del gráfico puede leerse la cantidad inicial que hay en el tanque?

Todos: En el eje y.

D: ¿Por qué? Porque en el eje vertical están representados los litros. ¿Qué cantidad de agua tenía inicialmente el tanque?

Todos: Diez litros.

D: ¿Por qué? Porque al momento cero, corresponden diez litros. Cuando dice momento inicial, se refiere a la hora cero, es decir, antes de que se comience a vaciar el tanque. Esta información ¿Se puede ver en la fórmula?

H1: Sí.

D: Si yo miro la fórmula ¿Puedo ver la cantidad inicial?

Todos: Sí.

La docente cierra la puesta en común explicando que si x=0 el término 1/2x de la fórmula se anula, por lo tanto y=10.

12: 50 Concluye la puesta en común.

12:55 comienza el trabajo en torno al problema 7. En un primer momento, la docente tiene que intervenir para guiar el trabajo haciéndoles notar a los alumnos la presencia de la fórmula correspondiente al gráfico de la función.

En varias oportunidades la docente se acercó a los grupos, para aclarar dudas, alentar el trabajo grupal y hacer recomendaciones.

13: 25 horas, comienza la puesta en común.

La docente comienza leyendo la primera pregunta: ¿Se puede averiguar el monto a pagar correspondiente a un consumo de 200 kWh mirando el gráfico?

Todos: Sí.

D: ¿Y cuál es el valor correspondiente?

Todos: Cien.

D: ¿Y usando la fórmula?

Todos: Si, se puede.

D: ¿Quién pasa al pizarrón a mostrar cómo hizo?

I3: Yo.

D: Pasá. (La docente le entrega una tiza). Mientras la compañera copia, nosotros seguimos hablando. ¿Pudieron averiguar el monto correspondiente a un consumo de 900 Kwh?

Todos: Sí.

D: ¿Mirando el gráfico o usando la fórmula?

Todos: Usando la fórmula.

D: Usando la fórmula ¿Por qué?

J3: Si uno mira el gráfico, no es exacto el valor.

D: Exacto. Si miramos el gráfico, podríamos estimar el valor correspondiente pero no se sabe exactamente cuál es. Entonces, en ese caso, uso la fórmula.

La docente volviéndose al pizarrón, pregunta:

D: ¿Todos hicieron así?

Pizarrón

$M(x) = 0{,}4.x + 20$

$M(200) = 0{,}4.200 + 20$

$M(200) = 80 + 20$

$M(200) = 100$

D: Miren acá, la compañera copió la fórmula. Para un consumo de 200 kWh ¿Qué hizo? En vez de "x", escribió 200 ¿Por qué? Porque "x" deja de ser "x" y toma un valor particular. Entonces, yo quiero calcular el monto correspondiente a un consumo de 200 kWh, cambio a "x" por 200, multiplico, sumo. ¿A todos les dio cien?

Todos: Sí.

D: Y para novecientos ¿Cómo tendrían que hacer?

H2: Lo mismo.

D: Lo mismo, en vez de doscientos sería novecientos. ¿Y cuánto pagan en ese caso?

H2: Trescientos ochenta.

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: En el ítem b) se pide: Estimá, mirando el gráfico, cuál es el monto a pagar si el consumo es de 1.100 kWh.

Todos: Cuatrocientos sesenta.

D: ¿Ese es el valor exacto o estimado?

Varios: Exacto.

D: ¿Cuándo miraron el gráfico, qué valor estimaron?

Todos: Cuatrocientos sesenta.

D: Y usando la fórmula ¿Pudieron verificar esa estimación?

Todos: Sí.

D: ¿Cómo hicieron?

J4: Lo mismo, en vez de doscientos, escribimos mil cien y calculamos.

D: ¿Todos hicieron así?

Todos: Sí.

D: ¿Y ahora qué pasa en la c)? Si una familia debe pagar $300 ¿Cuántos kWh ha consumido?

Todos: Setecientos.

D: ¿Por qué?

H1: Miramos el gráfico.

En ese momento se explica que primero se ubica el valor 300 sobre el eje vertical y luego el valor correspondiente, que es 700 kWh.

D: ¿Y qué pasó cuando tuvieron que calcular los kWh correspondientes a $550? ¿Pudieron hacer de la misma forma?

K2: No, porque no era exacto.

D: ¿Entonces cómo se hace? ¿Quién pasa al pizarrón?

I3: Yo.

D: Fíjense, en este caso ¿Vamos a trabajar de la misma forma que en los casos anteriores, chicos?

Todos: No.

D: ¿Por qué cambia la forma de trabajar?

J3: Porque no hay que buscar el precio.

D: Exacto, hay que calcular los kWh correspondientes a un precio dado. ¿Qué es lo que quedó planteado ahí que la compañera está resolviendo?

H2: Una ecuación.

D: En la pregunta, cuando nos dan como dato el $550, el 550 ¿Corresponde al valor de x o de M?

Todos: De M.

D: El monto es quinientos cincuenta, por eso lo ponemos a la derecha (Señala la ecuación escrita en el pizarrón) y lo que queda planteado fíjense, esa fórmula al tomar M un valor particular, se convierte en una ecuación. Si yo despejo el valor de x en esa ecuación, encuentro que x es mil trescientos veinticinco ¿Qué significa ese valor?

H1: Los kWh.

D: Los kWh correspondientes a $550. ¿Se entiende?

Fíjense que para cada kWh corresponde un precio y viceversa. A cada precio corresponde una cantidad de kWh. ¿Y cómo es la relación? A medida que aumentan los kWh ¿Qué pasa con el precio?

H2: Aumenta.

D: ¿Se ve eso en el gráfico?

Todos: Sí.

D: ¿Cómo es la línea?

Todos: Creciente.

D: A medida que aumentan los kWk, aumenta el precio. ¿Y en la última? Si una familia no consumió energía durante todo el mes porque estuvieron de viaje ¿Tienen que pagar algo?

Todos: Sí.

D: ¿Cómo se dieron cuenta que tienen que pagar, primeramente?

I4: Porque no empezaba desde cero.

D: ¿Qué no empezaba desde cero?

Todos: El gráfico.

D: Si ustedes miraban el gráfico, podían observar que a cero kWh corresponde un precio distinto de cero, porque la recta no pasa por el origen de coordenadas. ¿Y cuál es ese precio?

Todos: Veinte.

D: ¿Cómo se dan cuenta que es veinte?

H2: Por la fórmula.

D: Haciendo esto (señala lo escrito en el pizarrón). En vez de escribir 200, ¿Qué pondrían?

H2: Veinte.

D: ¿Veinte? ¿Cómo van a usar la fórmula para calcular el precio a pagar si no se consumió energía?

H1: Cero.

D: Cero claro. Ustedes quieren calcular el monto correspondiente a cero kWh entonces hacen: (mientras escribe) 0,4 por cero más veinte. ¿Y cuánto les da esto?

H1: Cero más veinte.

D: Y eso ¿Vuelve a dar?

Todos: Veinte.

D: Si no se consume energía, igual se tiene que pagar veinte pesos por mes. ¿Y qué representaría ese $20?

Silencio

D: Sería un costo fijo, por ejemplo, el costo del servicio. ¿Se acuerdan el problema del taxi? Por más que yo no viaje ninguna cuadra el costo del servicio era $24, que era el valor correspondiente a cero cuadras. Acá también, ¿Y eso se ve en la fórmula? ¿Aparece ese $20 fijo ahí?

Todos: Sí.

D: Acá aparece el 20. Y este término ¿Qué me estaría indicando entonces? (Se refiere a 0,4x) Que me cobran 0,4 pesos ¿Por quién?

H2: kWh

D: 0,4 pesos por cada kWh y además se agrega 20 pesos fijos por el costo de servicio. ¿Estamos?

Todos: Sí.

12:50 horas termina la clase.

Jueves 04/10/2018

Horario: 12:30 a 13:50 horas

14:35 a 15:15 horas.

Distribución de los grupos:

GK		GJ
GI	GH	

Ausentes: H3, H4, I2, J1.

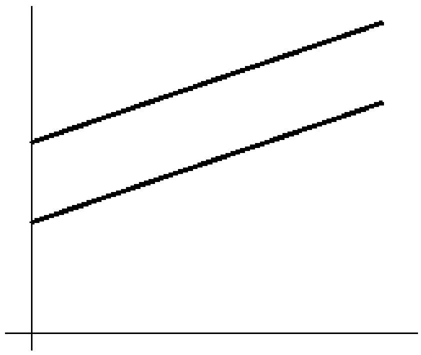
12: 40 comienza el trabajo grupal. Los alumnos leen el problema y plantean que no entienden que hay que hacer. Algunos manifiestan que es necesario conocer la cantidad de kilómetros del viaje, otros simplemente dicen que conviene la compañía A porque los kilómetros cuestan menos que en la compañía B, otro grupo divide 1400/3,5=400 y 1200/6,5= 184,6 y en base a ello plantean que conviene la compañía B.

Como los alumnos no logran encaminarse en la resolución del problema y algunos se conforman con decir que conviene la compañía A o B (sin justificarlo), la docente interviene, se hace una nueva lectura del problema, se analiza cómo se calcula el costo del viaje en cada compañía y se acuerda que elegir una u otra empresa dependerá de los kilómetros recorridos. Algunos plantean que, para viajes cortos convendrá la compañía B, ya que, aunque el precio por kilómetro sea mayor que en la otra compañía, tiene un menor costo inicial. Mientras que para viajes más largos convendría la compañía A, ya que el precio por kilómetro es menor.

La docente propone hacer uso de lo trabajado hasta el momento: tablas, fórmulas o gráficos.

Los alumnos plantean la posibilidad de escribir una fórmula que permita calcular el precio de cada compañía y luego graficar ambas. (Se recuerda actividad 5).

Varios alumnos plantean una expresión algebraica correspondiente al precio en cada compañía y luego hacen un bosquejo del gráfico, representando las funciones de esta manera:



Otros simplemente plantean que no saben qué hacer.

Seguidamente la docente plantea hacer el gráfico en el pizarrón y para ello propone calcular el valor correspondiente a 100 km.

D: Lograron armar una fórmula para cada compañía ¿Cierto? ¿Cómo se calcula el precio en la compañía A?

H4: y es igual a 1400 más 3,5 por x. (Mientras la docente escribe en el pizarrón y=1400+3,5x)

D: ¿Sí o no?

Todos: Sí.

D: ¿Se podría haber escrito 3,5x+1400?

Todos: Sí.

D: Es lo mismo, porque la suma es conmutativa. ¿Y en la B cómo sería?

Varios: Lo mismo, sólo que cambian los números.

H4: y es igual a 1200 más 6,5 por x. (Mientras la docente escribe: y=1200+6,5x).

D: ¿Por qué es así la fórmula? Porque si x son los kilómetros y cada kilómetro cuesta 3,5, tengo que multiplicar 3,5 por x para calcular el precio y sumarle el costo fijo del servicio que es $1400. Lo mismo en la segunda.

Ahora si yo miro las fórmulas, ¿Puedo saber cuál me conviene contratar?

J2: Depende, si te dicen los kilómetros.

D: Ah… en realidad depende de la cantidad de kilómetros del viaje. Entonces, ¿Qué es lo que podríamos hacer?

Silencio

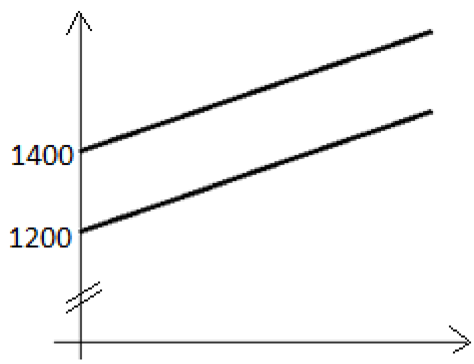
D: Podríamos hacer un gráfico a fin de comparar cómo varía el precio en cada una de las dos compañías. ¿Cómo vamos a ubicar las variables sobre los ejes cartesianos? ¿En el eje horizontal?

H1: Kilómetros.

D: ¿Y en el eje y?

Todos: El precio.

La docente muestra lo que hicieron dos compañeros:



D: ¿Cómo se modifica el precio a media que aumentan los kilómetros?

H2: Aumenta.

D: Por eso yo vi que, en dos grupos, hicieron esto (marca las dos rectas paralelas). ¿Hicieron eso?

J2: Sí.

D: A simple vista, estoy viendo eso: aumentan los kilómetros y aumenta el precio a partir de 1200 y a partir de 1400. Pero fíjense, si yo miro las dos líneas, en realidad esto no representa lo que dice la fórmula ¿Por qué? Porque fíjense cómo varía el precio del kilómetro, en la compañía A cuesta 3,5 el kilómetro recorrido y en la compañía B, 6,5. Entonces las líneas no van a tener la misma inclinación porque a partir de 1200 cada kilómetro recorrido cuesta más que en la otra compañía ¿Se entiende? ¿Cómo tendría que ser el gráfico?

H2: Más para arriba.

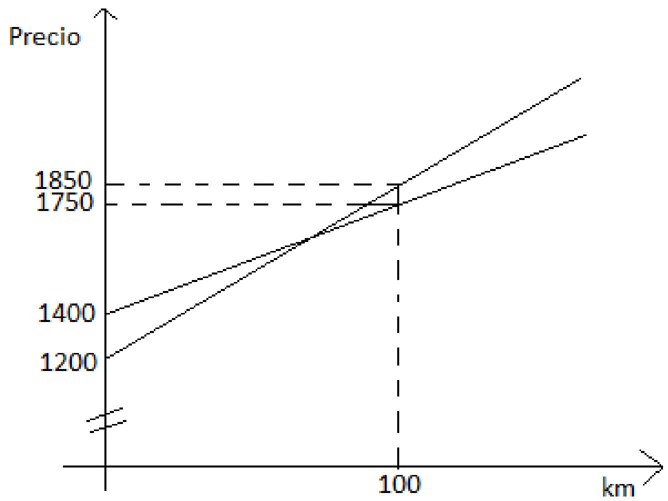
D: ¿Así? (la docente muestra con la escuadra). Con mayor inclinación, mayor crecimiento. En la segunda crece más despacio porque por cada kilómetro recorrido, el precio aumenta 3,5. ¿Cómo podríamos hacer para lograr un gráfico mejor? Por ejemplo, si tomamos el valor 100 kilómetros. ¿Puedo saber cuánto costará un viaje de 100 kilómetros en cada compañía?

Todos: Si.

D: Entonces vamos a calcular cuánto cuesta un viaje de 100 kilómetros en la compañía A y en la compañía B. Hagan eso.

Los alumnos comienzan a calcular lo solicitado por la docente, luego se marcan los puntos en el gráfico, se marcan las rectas y continúa la puesta en común.

Pizarrón:



D: Si yo miro el gráfico ¿Qué pasa con las dos rectas?

I3: Se cruzan las dos rectas.

D: Hay un punto donde se cruzan, acá (marca sobre el gráfico). ¿Qué significa ese punto?

Silencio.

D: ¿Sabemos los kilómetros correspondientes a ese punto?

H1: No.

D: ¿Qué Significa ese punto?

Una alumna expone una idea que no logra entenderse del todo, entonces la docente explica:

D: Existe una distancia cuyo precio en la compañía A es igual al de la compañía B. Para un valor menor a 100, el precio es el mismo en la compañía A y en la compañía B. Por debajo de ese valor, que todavía no sabemos cuál es, ¿Qué compañía me conviene contratar?

Todos: La B.

D: ¿Cómo me doy cuenta que es la compañía B, la que me conviene contratar? Si miramos el gráfico, ¿Qué pasa con esta parte de la recta en relación a esta otra? (Señala en el gráfico)

Todos: Está por debajo.

D: Entonces, fíjense: para valores menores que este número (señala sobre el gráfico) conviene contratar la compañía B, que es lo que ustedes me habían dicho: Para viajes cortos conviene la compañía B, porque, aunque los kilómetros sean más caros el precio inicial era menor. Y después de ese valor, ¿Qué compañía conviene contratar?

H2: La A.

D: ¿Por qué?

H2: Cuesta menos.

D: Está por debajo, entonces, por encima de este valor, el precio de la compañía A es menor que el de la compañía B. Con esto, estamos verificando lo que ustedes habían dicho: depende de los kilómetros, si hace un viaje corto conviene la compañía B pero si el viaje es más largo conviene la compañía A. ¿Cómo puedo saber este valor? (Señala la abscisa del punto de intersección de las rectas), el valor que me indica hasta cuando me conviene una compañía o la otra. ¿Qué tendría que conocer?

H2: Los kilómetros.

D: Los kilómetros para los cuales, el precio es el mismo en ambas compañías. Si esto (señala a 1400+3,5x) corresponde al precio de la compañía A y esto (señala 1200+6,5x) permite calcular el precio en la compañía B, yo puedo escribir esto:

1400+3,5x=1200+6,5x ¿Y qué queda planteado en ese caso?

H2: Una ecuación.

D: Sí, una ecuación. ¿Qué estoy igualando?

H2: Los precios.

D: El precio de la compañía A tiene que ser igual al precio de la compañía B. Esa ecuación queda planteada en términos de “x”, y “x” ¿Qué representa para nosotros?

Todos: Los kilómetros.

D: Entonces, con esta ecuación yo estoy planteando que, el precio de la compañía A tiene que ser igual al precio de la compañía B. Al resolver la ecuación ¿Qué voy a encontrar?

I3: Los kilómetros

D: Los kilómetros para los cuales el precio es el mismo en ambas compañías y es el valor que me permite decidir si me conviene la A o me conviene la B de acuerdo al viaje que tenga que realizar ¿Se entiende?

Todos: Sí.

D: ¿Pueden resolver esa ecuación?

Todos: Sí.

D: Bueno háganlo.

Los alumnos resuelven la ecuación, luego una alumna pasa al pizarrón a copiar el ejercicio resuelto, se analiza el resultado 66,6 y se establece que: para viajes cuya distancia sea menor a 66,6 kilómetros conviene la compañía B y para viajes cuya distancia sea mayor a 66,6 kilómetros conviene la compañía A.

Toca la campana y los alumnos salen al recreo.

14:35 horas comienza la institucionalización.

15:00 horas comienza el trabajo en torno a los ejercicios de refuerzo.

Apéndice D

Actividades de Refuerzo y análisis a priori

1) Observá la siguiente secuencia:

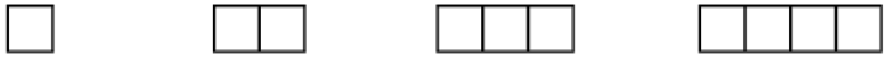


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuántos palillos formarán la figura que sigue? ¿Y la que ocupa el lugar 15?
b) ¿Cuántos cuadraditos se forman con 61 palillos? ¿Y con 100?
c) ¿Es posible saber la cantidad de palillos que se necesitan para formar la figura que ocupa el lugar x?
d) ¿Es cierto que con 1600 palillos se forman 533 cuadraditos?[8]

2) El costo de servicio de agua potable en una localidad se calcula de acuerdo a los m^3 de agua consumidos por cada usuario con la siguiente fórmula:

$$C(x)=76+28{,}5.x$$

a) ¿Cuál es el precio a pagar si el consumo mensual es de $3m^3$? ¿Y si es de $7m^3$?
b) ¿Cuántos metros cúbicos se han consumido si el precio a pagar es de $332,5?
c) Si en promedio, una familia consume 10,5 metros cúbicos mensuales ¿Cuánto importarían las facturas correspondientes al último trimestre?
d) Representar gráficamente la situación.

[8] Problema 1: Adaptado de Kaczor, P. J., López, A. E., Outón, V. L., & Pérez, M. M. (2011). *Matemática II: Saberes clave.* Buenos Aires: Santillana. (p.109)

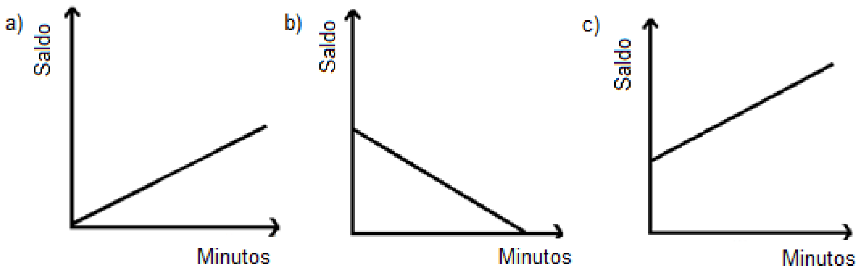
3) Rodrigo tiene una tarjeta para hablar por celular con un saldo de $30 y por cada minuto que habla le descuentan $0,75.

a) Completar la siguiente tabla

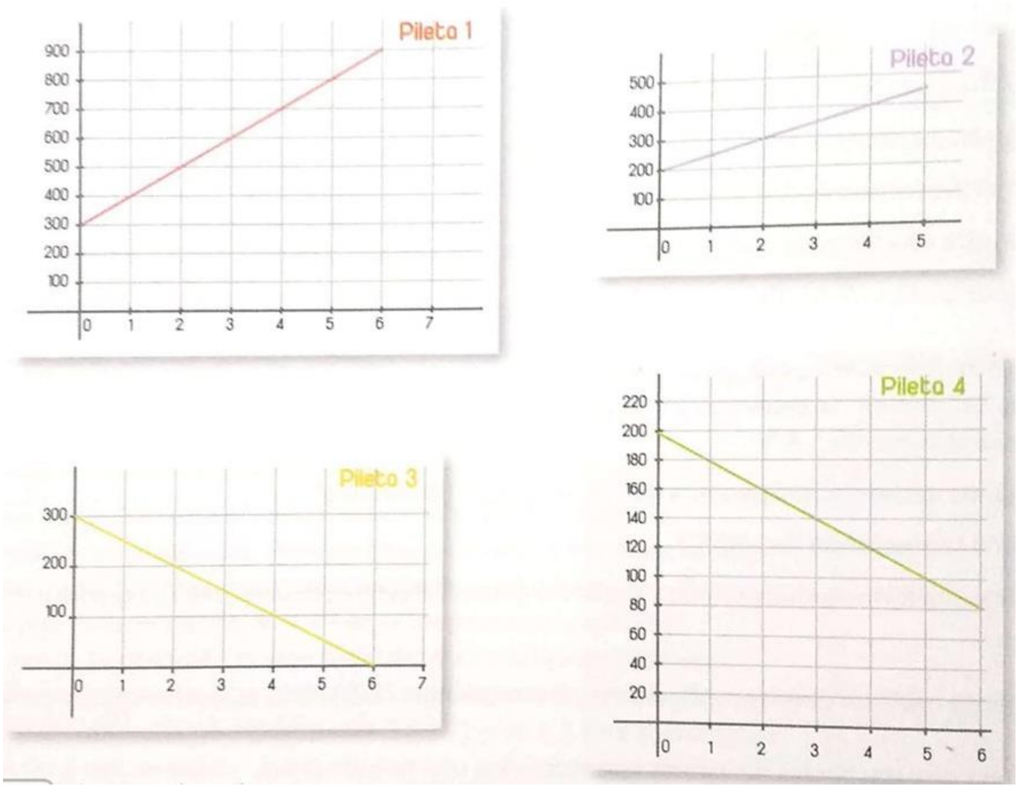
Minutos que habla	3		15		28	
Saldo		$24		$15,75		$3

b) Calcular cuántos minutos puede hablar con esa tarjeta.

c) Indica el gráfico que corresponde a la situación planteada. Justifica tu elección.



4) Estos cuatro gráficos corresponden a funciones que relacionan la cantidad de agua (medida en litros) de piletas que se están llenando o vaciando, en función del tiempo expresado en horas.



a) ¿Cuánta agua hay, inicialmente, en cada pileta?
b) Escribí una fórmula para cada función.
c) ¿Cómo puedes verificar la fórmula que obtuviste para cada uno de los gráficos?
d) En cada caso, indicá cuantos litros tiene la pileta a las 3,5 horas del inicio del vaciado o llenado.[9]

5) Se coloca un barril de madera sobre una balanza y, al echarle distintas cantidades de aceite, se registran los pesos en una tabla. El barril puede contener, como máximo, 100 litros de aceite.

Volumen de aceite (en litros)	10	15	25	40
Peso que marca la balanza (en Kg)	46	49	55	64

a) Si el barril tiene 20 litros de aceite, ¿la balanza marcará 52 kg?
b) ¿Qué marcará la balanza si el barril tiene 30 litros de aceite?
c) ¿Se puede saber el peso del barril vacío?
d) ¿Cuánto pesa el barril lleno?
e) ¿Qué marca la balanza si el barril tiene 50 litros de aceite? ¿Y si tiene 51 litros?
f) Si se cargan 24 litros del mismo aceite en otro barril más pesado, la balanza marca 66,6 kg. ¿De qué manera se puede calcular el peso de este barril si se modifica la cantidad de aceite?
g) ¿Cuánto pesa cada uno de los barriles con 62,5 litros de aceite?[10]

[9] Problema 4: Adaptado de: Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C., & Murúa, R. (2015). *Hacer Matemática ½*. Buenos Aires: Estrada. (p. 172)

[10] Problema 5: Adaptado de: Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C., & Murúa, R. (2015). *Hacer Matemática ½*. Buenos Aires: Estrada. (p. 156)

6) Francisco se compró un celular nuevo y debe decidir si quedarse con el plan que tiene actualmente o cambiarse a uno nuevo que le ofrecen.

El nuevo plan le ofrece $60 de abono fijo más $1,4 por minuto consumido. Para saber cuál le conviene, y cómo no recuerda el valor del monto fijo y el precio por minuto de su plan, decide anotar en una tabla lo que habló y pagó en los últimos tres meses.

Minutos hablados	66	91	120
Monto pagado (en $)	149	186,5	230

¿Qué le conviene hacer a Francisco?

Actividad 1

Objetivos

Que el alumno logre:

- Reconocer una secuencia y determinar la cantidad de palillos necesarios para formar una figura.
- Identificar la cantidad de cuadraditos que se forman con una cantidad de palillos dada.
- Generalizar a través de una fórmula, la relación existente entre cantidad de palillos y cantidad de cuadraditos.

En esta actividad propone el trabajo con una nueva secuencia geométrica. Se espera en este caso, que la mayoría de los alumnos no recurran al método gráfico (aunque podría aparecer entre los posibles procedimientos) para responder a las preguntas planteadas, sino que, desde el principio traten de reconocer la regularidad que existe entre el número de la figura y la cantidad de palillos que la forman, a fin de poder expresar dicha relación a través de una fórmula que permita calcular cantidad de palillos y/o cuadraditos sin necesidad de dibujar y contar.

La consigna d), plantea un interrogante considerando números grandes para que el alumno utilice la fórmula hallada anteriormente.

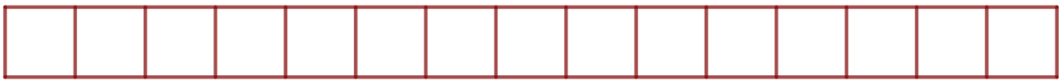
Posibles procedimientos

Consigna a)

Dibujar la secuencia: El alumno podría continuar dibujando los cuadraditos hasta formar la figura que sigue (5 cuadraditos) y luego la que tiene 15 cuadraditos. Contando los palillos necesarios podrían responder a la pregunta planteada.

Figura 5: 16 palillos

Figura 15: 46 palillos



Sumar tres al valor anterior: Los alumnos podrían establecer que cada nueva figura se forma agregando tres palillos a la anterior, en ese caso, podrían anotar los primeros valores contando los palillos usados en cada figura e ir sumando tres a la cantidad de palillos hasta llegar a la posición 15.

Figura	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**
Palillos	4	7	10	13	**16**	19	22	25	28	31	34	37	40	43	**46**

Generalizar: Algunos alumnos podrían analizar de qué forma se relacionan la cantidad de cuadraditos y la cantidad de palillos e intentar hallar una fórmula que exprese tal relación (antes de llegar al ítem c). En ese caso, analizando los primeros pares de valores correspondientes, los alumnos podrían plantear lo siguiente:

Figura (x)	Palillos (y)	Opción 1	Opción 2	Opción 3
1	4	3.1+1	4	4.1-0
2	7	3.2+1	4+3	4.2-1
3	10	3.3+1	4+3+3	4.3-2
4	13	3.4+1	4+3+3+3	4.4-3

Opción 1: El número de palillos es el triple de cuadraditos que se forman más uno, entonces: y=3x+1

Opción 2: La primera figura tiene 4 palillos y luego se agregan 3 para formar las siguientes, entonces: y=4+3(x-1)

Opción 3: Cada cuadradito tiene cuatro lados, o sea cuatro palillos, si multiplicamos 4 por la cantidad de cuadraditos y le restamos la cantidad de lados que comparten se obtiene la cantidad de palillos, entonces y= 4x- (x-1) que es equivalente a y=3x+1.

Consigna b)

Continuar dibujando la secuencia: Aquellos alumnos que hayan dibujado la secuencia para responder la consigna anterior podrían continuar haciéndolo hasta llegar a 61 y luego a 100 palillos. Contando los cuadraditos formados podrían responder a las preguntas planteadas.

Sumar tres al valor anterior: En este caso, los alumnos podrían continuar hallando los términos de la sucesión aritmética (iniciada en la consigna anterior) hasta llegar al valor 61, y luego al valor 100. Contando la cantidad de términos, se obtiene el número de figura correspondiente que coincide con la cantidad de cuadraditos que se forman.

Usar alguna fórmula hallada anteriormente:

Si y=61, entonces:

$$3x + 1 = 61$$
$$3x = 61 - 1$$
$$x = \frac{60}{3}$$
$$x = 20$$

$$4 + 3(x - 1) = 61$$
$$3(x - 1) = 61 - 4$$
$$x - 1 = \frac{57}{3}$$
$$x = 19 + 1$$
$$x = 20$$

$$4x - (x - 1) = 61$$
$$4x - x + 1 = 61$$
$$3x = 60$$
$$x = \frac{60}{3}$$
$$x = 20$$

Consigna c)

En este caso, los alumnos podrían hallar cualquiera de las fórmulas presentadas anteriormente.

Consigna d)

Usar alguna fórmula hallada anteriormente, de alguna de las siguientes formas:

Reemplazando x por 533 y verificando que y=1600.

Reemplazando y por 1600 y verificando que x=533.

Si x=533, entonces:

$$3.533 + 1 = \qquad 4 + 3(533 - 1) = \qquad 4.533 - (533 - 1) =$$

$$1599 + 1 = 1600 \qquad 4 + 3.532 = 1600 \qquad 2132 - 532 = 1600$$

Si y=1600, entonces:

$$3x + 1 = 1600 \qquad 4 + 3(x - 1) = 1600 \qquad 4x - (x - 1) = 1600$$

$$3x = 1600 - 1 \qquad 3(x - 1) = 1600 - 4 \qquad 4x - x + 1 = 1600$$

$$x = \frac{1599}{3} \qquad x - 1 = \frac{1596}{3} \qquad 3x = 1599$$

$$x = 533 \qquad x = 532 + 1 \qquad x = \frac{1599}{3}$$

$$x = 533 \qquad x = 533$$

Actividad 2

Objetivos

Que el alumno logre:

- Reemplazar correctamente los datos correspondientes a metros cúbicos consumidos o precio a pagar, en la fórmula dada, para responder a los interrogantes planteados.
- Representar gráficamente la situación planteada.

En este caso, se le brinda al alumno una fórmula a partir de la cual se obtiene el precio a pagar de acuerdo a la cantidad de agua consumida por cada usuario. En primer lugar, los alumnos deben ser capaces de identificar a qué corresponden los parámetros que aparecen en dicha fórmula: 76, corresponde a un costo fijo (cuota de servicio, impuestos, etc.) y 28,5, el precio de un m^3 de agua. Por su parte, x corresponde a la cantidad de metros cúbicos consumidos y C(x), el precio a pagar.

Se espera que, los alumnos reemplacen en la fórmula los valores dados (correspondientes a m^3 de agua o precio), y puedan resolver las ecuaciones interpretando correctamente las soluciones obtenidas.

Por último, se solicita la representación gráfica de la situación a fin de que los alumnos puedan volcar la información brindada por la fórmula en un sistema de ejes cartesianos.

Posibles procedimientos

Consigna a)

Reemplazar x por 3:

$$C(3)=76+28{,}5.3$$
$$C(3)=76+85{,}5$$
$$C(3)=161{,}5$$

Si el consumo mensual es de $3m^3$, se debe abonar $161,5.

Reemplazar x por 7:

$$C(7)=76+28{,}5.7$$
$$C(7)=76+199{,}5$$
$$C(3)=275{,}5$$

Si el consumo mensual es de $7m^3$, se debe abonar $275,5.

Consigna b)

Reemplazar C(x) por 332,5:

$$76 + 28{,}5x = 332{,}5$$

$$28{,}5x = 332{,}5 - 76$$

$$x = \frac{256{,}5}{28{,}5}$$

$$x = 9$$

Se han consumido 9m^3 de agua, si el precio a pagar es de \$332,5.

Consigna c)

Reemplazar x por 10,5:

$$C(10{,}5) = 76 + 28{,}5.\ 10{,}5$$

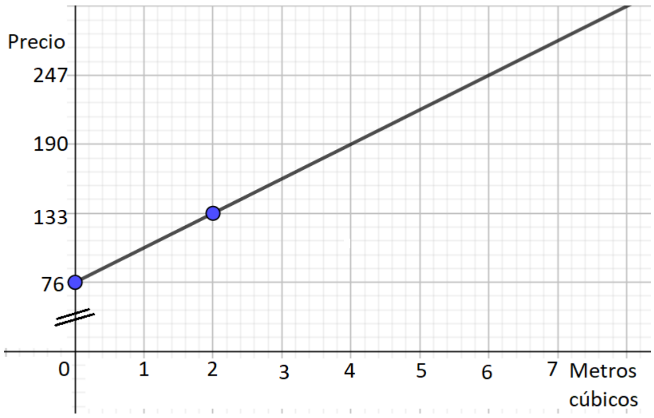
$$C(10{,}5) = 76 + 299{,}5$$

$$C(10{,}5) = 375{,}25$$

Si el consumo mensual es de 10,5m^3, se debe abonar por un mes \$375,25, entonces, el importe por el último trimestre sería: \$1125,75.

Consigna d)

Los alumnos podrían obtener una gráfica como la siguiente:



Actividad 3

Objetivos

Que el alumno logre:

- Expresar de manera simbólica la relación existente entre minutos que habla y saldo.
- Calcular los minutos o el saldo restante, de acuerdo a lo solicitado, a través de la expresión algebraica formulada.
- Seleccionar el gráfico que representa a la situación.

Posibles procedimientos

Consigna a)

Hallar la fórmula que expresa el saldo en función de los minutos que habla y calcular los pares de valores correspondientes: En primer lugar, los alumnos podrían reconocer que, los minutos que habla corresponden a la variable independiente x, mientras que el saldo, corresponde a la variable dependiente y. Como la tarjeta tiene $30 de saldo y por cada minuto que habla, le descuentan $0,75, el saldo(y) de la tarjeta podría calcularse con la siguiente expresión: y=30-0,75.x

Una vez hallada la fórmula se podrían hallar los valores de la tabla, de la siguiente manera:

Si x=3	Si x=15	Si x=28
$30-0{,}75.3=27{,}75$	$30-0{,}75.15=18{,}75$	$30-0{,}75.28=9$

Si y=24	Si y=15,75	Si y=3
$30-0{,}75.x=24$	$30-0{,}75.x=15{,}75$	$30-0{,}75.x=$
$-0{,}75x=24-30$	$-0{,}75x=15{,}75-30$	$-0{,}75x=-30$
$x=-\frac{6}{-0{,}75}$	$x=-\frac{14{,}25}{-0{,}75}$	$x=-\frac{27}{-0{,}75}$
$x=8$	$x=19$	$x=36$

La tabla completa sería:

Minutos que habla	**3**	8	**15**	19	**28**	36
Saldo	27,75	**$24**	18,75	**$15,75**	9	**$3**

Sin hacer uso de la fórmula: Algunos alumnos podrían hacer un trabajo similar al anterior sin haber formulado una expresión simbólica y sin resolver ninguna ecuación.

Por ejemplo, podrían formular que: “Para conocer el saldo cuando ha hablado 3 minutos, primero multiplico 3 por el precio de un minuto y luego a $30 le resto esa cantidad”.

Si se conoce el saldo y se desea averiguar los minutos que ha hablado, por ejemplo, el valor correspondiente a $24: “Primero se calcula cuánta plata ha gastado, haciendo 30 -24, y luego se divide ese resultado entre 0,75”.

Consigna b)

Usando la fórmula: Para calcular cuántos minutos puede hablar con la tarjeta, hay que considerar que el saldo sea igual a cero. Entonces:

Si y=0

$$30 - 0{,}75.x = 0$$

$$-0{,}75x = 0 - 30$$

$$x = -\frac{30}{-0{,}75}$$

$$x = 40$$

Sin hacer uso de la fórmula: Los alumnos podrían pensar que para saber cuántos minutos se pueden hablar con la tarjeta, hay que calcular cuántas veces entra $0,75 en $30, lo que significa hacer 30/0,75. Haciendo esta división los alumnos obtienen 40, que significa la cantidad de minutos que Rodrigo puede hablar con esa tarjeta.

Consigna d)

Elegir el gráfico a): lo cual sería incorrecto, porque a medida que aumentan los minutos que habla, no aumenta el saldo.

Elegir el gráfico b): lo cual sería correcto, porque a medida que aumentan los minutos, disminuye el saldo.

Elegir el gráfico c): lo cual es incorrecto, porque el saldo no aumenta desde un valor inicial distinto de cero, a medida que aumentan los minutos.

Actividad 4

Objetivos:

Que el alumno logre:

- Interpretar cada situación a partir de su representación gráfica.
- Pasar de la representación gráfica a la representación algebraica.
- Utilizar la fórmula hallada para calcular pares de valores correspondientes.

En este caso, se espera que los alumnos sean capaces de, además de hacer una lectura de los gráficos, extraer la información que necesitan para plantear una fórmula que represente el proceso de llenado o vaciado de cada una de las piletas, verificando en cada caso la expresión formulada, considerando algunos casos particulares.

Posibles procedimientos

Consigna a)

Observando el gráfico: los alumnos pueden establecer cuánta agua hay inicialmente en cada pileta, considerando el valor correspondiente a x=0 en cada uno.

Pileta 1: 300 litros
Pileta 2: 200 litros
Pileta 3: 300 litros
Pileta 4: 200 litros

Consigna b)

En este caso, además de saber cuánta agua hay en cada pileta, es necesario identificar si se está llenando o vaciando y en cada caso, saber cuántos litros por hora se cargan o descargan, respectivamente.

Asimismo, se deben fijar cada una de las variables, x: tiempo en horas e y: cantidad de agua en litros.

Algunas conjeturas de los alumnos podrían ser las siguientes:

Pileta 1: La línea pasa por los puntos (1, 400) y (2, 500) lo que significa que: en una hora se arrojan 100 litros de agua en la pileta. Entonces: $y=300+100x$.

Pileta 2: En dos horas, la pileta pasa de tener 200 litros a tener 300 litros, lo que significa que, se cargan 50 litros de agua por hora. Entonces: $y=200+50x$.

Pileta 3: La pileta tiene 300 litros que se vacían en 6 horas, lo que significa que se descargan 50 litros por hora porque 300lts/ 6hs =50 lts/hs. Entonces: $y=300-50x$

Pileta 4: Después de una hora, la pileta tiene 20 litros menos, lo que significa que se extraen 20 litros por hora. Entonces: $y= 200-20x$.

Consigna c)

En este caso, los alumnos podrían tomar de cada uno de los gráficos, un par de valores que pertenezca a la función y corroborar que los mismos satisfacen las ecuaciones.

Por ejemplo:

Pileta 1: (4; 700), entonces si x=4 →y=300+100. 4= 700

Pileta 2: (4; 400) entonces si x=4 →y=200+50. 4= 400

Pileta 3: (4; 100) entonces si x=4 →y=300-50. 4= 100

Pileta 4: (4; 120) entonces si x=4 →y=200-20. 4= 120

O bien, considerando la cantidad de agua y hallando las horas correspondientes.

300+100x=700	200+50x=400	300-50x=100	200-20x=120
100x=700-300	50x=400-200	-50x=100-300	-20x=120-200
x=400/100	x=200/50	x=-200/-50	x=-80/-20
x=4	x=4	x=4	x=4

Consigna d)

Para hallar los valores correspondientes a 3,5 horas en cada caso, los alumnos podrían hacer lo siguiente:

Pileta 1: Si x=3,5 →y=300+100. 3,5= 650

Pileta 2: Si x=3,5 →y=200+50. 3,5= 375

Pileta 3: Si x=3,5 →y=300-50. 3,5= 125

Pileta 4: Si x=3,5 →y=200-20. 3,5= 130

Actividad 5

Objetivos

Que el alumno logre:

- Identificar la pertinencia de hallar la expresión simbólica que relaciona el volumen de aceite y el peso que marca la balanza.
- Pasar de la expresión tabular a la expresión simbólica.
- Hallar pares de valores correspondientes usando la fórmula que relaciona los litros de aceite con los kilogramos del barril.

Con esta actividad, se espera que el alumno sea capaz de seleccionar la información necesaria, dada a través de los valores de la tabla, para hallar una expresión simbólica que permita calcular el peso del barril cualquiera sea la cantidad de aceite que este contenga. Será necesario que el alumno considere el peso del barril y el peso por litro de aceite.

En ninguna parte de la actividad se sugiere la búsqueda de una fórmula que relacione los litros y los kilogramos, se espera que el alumno establezca la necesidad de hallarla para poder responder de manera más eficaz, cada una de las preguntas planteadas.

Posibles procedimientos

Consigna a)

Utilizando los datos de la tabla: los alumnos podrían considerar que si 10 litros pesan 46 kg y 15 litros pesan 49 kg, por cada 5 litros de aceite que se agregan, el peso del barril aumenta en 3 kg. Entonces:

Volumen de aceite (en litros)	10	15	**20**	25	40
Peso que marca la balanza (en Kg)	46	49	**52**	55	64

Efectivamente, si el barril contiene 20 litros de aceite, la balanza marcará 52 kg.

Trabajar de manera proporcional: Algunos alumnos, podrían considerar que el peso del barril es directamente proporcional al volumen de aceite y plantear que:

$$10\ litros \rightarrow 46kg$$
$$20\ litros \rightarrow x$$

Si las magnitudes fueran directamente proporcionales, como se duplica la cantidad de litros, se duplicaría el peso. Entonces x=92 kg.

En caso de que los alumnos trabajen de esta manera, podrían descartar su procedimiento (que resulta incorrecto) ya que, por ejemplo, el barril con 40 litros de aceite, de acuerdo a esta lógica, debería pesar 4 veces 46, o sea, 184 y en la tabla se observa que solo pesa 64kg.

Ambas magnitudes no son directamente proporcionales y debe tenerse en cuenta, en todos los casos, el peso del barril.

Hallar una fórmula que relacione el volumen de aceite con el peso que marca la balanza: teniendo en cuenta que 5 litros de aceite pesan 3 kilogramos, se puede hallar el peso por litro de aceite haciendo 3 kg/5 litros=0,6kg/lts.

Una vez conocido el peso por litro se puede hallar el peso del barril. Si cada litro pesa 0,6 kg, 10 litros pesarán 6 kg, por lo tanto, si a 46kg le restamos 6kg, obtenemos el peso del barril. Así, la fórmula que expresa el peso(y) en función de los litros(x) será: y=40+0,6x

Para responder a la consigna a, se puede reemplazar x por 20 y corroborar que el peso es de 52 kilogramos.

y=40+0,6.20
y=52

Consigna b)

Utilizando los datos de la tabla: los alumnos que hayan establecido que por cada 5 litros de aceite que se agregan, el peso del barril aumenta en 3 kg, podrían plantear que 30 litros pesarán 55+3=58 kilogramos.

Volumen de aceite (en litros)	10	15	**20**	25	**30**	40
Peso que marca la balanza (en Kg)	46	49	**52**	55	**58**	64

Usar la fórmula que relaciona los litros de aceite y el peso del barril: Sabiendo que y=40+ 0,6x, los alumnos podrían plantear que si x=30, entonces:

y=40+ 0,6. 30
y=58

Consigna c)

Utilizando los datos de la tabla: Así como fue posible hallar el peso del barril con 20 y 30 litros haciendo 49+3=52 y 55+3=58, respectivamente, es posible hallar el peso de 0 litros de aceite (es decir, del barril vacío), restando dos veces 3 a 46.

Volumen de aceite (en litros)	**0**	**5**	10	15	25	40
Peso que marca la balanza (en Kg)	**40**	**43**	46	49	55	64

Usando la fórmula: En este caso, es necesario interpretar que la balanza marcará el peso del barril vacío cuando este contenga 0 litros de aceite. Considerando esto, los alumnos podrían plantear que:

Si x=0, entonces:
y=40+0,6.0
y=40

El barril vacío pesa 40 kilogramos.

Consigna d)

Utilizando los datos de la tabla: Los alumnos podrían plantear que: “Si por cada 5 litros que se agregan, el peso aumenta en 3 kilogramos, por cada 10 litros que se agreguen, el peso aumentará en 6 kilogramos”. Entonces:

Volumen de aceite (en litros)	40	50	60	70	80	90	100
Peso que marca la balanza (en Kg)	64	70	76	82	88	94	100

El barril lleno, esto es con 100 litros de aceite, pesa 100 kg.

Usando la fórmula: Se puede reemplazar x por 100 litros y hallar el valor de y correspondiente.

Si x=100 litros, entonces:
y=40+0,6.100
y=100

Consigna e)

Usando los datos de la tabla: aquellos alumnos que hayan calculado el peso correspondiente a 100 litros, aumentando los pesos de 3 en 3, o de 6 en 6, ya contarían con el peso correspondiente a 50 kilogramos, pero deberían calcular el peso de un kilogramo de aceite para poder responder cuánto marcará la balanza con 51 litros de aceite. Para hallarlo podrían hacer 3kg/5 lts o 6kg/10lts y luego sumar esta cantidad a 70 kilogramos (peso que marca la balanza con 50 litros de aceite)

Usando la fórmula: se reemplaza x por 50 y luego por 51. Así:

Si x=50 litros, entonces:
y=40+0,6.50
y=70 kilogramos

Si x=51 litros, entonces:
y=40+0,6.51
y=70,6 kilogramos

Consigna f)

Si hacer uso de la fórmula: Los alumnos podrían plantear que, como se cargan 24 litros del mismo aceite, esto significa un peso de 14,4 kilogramos porque 24. 0,6=14,4. Si este valor se resta a 66,6 se obtiene el peso del barril vacío. Conocido este valor, se puede plantear una expresión que permita calcular el peso de este barril si se modifica la cantidad de aceite, la cual sería: y=52,2+0,6x

Usando la fórmula: en primer lugar, se debe hallar el peso del nuevo barril. Se puede calcular reemplazando los valores 24 y 66,6 en x e y respectivamente y despejando el peso del barril (B):

y=B+0,6.x, entonces:

B+0,6. 24= 66,6

B= 66,6 – 14,4

B=52,2 kilogramos.

Conocido el peso del barril, se puede calcular el peso que marcará la balanza si se modifica la cantidad de aceite usando la siguiente fórmula: y=52,2+0,6x

Consigna g)

Sin usar las fórmulas: los alumnos podrían plantear que: “Si multiplicamos los litros por 0,6 y le sumamos el peso de cada barril, obtenemos el peso del barril con 62,5 kilogramos”

Primer barril: 62,5. 0,6 +40= 77,5 kilogramos.

Segundo barril: 62,5. 0,6 +52.2=89,7 kilogramos.

Usando cada una de las fórmulas:

Primer barril: Si x=62,5 litros, entonces y=40+ 0,6.62,5=77,5 kilogramos.

Segundo barril: Si x=62,5 litros, entonces y=52,2+ 0,6.62,5=89,7 kilogramos.

Apéndice E

Observaciones de clases: CEP N° 43 y EPET N° 50

Actividad 1

Los alumnos no lograban identificar a los palillos como a los lados de cada cuadradito, fue necesario en algunos casos, que el docente cuente uno por uno los lados de cada cuadradito para que los alumnos reconozcan la relación entre el número de figura y la cantidad de palillos que la formaban.

Algunos alumnos rápidamente establecieron que, agregando tres palillos se obtenía una nueva figura.

Un grupo de alumnos planteó (teniendo en cuenta el trabajo realizado en el problema 1 de la secuencia) que: todos los cuadraditos se forman agregando tres palillos, solo el primero tiene 4, entonces si multiplicamos por tres la cantidad de cuadraditos y le sumamos uno, se obtiene el número de palillos.

Algunos alumnos no lograron asociar el número de figura con la cantidad de cuadraditos, por ejemplo, varios alumnos no entendían que la figura del lugar 15 era aquella que tenía 15 cuadraditos.

Algunos alumnos no reconocían que 61 y 100 correspondían a cantidad de palillos y que era necesario averiguar en ese caso, la cantidad de cuadraditos que se formaban con esa cantidad de palillos (Variable didáctica). Fue necesaria la intervención docente para hacerles notar el cambio en la pregunta. Algunos rápidamente restaron uno (el primer palillo) y luego dividieron por tres a ese resultado, otros fueron sumando tres sucesivamente a 46 (cantidad de palillos correspondiente a 15 cuadraditos) hasta llegar a 61 0 100, respectivamente.

En el ítem c), la mayoría de los alumnos expresó con palabras el cálculo utilizado, fue necesaria la intervención docente para que los alumnos formulen una expresión algebraica que represente la situación.

En el ítem d) muchos alumnos tomaron el 533 lo multiplicaron por tres y le sumaron uno, al obtener 1600, respondían afirmativamente. En otros casos, fue necesaria la intervención docente para aclarar la relación entre ambos números (533 y 1600) y establecer posibles alternativas de resolución. Sólo un grupo realizó la verificación partiendo del 1600 para llegar al 533.

Actividad 2

Antes de resolver el ejercicio fue necesario analizar con el grupo clase, qué significaban x y C(x), como así también 76 y 28,5.

Una vez calculado el monto correspondiente a $3m^3$, los alumnos calcularon sin problemas el monto correspondiente a 7 m^3.

Par resolver el ítem b), fue necesaria la intervención docente, para hacerles notar a los alumnos que si se conoce el precio a pagar es necesario calcular la cantidad de m^3 consumidos, el cual podía hallarse al resolver la ecuación: 76+28,5x= 332,5.

En el ítem c), algunos alumnos no leyeron con detenimiento y calcularon el monto a pagar por un consumo de 10,5 m^3. Como lo solicitado era: el importe de las facturas correspondientes al último trimestre, la docente tuvo que intervenir para hacerles ver que se requería el monto a pagar por el consumo de los últimos tres meses. Algunos alumnos calcularon el monto correspondiente a un mes y luego lo multiplicaron por tres, otros primero calcularon los m^3 de agua consumidos en los tres meses y luego usaron la fórmula para hallar el monto a pagar por los 31,5 m^3 de agua.

Para graficar la situación, algunos construyeron una tabla con los pares de valores correspondientes, otros fueron calculando a partir de 76, los precios correspondientes a 1, 2, 3 y $4m^3$ y marcando los puntos directamente. En muchos de los casos fue necesaria la intervención docente para resolver dudas en cuanto a: ubicación de las variables sobre los ejes, escala utilizada, ubicación de los puntos, tipos de gráficos.

Actividad 3

Muchos de los alumnos sólo multiplicaban los minutos dados por 0,75 (3. 0,75; 15. 0,75, …) y completaban los cuadritos correspondientes. Fue necesaria la intervención docente, en algunos casos, para hacerles notar que la variable dependiente era: Saldo, con lo cual, no se estaba relacionando la cantidad de minutos con el dinero que se gastaba sino, con el dinero que sobraba en la tarjeta. Después de dicha intervención los alumnos comenzaron a restar a $30 el importe correspondiente a los minutos hablados.

La mayoría de los alumnos manifestó que no sabía cómo hacer cuando se conocía el saldo y se pedía averiguar los minutos hablados. Algunos conociendo que el saldo después de hablar tres minutos era $27,75, restaron 0,75 sucesivamente hasta llegar a $24 y establecieron que a $24 de saldo corresponden 8 minutos. Otros directamente intentaron dividir la cantidad correspondiente a saldo entre 0,75 y en estos casos el docente intervino para hacerles notar que la división resolvía el problema siempre y cuando se divida el monto gastado entre el precio del minuto.

En el ítem b), la mayoría dividió $30/ $0,75 obteniendo así 40 minutos, otros respondieron que se podían hablar 36 minutos con esa tarjeta, ya que consideraron al último par de valores de la tabla, como respuesta a esta pregunta. Algunos pocos consideraron que si tienen $3 de saldo después de hablar 36 minutos, con esos $3 restantes se pueden hablar cuatro minutos más, por lo tanto, se pueden hablar 40 minutos en total.

La mayoría eligió el gráfico b), pero en algunos casos fue necesaria la intervención docente para poder justificar dicha elección.

Actividad 4

Para comenzar con la resolución de esta consigna fue necesario, en primer lugar, leer la consigna en voz alta e interpretar el enunciado de la misma para dejar en claro que si la consigna dice: "*Estos cuatro gráficos corresponden a funciones que relacionan la cantidad de agua (medida en litros) de piletas que se están llenando o vaciando, en función del tiempo expresado en horas"* se debe entender que sobre el eje horizontal se representaron las horas y sobre el eje vertical los litros de agua que contiene la pileta. La cantidad de agua varía de acuerdo al tiempo que transcurre, así horas, corresponde a la variable independiente y litros de agua, a la variable dependiente.

Una vez aclaradas las cuestiones mencionadas anteriormente, los alumnos resolvieron el ítem a) sin mayores dificultades. Todos concluyeron que la Pileta 1 tiene inicialmente 300 litros, la Pileta 2: 200 litros, la Pileta 3: 300 litros y la Pileta 4: 200 litros. En la puesta en común se aclaró que dichos valores corresponden a las cantidades iniciales de agua en cada pileta porque son los valores correspondientes a 0 horas.

Algunos grupos construyeron cada una de las fórmulas sin dificultades, pero en otros casos, fue necesario hacer hincapié en la información necesaria para elaborar una fórmula. Se volvió a leer el enunciado de la consigna, se simbolizaron con x e y a las dos variables y se analizó la importancia de saber la cantidad de agua que se carga o se desagota de la pileta por hora. Reconocida esta información, para los distintos casos, los alumnos lograron plantear las siguientes expresiones:

Pileta 1: $y=300+100x$.

Pileta 2: $y=200+50x$.

Pileta 3: $y=300-50x$

Pileta 4: $y= 200-20x$.

Una vez que los alumnos elaboraron la primera fórmula con la ayuda del docente, pudieron elaborar las demás de manera independiente.

Para que los alumnos comiencen a trabajar en torno a la consigna c) fue necesaria la intervención docente, ya que los alumnos manifestaban que no comprendían que debían hacer. La docente trabajó con un ejemplo en el pizarrón y a continuación los grupos prosiguieron con el trabajo.

En el ítem d) varios grupos intentaron responder a la consigna a partir de la observación del gráfico, pero al darse cuenta que la cantidad de litros correspondiente, en cada caso, no era un número que estuviera marcado sobre el eje vertical, sintieron la necesidad de recurrir a la fórmula y realizar un trabajo similar al efectuado anteriormente para hallar la cantidad de agua correspondiente a 3,5 horas, en cada caso.

Actividad 5

En el ítem a), la mayoría de los alumnos respondió afirmativamente ya que, observando la tabla pudieron establecer que, por cada 5 litros de aceite, el peso se incrementa en 3 kg. Algunos alumnos, por su parte, respondieron que no, ya que si el barril con 10 litros pesa 46 kg, el barril con 20 litros pesará 92 kg. (proporcionalidad directa). Analizando las dos respuestas durante la puesta en común se concluye que efectivamente el barril pesará 52 kg.

De acuerdo al procedimiento utilizado para responder el ítem a) fue la respuesta a esta nueva pregunta. Así, quienes respondieron que si, en la pregunta anterior ahora plantean que si el barril tiene 30 litros de aceite pesará 58 kg y aquellos que respondieron que no, plantearon que el barril pesará 138 kg (porque 46. 3= 138).

Aquellos alumnos que habían identificado que 5 litros de aceite pesaban 3 kg, fácilmente pudieron obtener el peso del barril vacío ya que restaron a 46 dos veces 3, es decir, el peso correspondiente a 10 litros de aceite, con lo cual concluyen que el peso del barril vacío es 40 kg. En algunos casos fue necesaria la intervención docente a fin de que los alumnos pudieran arribar a esta respuesta.

En el punto d) hay quienes no tuvieron en cuenta que, el barril podía contener como máximo 100 litros de aceite (información contenida en el enunciado) y se limitaron a mirar la tabla, en consecuencia, respondieron que el barril lleno pesa 64 kg (último valor de la tabla). Otros tuvieron en cuenta que la capacidad máxima del barril era de 100 litros y fueron ampliando los valores de la tabla hasta llegar a 100 litros sumando de cinco en cinco y hallando los pesos correspondientes sumando de tres en tres, obteniendo como resultado que el peso correspondiente a 100 litros es 100 kg.

En la consigna e) todos los alumnos observando los valores de la tabla, sumaron a 64 kg (peso correspondiente a 40 litros) el peso correspondiente a 10 litros de aceite. De esta manera logaron responder que: si el barril tiene 50 litros de aceite, la balanza marca 70 kg.

Cuando tuvieron que calcular el peso correspondiente a 50 litros, los alumnos se dieron cuenta que necesitaban conocer el peso de un litro de aceite. Algunos alumnos plantearon el cociente entre 5 litros y 3 kg. En esos casos, fue necesaria la intervención docente para hacerles ver que para calcular el peso de un litro debían dividir 3 kg entre 5 litros, y no al revés. Una vez hallado el peso de un litro de aceite todos los alumnos pudieron responder que la balanza marca 70,6 kg si el barril contiene 51 litros.

En la consigna f), la docente tuvo que intervenir para hacerles notar a los alumnos que si se trataba del mismo aceite el peso del litro se mantenía. Algunos alumnos, reconociendo el hecho anterior, calcularon el peso correspondiente a 24 litros y luego descontaron ese peso al 66,6 kg que marcaba la balanza para poder calcular el peso del segundo barril. Otros no lograron razonar de esta manera y la docente tuvo que guiar el trabajo.

En la última consigna algunos alumnos multiplicaron por sí solos la cantidad de aceite dada (62,5 litros) por el peso del litro y sumaron el peso del barril. En otros casos, la docente tuvo que intervenir para indicar los pasos a seguir. Todos los alumnos respondieron que los barriles con 62,5 litros de aceite pesaban: 77,7 kg y 89,7 kg, respectivamente.

Actividad 6

En este caso muchos de los alumnos armaron una fórmula con los datos que brindaba el enunciado del problema, llamando "x" a los minutos hablados e "y", al monto pagado, para calcular el monto correspondiente al nuevo plan: $y=60+1,4.x$

Cuando deciden hacer lo mismo para el plan actual, se dan cuenta que debían calcular el monto fijo y el precio por minuto utilizando los datos de la tabla. Muchos no logran hacerlo por sí solos. Con la ayuda de la docente logran calcular que el costo fijo es de \$50 y el precio por minuto es de \$1,5. Conocidos estos valores plantean la fórmula: $y=50+1,5.x$

Para poder elegir, entre quedarse con el plan actual o cambiarse al nuevo que le ofrecen, la mayoría construye un gráfico cartesiano para poder analizar cómo se modifica el monto en función de los minutos en ambos planes. Luego de graficar ambas funciones, concluyen que: Si Francisco habla menos de cien minutos mensuales le conviene el nuevo plan, pero si habla más de cien minutos le conviene el plan que tiene actualmente.

Apéndice F

Exámenes

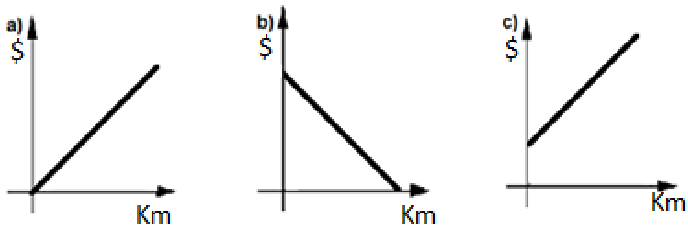
Examen de Matemática- Fila 1

1) Un tanque de 2000 litros lleno de combustible abastece las máquinas de una fábrica que consumen, entre todas, 400 litros de combustible por hora.
    a) Confeccionar una tabla de valores que relacione las horas con la cantidad de combustible que sale.
    b) Escribir una fórmula que permita representar la relación anterior.
    c) Graficar la relación presentada en la tabla.

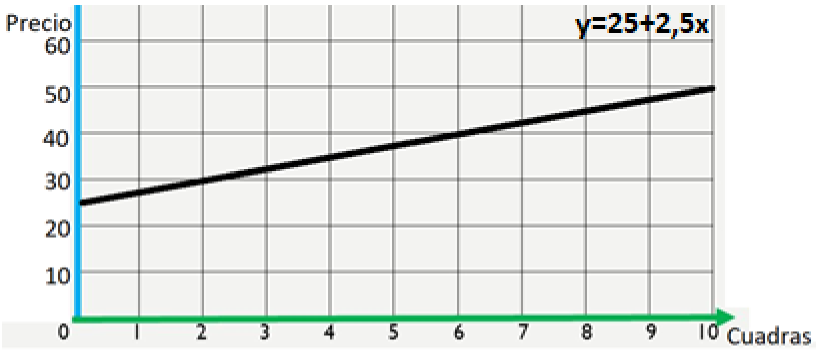
2) Por alquilar una moto, una empresa nos cobra $500 de seguro más un adicional de $2,5 por cada kilómetro recorrido.
    a) ¿De qué manera se puede calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos?
    b) Completar la tabla

Kilómetros recorridos	3		12	
Precio ($)		517,5		535

    c) Marcar con una x el gráfico que corresponde a la situación. Justifica tu elección.



3) A continuación, se muestra cómo varía el precio de un viaje en taxi de acuerdo a la cantidad de cuadras recorridas.



a) ¿Cuánto cuesta un viaje de 6 cuadras? ¿Y de 9?

b) ¿Cuántas cuadras se recorren si se paga $50? ¿Y si se paga $200?

c) Si debo viajar 3 km ¿Cuánto me costará el viaje?

d) ¿Cuál es el precio de la bajada de bandera? ¿Y el precio por cuadra recorrida? Explica cómo te das cuenta.

4) Francisco anotó en una tabla lo que habló y pagó en los últimos tres meses.

Minutos hablados	66	90	120
Monto pagado (en $)	159	195	240

a) ¿Cuánto debe pagar Francisco si este mes habla 140 minutos?

b) Si Francisco debe pagar $285 ¿Cuántos minutos ha hablado?

c) ¿De qué forma puede calcular Francisco el precio a pagar de acuerdo a los minutos que habla?

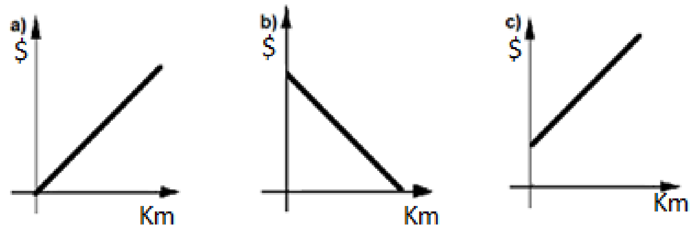
Examen de Matemática- Fila 2

1) Un tanque de 3000 litros lleno de combustible abastece las máquinas de una fábrica que consumen, entre todas, 500 litros de combustible por hora.
   a) Confeccionar una tabla de valores que relacione las horas con la cantidad de combustible que sale.
   b) Escribir una fórmula que permita representar la relación anterior.
   c) Graficar la relación presentada en la tabla.

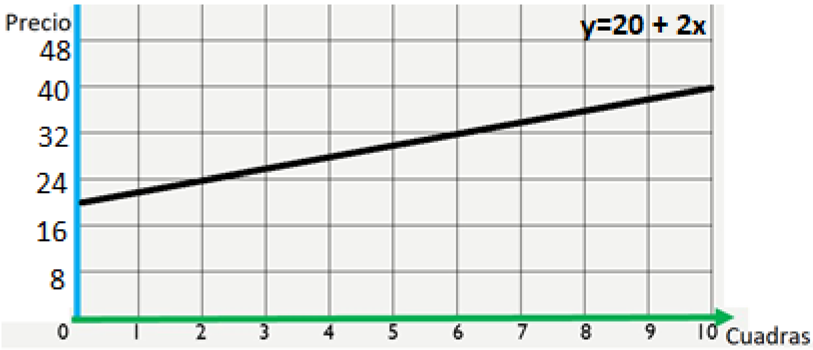
2) Por alquilar una moto, una empresa nos cobra $500 de seguro más un adicional de $2,4 por cada kilómetro recorrido.
   a) ¿De qué manera se puede calcular el precio de acuerdo a los kilómetros recorridos?
   b) Completar la tabla

Kilómetros recorridos	4		13	
Precio ($)		516,8		548

   c) Marcar con una x el gráfico que corresponde a la situación. Justifica tu elección.



3) A continuación, se muestra cómo varía el precio de un viaje en taxi de acuerdo a la cantidad de cuadras recorridas.



a) ¿Cuánto cuesta un viaje de 6 cuadras? ¿Y de 7?

b) ¿Cuántas cuadras se recorren si se paga $40? ¿Y si se paga $300?

c) Si debo viajar 5 km ¿Cuánto me costará el viaje?

d) ¿Cuál es el precio de la bajada de bandera? ¿Y el precio por cuadra recorrida? Explica cómo te das cuenta.

4) Francisco anotó en una tabla lo que habló y pagó en los últimos tres meses.

Minutos hablados	75	95	110
Monto pagado (en $)	170	202	226

a) ¿Cuánto debe pagar Francisco si este mes habla 130 minutos?

b) Si Francisco debe pagar $290 ¿Cuántos minutos ha hablado?

c) ¿De qué forma puede calcular Francisco el precio a pagar de acuerdo a los minutos que habla?

Actividad 1

<u>Objetivos</u>

Que el alumno logre:

- Identificar las variables involucradas: tiempo (variable independiente) y cantidad de combustible que sale (variable dependiente).
- Confeccionar una tabla de valores que evidencie cómo disminuye la cantidad de combustible que hay en el tanque a medida que pasan las horas.

- Formular una expresión simbólica que exprese cómo se modifica la cantidad de combustible que hay en el tanque a medida que pasa el tiempo.
- Representar en un sistema ejes cartesianos la relación observada.

Criterios de evaluación

- Identificación y reconocimiento de las variables independiente y dependiente.
- Cálculo de pares de valores correspondientes.
- Generalización de la relación entre las variables consideradas.
- Lenguaje algebraico.
- Ubicación de las variables sobre los ejes cartesianos.
- Escala utilizada.
- Representación de puntos en el plano.

Actividad 2

Objetivos

Que el alumno logre:

- Expresar a través de una fórmula, la relación entre los kilómetros recorridos y el precio a pagar.
- Calcular el precio a pagar dados los kilómetros recorridos o la distancia recorrida, conocido el precio a pagar.
- Reconocer el tipo de gráfico que representa a la situación y justificar su elección.

Criterios de evaluación

- Identificación y reconocimiento de las variables independiente y dependiente.
- Generalización de la relación observada entre las variables.
- Lenguaje algebraico.
- Cálculo de pares de valores correspondientes.
- Resolución de ecuaciones.

- Elección de una representación gráfica.
- Justificación de la elección realizada.

Actividad 3

Objetivos

Que el alumno logre:

- Leer e interpretar la información contenida en el gráfico.
- Leer e interpretar la información contenida en la fórmula.
- Calcular la cantidad de cuadras o el precio de distintos viajes a partir de la observación del gráfico y/o a partir de la expresión algebraica que relaciona ambas variables.

Criterios de evaluación

- Identificación y reconocimiento de las variables independiente y dependiente.
- Análisis del gráfico.
- Interpretación de los parámetros de la fórmula.
- Cálculo de pares de valores correspondientes.
- Resolución de ecuaciones.
- Interpretación de consignas.
- Formulación de respuestas.

Actividad 4

Objetivos

Que el alumno logre:

- Leer e interpretar la información contenida en la tabla.
- Calcular el precio a pagar de acuerdo a los minutos hablados y los minutos hablados, conocido el precio a pagar.
- Identificar el costo fijo y el precio por minuto, a través de la información brindada en la tabla.

- Expresar en forma simbólica cómo se calcula el precio a pagar de acuerdo a los minutos que se hablen.

Criterios de evaluación

- Identificación y reconocimiento de las variables independiente y dependiente.
- Lectura e interpretación de los datos contenidos en la tabla.
- Generalización de la relación observada entre las variables.
- Cálculo de los parámetros.
- Lenguaje algebraico.
- Cálculo de pares de valores correspondientes.
- Resolución de ecuaciones.

Apéndice G

Entrevistas a docentes

Entrevista N°1

Cursos a cargo: 1°, 2°, 3° y 4°.

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Sí, en la secundaria el Álgebra para el entrenamiento digamos… del razonamiento lógico que es algo fundamental en el esquema de pensamiento de los alumnos y además para representar numerosas situaciones y contenidos de la Matemática y el tema de funciones es muy importante por el tema de las modelizaciones, modelizar ciertos eventos de la vida cotidiana que es importante que los alumnos los aprendan para que el día de mañana puedan llevarlos a su vida cotidiana digamos y a sus otros estudios.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Es importante el pensamiento algebraico para ejercitar el pensamiento lógico, para “algebratizar” digamos el pensamiento y los contenidos. Además, está estudiado que el Álgebra resulta un “arma importante” (no sé cómo se diría) para los problemas de la memoria y todo eso, ejercitar el pensamiento algebraico ayuda también a ejercitar la memoria.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en sus clases?*

En cuanto al Álgebra y las funciones en primero y segundo, se trabaja con ecuaciones, primero descontextualizado, también se trabaja con la función como un modelo matemático, análisis de las gráficas de las funciones a partir de preguntas y la representación básica de funciones lineales.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Cuando se trata de ecuaciones solamente explico cómo se resuelven las ecuaciones y vamos de las menos complejas a las que tienen mayor dificultad. En cuanto a las funciones si les presento distintos gráficos que ellos tienen que interpretar, les hago preguntas para que interpreten y después ya nos metemos en todo lo que es la función, la fórmula, la construcción de tablas y por último la construcción de una función lineal.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

El Álgebra ocupa un lugar importante, aunque por ahí cobra más importancia la parte aritmética. No sé si los alumnos le dan mucha importancia al Álgebra por el hecho de que no entienden por qué tantas letras o su necesidad, su importancia y su aplicación a la vida real, entonces para ellos por ahí resulta una complicación y no le brindan la importancia que requiere.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

La letra que más utilizan los alumnos es la “x” y bueno, se suma la “y” cuando aparece el tema de las funciones. Generalmente cuando se usa alguna otra letra, por ejemplo, para simbolizar alguna propiedad o algo, se usa a, b, c. A los alumnos les cuesta comprender qué simbolizan esas letras, por ahí no comprenden que eso puede ser un número o que pueden ser varios números entonces les cuesta atribuir un significado a las letras. Y es muy común que, a la x, en vez de verla como incógnita lo vean como un “por”, por ejemplo, lean en vez de dos x más tres, lean dos por tres.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Los alumnos presentan varias dificultades en la introducción al Álgebra ya sea por la aparición de letras, no entienden su significado y también porque no entienden la aplicación del Álgebra en su vida cotidiana, por ahí no ven la herramienta de modelización y toda esa parte, entonces no entienden para qué las letras, no entienden cómo van a llevar eso a la vida diaria, no entienden cuál es su necesidad y bueno ahí empieza el conflicto.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Creo que una manera de favorecer la enseñanza y aprendizaje del Álgebra sería buscar problemas en los que ellos deban modelizar o en los que ellos deban plantear ecuaciones a ver de qué manera ellos elaboran esas ecuaciones para que ellos vean su aplicación y sean ellos quienes les asignen letras, por decirlo, a los valores desconocidos o ver de qué manera resuelven eso. Bueno, planificar situaciones de enseñanza y aprendizaje que posibiliten que los alumnos comprendan los contenidos, pero a partir de su aplicación en la vida diaria o de problemas que sean más accesibles a ellos y no presentar una ecuación y simplemente explicarles cómo se resuelve y que ellos lo vean descontextualizado y no comprendan su utilización.

Entrevista N°2

Cursos a cargo: 1°, 2°, 3°, 4° y 5°.

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Si, considero importante el desarrollo de este eje a lo largo de todo el trayecto de secundaria, ya que permite a los alumnos abstraer ideas y verlas desde otro punto de vista. Por ejemplo, si tomamos una proporción directa, por decir una cosa cualquiera, entre el kilaje de un objeto y su precio en el mercado, ellos no sólo pueden verlo gráficamente, sino también, algebraica y numéricamente. De esta manera, podemos incentivarlos a que busquen otros ejemplos y traten de expresarlo en una función, de manera que puedan predecir su comportamiento.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Si lo considero muy importante. Este tipo de pensamiento no sólo les brinda abstracción a los alumnos, sino que además adquieren la destreza de ver y resolver situaciones algebraicas como geométricas o numéricas como algebraicas. Por ejemplo, en un curso de tercer año dando problemas con áreas, ellos pudieron ver el factor común dentro del problema (aunque había pensado dar el tema desde un punto de vista geométrico y numérico), los chicos lo resolvieron usando ese caso de factoreo.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en este curso?*

En tercer año, en general, expresiones algebraicas, operaciones con polinomios, casos de factoreo, función lineal y sistemas de ecuaciones.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Para los polinomios, primeramente, hablamos de términos semejantes y luego se enseñan las operaciones. En cuanto a los casos de factoreo, primero enseño los seis casos y, por último, busco distintas aplicaciones que puedan tener, por lo general utilizo las geométricas y doy finalmente problemas sencillos donde englobo todos los temas trabajados (casos de factoreo y geometría).

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

El Álgebra, como ya mencioné, es importante porque permite a los alumnos analizar los datos que se le presentan de otra manera y logran una mayor abstracción. Sin embargo, considero que, en los primeros años, no se le da esa importancia, ya que, se busca que el alumno en esta etapa se familiarice con el nuevo sistema que enfrenta, con nuevas operaciones, con nuevos conjuntos numéricos que capaz no conocía. Por lo tanto, como docentes nos enfocamos en aritmética y geometría, se deja de lado esta parte, y como mucho se tocan ecuaciones de primer grado con una variable, "buscando el valor de la x". Por todas estas razones creo que el alumno no reconoce su importancia, ya que nosotros no priorizamos otras especialidades de la Matemática, olvidándonos que ellos, trabajarán Álgebra de nivel más avanzado cada año.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

He observado que en primer y segundo año les cuesta asimilar que una letra puede ser un valor cualquiera. El concepto de generalización de las variables les pertenece más a partir de tercer año. En los años inferiores, ellos asimilan en las ecuaciones que deben hallar un valor de x, porque eso ya lo hacían en primaria, pero cuando comienzas a trabajar con funciones, tardan mucho tiempo en asimilar el concepto de generalización, de que las letras pueden tomar cualquier valor y que existe una relación de dependencia. En los años superiores, se observa esta asimilación más arraigada.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Sí, los alumnos presentan dificultades al comenzar con el aprendizaje del Álgebra. Supongo que las razones son las siguientes: asimilan a las letras con objetos y creen que las letras deben tomar solo un valor, por lo tanto, la generalidad es un concepto muy disperso y no visible en sus mentes, aunque nosotros les mostremos donde podemos observar esta generalidad.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Para favorecer la enseñanza y aprendizaje del Álgebra creo que se debe mostrar con ejemplos simples los distintos valores de variable que puede tomar una situación, por decir un ejemplo que se me ocurre, la proporción entre cantidad de harina y cantidad de masa que se obtiene en un receta, luego mostrar que existe una relación la cual se puede expresar matemáticamente, que ellos intenten representar de alguna forma esta situación, como conclusión de la clase mostrar la función y explicar el tema, y por último, incitarlos a que busquen e intenten expresar alguna relación en donde ellos observen la diversidad en los valores de variables de una situación.

Entrevista N°3

Cursos a cargo: 1°, 2°, 3° y 5°.

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Sí, es importante porque el Álgebra es la base y el sustento para todas las demás ramas de la Matemática porque le brinda sus propiedades.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Sí, es importante porque les ayuda a resolver situaciones problemáticas, tanto del Álgebra como de otras ramas.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla?*

En primer año desarrollo todo lo que es ecuaciones que es el tema introductorio al Álgebra y de la parte de funciones doy sólo función de proporcionalidad.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Las actividades son resolución de situaciones prácticas de manera individual y grupal.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

Para mí el Álgebra en los primeros años es central y fundamental, pero no creo que los chicos reconozcan su importancia.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

Los alumnos llegan a ver a las letras como incógnitas, variables y números generalizados, pero les cuesta mucho por el tema de la poca abstracción que tienen.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Les resulta difícil el uso de las letras porque es un cambio muy drástico con respecto a la Aritmética y como todo cambio, siempre tiene inconvenientes y dificultades.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Creo que se puede favorecer con juegos lúdicos y didácticos y estrategias y métodos diversos de aprendizaje como el heurístico.

Entrevista N°4

Cursos a cargo: 1°, 2°, 3°, 4° y 5°

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Sí, el Álgebra es la rama más importante de las Matemáticas, su uso está en toda nuestra vida diaria, es útil para simplificar muchos trabajos y cuentas que usamos en todas las cosas.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Es importante el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes porque les permite resolver problemas y pensar en forma crítica lo cual lo ayudará a tener éxito en el trabajo y en la vida diaria.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en este curso?*

Los temas que desarrollo en los distintos cursos son: ecuaciones de primer grado, proporcionalidad directa e inversa, funciones (lineal, cuadrática, exponenciales, logarítmicas), factorización de polinomios, sistemas de ecuaciones lineales, etc. Dichas temáticas con sus correspondientes ejercicios y problemas de aplicación.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Es complicado pasar de unas Matemáticas basadas en la Aritmética a la generalización de esta mediante símbolos, generalmente letras. Esa abstracción que requiere no es sencilla, para ello es sustancial buscar estrategias didácticas, por ejemplo, actividades lúdicas que le den sentido a esta rama de la Matemática.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

El lugar que ocupa el Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria… no tiene un lugar preponderante. Los alumnos le prestan poco interés, lo ven como algo incomprensible y carente de sentido.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

La mayoría de los estudiantes tratan las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Los estudiantes presentan dificultades en el inicio del aprendizaje del Álgebra debido al uso de los símbolos, al miedo de escuchar la palabra Álgebra y que es una rama de la Matemática difícil de estudiar.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Una de las maneras más convenientes para favorecer la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria es a través de la resolución de problemas, dado que el tratamiento que se le da a los mismos permite identificar las distintas pautas o caminos a utilizar en la búsqueda de una posible solución. A su vez deja entrever las dificultades que se pueden presentar a lo largo de la búsqueda de una respuesta al cuestionamiento planteado.

Entrevista N° 5

Cursos a cargo: 1°, 2°, 3° y 5°

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Sí, muy importante. El Álgebra y las funciones nos permiten modelizar, generalizar.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Sí, van de la mano con el razonamiento lógico matemático. El pensamiento algebraico permite al alumno captar, describir y explicar la variación de distintos objetos.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en este curso?*

En primero: ecuaciones de primer grado con enteros.

En segundo: ecuaciones de primer grado con racionales. Regla de tres. Funciones. Concepto. Interpretación de gráficos y función de primer grado.

En tercero: Polinomios. Función de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En quinto: Función. Estudio completo de la función. Función definida por tramos. Función compuesta. Trigonometría.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Actividades donde los alumnos puedan analizar, representar y extraer conclusiones. Por ejemplo, problemas, análisis de tablas y gráficos. Situaciones cotidianas.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

En los primeros años es mínima, y no, no reconocen su importancia. Es como mecánico.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

En los primeros cursos el uso de las letras es mínimo y su interpretación, también. En los cursos superiores es mayor el uso y significado y los alumnos pueden usar para modelizar alguna situación, para generalizar.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Sí, no entienden que Matemática tenga letras. El uso de letras posibilita la abstracción. El alumno cuando deja de ver resultados concretos comienza a tener dificultades.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Con paciencia. Desde la modelización de actividades concretas, yendo de lo concreto a lo abstracto, de lo particular a lo general. Y con una aplicación progresiva. No olvidemos que casi toda su escolaridad primaria es concreta.

Entrevista N° 6

Cursos a cargo: 1°, 2°, 3°, 4° y 5°

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Sí, considero importante porque ayuda a que los alumnos rompan la estructura que se forma con Aritmética, salir de esa estructura de solamente trabajar con números, al incluir letras los alumnos van rompiendo esa estructura.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Sí, es muy importante porque los ayuda a formar generalidades, que ellos por ahí están habituados en su vida cotidiana, pero al pasarlo a la matemática es más complejo, pero ellos están acostumbrados en su vida cotidiana, lo que falta por ahí es darle la estructura matemática. Pero sí es importante.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en sus clases?*

Trabajamos primero con ecuaciones donde los chicos aprenden a trabajar con una incógnita y a partir de ahí trabajamos con funciones, donde ya tenemos dos variables, una variable dependiente y una variable independiente, donde ellos pueden analizar todo un recorrido por medio del gráfico y analizar qué pasa en cada punto. Estos dos temas: ecuaciones y funciones por medio de problemas.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Creo que lo respondí en la pregunta anterior: problemas. Primero trabajamos de forma sencilla cómo graficar una función, cómo resolver una ecuación y después si, vamos a la parte de problemas donde ellos tienen que armar la ecuación, resolver y lo mismo con las funciones.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

Ocupa siempre el segundo lugar, el primer lugar siempre le corresponde a Aritmética y el segundo lugar a Álgebra. A los alumnos por ahí les cuesta reconocer su importancia porque ellos quieren trabajar con números específicos, donde empezás a trabajar con letras a ellos les cuesta, prefieren por ahí darle un número particular de manera que sea más fácil el cálculo, pero despacito,

despacito lo van incorporando y empiezan a ver que está bueno generalizar y que pueden utilizar para distintos casos un mismo problema.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

El uso de las letras por parte de los alumnos es un medio para llegar a un valor numérico, lo usan únicamente para a partir de la generalización darle un valor específico, nada más. Lo toman como un medio para llegar al valor.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Sí, presentan muchas dificultades al comienzo. Ellos vienen con la estructura de la Aritmética, de trabajar con valores concretos, entonces al empezar a introducir letras y más, cuando en algunos casos todavía no interpretan bien la parte Aritmética, se complica mucho empezar a generalizar y trabajar con letras, para ellos es complicado, es como que empezás a mezclar Lengua y Matemática y en realidad, no tiene nada que ver con Lengua, seguimos trabajando dentro de Matemática, pero con letras y aplicando las propiedades.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

La manera de favorecer… y todo depende del lugar, de los alumnos, del docente. Creería que es, llevando recursos nuevos, actividades por ahí más innovadoras, pero todo depende del grupo de alumnos, porque en algunos casos llevás algo innovador y se dispersan mucho y en esos casos te conviene trabajar tradicionalmente. En otros casos sí, llevás cosas innovadoras y los chicos se enganchan y les resulta más atractivo para ellos porque eso es lo que tenemos que buscar que sea atractivo para ellos, entonces le prestan un poquito más de atención, porque donde es siempre lo mismo, ellos se aburren y más en lo que es álgebra que empiezan a trabajar con letras, o sea, de Matemática, números ir a letras, "están todos locos estos profesores" pero es la única forma. Depende mucho de los docentes, de cada grupo, como ya dije. En algunos casos puede funcionar y en algunos casos no. Pero la receta no existe, depende de nosotros, del día a día.

Entrevista N° 7

Cursos a cargo: 1°, 3° y 4°

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Me parece importante sí, este eje porque uno parte por ahí de situaciones concretas de aplicaciones a la vida cotidiana y después puede generalizar utilizando el lenguaje algebraico y también ayuda a ordenar el pensamiento, a la modelización en cursos más altos.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Me parece que sí por una cuestión de justamente, abstracción y para conocer los objetos matemáticos en sí, no siempre aplicados, para tener como herramienta para aplicar, pero saber que eso es un objeto matemático y también para ordenar un poco el pensamiento, pero más que nada por el tema de la abstracción me parece.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en sus clases?*

En primero, ecuaciones y después engancho eso con ángulos y con triángulos y cuadriláteros. En tercero, función lineal y cuadrática (que a veces llego a dar) y polinomios, expresiones algebraicas. Empiezo con expresiones algebraicas generales, ahí explico enteras, voy a polinomios y ahí factoreo, hasta el quinto caso suelo dar. Y en cuarto, si no llegamos a dar función cuadrática en tercero doy en cuarto y ahí, trigonometría y logaritmo. Si llego, función logarítmica.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Trabajo en primero, tercero y cuarto. En primer año lo que es ecuaciones con perímetro de triángulos y cuadriláteros y también con la suma de ángulos interiores de un triángulo. En tercer año, lectura de gráficos de funciones que relacionen edad y estatura, combustible y kilómetros, uso de ciertos elementos en una receta, o los chicos de un curso y su fecha de nacimiento, todas esas cuestiones, para pasar después a la abstracción: función lineal, rectas paralelas y perpendiculares. Y en tercero también polinomios, pero eso sí abstracto. Y en cuarto, trigonometría, primero sí todo abstracto y después aplicaciones a problemas. Ah… y también logaritmo.

Por lo general en primero, tercero y en cuarto, aplicaciones a problemas cotidianos sería más que nada cuando se trata de figuras, de los cuadriláteros como rectángulo y cuadrado y en tercero, el tema de funciones, la aplicación a problemas prácticos y en cuarto, trigonometría, la resolución de los triángulos aplicados a las situaciones.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

Ocupa muy poco lugar, porque más que nada se dan números y operaciones y aplicaciones, porque uno le pone algo algebraico, una letra o algo y parece que no pueden entender el significado de la generalidad, de que es variable o que puede representar a cualquier número en el caso de una propiedad.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

Los alumnos usan muy poco las letras, por ahí en tercero que se dan polinomios es donde más usan o anteriormente, le asignan siempre a las letras como incógnitas y después en tercero en general es eso de manzanas, le atribuyen significados específicos para poder hacer las operaciones.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Muchísimas dificultades y se me hace que lo más difícil para ellos es la abstracción, entonces ellos necesitan algo concreto y no pueden simplemente imaginarse que son objetos, objetos matemáticos nomás. Aparte de que no les interesa demasiado y no se esmeran mucho.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Se me hace que se podría favorecer comenzando con ejercicios prácticos por ahí algo concreto y después a partir de ahí generalizar, que en realidad yo muy pocas veces hago eso. En alguno que otro tema si le doy a ellos, a los chicos para que, un juego o algo, pero sino uno va directo al tema, a lo abstracto, en general por el tiempo. Pero, para favorecer la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra se me hace que a partir de un problema concreto y ahí generalizar como para que ellos después tengan en su mente como ejemplo pero que sepan que también se da para cualquier campo.

Entrevista N° 8

Cursos a cargo: 1°, 3° y 5°

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Sí, porque permite trabajar con problemas de la vida cotidiana, con datos reales muchas veces y creo que favorece el razonamiento del alumno, o sea, relaciona más fácil con datos reales.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Sí, porque no sólo favorece el razonamiento lógico, sino que es la base para que puedan aprender conceptos más difíciles.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en sus clases?*

Gráficos, ejes, ubicación de puntos en el plano, variables, tipo de funciones, clasificación de funciones. En física, MRU y MRUV, etc.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Gráfica de funciones por medio de tablas y a través de fórmulas, situaciones problemáticas.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

Ocupa un lugar fundamental, porque es la base de la Matemática, pero los alumnos no, no reconocen su importancia… porque todo aquello que les genere pensar o razonar, no les agrada.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

Sólo lo utilizan en ecuaciones y fórmulas y el único significado que le dan, el 80% es que, a cada letra le asignan un único valor, no la ven como variables.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Sí, totalmente. Una de las razones es la mala base que reciben o tienen en primaria. Les cuesta el vocabulario matemático en sí.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Enseñando con propiedad desde pequeños, con el vocabulario matemático adecuado desde los primeros años, dándoles la posibilidad de que justifiquen y defiendan sus razonamientos siempre.

Entrevista N° 9

Cursos a cargo: 1°, 3° y 5°

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

El Álgebra es la base de todas las demás disciplinas, establecemos relación entre números, suma, resta, multiplicación, las propiedades, y el Álgebra es la base de todo. Entonces, por ese mismo motivo me parece que es fundamental el Álgebra. Y funciones, sí, me parece que es muy importante, porque se pueden establecer relaciones concretas en ejemplos cotidianos donde los chicos lo que pueden hacer es a través de una fórmula o una función, ellos pueden definir ciertas características o comportamientos del tema en cuestión que están analizando. Por ejemplo, en física, cuando hablamos de movimiento rectilíneo uniforme no es más que una ecuación y esa ecuación es una recta y entonces, si ellos entienden el concepto de variable, todas esas cuestiones, me parece que les va a resultar mucho más sencillo el análisis del ejercicio en sí y eso es funciones, análisis de funciones, crecimiento, decrecimiento, etc.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Sí, para mí sin duda que sí. Para mí personalmente Matemática es razonar, no pensar y responder de manera… de memoria o lo que sea, entonces que ellos puedan desarrollar un pensamiento algebraico, es decir, que puedan entender la relación que hay entre números, entre conjuntos, operaciones, ese pensamiento que de alguna forma le abre la cabeza es importantísimo.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en sus clases?*

Los temas que desarrollo son en primer año… este año estuve probando las propiedades apuntando a estructura de anillo, pero no tan complejo, asociatividad, conmutatividad, cual es el neutro de la suma, así pero básico. El año que viene por ahí, si tengo un primer año, me gustaría dar un poquito más completo eso, no al nivel de la facultad, pero si un poco más completo y también las propiedades de la igualdad, porque los alumnos trabajan la igualdad como si fuese “un nada”, también eso. En tercer año, trabajo el concepto de función. Justamente, la semana antepasada empezamos con eso y después seguimos con función lineal y todo eso. Así que eso es lo que estoy trabajando por el momento, pero creo que son temas que están vinculados implícitamente durante todos los cursos y durante todo el curso, porque están sí o sí.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

En cuanto a las actividades que propongo, en primer año lo que hice fue básico y tradicional, le planteé la propiedad y con ejemplos y contra ejemplos le dije que prueben si se verifica eso, y es todo un tema porque ellos como que no entienden el lenguaje simbólico y bueno como que se me complicó un poco. Quizá debería empezar con un ejemplo numérico y después ir a lo más formal, más a lo abstracto, pero hago eso, ejemplos con números y que ellos vayan probando, si se verifica o no. En cuanto a funciones, lo que hice fue darle un ejemplo, un concreto de un taxista que llegó a tal lado, cobra tanto la bajada de bandera, tanto por cuadra y una chica tenía que ir de un lugar a otro, como que ellos razonen, cuánto paga por cinco cuadras, por diez cuadras, si pagó tantos pesos, cuántas cuadras recorrió, y ahí que ellos vayan estableciendo variables, por ejemplo, le pregunto: ¿el precio depende de las cuadras o las cuadras dependen del precio? Y ahí como que establecen la relación entre variable independiente, dependiente y finalmente les pido que me armen una fórmula que permita predecir el precio que va a pagar María creo que se llamaba, el nombre que le puse a la chica del problema, en función de cuántas cuadras hace, pero le digo en forma implícita eso y ahí como que vamos sacando definiciones de variables dependiente, independiente y todo ese tipo de cosas.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

Para mí no, los alumnos no reconocen su importancia y ese creo que es el desafío para nosotros, que ellos puedan ver que, si bien no es quizás, muy atractivo o son relaciones que son básicas, ellos a veces te dicen “eso es muy fácil” y después no te hacen los ejercicios, entonces para mí no, no reconocen la importancia.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

Con respecto al lenguaje simbólico, a las letras y todo eso, me parece que para ellos no es nada, es una letra nomás, porque, por ejemplo, cuando resolvés una ecuación dice x igual a algo, eso te está diciendo que el valor de x es cuatro, por ejemplo y ellos me parece que no logran darse cuenta de eso o cuando operan, por ejemplo, en tercer año me paso que estaba dando ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones, perdón y me suman x más cuatro, cinco x, no podés sumar, entonces no logran percibir que eso es un número, sólo que no se sabe su valor.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

Y si, los alumnos evidentemente presentan muchas dificultades al momento de aprender Álgebra, y… ¿cuál creo que pueden ser las razones? Yo desde mi humilde punto de vista creo que la principal razón es que no se le enseña a razonar, por ejemplo, se le enseña las tablas, pero de memoria, no se le enseña que cinco por cuatro es cinco veces cuatro, se le enseña que cinco por cuatro veinte y listo, pero… ¿Qué significa? O las potencias ¿Qué significa? Y vos le decís y ellos siempre buscan la parte más mecánica, no la del razonamiento. O te preguntan, ¿Profe, qué hay que hacer acá? Y vos tenés diez por cinco menos dos por tres, y primero hacer las multiplicaciones y después sumar, como que es bastante obvio en la operación, pero ellos siempre te están preguntando qué hacer y no logran pensar o leer lo que el ejercicio le está pidiendo que hagan, entonces creo que esas son las razones, el pensamiento y el estar dependiendo siempre del profesor y no aventurarse, por llamarlo de alguna manera, a resolver un ejercicio, y si sale mal, mal o bien, bien. Y ese creo que es otro factor, siempre están buscando que esté bien y no logran captar que el equivocarse, el errar es parte del aprendizaje.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Justamente estos días estuve pensando bastante eso, cómo hacer que los chicos realmente se interesen por el aprendizaje y… me parece que hoy en día los chicos buscan un ejemplo práctico, en lo aplicado a algo concreto, hacer fórmulas, establecer relaciones pero que no quede sólo en un cálculo sobre la hoja sino llevarlo a la práctica, construyendo algo, no sé, algo que le dé más significado al cálculo que ellos hacen, yo creo que por ahí viene la mano, pero no sé. Hay que estudiar mucho para eso y ver los intereses de cada grupo, es muy difícil de determinar.

Entrevista N° 10

Cursos a cargo: 1°, 2°, 4° y 5°

1) *¿Considera importante el desarrollo del eje: Álgebra y funciones? ¿Por qué?*

Sí, es importante el desarrollo de dicha unidad debido a que ésta forma parte de una nueva visión del razonamiento: permite al alumno representar situaciones, generalizar, formalizar determinados patrones o regularidades y modelizarlas.

2) *¿Es importante desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos? ¿Por qué?*

Sí, es importante porque esto le permite razonar, analizar y resolver situaciones con la ayuda de símbolos y números.

3) *¿Qué temas vinculados a este eje desarrolla en sus clases?*

En tercer año de secundaria, por ejemplo, se enseña función lineal, donde a partir de situaciones problemáticas el alumno debe modelizar la misma en forma algebraica y luego realizar su representación gráfica.

4) *¿Qué tipo de actividades propone habitualmente en clase para desarrollar estos temas?*

Propongo situaciones problemáticas donde deben representar a las mismas en forma simbólica y luego resolver, ya sea ecuaciones, inecuaciones, funciones lineales, cuadráticas y exponenciales. En los casos en que se pueda, también solicito que realicen una representación gráfica.

5) *¿Qué lugar ocupa el Álgebra escolar dentro de los primeros años de la escuela secundaria? ¿Los alumnos reconocen su importancia?*

Creo que ocupa un lugar importante porque el docente debe buscar la manera que el alumno aprenda a aplicar el Álgebra, a desarrollar este tipo de razonamiento. Una vez que se enseña el lenguaje coloquial y simbólico, ecuaciones e inecuaciones, esto se aplica en el desarrollo de los contenidos de la Geometría y luego se trabaja esto al desarrollar la unidad de números racionales también.

6) *¿Cuál es el uso de las letras por parte de los alumnos y qué significados les atribuyen?*

En primer año los alumnos saben que tienen que usar letras (cualquiera sea) para hacer referencia a una incógnita, un valor desconocido y que a partir de determinadas operaciones hay que hallar su valor.

7) *¿Los alumnos presentan dificultades en el comienzo del aprendizaje del Álgebra escolar? ¿Cuál cree que pueden ser las razones?*

En un principio sí, cuesta mucho, porque ellos no están acostumbrados a usar números y letras. Me parece que la causa de esto es la falta del trabajo del álgebra en la primaria. Ellos piensan que matemática es solo números y de repente que, además, haya letras es un mundo desconocido para ellos.

8) *¿De qué manera cree usted que puede favorecerse la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria?*

Desde mi punto de vista debería enseñarse más a partir de situaciones problemáticas. Creo que, si se trabaja de esta manera, el alumno aprende a modelizar situaciones y de esta manera aprende a desarrollar la lógica a partir de expresiones más generales.

Apéndice H

Entrevistas a alunos

CEP N° 43

Entrevista N° 1

Curso: 1er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, las letras son importantes porque nos permiten generalizar.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Hemos trabajado con ecuaciones, incógnitas y expresiones algebraicas. Lo que me acuerdo es que en cada ecuación tiene que haber una igualdad que contenga una incógnita y la incógnita era representada con una letra.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Resolvimos ecuaciones, problemas con incógnitas y perímetros.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí me resultan significativos y es muy importante trabajar a partir de ellos.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Lo que entiendo de álgebra es que estudia números, letras y signos.

Entrevista N° 2

Curso: 1er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, las letras son importantes porque nos permiten representar las incógnitas.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, trabajamos con ecuaciones, incógnitas, y expresiones algebraicas. Las ecuaciones eran las que tenían una igualdad y una incógnita, que era un valor desconocido que se representaba con una letra.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Resolvimos ecuaciones, problemas, valor numérico y ejercicios donde había que calcular el perímetro de una figura resolviendo ecuaciones.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, me resulta muy significativo.

5) *¿Qué entiendes por álgebra?*

Que estudia números, letras y signos.

Entrevista N° 3

Curso: 2do año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, considero importante el uso de letras en clase porque nos facilita la resolución de los problemas y ejercicios.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Recuerdo haber trabajado con ecuación, incógnita, expresión algebraica. No recuerdo haber trabajado con variable ni con función.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Recuerdo haber realizado con respecto a estos temas: sumas, restas, divisiones, multiplicaciones, raíces, potencias.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, creo que es significativo porque nos ayuda a entender con más facilidad los ejercicios.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Álgebra para mí, es un conjunto de números, letras y signos.

Entrevista N° 4

Curso: 2do año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, considero importante el uso de las letras durante las clases de Matemática porque así es más fácil resolver las operaciones debido a que se abrevian o reemplazan los números por letras.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Recuerdo haber trabajado con ecuaciones solamente. Los demás temas no recuerdo haber dado. De las ecuaciones recuerdo que es el ejercicio donde teníamos que buscar cuánto valía x.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

En varias clases trabajamos con fotocopias, hacíamos trabajos prácticos, trabajos en grupos, pasar a resolver al pizarrón los ejercicios.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, me resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática, ya que así puedo sacarme alguna duda que tenga sobre el tema.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Entiendo que es un ejercicio que combina números y letras.

Entrevista N° 5

Curso: 3er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, considero muy importante porque representa un valor desconocido de una situación.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, he trabajado con los siguientes temas. Ecuación: es una igualdad que hay un valor desconocido llamado incógnita. Incógnita: se representa a través de una letra, en general la x. Expresión algebraica, sería todo lo que es matemáticas: letras, números y signos. Función: es una relación entre dos variables, la variable independiente que se ubica sobre el eje “x” y la variable dependiente sobre el eje “y”.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Situaciones problemáticas, gráficos, fórmulas y los ejes cartesianos.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, me parece importante.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Lo que entiendo es todo lo que se da en Matemáticas, letras, números, valores.

Entrevista N° 6

Curso: 3er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, porque por ejemplo la x sirve como para un número que no conocemos.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, hemos trabajado con todos esos temas.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Trabajamos con fórmulas, tablas y gráficos.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Me cuestan los problemas, pero es importante trabajar con ellos sí.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Álgebra sería todo lo que es Matemática, letras, símbolos y números.

Entrevista N° 7

Curso: 4to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, ya que esto se utiliza de muchísimas maneras para ayudarnos y acortan muchos problemas matemáticos.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, he trabajado estos temas…

Ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que contiene una o más variables.

Incógnita es un elemento de una expresión matemática que permite describir una propiedad.

Expresión algebraica es una combinación de letras, números y signos.

Variable es un símbolo que constituye un predicado, fórmula, algoritmo o una proposición.

Función es una relación que se da entre dos conjuntos.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Si hemos realizado muchas actividades: ejercicios, problemas, entre otros.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí es importante ya que así ponemos en práctica lo dado. Y entendemos mejor cada tema. Si ya que a partir de un problema simple nos explica claramente el tema dado.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Sé que es una rama de la Matemática que estudia la combinación de elementos como ser números, letras, entre otros.

Entrevista N° 8

Curso: 4to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, considero importante su uso ya que estas nos sirven de numerosas formas, tales como: representar un número cuyo valor varía (evitando así tener que dar numerosos ejemplos) o representar una incógnita.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí hemos trabajado estos temas.

Ecuación: La ecuación era una igualdad que existía entre los dos miembros de esta, en los cuales se encontraban operaciones entre números y letras, estas últimas eran la incógnita, cuyo valor se descubría al finalizar el ejercicio.

Incógnita es un valor que no conocemos, que generalmente se representa con una indeterminada.

Expresión algebraica es una combinación entre números y letras, las cuales están ligadas entre sí con diferentes operaciones como sumas y restas.

Variable son valores que pueden cambiar dependiendo de otros.

Función es una relación de dependencia que existe entre dos variables, una era la dependiente y la otra, la independiente. A cada valor de la variable independiente, le correspondía un único valor de la variable dependiente, de modo que, a medida que cambiaban los valores de x también cambiaban los valores de y.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Recuerdo que con cada uno de estos temas realizamos numerosos ejercicios y problemas y analizamos diferentes situaciones.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, me resulta muy significativo ya que nos sirven para poner en práctica lo conceptual y puede servirnos como ejemplo para darnos cuenta de cómo se verifica lo planteado en una fórmula, concepto o simplemente para comprender un tema a partir de situaciones cotidianas.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Por Álgebra entiendo que es una rama de la Matemática, la cual abarca todo lo que trate de operaciones con letras y simbología que es representada con estas, para generalizar.

Entrevista N° 9

Curso: 5to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, muy importante ya que nos permiten conocer cifras o resultados a través de dichos cálculos que no sabemos en números reales y/o enteros.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, los he trabajado. Recuerdo que las ecuaciones eran ejercicios donde debíamos despejar la x, y me acuerdo que trabajamos también con sistemas de ecuaciones donde teníamos cinco métodos y trabajamos tres de ellos. Ah… y expresiones algebraicas donde trabajamos con los polinomios, si mal no recuerdo. De los demás temas no me acuerdo mucho.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Resolvíamos ecuaciones, sistemas de ecuaciones y operaciones con polinomios.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, muy significativo ya que sólo por medio de la práctica se puede llegar a aprender.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Todos los temas que están representados por letras.

Entrevista N° 10

Curso: 5to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí considero importante porque muchas veces facilita y hace más fácil la comprensión de los temas.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, he trabajado todos los temas…

En las ecuaciones primero se hace la distributiva multiplicando lo que está entre paréntesis hasta llegar al despeje y llegar a un resultado.

Incógnita, expresión algebraica y variable, no sé cómo explicar.

Una función le hace corresponder a cada valor de la variable “x”, solo un valor de otra variable “y”.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Si algunos: función lineal, ecuación de la recta que pasa por dos puntos, la parábola, intersección de rectas.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, porque muchas veces en la vida cotidiana se necesita algunos de esos conocimientos dados en el trayecto de la secundaria, por eso es importante trabajar a partir de ellos.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Está formada por números vinculados por operaciones, algunos son constantes y otros variables, también pueden tomar diferentes valores que son designados por letras.

Apéndice I

Entrevistas a alumnos

EPET N° 50

Entrevista N° 11

Curso: 1er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, considero importante el uso de las letras en las clases de Matemática porque con las letras se pueden expresar diferentes números, por ejemplo, n puede ser cualquier número.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Durante las clases de Matemática he trabajado con incógnita y expresión algebraica. Por ejemplo, de lenguaje simbólico recuerdo que se trata de los números que son un símbolo. La incógnita se trabajaba con un valor que no se conocía que se representa con una “x”.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Los tipos de actividades que desarrollamos en clase en torno a estos temas fueron:

Potencias y raíces, lenguaje simbólico, lenguaje coloquial, suprimir paréntesis y resolver, números enteros, operaciones combinadas, etc.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, me resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de matemática. Si creo que es muy importante trabajar a partir de ellos.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Entiendo por Álgebra que se trata de ejercicios como ser: ecuaciones y lenguaje simbólico, suprimir paréntesis y resolver, etc.

Entrevista N° 12

Curso: 1er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí considero importante el uso de las letras en clase de Matemáticas porque indican un número general.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

En las clases de Matemática he trabajado los siguientes temas: ecuación, incógnita, expresión algebraica. No he trabajado variable ni función.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

En torno a estos temas recuerdo haber desarrollado valor numérico de una expresión algebraica, cálculos combinados, potencias y raíces.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, me resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática, porque si trabajas a partir de ellos se puede facilitar al momento de tener un examen.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Entiendo por Álgebra que es lo que se transmite a partir del lenguaje simbólico, las ecuaciones, etc.

Entrevista N° 13

Curso: 2do año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Yo sí considero que el uso de las letras durante las clases de Matemática es muy importante ya que en la parte teórica explica muy bien para la resolución de ejercicios y todo el tema.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Si trabajé con ecuaciones, incógnitas y expresiones algebraicas. De las expresiones algebraicas estamos dando ahora y ecuaciones también, no es que me acuerdo mucho, pero me manejo igual.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Por ahí en las ecuaciones descubriendo el valor de x. En las actividades que estamos haciendo en torno a estos temas sería… resolvimos problemas que requerían muchos ejercicios matemáticos.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, es muy importante porque nos enseña a comprender el texto y a saber sacar datos del problema y también a comprender muchos ejercicios.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Álgebra creo que es la parte de la Matemática que estudia casi todo en general, que también puede ser representada con signos, según lo que entiendo.

Entrevista N° 14

Curso: 2do año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, considero importante el uso de las letras en Matemática porque aprendemos muchas cosas que no sabíamos.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, hemos trabajado con esos temas, las ecuaciones son las igualdades que contienen incógnitas representadas por letras.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Recuerdo que resolvimos ecuaciones.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, me resulta significativo, creo que es importante trabajar con ellos porque a partir de eso aprendemos cómo hacer y resolver.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

No sé.

Entrevista N° 15

Curso: 3er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Las letras se consideran importante porque marcan una incógnita, un valor o un eje.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Trabajé con ecuaciones que se representan con la letra x. Resolver una ecuación significa hallar el o los valores x. Una incógnita es un valor identificado, al que hay que hallar un valor específico.

Las funciones serían cada valor de la variable independiente que le corresponde un único valor de la variable dependiente, las variables serían la independiente y la dependiente, por ejemplo, al aumentar el valor de “x” puede ocurrir que el valor de “y” aumente, entonces la gráfica aumenta, o disminuya, entonces la gráfica disminuye o se mantenga igual, entonces la gráfica es constante.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Recuerdo que trabajamos con ejes cartesianos, con gráficos, con función, expresión algebraica, ecuaciones, lenguaje simbólico, lenguaje coloquial, interpretación de gráficos.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí me resulta significativo trabajar con ejercicios y también con problemas para pensar más.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Entiendo por Álgebra combinaciones de problemas matemáticos que ejercitan tus habilidades para resolver complejos problemas que hacen pensar mucho.

Entrevista N° 16

Curso: 3er año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

El uso de las letras vendría a ser importante porque vendría a ser la incógnita del problema.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Las ecuaciones vendrían a ser igualdades que contienen incógnitas, generalmente representadas por la letra x.

De funciones me acuerdo que trabajamos la función de proporcionalidad directa y la inversa.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Las ecuaciones íbamos resolviendo el problema y verificando al lado, si estaba bien. Más o menos eso me acuerdo.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Y resulta muy significativo la resolución de problemas en las clases si y es bastante importante la verdad, así podés aprender mejor.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

El Álgebra vendría a ser la rama de la Matemática que estudia a ciertos elementos en ciertas reglas, algo así.

Entrevista N° 17

Curso: 4to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Para mí es muy importante el uso de las letras en Matemáticas porque si se explican los ejercicios solo con ejemplos de… como un ejemplo de un ejercicio al momento de que vos te olvides como se hacía el ejercicio no tenés la explicación escrita de como se hace paso por paso y con las letras es mucho más fácil porque en alguna parte sabes por dónde empezar.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Si trabajé esos temas, pero no me acuerdo cómo explicar.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Tampoco me acuerdo cómo explicar.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Si, para mí es muy efectivo porque los chicos es como que se enfocan más y prestan más atención y es muchísimo más lindo, se aprende muchísimo más rápido, o sea, te interesa hacer el ejercicio, porque pasas al frente y si te equivocás, aprendés, es mucho más lindo.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

No sé cómo definir al Álgebra, creo que no di.

Entrevista N° 18

Curso: 4to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, los considero importante debido a que nos ayudan a representar varios números, también nos ayudan a armar una fórmula sin ningún número en común, también nos ayudan a saber dónde hay una incógnita, depende en qué parte están las letras podemos saber qué hacer para resolver esa incógnita y eso.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Si, hemos dado algunos. Las ecuaciones… ecuaciones exponenciales y logarítmicas, no me acuerdo muy bien.

Y me acuerdo de las variables que una era independiente, la otra dependiente, no me acuerdo muy bien.

De función dimos… función cuadrática y… no me acuerdo.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Hay muchas actividades, pero no me acuerdo los nombres, a mí me dan las actividades, yo me las aprendo ahí nomás o sea puedo hacer todo bien, pero no sé explicar cómo hago y ni sé el nombre qué tiene, ahí en el instante si… puede que sepa el nombre, pero no sé cómo contarle.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Para mí me resulta bastante significativo porque nos dan un problema, tenemos que leer el problema y entender el problema y no que te digan que tenés que hacer esto y esto, teniendo el problema ahí, que podés leerlo. Es importante sí, por ese motivo, porque tenés que leer y saber qué vas a hacer.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Son las operaciones con gráfico creo.

Entrevista N° 19

Curso: 5to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Sí, es importante porque si no para representar a una variable deberíamos escribir todos los números que entran en ella.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Sí, los he trabajado. Recuerdo que en las ecuaciones solíamos despejar la x para conocer su valor. También me acuerdo que cuando trabajábamos con funciones hacíamos una tabla y le dábamos un valor numérico a “x” y después debíamos marcarlo en ejes cartesianos. Y cuando trabajábamos con expresiones algebraicas nuestro profe nos daba cierto valor para una determinada letra y luego nosotros teníamos que reemplazarla para poder resolverlo.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Hacíamos ecuaciones, inecuaciones, resolución de polinomios, funciones cuadráticas.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

Sí, porque es en los problemas en donde vemos que podemos aplicar a la realidad lo que nos enseñan los profes en el aula.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Es parte de la Matemática que combina números, letras y signos.

Entrevista N° 20

Curso: 5to año

1) *¿Consideras importante el uso de letras durante las clases de Matemática? ¿Por qué?*

Si considero importante el uso de las letras en clase porque por ejemplo si no conocemos… no tendríamos como poner qué clases de números no conocemos, entonces es mejor usar las letras, con “x”, con “y” cuando queremos resolver un ejercicio, es muy importante por ese motivo.

2) *Durante las clases de Matemática, ¿has trabajado los siguientes temas? Ecuación, incógnita, expresión algebraica, variable, función. ¿Qué recuerdas de cada uno de ellos?*

Si he trabajado con esos temas. De las ecuaciones recuerdo que es igualdad entre dos expresiones, eso es lo que recuerdo. También incógnita, que es el elemento constitutivo de la expresión matemática, eso es lo que recuerdo de la incógnita. Después de las expresiones algebraicas es que era una combinación de letras, números y signos de operaciones, era todo ese tipo de cosas. La variable también es un símbolo constituyente de una fórmula o algo así era, que hablaba de la variable y todo eso. Bueno también después función, creo que habíamos dado función si… y era tipo que el valor de la primera depende del valor de la segunda, eso me acuerdo, que el valor de una dependía del valor de la otra.

3) *¿Recuerdas qué tipo de actividades desarrollaron en clase, en torno a estos temas? ¿Podrías contármela?*

Realmente no es que me acuerdo mucho, o sea no me acuerdo directamente nada de lo que dimos en clase anteriormente de los ejercicios. Sé que ahora estamos dando demasiada función, pero de los demás no me acuerdo mucho.

4) *¿Te resulta significativo la resolución de problemas durante las clases de Matemática? ¿Crees que es importante trabajar a partir de ellos?*

La verdad es que sí, me resulta muy significativo que los profes nos den ejercicios o problemáticas como para que podamos desarrollar nuestra mente por sí solos porque si todo el tiempo están encima de nosotros o el alumno todo el tiempo le llama al profesor y el profesor va porque el alumno le llama, uno no entiende por sí solo lo que tiene que hacer, siempre el profesor le está diciendo lo que tiene que hacer y sería bueno que los propios alumnos descubran qué problema tienen que resolver, que es lo que tienen que hacer y así desarrollar su mente y entender un poco mejor.

5) *¿Qué entiendes por Álgebra?*

Por Álgebra entiendo que es una rama de la Matemática y que emplea números, letras y signos y bueno si tiene todo eso, se puede resolver mejor el ejercicio.

Apéndice J

Encuesta

Edad: ____ Curso: _____ Escuela: _____________

Marcar con una x, la o las respuestas que consideres correcta:

1) Se entiende por Álgebra a la rama de las Matemáticas que estudia:
   - ☐ Números
   - ☐ Números y letras
   - ☐ Números, letras y signos.
2) Durante las clases de Matemática, las letras pueden usarse…:
   - ☐ Como incógnita.
   - ☐ Como número general.
   - ☐ En relaciones funcionales.
3) ¿Por qué durante las clases de Matemática, los profesores hacen uso de las letras?
   - ☐ Para complicar los ejercicios.
   - ☐ Para formular leyes generales.
   - ☐ Para representar números desconocidos.
4) ¿Cuáles de estos contenidos están relacionados al Álgebra?
   - ☐ Triángulos y cuadriláteros.
   - ☐ Ecuaciones y funciones.
   - ☐ Números y operaciones.
5) "El triple del siguiente de un número" se representa en lenguaje simbólico como:
   - ☐ 3n+1
   - ☐ 3n
   - ☐ 3(n+1)
6) ¿Cuál de las tres expresiones corresponde a una ecuación?
   - ☐ 2+3=5
   - ☐ 2a+1=8
   - ☐ 3x+2

7) ¿Cómo puede representarse una función?

- ☐ Con una tabla.
- ☐ Con una fórmula.
- ☐ Con un gráfico.

8) En la expresión y=2x+1, x representa:

- ☐ Variable independiente.
- ☐ Variable dependiente.
- ☐ Incógnita.