Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática

Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros

REUN
RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES
educo
Editorial Universitaria
Universidad Nacional del Comahue
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
1972

AUTORES:
Ethel Barrio | Nadine Bednarz | Eva Cid
Lucas Colipe | Patricia Detzel | Emanuel Issa Nuñez
Rosa Martinez | René Morari | Analía Petich
María Elena Ruiz | Juan Zambrano

COMPILADORAS:
Rosa Martinez | María Elena Ruiz

Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática

Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática

Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros

Compiladoras: Rosa Martinez y María Elena Ruiz

EDUCO
Editorial de la Universidad Nacional del Comahue
Neuquén - 2022

Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática: desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros / Ethel Barrio ... [et al.]; compilación de Martínez, Rosa; María Elena Ruiz. - 1a ed - Neuquén: EDUCO - Universidad Nacional del Comahue, 2022.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-604-600-8

1. Matemática. 2. Didáctica. I. Barrio, Ethel II. Martínez, Rosa, comp. III. Ruiz, María Elena, comp.
CDD 510.72

El **Consejo Editorial de la Universidad Nacional del Comahue** avaló la publicación del libro "Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros", compilado por Rosa Martínez y María Elena Ruíz, presentado por la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue.

Disposición N° 111/21

Impreso en Argentina - Printed in Argentina

Buenos Aires 1400 (8300). Neuquén - Argentina.

Rosa Martinez - María Elena Ruiz

Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática

Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros

Ethel Barrio
Nadine Bednarz
Eva Cid
Lucas Colipe
Patricia Detzel
Emanuel Issa Nuñez
Rosa Martinez
René Morari
Analía Petich
María Elena Ruiz
Juan Zambrano

EDUCO
Editorial de la Universidad Nacional del Comahue
Neuquén - 2022

Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática

Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros

Revisores/evaluadores de los capítulos

Marta Anadón
Eva Cid
María Cecilia Papini
Marta Porras
Patricia Sadovsky

Agradecemos la generosa colaboración como revisores, por la lectura atenta, criteriosa y cuidadosa que fortalece el espacio de producción de vínculos, de investigación, de enseñanza, de aprendizaje en nuestra experiencia. Su reconocida y amplia trayectoria en investigación colaborativa y/o en Didáctica de la Matemática le imprimen una mirada a esta obra, dándole un valor agregado en términos de legitimidad a los años de trabajo y estudio en relación a la enseñanza de la Matemática.

Índice

Presentación

Rosa Martinez – María Elena Ruiz

La concreción de este libro nos ha permitido dar cuenta del largo proceso de construcción conjunta realizado de problemáticas sobre la enseñanza de la matemática. Trabajo conjunto que significó avances y retos sumidos en un compromiso por la Didáctica de la Matemática, camino que iniciamos con Patricia Detzel y Marta Porras, estudiando y discutiendo durante muchos años. Esos debates y reflexiones nutrieron la elaboración de este libro.

Queremos señalar y reconocer las huellas del paso por la Universidad Nacional del Comahue de las Profesoras Gema Fioriti, Dilma Fregona y Alicia Fernández, cuyos aportes y enseñanzas estuvieron presentes desde nuestros inicios, tanto en la investigación como en la docencia en formación docente. Su presencia sigue siendo parte de nuestra historia, lo muestra el Prólogo escrito por Dilma Fregona.

También destacamos con satisfacción la incorporación de jóvenes profesores que comienzan el recorrido de la investigación en Didáctica de la Matemática, como Emanuel Issa Nuñez, Lucas Colipe y René Morari. Las profesoras-investigadoras y formadoras de docentes de Institutos de Formación Docente, Ethel Barrio y Analía Petich, integran también este equipo sumando conocimiento, experiencia y compromiso que profundizan este trabajo conjunto.

Valoramos los medios y recursos que la universidad destinó para la conformación del grupo de investigación asignando carga horaria para los docentes-investigadores y subsidios a los proyectos.

Nos es muy grato remarcar además, la incorporación a este trabajo conjunto, de profesores de escuelas secundarias durante varios años, especialmente la de Juan Zambrano desde 2012 y la de José Cumín desde 2013, quienes han participado con gran compromiso y responsabilidad a pesar de no contar con subsidios para este trabajo.

El conjunto de condiciones, años de trabajo, compromiso, incorporación de jóvenes, profesores de aula, investigadores con experiencia, formadores de docentes, entre otras, nos permiten expresar con alegría que las producciones conjuntas constituyen una vía factible para obtener logros que se reflejan en el aula de matemática de la escuela secundaria.

Asimismo este recorrido ha sido posible por las vinculaciones académicas con otras universidades que, con la generosidad de las investigadoras, nos brindaron su experiencia y saberes en distintos encuentros de estudio compartido. Nuestro reconocimiento especial a cada una de ellas con el siguiente detalle de lo más sustancial de sus aportes. En primer lugar, con Marta Anadón, de la Universidad de Québec, Canadá, nos imbuimos de la perspectiva de investigación colaborativa. Discusiones, sugerencias, aportes de bibliografía, lectura atenta de nuestros trabajos escritos han sido, entre otros, dispositivos que nos permitió profundizar en esta temática. También contamos con su mirada en el Epílogo de este libro. En el caso de Eva Cid –Universidad de Zaragoza, España – nos contactamos en el año 2012 a raíz de su trabajo sobre la enseñanza de los números enteros, una propuesta para el aula desde una perspectiva que avanza para superar dificultades de aprendizaje. A partir de ese momento, iniciamos un intercambio que continúa hasta el día de hoy. En el año 2016, nos visitó en el marco de la convocatoria del programa Misiones Inversas del Ministerio de Educación de la Nación; así se consolidaron los vínculos promoviendo reflexiones y discusiones, muchas de las cuales se presentan en varios capítulos de este libro e incluso nos honra con un capítulo de su autoría. Por otra parte, en el año 2017 recibimos la visita de Nadine Bednarz –Universidad de Québec a Montréal–, en el marco de la VIII EDIMAT (VIII Escuela de Didáctica de la Matemática), que se realizó en nuestra universidad. Su presencia favoreció una interacción que permitió profundizar aspectos teóricos de la perspectiva de investigación colaborativa que veníamos estudiando desde hace varios años. Las jornadas intensas de estudio y discusión dieron sus frutos, plasmados en este libro, como así también su contribución generosa con la escritura de un capítulo.

Finalmente, señalamos la satisfacción de reflejar en este libro parte del proceso realizado a lo largo de estos años. Esperamos que este texto estimule y desafíe a continuar y profundizar e iniciar nuevas investigaciones.

Las compiladoras

Julio 2021

Prólogo

Dilma Fregona

Es un honor para mí, como antigua integrante del grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional del Comahue, presentar la compilación de trabajos desarrollados en los últimos años por muchos de quienes fueron mis compañeros de trabajo. Los autores son docentes, algunos en posición de investigadores en instituciones de educación superior y otros en posición de enseñantes de matemática en la escuela secundaria con cuestionamientos acerca de la tarea de enseñar y aprender matemática y con inquietudes reflexivas para afinar las diferentes problemáticas.

Este proyecto fue pensado como un aporte para discutir modos de construcción del conocimiento en aulas e instituciones. Pensamos que puede ser una contribución para los desafíos renovados que nos presenta la educación, tomando en cuenta las condiciones y restricciones que se dan en muchos establecimientos de educación pública en nuestro país, que, a la luz de los intercambios con otros colegas de la región, no son específicos de Argentina.

Al momento de proyectar la publicación del libro “Trabajo colaborativo entre profesores de Matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros”, las premisas que guiaron el proceso son: incentivar a todos los miembros del grupo para que participen en la producción de al menos un capítulo en torno a dimensiones que fueron centrales en su tarea. También buscaron difundir una de las corrientes actuales sobre investigaciones colaborativas en lo que es una tendencia cada vez más amplia en investigación en Didáctica de la Matemática y otros campos de conocimiento. Cada capítulo fue enviado a diferentes evaluadores en la búsqueda de garantizar la calidad de las producciones difundidas. Los evaluadores fueron elegidos por considerarlos especialistas reconocidos en las temáticas abordadas en cada capítulo.

El libro está conformado por 6 capítulos:

- En el capítulo 1, “De la problematización de una investigación colaborativa a su análisis y difusión: retorno a la conceptualización desarrollada y ejemplificación a partir de una investigación colaborativa realizada con asesores pedagógicos”, **Nadine Bednarz** presenta algunos elementos claves de la investigación colaborativa (IC), a través de la conceptualización progresiva que ha desarrollado dentro de un equipo de investigadores comprometidos con esta IC, enfocándose más específicamente en el criterio de “doble verosimilitud” que impregna dichas investigaciones en sus diferentes “fases”. Luego hace hincapié en una IC particular que reunió a investigadores del GREFEM (Grupo de Investigación sobre la Formación en Educación Matemática) y Asesores Pedagógicos (AP) en matemática para la escuela primaria. Trae esta experiencia para ilustrar la manera en que toma forma la investigación desde su problematización hasta el análisis y difusión de los resultados y, así responder a la preocupación de doble verosimilitud que la caracteriza. Esta reconstrucción de la trayectoria de una IC ilustra la riqueza de este proceso en las fases de co-situación, co-operación y co-producción, en su carácter dinámico y evolutivo. Más concretamente, destaca que la construcción del objeto de investigación, su problematización, no se concibe de manera definitiva, incluso antes de que se produzca la operacionalización de la investigación. Finalmente, esta reconstrucción pone de relieve otra forma de concebir la difusión de la investigación, en la que se le asigna importancia a la reflexión sobre la puesta en escena de los resultados de la investigación.

- En el capítulo 2, “Experiencia de trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática: de la problematización a los ejes de análisis en la adaptación de una ingeniería didáctica”, **Rosa Martinez, Analía Petich, Emanuel Issa Nuñez y María Elena Ruiz,** presentan algunos resultados de una investigación en Didáctica de la Matemática, desarrollada desde una perspectiva colaborativa entre docentes investigadores y docentes de matemática de escuela secundaria. Los autores, a partir de una problemática en particular y apoyándose en desarrollos teóricos de la Didáctica de la Matemática, promueven el análisis de procesos de enseñanza y de producción de conocimientos matemático-didácticos que tienen lugar cuando un grupo de docentes de escuela secundaria trabaja en colaboración con investigadores para problematizar la enseñanza, producir e implementar de manera conjunta propuestas, devenidas de una ingeniería didáctica, que tengan impacto en el aula. El trabajo que presentan da cuenta del proceso transitado a través de construcciones, reconstrucciones y deconstrucciones colectivas que surgieron de las discusiones y reflexiones. Las discusiones relacionadas con una actividad, con una secuencia, con producciones de los alumnos en relación a una situación propuesta y con las interacciones que ocurrieron en la clase, les permitió profundizar las nociones y los razonamientos ligados a los problemas en juego y así visibilizar el vínculo, "puente", entre un producto de investigación y una mirada situada en el aula.

- En el capítulo 3, "La introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico: razones y principios que la sustentan", **Eva Cid**, nos relata su trayectoria en investigación en torno a la problemática de la enseñanza de los números enteros. En su investigación, la autora retoma la noción de obstáculo epistemológico propuesta por Brousseau y la utiliza para establecer con más precisión las características inmersas en los números negativos. A partir de ahí, define una secuencia didáctica de introducción del número entero en un entorno algebraico, que ayude a superar dichos obstáculos. La propuesta didáctica busca situar a los negativos desde el primer momento en el ámbito algebraico y utilizarlos para iniciar el álgebra escolar dentro de la modelización-algebraico-funcional, poniendo de manifiesto la ruptura epistemológica que supone el paso de la aritmética al álgebra y facilitando la comprensión del álgebra como elemento de modelización de otras ramas de las matemáticas.

- En el capítulo 4, "Problematización y asuntos que se vuelven problemáticos en la enseñanza de los números enteros. Adaptación de una propuesta", **Patricia Detzel, María Elena Ruiz, Ethel Barrio, Lucas Colipe y René Morari,** presentan conocimientos que forman parte de una experiencia, en la que se estudia una propuesta de enseñanza de los números enteros, planteada por Eva Cid. Los autores consideran aspectos que resultaron relevantes a partir de cuestionamientos del objeto matemático involucrado y los asuntos que se vuelven problemáticos a la hora de su implementación en aulas comunes de la región. El grupo realiza un análisis matemático-didáctico de tareas representativas de dicha secuencia didáctica, donde destacan/remarcan un trabajo de deconstrucción y de reconstrucción del objeto de enseñanza al interior del grupo colaborativo. En este análisis reconocen la fertilidad de estudiar y profundizar una propuesta de enseñanza diseñada en una investigación que no es propia. Además señalan la riqueza dentro de un espacio colaborativo, con relación al análisis de la gestión de las actividades para las clases.

- En el capítulo 5, "Lo colaborativo en acción, una experiencia sobre lo trabajado antes, durante y después de su implementación", **Juan Zambrano** presenta un relato en el que analiza y reflexiona su experiencia de trabajo conjunto con docentes investigadores a partir de estudiar, adaptar e implementar una propuesta de enseñanza para un aula de escuela secundaria. Este escrito da cuenta de la enriquecedora experiencia con relación al estudio y adaptación de una propuesta elaborada por investigadores y la oportunidad del acompañamiento para la implementación en el aula. Al mismo tiempo recupera aspectos de su trabajo docente que le han permitido desempeñarse con mayor libertad y confianza.

- En el capítulo 6, “Reflexiones al revisitar un proceso de diseño y desarrollo de talleres para la apropiación de una propuesta proveniente de la investigación didáctica en la formación continua”, **Rosa Martinez, Analía Petich y Ethel Barrio** presentan análisis y reflexiones al revisitar lo acontecido en talleres destinados a docentes de escuelas secundarias, cuya intencionalidad consistía en reconocer la propuesta de Cid como una herramienta genuina que ofrece mejores condiciones de enseñanza y mejores oportunidades de aprendizaje para los alumnos. Esa revisita les permitió a las autoras analizar, desde un lugar de distanciamiento, los aspectos centrales que conformaron las opciones didácticas desplegadas en el diseño y desarrollo de los talleres. Así, nos presentan un análisis en el que destacan una dinámica de problematización y de construcción de sentidos en juego que contribuyen a aproximaciones de producciones de investigaciones. Desde este lugar, nos invitan a reflexionar sobre cuestiones que viabilizan un acceso a los núcleos centrales de la propuesta, actuando como indicadores que intentan una asequibilidad de la misma en el terreno de las prácticas de enseñanza.

En la sección “Acerca de los autores” y “Acerca de los revisores”, se encuentran disponibles las referencias académicas y de contacto.

Capítulo 1

De la problematización de una investigación colaborativa a su análisis y difusión: retorno a la conceptualización desarrollada y ejemplificación a partir de una investigación colaborativa realizada con asesores pedagógicos en matemática[1]

Nadine Bednarz, GREFEM, Université du Québec à Montréal

Introducción

En la década de los '90, se inició en Quebec, en el área de educación, un movimiento de investigación colaborativa (IC) que reunió investigadores y docentes. Esas investigaciones cuestionaron las formas habituales de plantear preguntas de investigación, de problematizarlas, de posicionarse como investigador frente a los docentes involucrados en esas investigaciones, de abordar la investigación a partir de cuestiones relacionadas con sus prácticas, de analizar eso que se construye en la interacción entre investigadores y docentes y de difundir los resultados (ver sobre este tema Bednarz, 2015, 2013-a, b; Desgagné, 2007, 2001). Es aquí que el lugar que ocupan los prácticos[2] en el trabajo de investigación, cuando está relacionado con cuestiones de sus propias prácticas, es cuestionado por estos investigadores quebequenses que, de esa manera, adhieren al vasto movimiento de democratización de la investigación que se observa en otras partes del mundo (ver en particular Anadón, 2007, 2001; Callon y otros, 2001; Darré, 1999; Dubet, 2007, 1994; Lyet, 2018, 2014, 2011; Mottier Lopez, 2015; Sebillotte, 2007, 2002; Van Nieuwenhoven y Colognesi, 2015; Vinatier y Rinaudo, 2015). Esta manera de investigar se desarrolla con el objetivo de integrar el punto de vista de los prácticos en temas que les conciernen de cerca. Es así que este enfoque de investigación otorga un lugar central a las acciones, observaciones y experiencias de los profesionales (docentes, asesores pedagógicos, diversos actores del mundo de la educación) en relación a las preguntas que estos profesionales se hacen. A su vez, este enfoque aporta una nueva mirada a esas preguntas.

---

[1] Este capítulo ha sido traducido del francés por Marta Anadon, PhD, profesora emérita de la Université du Québec a Chicoutimi, Quebec, Canadá.

[2] Nota de la traducción: el término "praticien" ha sido traducido por práctico haciendo referencia a toda persona que ejerce su ocupación o profesión a partir de conocimientos que emergen de su propia práctica profesional y de la utilización de medios prácticos. En el texto los términos práctico y profesional son utilizados como sinónimos.

Es posible, *a posteriori*, a través de los múltiples trabajos que han permitido aclarar este enfoque de investigación, percibir la extensión y el alcance de este trabajo que no solo ha trastocado las formas de abordar la investigación educativa en cuestiones relativas a las prácticas, sino también, el tipo de conocimiento producido, cuyos resultados buscan llegar tanto a las comunidades científicas como a las profesionales (véanse en particular Bacon, Bednarz, Hanin, Lajoie y Saboya, 2019; Bednarz, 2013-a, b; Bednarz, Maheux, Bacon, Saboya, Lajoie y Thibault, 2019; Bourrassa, Bélair y Chevallier, 2007; Corriveau, 2013; Morrissette, 2012; Mottier López, 2015; Saboya, Bacon, Bednarz, Lajoie, Maheux, Bonin, Carbonneau, Emond, Gareau, Lajeunesse, Morelli, Perron y Tourigny, 2019; Van Nieuwenhoven y Colognesi, 2015; Vinatier y Rinaudo, 2015).

En este capítulo, volvemos, brevemente, a algunos elementos claves de este enfoque, a través de la conceptualización progresiva que hemos desarrollado dentro de un equipo de investigadores comprometidos con estas IC[3], enfocándonos más específicamente en el criterio de **doble verosimilitud** que impregna la investigación en sus diferentes **fases**. Luego haremos hincapié en una IC que reunió a investigadores del GREFEM (Grupo de Investigación sobre la Formación en Educación Matemática) y asesores pedagógicos (AP) en matemática para la escuela primaria. Esto permitirá ilustrar la manera en que la investigación toma forma desde su problematización hasta el análisis y difusión de los resultados y, así responder a la preocupación de doble verosimilitud que la caracteriza. Nos parece fundamental aquí tomar en cuenta la trayectoria que estamos reportando y de manera más general, en cualquier análisis de los aportes y repercusiones de la IC. En esto coincidimos con Mottier Lopez y Dechamboux (2019), ya que nuestra conceptualización de la IC está basada en una concepción situada de la actividad humana (Lave, 1988). Los conocimientos producidos en la interacción entre investigadores y prácticos son conocimientos situados, no independientes de su contexto de producción y del rol estructurador que éste juega (ver al respecto Bednarz, 2013-b).

> No podemos producir conocimiento sobre el objeto que se investiga sin tener plenamente en cuenta, e inseparablemente, las condiciones de su producción (Mottier y Dechamboux, 2019, p. 3,).

---

[3] El equipo inicial que trabajó en esta conceptualización estuvo formado por Serge Desgagné, Université Laval, Nadine Bednarz, Pierre Lebuis, Université du Québec à Montréal (UQAM), Louise Poirier, Université de Montréal, Christine Couture, Université du Québec à Chicoutimi (UQAC) (ver Desgagné y otros, 2001). A lo largo del tiempo se han ido sumando otros colaboradores: Souleymane Barry, UQAC, Claudia Corriveau, Université Laval, Mireille Saboya, UQAM (ver Bednarz, 2013-b, Barry y Barry y otros, 2013) o, en una reflexión más amplia sobre la investigación participativa: Marta Anadon, Université du Québec a Chicoutimi (UQAC), Lorraine Savoie Zajc, Université du Québec en Outaouais (UQO) y Jean-François Maheux, Université du Québec a Montreal (UQAM) (ver Bednarz y otros, 2012; Savoie-Zajc y Bednarz, 2007; Anadon, 2007).

Este posicionamiento epistemológico nos lleva a interesarnos tanto por el proceso de investigación en curso, por sus diferentes **fases**, como por el conocimiento que resulta de este tipo de investigación (que es lo que tradicionalmente interesa a la comunidad científica).

1. Retorno a la conceptualización progresiva desarrollada

Desde la emergencia de nuestro trabajo de IC en educación matemática, en lo que a nosotros respecta, surge un doble interés: (1) el de iluminar el campo de la práctica profesional en la enseñanza de la matemática, esto es el campo de los docentes, recordemos que esta investigación se originó en Quebec en un contexto de formación docente, con investigadores también actuando como formadores; (2) el de establecer un acercamiento entre el mundo de la investigación y el mundo de la práctica con el objetivo de producir conocimientos teniendo en cuenta la realidad de esa práctica y su complejidad (ver Bednarz, 2013-b). Nuestro trabajo nos ha llevado gradualmente a aclarar los contornos de este enfoque de investigación (ver Bednarz, 2013-a, b, 2015; Desgagné, 2007, 2001, 1998, 1997; Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier y Lebuis, 2001). Su conceptualización, desarrollada *a posteriori*, a partir de varios proyectos de investigación, llevados a cabo en el terreno con profesionales, permitió ir más allá del simple sentido común a menudo asociado a la colaboración y aclarar los fundamentos que subyacen a este enfoque, así como lo que él exige desde el comienzo de la investigación hasta el análisis y la difusión. A continuación, resumimos brevemente esta conceptualización, cuya síntesis se puede encontrar en varios textos (ver en particular Bednarz, 2015, 2013-a, b; Desgagné, 2007, 2001, 1998, 1997; Desgagné y otros, 2001). Este enfoque pone en juego un proceso conocido como **co-situación**, **co-operación** y **co-producción** de investigación, que involucra a los actores implicados en ella, investigadores y profesionales. Existe una cierta superposición entre estas distintas **fases**, que por lo tanto no pueden verse como unidades distintas, sino que deben entenderse de manera procesual, destacando las relaciones constitutivas y dinámicas entre ellas (ver figura 1 abajo). Veamos más específicamente estas diferentes **fases**.

1.1 Proceso de co-situación, co-operación y co-producción de la investigación

¿Qué entrada nueva y diferente implica trabajar sobre cuestiones vinculadas a la práctica, acercándolas a los actores directamente afectados por ellas? Desde el ingreso a la investigación, al término de una exploración que puede extenderse durante mucho tiempo, los investigadores y los profesionales acuerdan gradualmente un determinado objeto a investigar (ver, por ejemplo, Barry y Saboya, 2015; Bednarz, 2013 -b; Elisme, Girardet y Mottier Lopez, 2021;

Lapointe y Morrissette, 2017; Mottier Lopez y Dechamboux, 2019). Este objeto busca considerar tanto las inquietudes de la práctica como las del mundo de la investigación, teniendo resonancia para unos como para los otros. Lyet (2011) los llama **objetos híbridos**, capaces de activar la colaboración (ver también Marlot, Toullec-Théry y Daguzon, 2017). Hemos mostrado, en un estudio sobre cuestiones de transición entre niveles de enseñanza de matemática (Corriveau, 2013), o sobre cuestiones de enseñanza de la matemática en clases con alumnos con dificultades (Bednarz, 2013-c), cómo esta **co-situación** lleva a elaborar preguntas de modo diferente, a problematizar los objetos investigados de otra manera. Así, en el primer caso (transiciones entre niveles), trabajar con profesores de ambos niveles secundario y postsecundario, lleva, al final de esta co-situación, a trabajar no en una perspectiva de comparación entre niveles para entender discontinuidades, rupturas en la enseñanza de la matemática de un nivel a otro (que es lo que se lleva generalmente a cabo en la investigación en didáctica matemática, en la que los profesores están ausentes), sino de trabajar en la articulación entre los dos niveles desde el interior de la práctica profesional desarrollada en cada uno de esos niveles. La investigación toma en cuenta la dimensión implícita de las prácticas que solo los docentes son capaces de explicitar, con sus circunstancias, intencionalidades, racionalidades. En el segundo caso (enseñanza en clases de alumnos con dificultad), no son tanto las situaciones elaboradas, a partir de análisis preliminares de las dificultades de los alumnos y de las situaciones de enseñanza, lo que nos interesa (que ya han sido realizados por varios estudios en didáctica de la matemática en este ámbito) sino la forma en que se desarrollan estas situaciones, se transforman, a partir de diferentes recursos prácticos, así como los argumentos esgrimidos en apoyo de esas modificaciones. Se trata, por consiguiente, de una forma diferente de abordar la concepción de situaciones de enseñanza que está en juego, llegando a esclarecer la enseñanza de la matemática en las clases de alumnos con dificultades, desde el interior de esas clases. Aquí la voz de los profesores es esencial para avanzar en la comprensión de estas preguntas, que son significativas, que suenan tanto para los investigadores como para los profesionales.

Estos objetos/preguntas co-situados toman forma gradualmente en reuniones preliminares entre investigadores y profesionales. Esta co-situación es también una oportunidad para definir las primeras modalidades de funcionamiento, los primeros hitos que orientarán el sentido de las acciones y la reflexión posterior. Varios investigadores se han centrado en este proceso de co-situación en la acción, desde el interior del proceso y han destacado los desafíos que se le plantean al investigador para alcanzar esta doble resonancia (ver Barry, 2013; Barry y Saboya, 2015; Bednarz, 2013- c; Corriveau y Bednarz, 2013; Couture, 2013; Élisme y otros, 2021; Saboya, 2013).

El enfoque que se inicia, a partir de estos objetos de investigación co-situados, tiene como eje central una actividad reflexiva organizada entre los actores, lo que Davidson Wasser y Bresler (1996) denominan **una zona interpretativa compartida**, un espacio de interfaz entre los argumentos de unos y de otros, de complementariedad de **experticias**, con el objetivo de desarrollar conocimientos relacionados con un campo de práctica profesional. Es en este espacio que se desarrollan, se cruzan, en torno a un determinado objeto a investigar, ligado a la práctica, las formas en las cuales unos y otros dan sentido a ese objeto, un espacio que podemos llamarlo de **red**, de comprensiones permitiendo aclarar un fenómeno (Proulx, 2013). Este momento de encuentro está asociado a lo que hemos llamado la **co-operación** de la investigación, es decir, el momento en el que el proceso de co-construcción del conocimiento entre investigadores y prácticos se vuelve de alguna manera operativo. Aquí, el investigador inicia una larga relación con los actores del terreno.

Algunos importantes fundamentos de esta conceptualización se basan en la etnometodología, de la que tomamos prestado, entre otras cosas, el concepto de reflexividad. En el sentido etnometodológico (Coulon, 1993), la actividad reflexiva se "entiende como una actividad donde, al cuestionar su práctica, los miembros explican el "código" y "las reglas de funcionamiento"" (Desgagné, 2001, p. 68, traducción libre del francés). Este significado se aleja del sentido que abusivamente se le da en educación, asociando en la acción y sobre la acción cuando se habla de reflexión. Se refiere, en términos de investigación, a algo más fundamental ya que de hecho lo que está en juego es que el investigador permita a través de un cierto cuestionamiento práctico, "la explicitación de un "código de práctica", resultante de una co-construcción de significado entre investigadores y prácticos" (Ibid, p. 68, traducción libre del francés).

Por lo tanto, este espacio de reflexión es el lugar donde los datos de investigación se constituyen en la interacción entre investigadores y prácticos, el lugar donde los profesionales, al venir a alimentar el objeto investigado, están llamados a jugar un papel esencial en el desarrollo de conocimientos ligados a esa práctica[4]. El investigador hace que lo explícito, de

[4] Según el ángulo del cual se considere esta actividad reflexiva, ella puede ser vista como una actividad de desarrollo profesional de actores comprometidos en ese cuestionamiento práctico, pero también como una actividad de producción de conocimientos sobre un objeto compartido, investigados por los actores y alimentado por unos y otros Es este último aspecto el que nos interesa más particularmente en este capítulo y que desarrollamos, sin negar que el desarrollo profesional es también una de las consecuencias de estas IC, en las que

lo que se construye conjuntamente en este espacio reflexivo, el objeto central de su análisis. Este proceso de **co-producción** debe, por consiguiente, reflejar la voz de los participantes a la investigación, a través de los análisis que se deriven de ella, pero también a través de la difusión de los resultados (volveremos sobre esto). El siguiente diagrama muestra estas diferentes **fases** globalmente.

Fig.1. co-situación, co-operación, co-producción, relaciones dinámicas

Aquí conviene hacer una observación, el prefijo **co**, nos recuerda Desgagné (2007), se puede interpretar como:

> Un requisito de participación de los prácticos en todas las fases formales generalmente asociadas a la investigación, es decir, la definición de un problema (para la co-situación), la elección de un método de recolección de datos (para la co-operación) y el proceso de análisis que lleva a la producción de resultados (para la co-producción). La idea es más bien concebir que la empresa

sería posible interesarnos. Esta elección está ligada a la preocupación que tenemos por no reducir la IC a un apoyo a los profesionales, a un sistema de formación, y mostrar claramente la calidad, el rigor y la relevancia de este tipo de investigación, que tiene su lugar en educación.

> de co-construcción (de conocimientos) tenga en cuenta, en cada etapa, las inquietudes de ambos interlocutores y de los mundos que representan (p. 92, Traducción libre del francés).

Los prácticos (profesionales) se involucran en esta IC porque, ante todo, encuentran un significado y perciben posibles repercusiones para ellos mismos (ver por ejemplo Bednarz, Lafontaine, Auclair, Morelli y Leroux, 2009, Saboya y otros, 2019). El prefijo **co** se refiere más a "una actitud y una actividad de los participantes que permiten tomar en cuenta el punto de vista de los actores (prácticos e investigadores)" (Mottier Lopez y Dechamboux, 2019, p. 9, traducción libre del francés).

Un criterio clave de doble verosimilitud subyace en todo este proceso, en el que nos centraremos en el próximo apartado.

1.2 Un criterio de doble verosimilitud que impregna la perspectiva de investigación

A través de lo que precede, se puede percibir la preocupación por tener en cuenta y dar cuenta, a lo largo del proceso, las voces e inquietudes de las dos comunidades que participan en esta IC. Aquí encontramos el criterio de doble verosimilitud tomado de Dubet (1994, 2007) que, para el investigador, entrañará un doble requisito.

> (Esta verosimilitud) debe ajustarse a los estándares habituales de la profesión de sociólogo (de investigador educativo en nuestro caso) que organiza y racionaliza datos, que recurre a otros lugares que no sean su propio material y que está sujeto a un requisito de no contradicción. También debe ser creíble para (los actores del terreno), quienes se postulan como competentes y no totalmente ciegos a lo que están haciendo ya que cualquier acción requiere una actividad de justificación y denuncia (...). El argumento está dirigido a una audiencia dual: la comunidad científica con criterio propio y los actores (prácticos) que a su vez dominan otros datos (...). Al colocarse en la articulación de este doble requisito, el (investigador) se da a sí mismo reglas de argumentación doblemente limitativas (Dubet, 1994, p. 249, traducción libre del francés).

Este criterio de doble verosimilitud, que es la base del enfoque de la IC, cobrará sentido de forma diferente en cada fase de la investigación. Cuando el investigador se enfrenta al esclarecimiento de un objeto de investigación (co-situación), el criterio de doble verosimilitud surge de **una doble pertinencia social**. Este objeto co-situado debe satisfacer las preocupaciones tanto de los prácticos como de los investigadores, y resonar en ambas comunidades. Aquí, el investigador está llamado a ejercer una sensibilidad para tomar en cuenta las preocupaciones de los demás a fin de satisfacer no solo sus propias preocupaciones como investigador sino también las de los prácticos (profesionales) con los que desea trabajar.

En el momento en el cual se constituye, se desarrolla una actividad reflexiva en relación con el objeto investigado (co-operación),

> el criterio de la doble verosimilitud se convierte en un criterio de doble rigor metodológico, siendo para el investigador el desafío de desarrollar un enfoque práctico de cuestionamiento que, simultáneamente, hace de dispositivo de recolección de datos (Desgagné, 2001, p. 63, traducción libre del francés).

Aquí, el investigador ejerce una doble sensibilidad, el enfoque reflexivo debe permitir tanto la recolección de datos sobre un objeto de investigación, co-situado, vinculado a la práctica, como un cuestionamiento práctico para los profesionales involucrados en esta investigación. La red de comprensiones de ambos lados es aquí un elemento central.

La doble verosimilitud, durante el análisis y difusión de los resultados (co-producción), es la **doble fecundidad de los resultados**. Esta doble verosimilitud influirá efectivamente en la forma de abordar el análisis, que debe dar cuenta de esa co-construcción, haciendo oír la voz de los prácticos en el conocimiento producido a partir de ese análisis y reflejando los resultados del encuentro entre investigadores y prácticos. Además, esta doble verosimilitud se refiere, al momento de plasmar ese conocimiento, resultado del análisis, y de difundirlo, a las exigencias de rigor y pertinencia científica de la comunidad de investigadores, pero también a las exigencias de pertinencia de la comunidad de profesionales implicados, de esa manera estos resultados repercuten en ambas comunidades.

> El investigador, por lo tanto, está llamado a ejercer una sensibilidad (…) en su análisis de datos poniendo en juego las categorías de los prácticos (las formas de hacer las cosas, las razones para actuar, los recursos (…) explicitadas durante el proceso de reflexión) y las categorías de los investigadores (las contribuciones en la construcción, las teorizaciones existentes o emergentes que se planteen sobre esta acción de los prácticos implicados con miras a estructurar elementos de comprensión y explicación); Debería (también) ejercitar una sensibilidad en el formato y la difusión de los resultados para asegurarse que puedan ser comunicados, de una forma u otra, tanto en la comunidad de prácticos como en la de investigadores (Ibid, p. 62, traducción libre del francés).

Volvemos ahora más específicamente a un ejemplo de IC, con el objetivo de documentar cómo esta doble verosimilitud se ejerció en la práctica, durante todo el proceso. Esta reconstrucción clarifica toda la complejidad y la riqueza de este tipo de investigaciones.

2. Reconstrucción de la trayectoria de una investigación colaborativa realizada con asesores pedagógicos en matemática

2.1. *Puesta en contexto*

De 2015 a 2018, un grupo de investigadores del GREFEM[5] realizó con asesores pedagógicos (AP) en matemática de escuelas primarias una IC destinada a esclarecer la resolución de problemas (RP)[6] en el contexto de enseñanza y del acompañamiento de los docentes a esta RP en el aula.

Recordemos brevemente, para situar este proyecto, el importante papel desempeñado en Quebec por los asesores pedagógicos (AP) en matemática y en general en el acompañamiento de los docentes. Informan, apoyan, forman y acompañan a los profesores en el día a día sobre cuestiones relacionadas con sus prácticas. También están asociados a la implementación de programas de estudio y, a menudo, los maestros y los directivos escolares los ven como “recursos” en la implementación de esos programas y, de manera más general, en el desarrollo de innovaciones. Al trabajar en el terreno con los profesores con el fin de crear oportunidades de desarrollo profesional más cercanas al trabajo docente, los AP juegan un papel clave (Darling-Hammond, Burns, Campbell y Goodwin, 2017, Duchesne, 2016, Kass y Rajuan, 2012). Se trata de una profesión en la interfaz entre el terreno, la investigación/ innovación y las orientaciones educativas (Daele y Sylvestre, 2020, Lachaîne y Duchesne, 2019). Sin embargo, pocos estudios han intentado comprender ese trabajo, desde el interior de la práctica profesional, a partir de sus problemas y cuestionamientos. Es precisamente el caso de la enseñanza de la matemática donde los AP enfrentan desafíos importantes. En este sentido,

[5] GREFEM es un Grupo de Investigación en Formación Docente de Matemáticas. La IC a la que nos referimos en este ejemplo involucró, durante todo el proceso, a las siguientes investigadoras: Caroline Lajoie, Nadine Bednarz, Mireille Saboya, Universidad de Quebec en Montreal y Lily Bacon, Universidad de Quebec en Abitibi Temiscamingue. Vanessa Hanin, de la Universidad Católica de Lovaina se incorporó al equipo durante el último año del proyecto como investigadora postdoctoral y participó en el desarrollo de un coloquio, parte importante de la co-producción de esta IC. Jean-François Maheux, investigador del GREFEM, también participó en algunas reuniones y análisis. Esta investigación fue financiada por el Consejo de Investigación de Ciencias Sociales y Humanas de Canadá (CRSH, siendo la responsable Caroline Lajoie).

[6] La RP ha ocupado, y sigue ocupando, un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas y en el trabajo de investigación en didáctica de las matemáticas en relación con la construcción de conceptos y el desarrollo de la modelización. Varios programas de estudios en todo el mundo han adoptado esta orientación. Es el caso de Quebec, los programas han integrado durante mucho tiempo la RP tanto en sus propósitos como en los medios recomendados para acercar la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes. A lo largo del tiempo se le han ido atribuyendo varias funciones (ver sobre este tema Lajoie y Bednarz, 2014): una función de aplicación, tradicionalmente reservada a los problemas, pero también de formación, la RP participando en la construcción de conocimientos nuevos, en el desarrollo de habilidades y procesos matemáticos. Se la considera tanto una modalidad educativa de apoyo al trabajo en el aula como un objeto de aprendizaje en sí mismo. Finalmente, participa en el desarrollo de habilidades para resolver situaciones problemáticas, razonar y comunicarse en matemáticas, así como en el desarrollo de competencias más generales.

la resolución de problemas (RP) en el contexto de enseñanza, en la que se centró esta IC, es uno de esos grandes retos a los que los AP se enfrentan Volveremos a esto más adelante, cuando presentemos la trayectoria que nos llevó a escoger este objeto, la RP, en relación con sus trabajos de acompañamiento.

Más específicamente, los investigadores del GREFEM y ocho AP de matemática de escuelas primarias, de cinco centros de servicios escolares que cubren diferentes regiones de Quebec, participaron en esta investigación. Estos ocho AP ejercen el acompañamiento en contextos muy diferentes: extensión geográfica variable de las regiones cubiertas, variedad en el número de escuelas atendidas (entre 15 y 143 escuelas primarias), a menudo responsables de varios expedientes (por ejemplo, matemática de nivel primario, preescolar y de ortopedagogía; matemática en las escuelas primarias y secundarias; matemática y ciencias en la escuela primaria). Como lo demuestran las entrevistas realizadas a cada uno de ellos al inicio de la investigación, el acompañamiento toma diversas formas: sesiones de formación organizadas sobre conceptos específicos; apoyo a largo plazo a los equipos escolares; respuestas a las solicitudes puntuales de los docentes; presencia en las clases para impregnarse mejor de lo que se está haciendo, comprender la complejidad del trabajo docente y ajustar sus acompañamientos en consecuencia; experimentar problemas en clase con el docente; etc. Estos AP, que tienen experiencia como profesores de escuela primaria (o de escuela secundaria, en un sólo caso), tienen entre 6 a 26 años de experiencia como AP. La formación que poseen es en educación preescolar-primaria (para 6 de ellos), en educación de recuperación (ortopedagogía) o en educación secundaria (para 2 de ellos), es completada por otras formaciones adicionales, lo que refleja la variedad de conocimientos adquiridos. Esta IC, que reúne a investigadores y asesores pedagógicos, da voz a los profesionales que hasta ahora no han sido muy considerados en las investigaciones colaborativas. Su objetivo es desarrollar nuevas comprensiones y trazar nuevos horizontes con respecto al trabajo de acompañamiento en RP.

2.2 La IC de su problematización a su análisis y difusión

2.2.1 Reseña de un objeto de investigación co-situado

Este proyecto es el resultado del encuentro entre, por un lado, una necesidad expresada por los AP en matemática de escuelas primarias, que buscaban aclarar su actividad profesional en el tema del acompañamiento docente y de la resolución de problemas en el aula (RP), y por otro lado, una reflexión iniciada por investigadores en educación matemática sobre la RP (ver Lajoie y Bednarz, 2012, 2014, 2016). A continuación, se detalla el camino que condujo a este encuentro entre las preocupaciones de cada uno.

Una reflexión iniciada por dos de los investigadores del GREFEM (Lajoie y Bednarz) sobre la RP en el contexto de enseñanza

El trabajo que comenzó en la década de 2000 llevó a dos investigadoras a centrarse en la RP, uno de los conceptos fundamentales de la educación matemática en Quebec, y en las transformaciones que ha experimentado a lo largo del tiempo. Un análisis histórico de los documentos oficiales quebequenses desde 1900 hasta la actualidad (programas de estudio, documentos educativos asociados, artículos publicados en revistas educativas que permiten captar las reflexiones de un período determinado) permitió reconstruir su evolución, identificar los elementos utilizados, los elementos dejados de lado, las continuidades o rupturas. Más específicamente, el análisis se centró en la naturaleza de los problemas propuestos para la enseñanza en cada una de las épocas (pautas que orientan la elección de los problemas), el papel que juega esa resolución en la enseñanza de la matemática y los consejos dados a los profesores. Este análisis destacó notablemente la naturaleza cada vez más ambiciosa de las funciones asociadas con la RP en la enseñanza a lo largo del tiempo (Lajoie y Bednarz, 2012, 2016) y las clarificaciones casi inexistentes proporcionadas a los docentes para abordar esta resolución (Lajoie y Bednarz, 2014).

Una reflexión compartida con los AP en matemática durante una jornada organizada por ellos y para ellos, según su propia demanda (3 de octubre de 2014)

Como se hace todos los años, el día previo al inicio del coloquio de los profesores de la AMQ (Asociación Matemática de Quebec) está dedicado específicamente a los AP; en cierto modo esa jornada constituye un momento para renovarse. Este día es asumido por los propios AP quienes determinan el tema, la organización de la jornada y escogen las personas que desean invitar. Ese año, los AP habían optado por abordar el tema de la resolución de problemas (RP) y los desafíos que plantea; una cuestión importante en el contexto de implementación del programa de matemática de escuela primaria. Habían invitado explícitamente a una de las dos investigadoras (Nadine Bednarz) como persona de referencia para animar el día. El trabajo analítico realizado con anterioridad sirvió de base para esta jornada, que la investigadora había estructurado en dos etapas: (1) una revisión de la naturaleza de los problemas propuestos a lo largo del tiempo, con el objetivo de comprender mejor los desafíos actuales encontrados sobre la resolución de situaciones problemas, darse ideas; (2) un retorno sobre los consejos dados a los docentes para acercar la RP a los alumnos en torno a la planificación/preparación, al proceso de resolución, al uso en el aula, un retorno sobre la resolución. Esta jornada, alimentada por investigaciones previas, estuvo intercalada con discusiones con los AP (no fue en modo alguno una presentación formal), que la nutrieron con sus propias reflexiones. A modo de ejemplo, al inicio del día se propuso la siguiente tarea: *Antes de emprender este viaje en el tiempo, ¿qué dirías, a la luz de tu práctica, si tuvieras que responder a la siguiente pregunta: qué indicadores sirven como punto de referencia para la elección de situaciones problemáticas (SP) en la enseñanza de matemática?* Esta tarea dio lugar a muchas discusiones sobre la complejidad de las SP que se ofrecen a los estudiantes, los desafíos que plantean a los docentes y a su acompañamiento.

Algunos AP que asistieron a este encuentro desean continuar la reflexión con los investigadores.

A través de los temas tratados durante ese encuentro, además del de "consejos dados a los profesores", vino a sumarse un cuestionamiento real al que se enfrentaron los AP en sus prácticas de acompañamiento, como pudimos observar durante un primer *debriefing*[7] con un pequeño grupo de AP, interesado en continuar la reflexión (diciembre de 2014). En ese encuentro, se invocaron las dificultades experimentadas por los docentes en relación con el uso de situaciones problemáticas en clase y su evaluación, las solicitudes dirigidas por los docentes a las que no siempre son capaces de responder como AP, o alrededor de las cuales ellos se cuestionan. Si bien estos AP han desarrollado **maneras de hacer** para responder a esas solicitudes de los docentes, sienten la necesidad de distanciarse de esas prácticas espontáneas y tener una idea más precisa de lo que está en juego, de las preguntas que surgen, con el fin de apoyar su intervención. También sienten la necesidad, como AP, de compartir sus experiencias, siendo muchos de ellos los únicos AP en matemática en su entorno escolar. Así, la necesidad de aclarar lo que cubre esa resolución en un contexto de enseñanza, identificar los temas y posibles enfoques, verlos con mayor claridad, es una preocupación compartida por este grupo de AP. Este cuestionamiento coincidió con nuestras preocupaciones como investigadores en materia de RP, particularmente desde el ángulo de una reflexión que queda por hacer frente a lo que ella exige en un contexto de enseñanza.

[7] Nota de la traducción: En inglés en el original.

Reuniones preliminares que conducirán a la identificación de un primer objeto de investigación co-situado

Los investigadores y los AP se van a comprometer en un proceso exploratorio sobre el tema de la RP en el contexto de la enseñanza, un tema que tiene resonancia en ambas comunidades. Para los AP, se trataba de ver claramente, de tomar distancia en relación a sus prácticas de acompañamiento a los docentes en la RP, de intercambiar con otros AP sus experiencias a fin de identificar los desafíos que plantea el RP en el contexto de la enseñanza y avanzar sobre posibles consejos para los profesores. Para los investigadores, la complejidad de resolver problemas matemáticos en el aula relacionados con el aprendizaje de los alumnos merecía atención (Lajoie y Bednarz, 2012, 2014, 2016). Estos primeros encuentros permitieron iniciar un trabajo conjunto y concretar un determinado objeto de investigación co-situado, teniendo resonancia para ambos, sobre el cual ambas partes deseaban avanzar: (1) en torno al esclarecimiento de **los desafíos encontrados en RP** (desafíos en el contexto de enseñanza y desafíos de acompañamiento) y (2) teniendo en cuenta esos desafíos, tomando la forma en esta etapa de **consejos posibles para los docentes**, sobre los que se deseaba avanzar. Efectivamente, la primera problematización es definida en términos de desafíos y consejos: cuestiones establecidas intuitivamente como un cierto problema que se busca delimitar mejor frente a las dificultades encontradas o percibidas (que afectan a la RP en el contexto de la enseñanza y del acompañamiento); consejos que buscan dar cuenta o tener en cuenta estos desafíos.

Las primeras modalidades de funcionamiento también se definen en torno a reuniones de un día que se extenderán a lo largo del año. El comienzo de la operacionalización de la investigación se pone en marcha. Como lo muestra el informe de nuestra primera reunión de un día (ver cuadro 1, primera línea), nos habíamos dado colectivamente como deber preliminar, iniciar esta reflexión común en torno a la resolución de problemas (RP) *cada uno debe pensar en un consejo que nos importaba, que era importante para nosotros para dar a los docentes, o por el contrario, un consejo que no queríamos dar, precisando por qué*. Así, desde las primeras reuniones (diciembre de 2014 y junio de 2015), las modalidades de funcionamiento del grupo toman la forma de **deberes** que nos asignamos colectivamente de una reunión a otra, deberes que prolongan la discusión, la reflexión iniciada y sirven de trampolín para discusiones posteriores; de notas tomadas durante la reunión por uno u otro (investigador o AP) permitiendo hacer un seguimiento de lo dicho durante el encuentro; notas que luego se compartirán con todos, pudiendo cada uno agregar, si es necesario, las reflexiones y cuestionamientos que puedan surgir de la lectura de esas notas. Se podría pensar a la luz de lo que acabamos de describir que el proceso de co-situación se detiene ahí, pero no es así como lo veremos a continuación.

Un proceso de co-situación que continúa

La co-situación y la co-operación se superponen parcialmente. La co-situación de una IC debe ser considerada como siendo potencialmente transversal, cuestionamientos, sucesivas problematizaciones que conducen a re-situar, a lo largo de la investigación, el objeto de preocupación compartido (Mottier Lopez y Dechamboux, 2019). Entonces, en la investigación con los AP, a través de un determinado recurso que ha sido iniciado en el primer año (tomando gradualmente la forma de un cuadro), recurso que constituye un soporte para la organización de un determinado pensamiento colectivo sobre las RP en el contexto de enseñanza, es posible ver cómo un determinado objeto de interés compartido es re-visitado (ver a continuación el fragmento textual).

Durante este fragmento, en el que los AP vuelven a este recurso en desarrollo, explican a uno de los investigadores, que estuvo ausente durante las primeras reuniones, el cuadro que ha sido desarrollado y la justificación subyacente, en apoyo a la organización, a la estructuración de cierto pensamiento colectivo.

> (AP5)[8] *Al principio no teníamos eso* (el cuadro). *Yo fui un poco precoz con la idea de... quería tener un diagrama... realmente necesitaba* (un diagrama) (...)
>
> (I1) *Necesitábamos estructurar un poco más y organizar. Las primeras discusiones iban en todas direcciones y en un momento, sentimos la necesidad de estructurar, organizar, al principio andábamos a tientas, quiero decir, era necesario un diagrama, es el AP5 el que lo introdujo. Después de eso, pasamos a otras formas, había dos o tres formas* (…) *y en un momento llegamos al cuadro… completamos la información sobre un problema, sobre la historia de un problema, es cuando hicimos la historia de un problema que tuviste...*
>
> (I2) *La idea del cuadro…*

Un primer objeto co-situado sobre el que se centró el trabajo durante las reuniones es explicitado, el de los desafíos y el acompañamiento a los profesores. Un primer refinamiento de este objeto aparece también a través de la preocupación por los ejemplos y referencias y la toma en cuenta de dos planes, el de los docentes y el de los AP (y sus acompañamientos).

> I1) *Entonces ahí, cuando juntamos el trabajo de los subgrupos* (investigador/AP, sobre la historia del problema, desde la puesta en marcha hasta el retorno), *sentimos la necesidad del cuadro, de*

[8] AP1, AP2, AP3……designan los AP participantes en la investigación y I1, I2, I3….los investigadores.

ir (al cuadro) *y allí estaba el desafío del acompañamiento. Al principio solo era cuestión de consejos. Luego, en algún momento, se agregó, bueno, también se necesitaría de ejemplos y referencias. Bueno, poco a poco se fue enriqueciendo, pero al principio era un desafío-consejo. Luego, después de eso, dijimos que sí, pero esto puede ser más para los docentes, y realmente lo es para los AP...*

Luego, este objeto es revisitado para explicitar no solo los desafíos y consejos en ambos planos, sino también aquello que llamaremos las tres etapas del problema en clase.

(AP4) *En un momento dado hubo una discusión sobre la conducción y ahí nos dijimos…, nos dimos cuenta de que estábamos todo el tiempo en el comienzo, todo el tiempo en la preparación, la planificación. Entonces nos dijimos, vamos a ir a profundizar sobre lo que sucede en el aula, y es de ahí de donde vienen los tres tiempos* (del problema en clase, inicio, resolución y devolución).

(AP3) *La superposición de la comprensión de cada desafío, la vemos en cada una de las reuniones donde nos decimos "ah, sí pero debería comprobarlo, porque eso no es del todo lo que queríamos decir..." agregamos precisiones* (…)

(I1) *En otras palabras para responder a la pregunta* (planteada anteriormente por I4), *ese cuadro fue un recurso en el desarrollo de nuestro pensamiento colectivo, fue un recurso. Ayudó a estructurar nuestro pensamiento a lo largo de las reuniones* (…)

(I4) *Es lo que dijiste antes, hay un aspecto, solo para aclararlo, porque mencionas algo que me hace pensar a eso y también va a servir por ejemplo para decir "bueno hay un hueco ahí y entonces vayamos..."*

(APs) *sí, sí, absolutamente*

(AP5) *esto nos aporta un poco de retroalimentación sobre los elementos*

Entonces aparece una nueva reestructuración del objeto con otros tiempos tomados en consideración, un antes y un después de la clase, poniendo en evidencia los vínculos entre estos tiempos.

(AP3) *Pero el después...*

(AP4) *Al después, lo descuidamos, pero resurgió hoy, hubo al menos dos o tres comentarios que decían "bueno, tenemos que ir a ver qué pasa después".*

(I1) *Lo que también pasó es que estábamos, tú lo sabes, lo dijiste, estábamos mucho en el antes, pero nos dimos cuenta de que cuando estábamos en el durante, siempre estábamos en interrelación con el antes. Entonces el antes fue bastante importante. Volvía cuando estábamos trabajando sobre la propia conducción de la clase.*

Este objeto será revisitado nuevamente para que los principios rectores aparezcan más allá del acompañamiento (que gradualmente se convertirán en consejos/gestos/pistas).

(AP3) *sí, y* (eso permite el cuadro) *clasificar y agrupar, pienso que así es cómo nacieron básicamente los tres tiempos, por ejemplo. Y ahí, en un momento dado, llegamos a algo que no*

> *se clasificó en el tiempo. Dijimos "ah, eso es un principio rector". Después de* eso *nos dijimos a nosotros mismos "ah, están los desafíos de los AP y están los desafíos de los profesores"*

Entonces, desde la idea inicial, la de **desafíos** y **acompañamiento para los docentes** (que buscamos aclarar sobre la resolución de problemas en contexto de enseñanza), pasaremos a algo más amplio (desafíos/problemas/nudos y acompañamiento/gestos), poniendo en juego paulatinamente **los dos planos**, el del **docente de RP** y el trabajo del **docente**, pero también el del **AP** y el trabajo de acompañamiento. La RP en el contexto de enseñanza se estructura poco a poco en torno a lo que llamaremos "la historia del problema", es decir, trabajar en el problema: desde su puesta en marcha hasta su conducción en clase (*los tres tiempos del problema en clase*). Estos tres tiempos se enriquecen buscando el **antes** (preparación, anticipación de la sesión) y el **después** (la retroalimentación reflexiva sobre lo sucedido, después reintroducida, si es necesario), de manera dinámica (poniéndolos en interrelación). Este trabajo se enriquece a lo largo del tiempo con **ejemplos, referencias**, esto es un boceto de posibles **viñetas** para sustentar lo explicado y del que el AP puede inspirarse. Entonces, **el objeto común de investigación se vuelve más claro y complejo al buscar múltiples dimensiones y múltiples planos a considerar** (la clase, los alumnos, el trabajo del docente, el acompañamiento del AP). Finalmente, se enriquece con **principios rectores** que de alguna manera atraviesan este trabajo en RP y en acompañamiento. Estos principios rectores abordan la cultura matemática de la clase deseada, guiando a la vez el trabajo en RP y en el acompañamiento (ver figura 2).

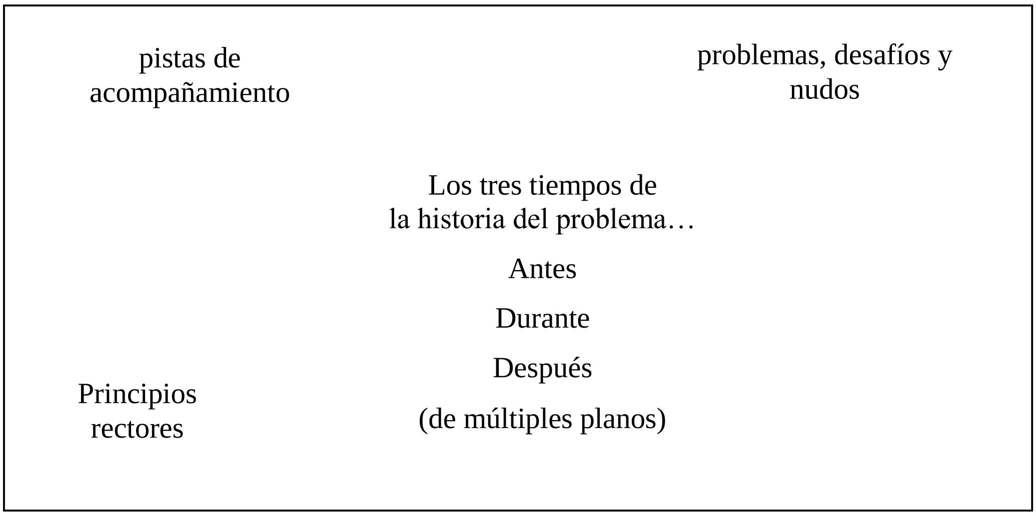


Figura 2. Desde la búsqueda de consejos para los docentes hacia…

pistas de
acompañamiento

Entonces, la problematización y clarificación del objeto investigado (ver Figura 2) no se detienen en la primera caracterización, resultante de las reuniones exploratorias.

2.2.2. En el corazón de la actividad reflexiva y de los encuentros regulares entre investigadores y AP

La investigación se estructuró alrededor de diecisiete encuentros de reflexión de una jornada cada uno (cinco en el primer año, seis en el segundo y seis en el tercero). Estos encuentros estaban organizados de manera a explorar diferentes facetas de la resolución de problemas (RP) en el contexto de la enseñanza y en el acompañamiento a los docentes para esa resolución, a menudo partiendo de las tareas preliminares que el grupo había asignado de una reunión a la siguiente. (Ver cuadro 1 en Anexo). Ese cuadro traza la trayectoria de los distintos encuentros reflexivos, retomando sus agendas, así como las tareas preliminares que el grupo se había dado. Esta manera de funcionar, al igual que los temas tratados, se fue constituyendo progresivamente de acuerdo con las reflexiones en las que estábamos inmersos, en un proceso flexible y abierto a preguntas nuevas que pudieran surgir. Así, durante los encuentros, varios aspectos fueron abordados: elección de problemas con el fin de trabajarlos con los alumnos o en el acompañamiento de los profesores; potencial de diferentes tipos de problemas para los alumnos, para los profesores, para los AP; manejo de problemas en clase con todas las exigencias que fueron puestas en evidencia durante los encuentros; preparación para ese manejo y anticipación, retroalimentación después del abordaje; construcción de un recurso que ayuden a estructurar un determinado pensamiento colectivo en construcción; elaboración de viñetas para el acompañamiento de los docentes; etc. El contenido de este cuadro revela también diferentes aspectos que ilustran un co-compromiso de los diferentes actores, AP e investigadores, en el proceso configurado en torno a esa RP: (1) El grupo se asigna colectivamente tareas a efectuar entre las diferentes reuniones que permiten una continuación de la discusión ya en curso, o la precedente. Estas tareas se aclaran colectivamente y aseguran que la reflexión esté anclada en el campo de la práctica (ver, por ejemplo, los problemas que traen unos y otros, provenientes de la investigación, pero también de la práctica; o incluso las experiencias realizadas en clase o en el acompañamiento de los docentes, que son aportados al colectivo IC); (2) En estas tareas preliminares, y la retroalimentación que hacemos sobre ellas durante las reuniones, todos se involucran de manera simétrica: los problemas discutidos provienen por ejemplo tanto de los investigadores como de los AP, cada uno participa en la discusión y se siente completamente a gusto al hacerlo, se crea un clima de confianza entre los interlocutores (ver sobre este tema Saboya y otros, 2019); (3) Las notas tomadas durante las reuniones (por un investigador y un AP que se turnan), son devueltas a los actores, mejoradas (o ampliadas) por los actores si es necesario entre las reuniones y devueltas al grupo. Percibimos a través de esto, un cierto rol simétrico ocupado por unos y otros (Morissette y Desgagné, 2009).

Los AP involucrados en este proyecto, se cuestionan sobre diferentes aspectos de esta RP, caminan en este cuestionamiento, construyendo con los otros AP y los investigadores, elementos de entendimiento ante determinados desafíos puestos en evidencia, como nuestro análisis lo mostrará más adelante: por ejemplo la cuestión de la elección de problemas no utilizados habitualmente por los docentes, como pueden ser los problemas sin datos numéricos (Bednarz, Bacon, Lajoie, Maheux y Saboya, 2020), o la cuestión del control del problema en clase y la reactivación (o estímulos) por parte del docente de la variedad de estrategias, ritmos, errores, etc. (Bednarz y otros, 2020; Bacon y otros, 2019). Los AP alimentan estos intercambios apoyándose en sus experiencias profesionales, lo que Lessard (2008) llama una "inteligencia del campo (de investigación)", arrojando así luz sobre los diversos desafíos encontrados en relación a la RP en el contexto de la enseñanza y el acompañamiento de los docentes, pero también sobre los modos de hacer las cosas y las finalidades de sus acompañamientos y a través de ellos, la profesión de AP. A lo largo de todo lo anterior, encontramos pistas sobre la forma en que la doble verosimilitud impregna esta **fase** central de la investigación.

Estos intercambios, que fueron objeto de una grabación audio, constituyen el material básico de nuestro análisis. Volvemos ahora a la fase de co-producción de la investigación, que engloba tanto el proceso de análisis de ese material, como la difusión del conocimiento que resulta de esta investigación.

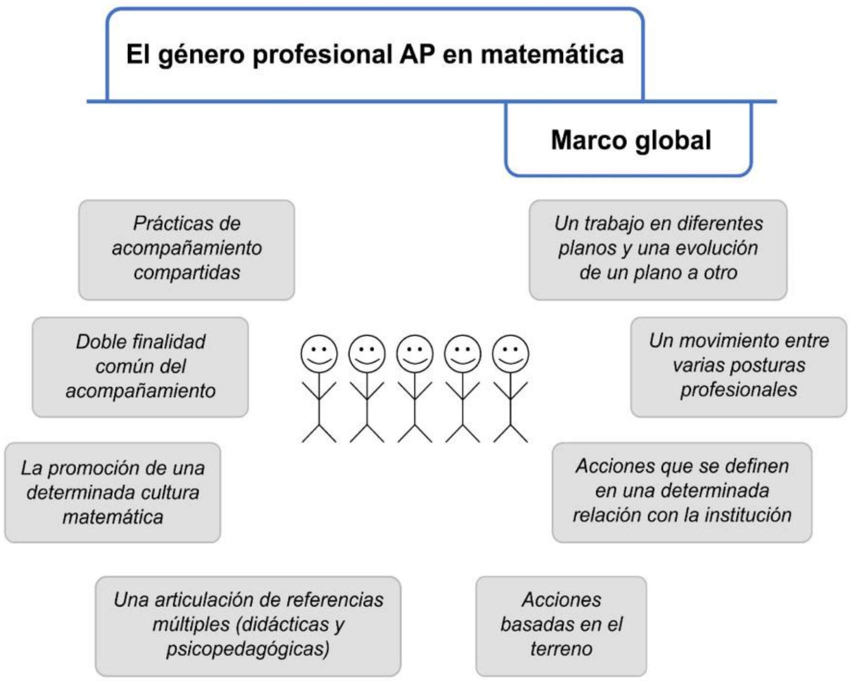
2.2.3. Análisis restituidos a los actores: interpretaciones cruzadas

Los investigadores, que se comprometieron a hacer el análisis del material recopilado, afrontan aquí el desafío de la doble verosimilitud; por un lado, el de reflejar un cierto encuentro entre investigadores y AP y por otro lado, hacer oír la voz de los AP. Una perspectiva interesante, utilizada en esta IC para responder a esta preocupación de la doble verosimilitud, fue la de involucrar a los AP en el análisis. Así, se realizaron varios análisis parciales a lo largo del camino, a medida que avanzaba el proyecto y al final del proceso, que fueron devueltos a los actores durante las sesiones de reflexión. En este sentido, la co-producción y la co-operación se superponen parcialmente. La restitución de los análisis efectuados a los actores permitió cruzar las interpretaciones, afinarlas, ampliarlas, como lo veremos en los extractos que retomamos a continuación.

Para situar estos extractos, el análisis presentado a los AP se refiere a las entrevistas que ellos respondieron al inicio del proyecto, en su lugar de trabajo. Una cierta conceptualización de los investigadores, que se inspira en los conceptos de género y estilo[9] (Clot y Faita, 2000), se superpone a la narrativa de los AP para obtener elementos de comprensión, que puedan clarificar la labor de AP desde el interior de su propia práctica profesional (para más detalles sobre estos análisis, ver Hanin, Lajoie, Bednarz, Saboya y Bacon, 2021).

Estos elementos de comprensión (ver figura 3) son devueltos a los AP, de manera que ellos se empapen y puedan debatirlos, cuestionándolos, ampliándolos, pudiendo así enriquecer las primeras interpretaciones en un proceso de co-construcción que continúa.

Figura 3–Los análisis presentados a los AP (vista global) de los que se desprenden las características comunes a su actividad profesional



[9] Los conceptos de "género" y "estilo" permiten captar lo que está en el orden de lo construido colectivamente y sus variantes. El género se refiere a "la parte entendida de la actividad, lo que los trabajadores de un entorno determinado reconocen (...) lo que les es común y lo que los une en condiciones reales de vida" (p. 11), mientras que el estilo da testimonio de los continuos ajustes y retoques, según las circunstancias, el contexto y las características personales que “cada sujeto se interpone entre sí mismo y el género colectivo que moviliza” (Clot y Faita, 2000, p. 15 (traducción libre del francés).

La discusión da lugar, en este caso, a más de tres horas de intercambios. Retomamos algunos elementos significativos de esta doble verosimilitud en la acción sobre la que buscamos dar testimonio.

La discusión comienza muy rápidamente, a partir de la presentación de los conceptos de género y estilo, y permite a los investigadores recordar que ese estilo (un concepto que presentamos al insistir en el hecho que no estaba necesariamente ligado a las personas, sino al contexto) está vinculado a las circunstancias que les parece importante tener en cuenta.

> (AP3) *en todo caso propongo decir que el género, y el estilo quizás también, está condicionado por el tipo de organización en la que trabajamos, así que a veces queremos ponerle un color pero me imagino que ustedes lo han tenido en cuenta porque a veces hay orientaciones que son tomadas por nuestros respectivos centros de servicio y que luego orientan un poco el ejercicio de nuestras funciones.*

Los AP, además, se reconocerán en las interpretaciones propuestas, que les otorgan una visión compleja de su profesión, como vemos en las palabras de uno de los AP presentes (ver extracto más abajo). La discusión aquí se relaciona con las **prácticas compartidas de acompañamiento** que surgen del análisis: (1) considerar la puesta en acción y la reflexión de los docentes como una palanca para el desarrollo de sus comprensiones y prácticas; (2) organizar el acompañamiento en forma de bucles donde la observación y/o experimentación en clase ocupan un lugar importante; (3) buscar en ese acompañamiento el apoyo de los docentes; (4) considerar que un acompañamiento tiene éxito cuando encontramos rastros del mismo en el campo.

> (AP10)[10] *Solo para meterme un poco en la discusión, eso me parece interesante, porque al no estar entre los ocho* (AP de la IC), *tengo la impresión de que me grabaron a escondidas* (risas del grupo). *Me parece interesante reunirnos de nuevo incluso a pesar de decir ok cuando hablaron de situaciones... hay puntos que uno dice sí... sí... yo tal vez no lo haya expresado así. El último punto que me pareció interesante de mencionar, se sabe que nos alegramos cuando hay un rastro de nuestra intervención, luego este rastro, lo encuentro realmente interesante porque, les dije que a mis nuevas colegas* (AP), *yo sé que cuando damos formación o cuando hacemos acompañamiento, no esperamos que todo esté ahí, pero cuando hay un elemento que está ahí, se gana.*

En la discusión que sigue, la sutileza de lo que ven los AP bajo estos "rastros de acompañamientos exitosos" se hará más clara, bien lejos de lo que la gente a nivel institucional espera de las huellas de un apoyo exitoso.

[10] AP10 es un Asesor pedagógico invitado por los otros asesores a este encuentro, él no participa a la IC.

(I2) *Entonces les diré que los rastros* (que surgieron del análisis) *no siempre son del mismo orden, a veces lo que se apunta es un cambio en la práctica, pero otras veces es simplemente un cambio de mirada. El profesor ya no mira las cosas de la misma manera.*

Se destaca una sutileza en la noción de huella, asociada a matices en el discurso del profesor, que se pueden descomponer en diferentes cosas...

(AP10) *Sí en su discurso* (el docente), *hay un pequeño matiz cuando habla de eso, ahí dices, bueno sí...*

(AP5*) Escucha, si yo también puedo hacer dedo* (a partir de la idea del otro) (…) *entonces AP3 lo decía un poco* (refiriéndose a lo que dijo anteriormente uno de los AP sobre la orientación de su centro de servicios)*, de acuerdo con las orientaciones de nuestras organizaciones, claramente en nuestro caso, yo diría que todo el centro de servicio es sensible a* (saber) *cuáles son los efectos de nuestro acompañamiento. Y ahí tenemos dos miradas, los docentes, esto es las prácticas, luego* (los alumnos). *Tú sabes que la mirada, se puede desglosar en distintas cosas, y los efectos en los alumnos sigue siendo un gran paso, pero es indirectamente* (que podemos hablar de un tal efecto).

(AP3) *Es delicado, a veces es tan sutil en el discurso de los docentes.*

Se cuestiona el efecto de esa huella en los alumnos, ponemos en evidencia atajos inadecuados.

(I3) *Pero cuando dices* (AP5) *es indirectamente* (que se puede hablar de un tal efecto), *al fin de cuenta eso repercute en un mejor aprendizaje para los alumnos, ese es el objetivo al fin y al cabo.*

(AP5) *Eso es, es por eso que nos levantamos por la mañana*

(AP3) *Pero al mismo tiempo es delicado este aspecto porque es el elemento por el que me levanto por la mañana, pero hay algunos atajos que son inadecuados, del tipo "viniste a hacer acompañamiento en mi escuela, ah mis resultados mejoraron". Encuentro difícil aislar esta variable y ver el efecto en la enseñanza, entonces como lo llamó AP10 a veces es tan sutil, es solo en el discurso del docente que percibimos que la reflexión, su comprensión es modulada, pero de una manera mínima, y yo encuentro que ahí vemos un impacto, pero, en todo caso, es difícil de definir, de identificar con precisión. Además, la otra cosa es que a menudo nos encontramos en las prácticas declaradas, entonces los docentes nos dicen lo que hacen, pero a veces están lejos de las prácticas reales* (…) *uno tiene la impresión de que se están produciendo cambios en el terreno y finalmente Oops! estamos justo en el "aprendí bien la lección", así devuelvo lo que quieres escuchar, este elemento es sutil*.

Esta huella sutil se establece con el tiempo y se ve en términos de comprensión más que de éxito.

(I2) *Este es un elemento importante porque estamos en una sociedad que valora los resultados centrados en la evidencia, por lo que vuestro centro de servicio también los valoriza, está centrado en los resultados la mayor parte del tiempo, y de hecho ustedes no trabajan necesariamente en términos de resultados, están trabajando de una manera mucho más sutil, en términos de cambiar elementos de comprensión, haciendo que las personas ya no vean las cosas de la misma manera, y esto no se ve necesariamente en lo inmediato en los gestos, no es inmediatamente visible, es algo que es un camino a más largo plazo.*

(AP6) *Yo también voy en la misma dirección al decir que la idea de la extensión* (en el tiempo) *del acompañamiento tiene un efecto completamente diferente. Quiero decir, a veces, lo vimos incluso para nosotros en RP, todo el tiempo que nos tomamos para pensar, compartir, intercambiar, probar cosas, nuestra actitud y nuestra evolución se estiró en el tiempo y esa es la riqueza de los cambios. Creo que cuando hablamos de huella en el terreno, a menudo se relaciona con la duración hasta cierto punto, no solo eso, sino, creo que es un factor importante.*

(AP10) *Estamos sobre la huella a corto plazo* (en nuestros centros de servicio)*, pero hay muchas huellas que se ven a largo plazo. Pienso en equipos que a veces no los ves desde hace un año, como es mi caso, y luego los vuelves a ver, te hablan de algo, y te decís "ah! esta idea germinó ahí, creció mientras yo no estaba". Cosa que no hubiese visto si la dirección me hubiera dicho, viniste por tres horas, eso hay que arreglarlo* (…)*. Hay un desafío en la huella, en el corto plazo, a largo plazo, en lo declarado, en la práctica real, hay lo que llamaría un cambio drástico, tal vez un cambio sutil.*

Reflexionar sobre cuáles pueden ser esas huellas se presenta como un cuestionamiento importante.

(AP5) *Sí, sorprendentemente encuentro el interés, la palabra está bien escogida, sobre las huellas en el terreno, me parece que AP10 lo resaltaste un poco, las huellas no las describimos, pero… ¿qué pueden ser esas huellas? Qué pueden ser a corto plazo cuando te lo pones a pensar. En algún lugar queremos que nuestro trabajo dé algo, tanto los investigadores como los AP y los profesores, todos por igual, queremos que haya una influencia, que suceda algo. Qué es ese algo, de lo más sutil, lo más corto, lo más... me parece importante interesarse por lo que esperamos de los docentes, en definitiva, de los alumnos. Luego un pequeño paréntesis para AP3 que introdujo la práctica declarada y la práctica real, ese es el límite de nuestro proyecto, estamos en la práctica declarada también nosotros los AP, en la entrevista.*

Huellas en lo que se dice opuestas a la acción, una toma de conciencia que precede a la acción.

(AP8) *Podría haber agregado un pequeño elemento, me hace pensar que es gracioso es como si los adultos, primero verbalizamos luego, en segundo lugar nuestro cambio en la acción ocurre, pero en los alumnos es lo contrario, lo hacen antes de ser capaces de verbalizar* (…) *pero decirlo ya es un paso en la acción, es una toma de conciencia de que yo tendría que hacerlo, empieza a germinar, eso es un poco como lo que dijo AP10, a veces escucho en el discurso, el discurso ha cambiado, puede que todavía no haya cambiado en el aula, pero la semilla ha germinado*.

Así lo que precede deja ver un co-análisis que continúa en torno a un desafío central para el AP, el de las huellas de un acompañamiento exitoso, aportando una cierta densidad a este concepto de huellas que no se puede reducir a un simple efecto sobre los estudiantes o un cambio en las prácticas docentes.

Esos debates sobre los análisis vienen a confrontar, a continuar, a enriquecer y profundizar aquello que se dice en relación a la profesión como lo muestra este segundo extracto en relación a otra característica común del género profesional AP: **las acciones enraizadas en el terreno[11].**

> (AP8) *Cuando hablamos de eso* (sobre situaciones profesionales que presentamos, representativas para nosotros de lo que estábamos haciendo en nuestro acompañamiento), *no pudimos, CP5 y yo, poner mucho en el aula porque no había suficientes recursos. Me parece interesante en los extractos* (retomados en el análisis que nos mostraste), *se siente que hay un esfuerzo por encontrar formas de acercarnos al terreno, sin poner, nosotros mismos, un pie en el aula, sin estar ahí...*
>
> (I2) *Eso confirma que los estilos son en función de las* circunstancias (es aquí, porque no pudieron poner un pie en el aula, que el terreno aparece como el lugar donde se proyecta el AP con el docente).

Relativizar esta idea del terreno (y al no restringirla a estar en el aula) y abrirse a otras formas de estar cerca del terreno será entonces destacado por los AP.

> (AP8*) En otro orden de ideas, hay colegas de AP que están en el terreno, pero yo cuestiono la idea de que sea porque estás en el aula que será más relevante que si no estuviesen allí. Está bien estar en la clase, sí, pero ¿Cuál es la intención con la que estás en la clase? ¿Qué obtienes de ella y qué haces después? Entonces esta idea de acercarnos al terreno no es solo poner un pie en el aula, podemos acercarnos al terreno aunque no estemos en el aula... Pero no es unánime en absoluto entre los colegas AP, creo que hay varias formas de acercarse al terreno.*

A continuación, se aclara una cuestión de credibilidad/equilibrio entre proximidad al terreno y distancia en la intervención del AP con los profesores.

> (AP3) *Claramente hay un desafío ahí, porque hay un problema de credibilidad de nuestra parte cuando nos dicen "ustedes AP que trabajaban en el centro administrativo, o peor aún los AP que trabajaban en el ministerio, eso está alejado del terreno"… Entonces entiendo lo que dice AP8, que no significa tener los dos pies en el aula para tener la realidad del terreno, pero por supuesto hay que tenerlo en cuenta para tener un cierto reconocimiento de los docentes con quienes trabajamos. Es como una especie de equilibrio entre esa distancia que es tan preciosa para tener un ojo crítico y una vez más, con los pies un poco en el terreno para entender lo que se puede hacer.*
>
> (AP8) *Es una cuestión de equilibrio, eso es realmente AP3 porque tú puedes estar en el terreno todo el tiempo y no ser capaz de tener esa mirada "Dios mío, es bien compleja la clase, Dios mío, todo lo que tienen que manejar" y finalmente no poder ofrecer algo interesante desde el*

[11] Aquí el análisis muestra que este anclaje en el terreno se caracteriza de diferentes formas dependiendo de las circunstancias: (1) así el terreno aparece, en algunos casos, como el lugar donde ellos mismos fueron profesores, apoyándose en sus observaciones y experiencias como profesores; (2) el terreno es también el lugar donde el AP se proyecta con el docente durante el acompañamiento (proyectando al docente en su clase, con sus alumnos por ejemplo al resolver un problema); (3) también es, en otros casos, el terreno del que queremos alejarnos para mejorar (por ejemplo, en un contexto de resolución de problemas (RP), donde la lectura del problema y el polo de organización a menudo ocupa mucho espacio a expensas del polo matemático, el AP propondrá problemas abiertos que mostrarán a los profesores que a veces se puede estar en el trabajo matemático sin necesidad de lectura y organización); (4)finalmente el terreno es también un lugar de observación, de experimentación para alimentar su apoyo (al elegir, por ejemplo, ir y experimentar un problema en una clase a fin comprender mejor lo que está sucediendo allí y devolverlo al grupo).

punto de vista didáctico. Es como ese equilibrio entre tener en cuenta el terreno, actuar en el terreno y tomar distancia.

(AP4) *Estar cerca de la gente, sí, pero ya no estás al acecho* (de algo interesante a nivel didáctico).

Se precisa un anclaje múltiple en el terreno asociado a un acompañamiento de proximidad a ser cuestionado, y a una toma en cuenta de posibles en términos de intenciones.

(I2) *Eso muestra que el terreno es más complejo y sutil* (que estar en el aula), *tener el terreno presente puede tomar muchas formas.*

(AP5) *Me parece interesante lo que tú traes AP8 y también I2 cuando haces la distinción, queremos tener en cuenta el terreno, queremos reconocer el terreno y lo podemos hacer de diferentes formas. Existe la creencia* (en nuestros centros de servicio escolar) *de que nuestro lugar más efectivo y eficiente es con los estudiantes, esto es lo que ellos llaman acompañamiento cercano. Pero depende de lo que hagas con él.*

(AP8) *En las prácticas efectivas de desarrollo profesional* (de acuerdo a lo que piensan los directores de los centros de servicios), *hay que estar en clase, el AP debe estar en clase* (…) *¿Qué es un desarrollo profesional efectivo? Hay principios, uno de los principios es estar presente en la clase. Creo que es necesario reflexionar sobre eso, hay sutilezas a tener en cuenta.*

(AP5) *Podemos ir a clase para ver qué pueden hacer los alumnos en una situación, podemos ir a clase para acompañar a un profesor en una transición en una práctica en la que se siente un poco menos cómodo, puedo estar en clase para ofrecer una observación a un maestro que desea recibir una retroalimentación. Hay todas estas razones y otras más, pero si no está claro cuál es mi intención* (...). *El hecho de que esté en una oficina no significa que no esté cerca del terreno.*

Esta credibilidad, esta relación de confianza debe construirse con el docente (esto surgirá del análisis como concepto clave, organizando su actividad profesional como AP).

(AP8) *¿Voy a clase porque necesito un reconocimiento? ¿Por qué voy al terreno? Las acciones en el terreno están ligadas a nuestro rol y a nuestras necesidades.*

(AP10) *Hay como una relación de confianza que tienes que establecer con los docentes, para tener acceso al aula, hay* (docentes) *para quienes la relación de confianza no es lo suficientemente fuerte para que tu entres* (en su clase), *para otros es bueno, te dirán puedes venir a mi clase, luego está la limitación cuando tienes treinta profesores. Esta credibilidad se construye, no sucede de la noche a la mañana*.

(AP6) *Se debe establecer una relación de confianza con los profesores para hablar del terreno, para que se produzca el intercambio, pero al mismo tiempo también se debe tener una actitud de humildad frente a los profesores*.

A través de este intercambio se hace evidente un importante desafío de su práctica profesional, la de la relación con el terreno y su complejidad, esta relación no puede reducirse a estar en el aula, ella toma muchas formas dependiendo de las intenciones y circunstancias.

Detrás de esta relación con el terreno está la credibilidad de la intervención profesional del AP con los docentes y la relación de confianza que deben establecer paulatinamente.

Se puede ver claramente, en los ejemplos presentados, la importancia y la riqueza del retorno del análisis a los actores. Esto permite dar sentido a una determinada práctica profesional en el centro de la investigación, enriquecer los primeros elementos de comprensión y desarrollar otros nuevos. Esta comprensión es tanto para unos como para los otros, en el plano de la investigación a través de las enriquecidas interpretaciones que surgen, pero también para los AP que continúan transitando este cuestionamiento práctico sobre asuntos claves que el análisis revela, por ejemplo la relación con el terreno, expresando en esta ocasión las presiones a las que están sometidos (en lo que respecta a un acompañamiento de cercanía considerado como el más eficiente) y la reflexión que creen necesaria sobre este aspecto importante de su trabajo.

Al terminar este proceso de IC, también está la cuestión de la difusión de la investigación y la forma que debe tomar para llegar tanto a la comunidad científica como a la comunidad profesional, en aras de la doble verosimilitud.

2.2.4 *Difusión de la investigación: el ejemplo de la elaboración conjunta de un coloquio*

La difusión de esta IC ha dado lugar a presentaciones y publicaciones en revistas o congresos, en las que se han involucrado investigadores, pero también AP (ver en particular Saboya y otros, 2020; GREFEM, 2019, 2017)[12]. En uno de los casos, la forma original que adoptó la presentación en el coloquio del grupo de didáctica de la Matemática de Quebec (GDM) puso en escena las voces de los investigadores y los AP sobre el trabajo de anticipación en RP (ver GREFEM, 2019). Pero no es esta experiencia la que queremos relatar aquí, sino aquella de una difusión un tanto particular que refleja una preocupación, por parte del grupo, por la presentación de los resultados del trabajo, dando cuenta de la IC y del proceso de co-construcción que tuvo lugar allí.

[12] M. Saboya, N. Bednarz (investigadores) y A.M. Carbonneau (AP) presentación en nombre del GREFEM y los 8AP: «Résolution de problèmes (RP) en contexte d'enseignement: objet aux frontières de plusieurs communautés» ("Resolución de problemas (RP) en un contexto de enseñanza: un objeto en las fronteras de varias comunidades") 85º Congreso de ACFAS, Montreal, mayo de 2017 Enlace para visualizar las presentaciones: http://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/periscope-les-passagesfrontaliers-boundary-crossing-entre-les-pratiques-collaboratives-de

El grupo investigadores/AP trabajó, durante el año 2018-2019[13], en el desarrollo conjunto de un coloquio para todos los AP de matemáticas elementales. Varias reuniones de trabajo tuvieron lugar durante el año, antes de la conferencia (3) y después de la misma (1). El coloquio en sí tuvo lugar durante 2 días (21 y 22 de marzo de 2019). Reunió, además de los 13 miembros del comité organizador (investigadores/AP), un investigador postdoctoral y 7 estudiantes de maestría y doctorado; unos sesenta asesores pedagógicos de matemática elemental de 37 centros de servicios escolares de todas las regiones del Quebec y 2 representantes del Ministerio de Educación y Educación Superior. Todos los elementos, desde el diseño y el formato, los recursos, la organización y la ejecución, hasta el retorno de los resultados a los profesionales de la asesoría pedagógica, fueron pensados de forma colectiva.

Rápidamente le pareció importante al grupo de AP/investigadores, durante las reuniones de diseño de la conferencia, con el fin de contribuir a la comunidad profesional, hacer vivenciar el proceso más allá de sus resultados (avances en relación a la RP, a los desafíos puestos en evidencia, y un determinado campo de práctica profesional, el de los AP), como se muestra en el siguiente extracto:

> (AP5) *Si tomo en cuenta la conferencia que organizamos con nuestros compañeros AP, elegimos, apenas una pequeña palabra de bienvenida porque I4 insistió, pero los precipitamos, era muy importante para nosotros meterlos en un problema, por lo tanto, en la acción, para después poder hablar de ello...*

Esta implementación en la acción lleva a los AP a retener cuatro problemas que fueron propuestos desde el inicio de la conferencia y trabajados en equipos, luego se integraron en talleres. Por ejemplo, estos problemas, junto con otros, forman el material básico de uno de los talleres, centrado en el tema “Elegir un problema: ¿Para quién? ¿Por qué? ¿Qué es "buen" problema?”. La intención de la actividad, definida conjuntamente, es reflexionar sobre el tema de la elección de "buenos" problemas en el trabajo de RP en el aula, sobre las pautas detrás de las elecciones. Este taller se desarrolló en 4 etapas: (a) en un primer momento, pedir a los participantes que clasifiquen los problemas que se les han dado como "buen" problema para AP; "buen" problema para el docente; "buen" problema para el alumno, problema que se tiraría a la basura, especificando por qué, las razones de sus elecciones (carteles grandes permitieron que los equipos vayan y coloquen sus elecciones, hagan un seguimiento de sus justificaciones); (b) puesta en común, la intención aquí es resaltar las indicaciones subyacentes a las elecciones

[13] Nota de la traducción: Se hace referencia al año escolar ya que en Quebec las clases comienzan en el mes de septiembre de un año y terminan en junio del año siguiente.

realizadas y los matices, un buen problema, por ejemplo, para uno no es necesariamente bueno para el otro; (c) luego solicitar que identifiquen las intenciones potenciales para explotar tales problemas, un buen problema no es un buen problema en sí mismo, todo depende de lo que se haga con él; posteriormente (d) cuestionar ¿cómo desarrollar una cultura de elección de buenos problemas con los profesores? La intención de la actividad aquí es pensar en lo que podemos hacer como AP en nuestro acompañamiento para desarrollar una cultura de elección de buenos problemas (pensar en posibles vías).

En la base de la organización de este taller se puede ver claramente todo el trabajo de diseño de la actividad, elaborado conjuntamente entre AP e investigadores, de precisión de intenciones, de concepción del material de apoyo. Diferentes temáticas tratadas durante los dos días serán construidas desde una misma perspectiva de puesta en acción, reflexión, poniendo en juego varios planos, el de los alumnos, el docente y el del acompañamiento, apoyándose en el desarrollo de viñetas construidas por unos y otros, discutidas, re-trabajadas (ver figura 4 para un ejemplo de viñeta, relacionada con la orientación general de la gestión de la RP en el aula). Se pensará en el posible uso de esas viñetas para que los demás AP reflexionen sobre los temas tratados durante esta IC. Se mantendrán y trabajarán los siguientes temas: elección de un problema (¿Para quién? ¿Por qué? ¿Qué es un "buen"problema?); ¿Prepararse para llevar adelante un problema en clase? (¿Debemos prever todo? ¿Hasta dónde podemos arriesgarnos ante lo imprevisto?); Involucrar a los estudiantes (¿Sí? ¿No? ¿Decir todo?); Enfrentar el error (¿Compartirlo? ¿Explotarlo? ¿Evitarlo? ¿Provocarlo?); Facilitar un regreso a clase (¿Hasta dónde llegamos? ¿Qué es lo que debemos guardar? ¿Sobre qué necesitamos volver?).

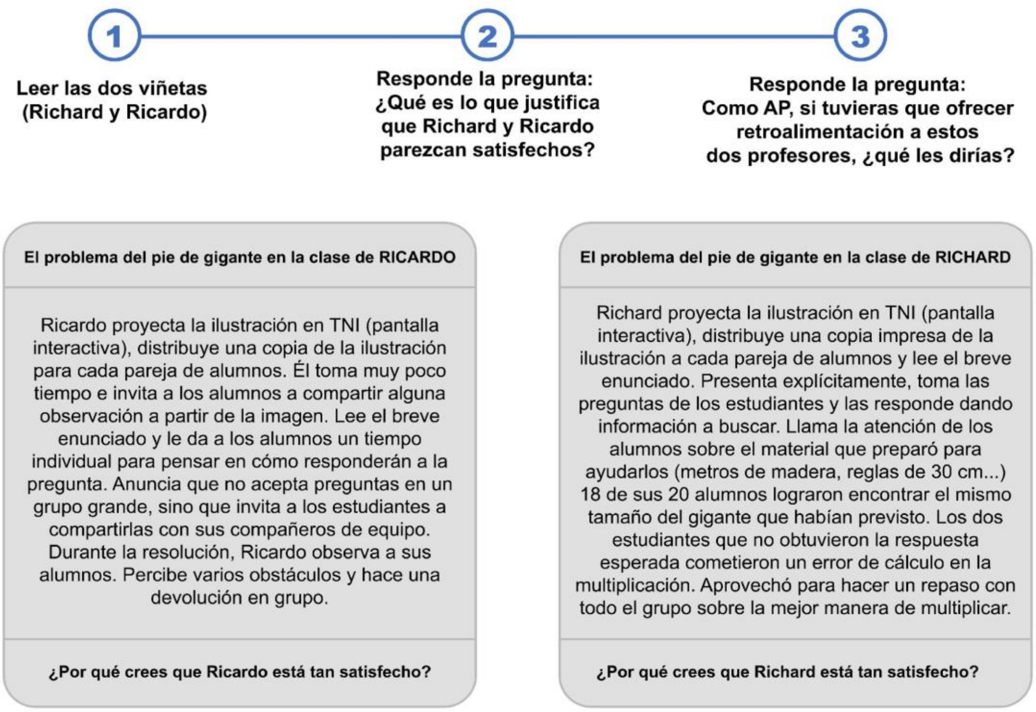


Figura 4. Un ejemplo de viñeta

En cada uno de los talleres, la animación es realizada en conjunto por un investigador y dos AP, reflejando nuevamente el espíritu de la IC que animó todo el proceso. Al final del coloquio, una presentación de lo que surgió de nuestro proyecto se ofreció involucrando a ambas partes en la presentación colectiva. En ella, se trataron los principios rectores que han parecido importantes en el transcurso de esta IC y algunas pistas de apoyo que tienen sentido para los AP. Desarrollar así una cultura de investigación matemática en el aula; considerar la RP como una herramienta para la enseñanza, como una oportunidad de aprendizaje; desarrollar una cultura en el aula en la que el error se considere positivo; apelar a la inteligencia de los alumnos como jóvenes matemáticos; dejar espacio a los alumnos, aprender a callarse; atreverse a pensar fuera de los lugares comunes, tomar riesgos y estar abierto a lo inesperado, constituyen los principios rectores que surgen de este proceso de IC.

Elaborar problemas con los docentes, animar/co-animar un buen problema en clase, jugar con diferentes tipos de problemas/una variedad de problemas, acompañar a los docentes en la elección de los problemas y en su análisis (anticipación), reflexionar sobre lo que es un "buen" problema, partiendo de los problemas que los docentes ya están usando para ir más allá, mostrar/experimentar cómo podemos hacer la RP de manera diferente, presentar versiones contrastantes del mismo problema, hacer el ejercicio con los docentes, evaluar diferentes problemas utilizando los criterios de evaluación constituyen pistas de acompañamiento, resultantes de este trabajo conjunto.

Finalmente, trabajamos juntos en la elaboración de un documento resumen, retomando los elementos principales del intercambio y las discusiones durante el coloquio, que fue enviado, junto con el material básico utilizado para el coloquio, a los distintos participantes, difundiendo también el proceso de co-construcción que caracteriza a la IC.

Conclusión

Esta reconstrucción de la trayectoria de una IC ilustra la riqueza de este proceso de co-situación, co-operación y co-producción, su carácter dinámico y evolutivo. Más concretamente, destaca que la construcción del objeto de investigación, su problematización, no se concibe de manera definitiva, incluso antes de que se produzca la operacionalización de la investigación, como suele ocurrir en una investigación habitual. Esta aclaración, como en cualquier investigación participativa, se inscribe a lo largo del tiempo de manera transversal y evolucionando a través del tiempo. La problematización del objeto de estudio es revisitada para tomar en cuenta el encuentro entre miembros de las comunidades de investigación y de práctica y la forma en que le darán sentido a lo largo del tiempo, modificando los contornos y los cuestionamientos.

Además, esta reconstrucción pone en evidencia que este espacio reflexivo es el lugar de un retorno a los actores de los análisis y de un entrecruzamiento de interpretaciones que continúa. En esta forma de comprometerse en los análisis en IC, encontramos elementos desarrollados por sociólogos como Dubet (2007).

> *La más fuerte originalidad de* (el enfoque) *radica en el papel mismo de los investigadores que analizan los debates y el trabajo* (de los subgrupos, del colectivo) *y (...) presentan sus análisis a los actores y les solicitan que reaccionen. Si bien la mayoría de los manuales de metodología insisten en la neutralidad del investigador, identificado con una simple máquina de grabación, lo más discreto posible, aquí el investigador entabla una discusión (...) con los actores luego de largos debates (Dubet, 2007, p. 15). Esto requiere que el* (investigador) *sea capaz de debatir las interpretaciones que producen los actores con el objetivo que ellos perciban el análisis que* (la investigación), *a su vez, les sugiere.* (p. 45) (Traducción libre del francés).

Finalmente, esta reconstrucción pone de relieve otra manera de concebir la difusión de la investigación. De hecho, hay poca preocupación por reflexionar sobre la puesta en escena de los resultados de la investigación, conformándose con las prácticas actuales de la comunidad científica. En aras de la doble verosimilitud, la IC modifica la idea misma que tenemos de la difusión del conocimiento. Difundir conocimiento en nuestra concepción situada no significa poner a disposición o accesible un producto de investigación, por ejemplo en nuestro caso las cuestiones identificadas y documentadas en relación con las RP en el contexto de la docencia y el acompañamiento al docente, o incluso lo que esta investigación arroja sobre la profesión AP. Se trata, desde la perspectiva de contribución a la comunidad profesional de los AP, de ofrecer a los actores la oportunidad de realizar una determinada reflexión en torno a esos desafíos y de ese acompañamiento al docente, como lo vimos anteriormente, para que esos conocimientos tengan sentido en relación con una determinada actividad. Además, en el caso de la comunidad científica, de considerar las voces de unos y otros actores, las categorías de unos y otros y un riguroso proceso metodológico que ha permitido dar cuenta de ello. Entonces surge toda la riqueza de este IC y arroja una nueva luz sobre el campo de una práctica profesional determinada.

Referencias

Anadon, M. (2007). *La recherche participative: Multiples regards.* Presses de l'Université du Québec.

Anadon, M. (2001). *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation*. Presses de l'Université Laval.

Bacon, L., Bednarz, N., Hanin, V., Lajoie, C., Saboya, M. (2019). *L'intelligence professionnelle des conseillers pédagogiques au sujet de la relance lors du pilotage de la résolution de problèmes mathématiques en classe.* Communications individuelles (2ème partie), (pp 3-16). Actes du 5ème colloque international de didactique professionnelle: Former et développer l'intelligence professionnelle. Association RPDP en partenariat avec la faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke. https://www.fourwav.es/rpdp2019

Bacon L., Bednarz, N., Lajoie, C., Maheux, J.F., Saboya, M. (2017). *Two perspectives on diversity based on the pedagogical consultant's work on problem-solving in a teaching context*. Proceedings of the International Symposium-Elementary Mathematics Teaching (SEMT), Charles University, Prague.

Barry, S. y Saboya, M. (2015). Un éclairage sur l'étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques. *Recherches qualitatives*, 34 (1), 49-73.

Barry, S., Saboya, M., Corriveau, C., Maheux, J.F., Bednarz, N. (2013) Défis et enjeux de la démarche de recherche collaborative en didactique des mathématiques, In A. Browner, C. Bulf, C. Castela, J.P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat, É. Roditi (eds.). *Questions vives en didactique des mathématiques: problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, XVIe école d'été de didactique des mathématiques, volume 2, (pp. 447- 482). Grenoble: Éditions de la Pensée Sauvage, cédérom.

Barry, S. (2013). Le cas d'une recherche collaborative initiée par le chercheur autour du développement de la modélisation chez les élèves. Dans N. Bednarz (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, (pp. 57-67), Paris: L'Harmattan.

Bednarz, N., Bacon, L., Lajoie, C., Maheux, J.F., Saboya, M. (2020). L'activité réflexive en recherche collaborative: Analyse polyphonique d'un projet mené avec des conseillers pédagogiques en mathématiques au primaire. *Revue Hybride de Éducation*, Les recherches participatives en éducation, Vol 4 (1), 24-45.

Bednarz, N., Maheux, J.F., Bacon, L., Saboya, M., Lajoie, C., Thibault, M. (2019) Regards de chercheurs-conseillers pédagogiques sur les interactions en contexte de résolution de problèmes mathématiques en classe. *Education et Francophonie, numéro spécial* sur les interactions sociales au service de l'apprentissage des mathématiques (éditrices invitées: Annick Fagnant, Université de Liège, et Catherine Van Niewenhoven, Université catholique de Louvain).Vol XLVII (3), 140-162.

Bednarz, N., Bacon, L., Lajoie, C., Maheux, J.F., Saboya, M. (2017). Mathématisation en contexte d'enseignement: quelques enjeux autour de la résolution d'un problème «réaliste». *Quaderni di ricerca in Didattica (Mathematics)*, no 27, supplemento no2, Actes de la 69ème rencontre de la CIEAEM, Mathématisation: processus social et principe didactique, 73-80.

Bednarz, N., Desgagné, S., Maheux, J.F., Savoie-Zajc, L. (2012) La mise au jour d'un contrat réflexif comme régulateur de démarches de recherche participative: le cas d'une recherche-action et d'une recherche collaborative. *Recherches en Éducation*, no 14, septembre, 128-151.

Bednarz, N., Lafontaine, J., Auclair, M., Morelli. C., Leroux, C. (2009). Pour une plus grande harmonisation dans la transition du primaire au secondaire en mathématiques. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec (AMQ), Vol XLIX, no 1*, mars, 7-18.

Bednarz, N. (2015). Rencontre avec…Nadine Bednarz. La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation*, numéro thématique Rencontre entre chercheurs et praticiens: quels enjeux? juin, no 39, 171-184.

Bednarz, N. (2013-a). *Recherche collaborative et pratique enseignante: Regarder ensemble autrement*. Paris: l'Harmattan.

Bednarz, N. (2013-b) Recherche collaborative en didactique des mathématiques: Une entrée avec les enseignants sur les questions de la profession, In A. Browner, C. Bulf, C. Castela, J.P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat, É. Roditi (eds.). *Questions vives en didactique des mathématiques: problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, XVIe école d'été de didactique des mathématiques, Volume 1, (pp. 121- 170). Grenoble: Éditions de la Pensée Sauvage.

Bednarz, N. (2013-c). À la rencontre de deux préoccupations: vers la clarification d'un objet commun d'investigation. Dans N. Bednarz (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, (pp. 41-47), Paris: L'Harmattan.

Bednarz, N., Desgagné, S., Maheux, J.F., Savoie-Zajc, L. (2012) La mise au jour d'un contrat réflexif comme régulateur de démarches de recherche participative: le cas d'une recherche-action et d'une recherche collaborative. *Recherches en Éducation*, no 14, septembre, 128-151.

Bednarz, N., Lafontaine, J., Auclair, M., Morelli. C., Leroux, C. (2009). Pour une plus grande harmonisation dans la transition du primaire au secondaire en mathématiques. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec (AMQ), Vol XLIX, no 1,* mars, 7-18.

Bourrassa, M., Bélair, L. y Chevallier, J. (2007). Les outils de la recherche participative, *Éducation et Francophonie*, 35(2), 1-11.

Callon, M., Lascoumes, P. y Barthe, Y. (2001). *Agir dans un monde incertain. Essai sur la démocratie technique*, Paris: Seuil.

Clot, Y., Faïta, D. (2000). Genres et styles en analyse du travail. Concepts et méthodes. Travailler, 4, 7-42.

Colognesi, S., Ayivor, Y. y Van Nieuwenhoven, C. (2018). Quand des maitres de stage et des superviseurs cheminent ensemble pendant deux ans: quels effets sur leur développement professionnel? *Phronesis*, *7*(4), 36-48.

Corriveau, C., Bednarz, N. (2016). *Collaborative Research in Mathematics Education: approaching questions related to teaching practices. Contribution to the topic study group on «empirical methods and methodologies» (*TSG 52), International Congress on Mathematical Education, Hamburg, 24-31 july 2016.

Corriveau, C. (2013). Co-situer une recherche à propos de la transition secondaire postsecondaire: quelques enjeux. Dans N. Bednarz (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, (pp. 77-83), Paris: L'Harmattan.

Corriveau, C., Bednarz, N. (2013). Enjeux de transition secondaire postsecondaire: s'y engager dans une perspective de double vraisemblance. Dans N. Bednarz (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement,* (pp. 129-135), Paris: L'Harmattan.

Corriveau, C. (2013). Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire-collégial. Doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal.

Coulon, A. (1993). *Ethnométhodologie et Éducation.* Paris: Presses Universitaires de France.

Couture, C. (2013). En réponse à une demande du milieu scolaire: le défi de trouver un objet de formation et de recherche. Dans N. Bednarz (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, (pp. 49-56), Paris: L'Harmattan.

Daele, A., Sylvestre, E. (2020). Comment développer le conseil pédagogique dans l'enseignement supérieur. Dans A., Daele et E. Sylvestre (Eds.), *Définir le métier de conseiller pédagogique dans l'enseignement supérieur: approches de recherche et perspectives* (pp. 151-174). Bruxelles: De Boeck supérieur.

Darling-Hammond, L., Burns, D., Campbell, C., Goodwin, A. L., Hammerness, K., Low, E.L., McIntyre, A., Sato, M.y Zeichner, K. (2017). *Empowered educators: Teaching quality around the world.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Darré, J.P. (1999). *La production de connaissance pour l'action. Arguments contre le racisme de l'intelligence,* Paris: Éditions de la maison des sciences de l'homme.

Davidson Wasser, J., Bresler, L. (1996). Working in the interpretative zone: conceptualizing collaboration in qualitative research teams, *Educational Researcher*, 25 (5), 5-15.

Desgagné, S., Bednarz, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation: faire de la recherche «avec» plutôt que «sur» les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation,* XXXI (2), 245-258.

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L., Lebuis, P. (2001) L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation,* 27 (1), 33-64.

Desgagné, S. (2007). Le défi de production de « savoir » en recherche collaborative: autour d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. Dans M. Anadon (dir.). *La recherche participative: Multiples regards,* (pp. 89-121). Presses de l'université du Québec.

Desgagné, S. (2001).La recherche collaborative: nouvelle dynamique de recherche en éducation. Dans M. Anadon (dir.). *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation,* (pp51-76), Les presses de l'université Laval.

Desgagné, S (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. Recherches qualitatives, (18), 77-105.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative: l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, vol 23, no2, 371-393.

Dubet, F. (1994). *Sociologie de l'expérience*. Éditions du Seuil.

Dubet, F. (2007). *L'expérience sociologique*. Paris: Éditions la Découverte.

Duchesne, C. (2016). Complexité et défis associés aux rôles de conseiller pédagogique. *McGill Journal of Education*, 51 (1), 635-656.

Elisme, E., Girardet, C. y Mottier Lopez, L. (2021). Défis de la co-situation d'une recherche collaborative: une expérience de co-élaboration, en partie à distance, d'un dispositif d'évaluation formative pour des élèves allophones en Guyane française. *La Revue LEeE*, no3, suivant: https://revue.leee.online/index.php/info/article/view/82

GREFEM et conseillers pédagogiques (2019). *Anticipation et pilotage de la résolution de problèmes mathématiques en classe: l'éclairage d'une recherche collaborative réunissant des didacticiens des mathématiques et des conseillers pédagogiques en mathématiques au primaire*. Dans C. Corriveau, V. Martin, M. Thibault, A. Savard (Eds.) Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec, (pp 122-137), Ste Foy: Université Laval, 24-26 mai.

Hanin, V., Lajoie, B., Bednarz, N., Saboya, M., Bacon, L. (2021). Vers une meilleure compréhension du métier de conseiller pédagogique en mathématiques au primaire: une approche par le genre et les styles. *Phronesis*, 10 (1), 52-71.

Kass, E., Rajuan, M. (2012). Perceptions of freedom and commitment as sources of self-efficacy among pedagogical advisors. *Mentoring y Tutoring: Partnership in Learning*, 20 (2), 227-250.

Lachaîne, C. y Duchesne, C. (2019). Le conseiller pédagogique en tant qu'agent de changement: compétences et leadership transformationnel, *McGill Journal of Education*, 54 (3), 625-645.

Lajoie, C., Bednarz, N., Saboya, M., Hanin, V., Bacon, L. (sous presse). Logiques d'action de CP en mathématiques au primaire dans l'accompagnement d'enseignants à la résolution de problèmes en contexte d'enseignement. *Annales de didactique et de sciences cognitives.*

Lajoie, C., Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIè siècle au Québec: rupture ou continuité? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 16 (1), 1-27.

Lajoie, C., Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec: évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et Francophonie*, XLII (2), 7-23.

Lajoie, C., Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 12 (2), 178-213.

Lapointe, P. et Morissette, J. (2017). La conciliation des intérêts et enjeux entre chercheurs et professionnels lors de la phase initiale de recherches participatives en éducation. *Phronesis,* 6 (1-2), 8-20.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, Mathematics and Culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lessard, C. (2008). Entre savoirs d'expérience des enseignants, autorité ministérielle et recherche: les conseillers pédagogiques. Dans P. Perrenoud, M. Altet, C. Lessard et L. Paquay (Eds.), *Conflits de savoirs en formation des enseignants: entre savoirs issus de la recherche et savoirs issus de l'expérience* (pp. 169-181). De Boeck.

Lyet, P. (2011). Traduction, transaction sociale et tiers intermédiaire dans les processus de collaboration de chercheurs et de praticiens dans le cadre de recherches-actions. *Pensée plurielle*, *3*(28), 49-67.

Lyet, P. (2014). La «re-cherche» par les chercheurs et les acteurs sociaux. Un renouvellement de la construction de la réalité. Dans M. Jaeger (dir.), *Le travail social et la recherche-conférence de consensus* (p.100-108). Dunod.

Lyet, P. (2018). Les finalités hybrides des recherches sur les problèmes des acteurs sociaux. *Pensée plurielle*, *48*(2), 11-21.

Marlot, C., Toullec-Théry, M. y Daguzon, M. (2017). Processus de co-construction et rôle de l'objet biface en recherche collaborative. *Phronesis*, *6*(1), 21-34.

Morissette, J. (2015). Une analyse interactionniste de la complémentarité des positions de savoirs en recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation*, 39(1), 101-116.

Morissette, J. (2012). Faire cas de sa pratique enseignante dans le cadre d'une approche collaborative. *Travail et apprentissage*, 9, 200-214.

Morissette, J. y Desgagné, S. (2009). Le jeu des positions de savoir en recherche collaborative: une analyse des points de vue négociés d'un groupe d'enseignantes du primaire. *Recherches qualitatives*, 28 (2), 118-144.

Mottier Lopez L. y Dechamboux, L. (2019). Modélisation d'une évaluation «de» et «pour» la recherche collaborative: l'exemple de deux recherches sur des pratiques d'enseignement et d'apprentissage. *La Revue LEeE*, https://doi.org/10.48325/rleee.001.02

Mottier Lopez, L. (2015). Recherche collaborative sur les pratiques de régulation formative en classe: questionnement épistémologique critique. Dans les chercheurs ignorants (dir.), *Les recherches-actions collaboratives: une révolution de la connaissance* (p. 57-65). Presses de l'EHESP.

Proulx, J. (2013). Réflexions épistémologiques sur la recherche collaborative en didactique: possibilités et excès. Dans N. Bednarz (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, (pp. 327-349), Paris: L'Harmattan.

Saboya, M., Bacon, L., Bednarz, N., Lajoie, C., Maheux, J.F., Bonin, V., Carbonneau, A.M., Emond, R., Gareau, S., Lajeunesse, C., Morelli, C., Perron, D., Tourigny, C. (2020). Résolution de problèmes en mathématiques et accompagnement d'enseignants: incursion au cœur d'une recherche collaborative. *Revue Hybride de l'éducation,* Les recherches participatives en éducation, Vol 4 (1), I-V.

Saboya, M. (2013). Vers la clarification d'un projet visant le développement d'une activité de contrôle chez les élèves. Dans N. Bednarz (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, (pp. 69-76), Paris: L'Harmattan.

Savoie-Zajc, L., Bednarz, N. (2007). Collaborative Research and Action Research: their specific contributions to professional development. *Education Action Research, Vol 15 (4*), December, 577-596.

Sebillotte, M. (2002). Logiques de l'agir et construction des objets de connaissance. L'invention de nouveaux dispositifs de recherche, dans T. Gaulin et A. Hatchuel (Éds.)

Les nouvelles raisons du savoir. Prospective d'un siècle à l'autre (pp. 93-115), Paris: Éditions de l'Aube.

Sebillotte, M. (2007). L'analyse des pratiques: réflexions épistémologiques pour l'agir du chercheur. Dans M. Anadon (Éd.) *La recherche participative. Multiples regards*. (pp 49-87). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Van Nieuwenhoven, C. et Colognesi, S. (2015). Une recherche collaborative sur l'accompagnement des futurs instituteus: un levier de développement professionnel pour les maîtres de stage. *Valuer-journal international de recherche en éducation et formation*, *1*(2), 103-121.

Vinatier, I. y Morrissette, J. (2015). Les recherches collaboratives: enjeux et perspectives. *Carrefours de l'éducation*, *39* (1), 137-170.

Vinatier, I. y Rinaudo, J-L. (2015), Rencontres entre chercheurs et praticiens: quels enjeux?, *Carrefours de l'éducation*, 39 (1), 9-18.

ANEXO

Cuadro 1. Todos los encuentros reflexivos (órdenes del día y tareas previas)

Año 1 (2015-2016)
22 junio 2015 Para este primer encuentro que dio inicio a la reflexión sobre la resolución de problemas y el acompañamiento a los docentes, nos dimos la siguiente tarea (en el encuentro preliminar de diciembre de 2014): cada uno (a) piense en un *consejo para dar a los docentes,* un consejo que es importante, el que él (ella) quiera, *o por el contrario que él (ella) desea no ver implementado en absoluto,* especificando por qué en ambos casos. Discusión alrededor de estos consejos desarrollados por cada uno (a) durante la sesión.
28 octubre 2015 1. Volver sobre el informe del encuentro anterior (enviado previamente a cada uno) y las reflexiones iniciadas por el grupo. 2. Discusión sobre la RP *en el contexto de la enseñanza* y el asesoramiento para los docentes, *partiendo de 2 videos de funcionamiento de problemas en el aula* (un ejemplo de funcionamiento en clase de 1er grado, y una experimentación en el 6to año, vídeos desarrollados en el marco de investigaciones colaborativas anteriores con docentes de primaria).
22 febrero 2016 Para este encuentro nos propusimos que *cada uno planteara un problema sin datos numéricos* (problema que creemos obliga al análisis), un problema que serviría de base para la discusión. 1. Volver sobre el informe de nuestro último encuentro y el esquema propuesto por uno de los AP (AP5), que puede ayudar a conceptualizar dónde nos situamos en nuestras discusiones/reflexiones. Recordamos en esta ocasión lo que habíamos alcanzado al final de nuestro último encuentro (los diferentes elementos focalizados en relación con el trabajo sobre la RP en clase y el acompañamiento de los docentes) y que pueden ayudar a replantear la discusión: elección de problemas, ¿sobre qué base?; Análisis de las soluciones y elección de las soluciones para la devolución; Articulación sobre las soluciones de los alumnos; exploración de estas soluciones. 2. *Trabajo a partir de los problemas sin datos numéricos traídos por los diferentes participantes*
31 marzo 2016 Para este encuentro nos habíamos dado la tarea de que cada uno(a) traiga: un buen problema, un *"buen" problema* sin datos numéricos, un problema "atractivo" y "bueno", para retomar las palabras de AP4, que merecería ser trabajado con docentes (se hablará en este encuentro de problemas "seductores", para retomar las palabras de los AP5). Podía tratarse de un único problema... pero también podía tratarse de dos o tres problemas diferentes. 1. Volver sobre el acta de nuestro último encuentro y el esquema propuesto por AP5 y modificado desde entonces. *2.* Trabajo a partir de los problemas traídos por unos y otros.
27 abril 2016 1. Volver sobre la *síntesis hecha a partir de* los diferentes informes y formularios. 2. Volver a uno de los problemas traídos por AP4 (el truco de magia) (lo abordaremos de tal manera para que se inscriba en lo que se ha discutido anteriormente).

3. Trabajo sobre "buenos problemas" de nuestro banco. El trabajo se centrará en la puesta a prueba del problema, ya que se ha destacado en la síntesis como una preocupación importante para los APs. 4. La continuación (orientación deseada para la continuación de nuestra colaboración).
Año 2 (2016-2017)
8 septiembre 2016 1. Presentación del proyecto de investigación y aspectos deontológicos. 2. Regresar a los resúmenes del primer año con el fin de enfocar los temas que queremos investigar este año para ir más allá, y la forma en que queremos trabajar. 3- *La elección de problemas:* volver sobre la participación de dos de los investigadores en un grupo de trabajo sobre resolución de problemas en un coloquio. Esto puede ser la oportunidad para comenzar a trabajar en uno de los temas que nos hemos enfocado, en torno a la elección de los problemas. 4, Proyecto de coloquio en colaboración dirigido a todos los AP de Quebec. 5. Una tarea previa a nuestro encuentro de noviembre (experimentar un problema en una clase o con un grupo de docentes...)
17 noviembre 2016 1. Regreso en subgrupos, luego en grupos grandes, sobre el deber del 8 de septiembre con el objetivo de aclarar cuestiones y consejos/gestos portadores. (Recordatorio del deber: hemos considerado tres tipos de deberes: (i) experimentar un problema en una clase y documentar los elementos importantes, (ii) acompañar a uno o más docentes ofreciéndoles problemas para identificar desafíos, (iii) partir de los problemas que los docentes ya están utilizando y detectar desafíos). 2. Imaginar en subgrupo lo que hemos llamado la "historia" de un problema desde el momento en que se elige para ser trabajado en clase hasta el momento en que se hace una síntesis, en clase, de su resolución por los alumnos. 3. Revisión en el grupo grande sobre nuestras diferentes "historias" con el objetivo de aclarar los problemas/desafíos/nudos y los consejos/gestos portadores (aquí es donde va a aparecer un cuadro que vendrá a apoyar esta reflexión colectiva).
15 diciembre 2016 1. En subgrupo, imaginar la "historia" de un problema (se retiene el mismo problema para todos, el problema del sándwich) desde el momento en que se elige para trabajarlo en clase hasta el momento en que se hace un resumen en clase de su resolución por parte de los alumnos. 2. Revisión en gran grupo sobre nuestras diferentes "historias" con el objetivo de aclarar problemas y consejos (que vienen a mejorar nuestro cuadro). 3. Volver a nuestras lecturas (cada uno habrá leído uno o más textos de su elección) con el objetivo de aclarar problemas y consejos (y así mejorar nuestro cuadro). 4. Un deber para la preparación de nuestro encuentro del 15 de febrero.
15 febrero 2017 1. Presentación en grupo numeroso de las diferentes historias del problema de los sándwiches preparados en diciembre (en subgrupos) y discusión colectiva con el objetivo de aclarar problemas y consejos/pistas/gestos portadores. 2. Volver a nuestras lecturas (cada uno habrá leído uno o varios textos de su elección) con el objetivo de aclarar cuestiones y consejos/gestos portadores/pistas (y por lo tanto de mejorar nuestro cuadro).
22/23 marzo 2017 **1er día – Miércoles 22 marzo 2017** 1) Volver al problema de los sándwiches.

a) Trabajo en subgrupo sobre las diferentes historias del problema de los sándwiches preparados en diciembre (en subgrupos). *Preparación*: leer el informe de diciembre en la sección de su equipo. Objetivo: recordatorio del trabajo realizado y bonificación sobre el durante (manejo en clase) y el después (vuelta sobre el problema y vuelta *a posteriori*). b) Presentación en grupo de las diferentes historias y discusión colectiva. Objetivo: Compartir y clarificar los problemas y los consejos/gestos portadores insistiendo sobre el durante y el después (y por lo tanto modificar nuestro cuadro). 2) Discusión sobre el cuadro construido colectivamente en función de las lecturas. Volver a las lecturas con el objetivo de aclarar problemas y consejos/gestos portadores (y por lo tanto de mejorar nuestro cuadro). *Preparación:* Cada uno habrá leído uno o más textos de su elección y habrá integrado (en color, identificándose por sus iniciales) en el cuadro de los elementos en relación con su/sus lecturas/s (deber escuchado en febrero). **2do día – Jueves 23 marzo 2017** 3) Volver a algunos análisis parciales realizados (sobre los problemas de los impuestos y del pie de gigante) con el objetivo de enriquecer una vez más nuestro cuadro en términos de desafíos y cuestionamientos. *Preparación:* lectura del texto producido para la CIEAEM (Comisión internacional para el estudio y el mejoramiento de la enseñanza de matemáticas) (presentación en un coloquio) sobre el problema de los impuestos. 4) Mirando hacia atrás en el año que está llegando a su fin. Síntesis sobre los consejos/gestos portadores a los docentes: ¿Dónde estamos? ¿Qué consejos/gestos portadores se retienen? 5) Deseos para el año que viene. Intercambiar para despejar lo que queremos hacer el año próximo. Ya se han expresado deseos: - Discutir el vínculo entre la formación inicial y la formación continua. - Construcción colectiva de sesiones de formación / acompañamiento a los docentes. - Las cosas podrían ser probadas sobre el terreno entre los encuentros Otras posibles: - Publicaciones/presentaciones conjuntas.
Año 3 - 2017-2018
25 y 26 octubre 2017 1) Discusión sobre los análisis resultantes de una presentación del grupo en Praga el pasado mes de agosto titulada: "*Two perspectives on diversity based on the Pedagogical Consultant's work on problem-Solving in a Teaching contex*" [habíamos hablado en nuestro último encuentro sobre matematización y análisis del problema de los impuestos; habíamos dejado en suspenso el otro análisis realizado, esta vez, a partir de nuestras discusiones sobre el problema del gigante]; discusión también sobre la presentación conjunta investigador-APs realizada en el marco del ACFAS (Asociación Canadiense francesa sobre el avance de las ciencias) (sobre el recurso desarrollado, el cuadro, como objeto de frontera). 2) Volviendo al informe de la última reunión de marzo - ya hemos nombrado en marzo algunos aspectos que nos gustaría profundizar en 2017-2018. ¿Siempre es relevante? ¿Ves algo más? ¿Siempre tenemos la intención de probar las cosas sobre el terreno? **Preparación**: leer el informe de marzo con las preguntas anteriores en mente 3) Nuestro cuadro: a) I5 (investigador ausente el año pasado) leyó nuestro cuadro. Comparte con nosotros algunas reflexiones y preguntas. Idem para AP8. b) En gran grupo: ¿cómo podemos seguir trabajando en el cuadro para convertirlo en una herramienta práctica que podamos utilizar nosotros y posiblemente otros? c) En gran grupo primero, luego en grupos pequeños (dependiendo del posicionamiento de cada persona): si tuvieras que elegir uno o más elementos del cuadro en los que te gustaría

trabajar este año con los docentes, cuál sería ese elemento (esos elementos) ¿Por qué? ¿Cómo se le gustaría trabajar en ese elemento (esos elementos)? ¿Por qué? ***Preparación***: leer el cuadro con las dos preguntas anteriores en mente [b y c]. 4) Trabajo (en subgrupos y, posteriormente, en grandes grupos) sobre un aspecto específico elegido por el grupo.
14-15 Marzo 2018 Nuestros diez desafíos que surgen del cuadro ... (en relación con nuestro deber – veáse el recordatorio más abajo) Viñetas que nos gustaría desarrollar en torno a esos problemas (en relación con nuestro deber): las formas que toman nuestras viñetas, su contenido (temas incluidos), su función (qué vamos a hacer con ellas). Simposio para los APs Retrospectiva de nuestra presentación en la conferencia inaugural sobre los roles de los investigadores: reacciones suscitadas **Deber** que nos habíamos dado. Básicamente, tuvimos que: Hacer cada uno/una el mismo ejercicio que AP4 (que identificó diez problemas), ya sea comenzando desde cero, o trabajando a partir del ejercicio de AP4. La lista de AP4 se adjunta al presente mensaje. Tomar las preguntas destacadas en los equipos en relación con el problema del sándwich e ir a completar el cuadro de manera a tener en cuenta lo que salió. Pensar cada uno/una, o en pequeños equipos, en una primera viñeta (para ilustrar un problema y provocar la reflexión).
9-10 mayo 2018 Miércoles por la mañana 1. Volver sobre los experimentos de AP5 en relación con el pie del gigante y la tarea de AP8 sobre el pie del gigante (los otros: escucha activa con el cuadro en mente). 2. Actualización del cuadro (las personas que trabajaron en el cuadro presentan su trabajo: AP3 (adecuación a los diez problemas); I2 y AP9 (de regreso y después); … Miércoles por la tarde y jueves por la mañana 3) Presentación de nuevas viñetas (AP4, AP5, …) 4) Trabajo sobre las viñetas (de marzo a mayo) (i) Retorno en gran grupo: problemas afectados o no por las viñetas (a partir de marzo) (C1 y C4 …) (ii) trabajo en subgrupos en torno a las siguientes cuestiones (véanse algunas líneas más adelante) sobre una viñeta (una viñeta por subgrupo, se tomarán idealmente diferentes viñetas) (iii) regreso al gran grande Algunas preguntas para guiar nuestro trabajo en subgrupos y colectivamente: ¿Cómo usar las viñetas? ¿Con quién? ¿En que contexto? ¿Con qué adaptaciones? ¿Con qué agregados (preguntas, opciones, imágenes)? ¿Con qué tarea (por ejemplo, continuar el intercambio)? Jueves por la tarde 5) Resultados del proyecto ¿Qué le ha aportado esto en su trayectoria personal/profesional? ¿Cómo vamos con nuestra búsqueda de consejos? ¿Se han obtenido herramientas útiles (cuadros, viñetas,...)?

Capítulo 2

Experiencia de trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática: de la problematización a los ejes de análisis en la adaptación de una ingeniería didáctica

Rosa Martinez - Analía Petich - Emanuel Issa Nuñez - María Elena Ruiz

1. Introducción

En este capítulo presentamos algunos resultados de una investigación en Didáctica de la Matemática, desarrollada desde una perspectiva colaborativa entre docentes investigadores (en adelante DI) y docentes de matemática de escuelas secundarias (en adelante DA). Este trabajo se enmarca en un objetivo de investigación más amplio, relacionado con explorar condiciones bajo las cuales las nociones de la Didáctica de la Matemática se constituyen en herramientas para pensar su enseñanza. Así, el posicionamiento de nuestras lecturas, interpretaciones e intervenciones en estos espacios de trabajo colaborativo se apoyan en los desarrollos teóricos de esa disciplina, concibiendo la relación problema-conocimiento como medio para la producción de conocimientos, indisociable de los procesos de enseñanza de los objetos de estudio. En otros términos, adherimos a la posición epistemológica de Brousseau (1986, 1998a, 1998b, 2007) según la cual se piensa la enseñanza como un proceso focalizado en la producción de conocimientos matemáticos en la escuela y en la cual la dupla problema-conocimiento adquiere preponderancia. Estas ideas se traducen como anclaje para la producción de conocimientos matemático-didácticos. Conocimientos que, en los espacios de trabajo conjunto, se dan en una dinámica de construcciones y reconstrucciones en el que las interacciones con el otro (entre DI-DA en el caso que nos preocupa) posibilitan reflexionar críticamente sobre ideas y creencias, transformándolas a partir de acuerdos sobre los argumentos que se esgrimen. En este sentido, en el trabajo colaborativo se entiende la enseñanza como un proceso dinámico donde las interacciones cobran un papel clave mediante el carácter cíclico que otorga la exploración en el aula.

En los últimos años hemos desarrollado estudios[1] en contextos de colaboración con docentes de matemática a partir de una problemática de enseñanza particular. Estos estudios, posibilitaron vislumbrar que los espacios colectivos de trabajo –entre DA y DI– constituyen un escenario favorable para abordar las cuestiones relacionadas con las prácticas de enseñanza. En esos espacios ha sido posible el estudio de producciones de investigaciones en Didáctica de la Matemática y su adaptación en el aula, entendida como resignificación en el diálogo con la propia experiencia, con la lectura del contexto[2]. Desde este lugar compartimos cuestiones y reflexiones de nuestro trabajo en el cual el proceso de colaboración asume el desafío de atender las preocupaciones que los participantes traen a la convocatoria y que se ajustan al criterio de doble verosimilitud[3] que lo caracteriza. Las problemáticas de la enseñanza de la matemática que se abordan emergieron como inquietudes planteadas por los DA. Tratamos estas ideas en el apartado 2 al referirnos a la trayectoria efectuada en la adaptación de una propuesta de enseñanza de los números negativos en un contexto algebraico, proveniente del terreno de la investigación en Didáctica de la Matemática. Experiencia de trabajo colaborativo que demandó sumergirnos en la ardua tarea de apropiación de una ingeniería didáctica[4] (ID) así como también en el estudio de sus posibilidades de implementación en aulas de escuelas secundarias de la región de influencia de la universidad[5].

Nuestra investigación colaborativa se inicia en el año 2012. Nos contactamos con la escuela secundaria CEM N°14 (ESRN N°14 en la actualidad) de la localidad de Fernández Oro, provincia de Río Negro, con el objetivo de crear un espacio de trabajo conjunto con los docentes de matemática de dicha escuela[6]. El propósito era abordar problemáticas que conciernen a la enseñanza de la matemática, planteadas por ellos. La participación de los docentes en las reuniones de trabajo era voluntaria como así también la elección de llevar adelante la implementación en sus aulas de la secuencia que se analizaba. A partir de 2013 la

---

[1] Proyectos de investigación dirigidos por Mg. P. Detzel (2013-2016) y por Mg. R. Martinez (2017-2021), ambos subsidiados por SeCyT de la Universidad Nacional del Comahue.

[2] En ese sentido la adaptación que se lleva al aula comporta producción, apropiación de los sentidos, construcción de una intencionalidad, entre otros.

[3] La doble verosimilitud (double vraisemblance) es un concepto que proviene de la sociología y ha sido definido por Dubet (1994) para hacer referencia a una doble óptica en virtud de un objeto de preocupación, es decir a la toma en cuenta de las preocupaciones de las dos comunidades o posiciones involucradas en este caso, la comunidad DI y DA (Desgagné, 1997, 1998, 2001).

[4] La ingeniería didáctica nace en el campo de la didáctica de la matemática francesa y se centra en modelar situaciones de enseñanza, para así permitir el estudio de su funcionamiento en las aulas. M Artigue explicitó y formalizó la ingeniería didáctica como metodología de investigación (Artigue, 1990).

[5] Como región de influencia nos referimos a escuelas secundarias de Río Negro y Neuquén cercanas a la sede central de la UNCo.

[6] Agradecemos a Juan Zambrano, Evelyn Savid y Franco Villafañe.

institución que alberga los encuentros es el CEM Nº 15 de Cipolletti[7]. En el año 2016, se incorpora otro colegio, el J. M. Brentana[8], también de la ciudad de Cipolletti. Este trabajo continuó hasta 2019, con modificaciones en la constitución del grupo y escuelas participantes.

En el inicio del trabajo colaborativo, las reuniones en la escuela se abocaron a discutir problemáticas existentes en lo cotidiano del trabajo docente en relación a la enseñanza de la matemática. Luego, los participantes se dedicaron al estudio y análisis de la ID. Manteníamos encuentros periódicos con una duración aproximada de tres horas y media cada uno, cuya frecuencia variaba de acuerdo a las necesidades que surgían del trabajo conjunto. Por ello, la periodicidad de los encuentros fue cambiando; durante los primeros tiempos, eran quincenales mientras que luego fueron 1-2 semanales, debido a la etapa de implementación en el aula de la adaptación de la ID. Un DI designado como secretario registraba a través de anotaciones y/o de grabaciones, los acuerdos, a modo de "memoria colectiva" que permitiría, en un futuro, hacer una reconstrucción de los avances alcanzados. El resto de los participantes elaboraba sus propios apuntes, los que en varias oportunidades tuvieron un rol preponderante, facilitando aclaraciones o revisiones. Este trabajo conjunto, sostenido durante todos estos años, dio lugar a la construcción de vínculos afectivos que fueron aportando un clima de confianza entre los participantes. La confianza alcanzada va más allá de una familiaridad en el trato, tiene que ver con estudiar con el otro sin prejuicio alguno. Creemos que esa confianza contribuyó a que se explicitara, como parte del trabajo conjunto, los argumentos de las decisiones tomadas por parte de los DA, sin que sea considerado como un gesto evaluativo por parte del DI; por el contrario, la confianza aportó ánimo[9], apoyo, sostenimiento, energía para obrar, para accionar.

Además de las reuniones colaborativas, durante la implementación el grupo de investigación realizó observaciones participantes que estuvieron a cargo de dos DI, de modo tal que alguno de ellos sostuviera su presencia en la siguiente observación, para garantizar así la continuidad entre las mismas. Estas observaciones de clases se registraron de modo minucioso y sistemático, documentándose mediante anotaciones y/o grabaciones. A su vez, los

[7] Este cambio de institución se hizo porque el profesor Juan Zambrano fue el primero que asumió el desafío de implementar la propuesta adaptada en sus cursos de 1º y 2º año de dicha escuela. En este mismo año se incorpora el profesor José Cumín de la misma escuela al grupo de estudio.

[8] La implementación en esta institución en los cursos de 1º año estuvo a cargo del profesor José Cumín quien, como ya dijimos, participaba del grupo de estudio desde 2013.

[9] Las palabras de uno de los DA otorga significado al respecto: *Si algo parecía no funcionar, alentarnos entre nosotros y buscar siempre la manera de continuar y cada vez más convencidos de lo que estábamos haciendo y que los resultados que obteníamos eran muy satisfactorios. Fue muy importante el apoyo de todos y cada uno de los integrantes del grupo para no claudicar en esta tarea bastante interesante en la que nos habíamos embarcado*. (José Cumin profesor, en la VIII Escuela de Didáctica de la Matemática, 2017).

DI manteníamos las reuniones habituales para analizar y reflexionar sobre el rumbo de la investigación.

En las discusiones que se fueron sucediendo, la construcción y reconstrucción colectiva de las cuestiones de enseñanza evolucionaron en una dinámica interactiva creada por el contexto mismo de la investigación colaborativa. DI y DA iban precisando asuntos que se problematizaban, que se retomaban teniendo en cuenta los conocimientos producidos. Estos avanzaban según las interpretaciones realizadas a medida que se entrecruzaban concepciones, representaciones y percepciones de las acciones y sus impactos. Este trabajo conjunto nos llevó como DI a desarrollar cierta vigilancia sobre las discusiones acerca de la estructuración y las conceptualizaciones implicadas en la ID; abordar una práctica de enseñanza constructiva; tener en cuenta las necesidades de los DA y desarrollar prácticas argumentativas que expliciten las razones de las decisiones. En este escrito hacemos foco en la colaboración como un medio para problematizar y producir conocimientos matemático-didácticos con relación a los objetos de enseñanza involucrados en la adaptación e implementación de una ID en el aula. Problematización y producción han configurado el *leitmotiv* que vitalizó nuestro trabajo, en consonancia con la perspectiva de construcción de conocimiento. Reconocemos la complejidad que nos revistió como grupo investigador, distinguir aquellos rasgos característicos de un proceso de problematización, ponerlos en palabras transparentando ideas y, por medio y gracias a la escritura, sistematizarlos y hacerlos inteligibles. La producción ocurre en esos procesos y ella se incrementa cuando se desprende de lo acontecido, avanzando sobre descripciones o anécdotas. Esperamos hacer eco de estas palabras en el apartado 3, en el cual organizamos un análisis que confluye en dos ejes, los cuales presentan una particularidad otorgada por nuestra Investigación Colaborativa (IC,) a partir de reconocer algunas problematizaciones que tuvieron lugar en el trabajo conjunto de estudiar la propuesta y realizar su implementación adaptada.

En el proceso de problematización del conocimiento matemático, resulta notable la toma en cuenta de los aspectos que aquí se juegan cuando se lo desmenuza. Discutir cuáles son los núcleos constitutivos de un cierto campo de ideas que se quiere enseñar, concebir que el objeto de enseñanza es el trabajo matemático y no solo la matemática, debatir las razones que sustentan los argumentos convenidos, son aspectos claves que habilitaron ese desmenuzado para el estudio y la apropiación de una ID, en tanto propuesta que llega ya elaborada a nuestra mesa de trabajo. Es primordial poder comprender las razones de orden epistemológico, cognitivo y didáctico contempladas en la ID para tener una interpretación ajustada del sentido que los autores quisieron darle. Por ello, los debates se impregnaron de un ir y venir entre vigilancia y adaptación-negociación. Estas ideas se desarrollan en nuestro primer eje de análisis, del apartado 3.

La colaboración se enriqueció y se consolidó aún más a partir de las implementaciones de las secuencias que fueron generando otras problemáticas ligadas a la singularidad de las puestas en aula. Cada exploración, por sus particularidades, configuró ciertos sentidos de los conocimientos de la propuesta, de perspectivas de la enseñanza y del aprendizaje que dieron origen a otras preocupaciones de los DA vinculadas con la reconstrucción de su acción didáctica en vistas de la adaptación en curso (Perrin-Glorian, 2019) y en función de sus condicionamientos (Fregona, 1996; Robert y Rogalski, 2002) en juego.

El desmenuzado del conocimiento, mencionado para el eje anterior, no es exclusivo del mismo; en este proceso de problematización se agregó la dimensión de "lo situado", que aportó condiciones a la viabilidad de la adaptación consensuada. Estas cuestiones son objeto de discusión y de consideración en el espacio de intercambio y de debate en colaboración, ideas que aunamos en el segundo eje de análisis comprendido en el apartado 3.

En esa dinámica interactiva, caracterizada por la reflexión y el debate, la problematización del objeto a abordar (el conocimiento matemático a enseñar) representó el desarrollo de un cuestionamiento en un proceso de exploración de lo posible, desde una mirada cruzada en la que se utilizan los recursos de DI y DA (Bednarz, 2013). Las discusiones sobre una actividad, sobre una secuencia, sobre producciones de los alumnos en relación con una situación propuesta y con las interacciones que ocurrieron en la clase, nos convocó a profundizar las nociones y los razonamientos ligados a los problemas en juego. Finalmente, la producción de esos ejes de análisis nos permitió hacer algunos aportes en ese sentido con la intención de visibilizar la colaboración como puente entre producciones de la investigación y prácticas de la enseñanza. Desarrollo que desplegamos como reflexiones finales en el apartado 4.

2. Acerca de nuestro trabajo colaborativo

Nuestro trabajo colaborativo asume un objetivo común que reúne tanto los objetivos de los investigadores, como las preocupaciones de los profesores participantes, lo cual ha representado un desafío arduo para su desarrollo. Abordar la particularidad de este trabajo –adaptación e implementación de una ID– significó apoyarnos en aportes de trabajos conjuntos e investigaciones que indagan medios de apropiación de producciones de investigación. A continuación, ampliamos estas ideas.

2.1 Marcos de referencia

El espacio colaborativo que formamos DI y DA nos permitió estudiar una ingeniería didáctica y su posible adaptación e implementación en el aula, como lo señalado anteriormente. En este sentido, Perrin-Glorian (2019) y Perrin-Glorian y Baltar Bellemain (2016) destacan la importancia de estudiar la adaptación de ingenierías didácticas en colaboración, pues afirman que se debe tener en cuenta el funcionamiento real de las clases y las necesidades de los docentes. Incluso sostienen que, si en dicha investigación fue considerada la complejidad de la enseñanza en el aula, las condiciones para la difusión en las clases requieren ser estudiadas. Las mismas autoras designan a esta aproximación "ingeniería didáctica para el desarrollo y la formación" (abreviado como IDD).

Afrontar la problemática de la vinculación entre investigación y prácticas de enseñanza desde este encuadre, supuso el estudio y la apropiación de una ingeniería didáctica con profesores ajenos a esa investigación y adaptarla en función de sus particularidades. Este trabajo permitió la producción de más conocimientos acerca de las prácticas de enseñanza. A la vez, posibilitó la identificación de algunas condiciones que podrían aportar a la viabilidad de la ID, integrando en ella elementos que forman parte de las prácticas reales llevadas a cabo por los profesores participantes. Así, sus aportes han guiado tanto nuestras intervenciones en los espacios de trabajo, como la tarea de reflexión y análisis sobre lo acontecido con relación a conceptualizaciones de distinta naturaleza inmersas en la ID.

Además, nuestra investigación tomó como referencia la perspectiva colaborativa desarrollada por Bednarz y Desgagné (Barri y Saboya, 2015; Bednarz, 2009, 2013; Anadón, 2008; Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier y Couture, 2001; Desgagné, 2001), en la que el foco está puesto en el trabajo conjunto entre investigadores y docentes sobre una problemática compartida y siendo el trabajo reflexivo el eje central. Atender a los intereses de ambos grupos participantes (DA y DI) es la base de este enfoque, lo que se conoce con el nombre de criterio de "doble verosimilitud" (Dubet, 1994, citado en Desgagné y otros, 2001). Según Desgagné, este criterio implica, para el investigador que lleva adelante el proyecto, no solo estar preocupado por el desarrollo del proyecto de investigación sino estar constantemente atento a las preocupaciones de todos los participantes que él considera como contribuciones a la construcción de conocimientos para y sobre las prácticas de enseñanza (Desgagné y otros, 2001). Dicho de otra manera, el investigador colaborativo estará siempre preocupado por tener en cuenta las preocupaciones de las dos comunidades: investigadores y docentes.

Este criterio toma matices diferentes, según las etapas de la IC –desarrolladas a continuación– y permite advertir sobre cuestiones claves del funcionamiento de la investigación. Esta doble verosimilitud alerta, en primer lugar, a los DI y a los DA a reunir las inquietudes de todos los integrantes al convenir una problemática que responda tanto a las preocupaciones de la comunidad de investigadores como a la de los docentes, (doble pertenencia social).

En el desarrollo del trabajo, alerta, en segundo lugar, a los participantes a estar habitados constantemente por una permeabilidad en la actividad reflexiva, que contribuya a la obtención de datos que emergen de la interacción, del cuestionamiento sobre la actividad reflexiva de los investigadores y de los docentes (doble rigor metodológico).

Finalmente, la doble verosimilitud alerta a los participantes para el análisis de los resultados, ella consiste en que la producción de conocimientos tome una forma que sea útil a los docentes y al mismo tiempo para el investigador (doble fecundidad de resultados, es decir que los resultados engloben las categorías de ambas comunidades (doble fecundidad de resultados).

El rol del investigador es complejo, necesita de algunos rasgos como cierta experiencia, apertura a otras ideas, práctica de escucha atenta, capacidad de formular preguntas exploratorias, entre otros, para favorecer un desarrollo fructífero y permitir el sostenimiento de esta doble verosimilitud a lo largo de todo el proceso (Bednarz, 2017).

Asimismo, nos parece interesante reconocer este criterio de doble verosimilitud, en términos de doble sensibilidad, ya que permite a los involucrados entrar en un proceso de co-construcción de conocimientos y llevar adelante la colaboración. Estos autores (Desgagné y Bednarz), utilizan los conceptos de “sensibilidad teórica” y de “sensibilidad práctica” para indicar las respectivas posturas de los DI y de los DA. Brevemente haremos referencia a estas nociones, al solo efecto de ubicarnos para el desarrollo del análisis que presentamos posteriormente. La noción de sensibilidad práctica del investigador, se refiere a reconocer el punto de vista del docente, para quien lo real se presenta como un conjunto de situaciones problemas presentes en el contexto. En este sentido la razón de actuar del investigador –apoyado en su marco conceptual– será puesta al servicio de una mejor comprensión de la razón de actuar del docente. La sensibilidad práctica del DA hace referencia a un campo contextual, a un conjunto de recursos y condicionamientos en los que se basa para juzgar la acción que debe producirse en su práctica. La sensibilidad teórica del DI remite a un campo conceptual movilizado para examinar el objeto de cuestionamiento o para teorizar la acción práctica. Por último, la sensibilidad teórica del DA alude a la actitud de apertura del docente hacia una posición de exploración, de preguntas, más vinculada a la investigación (Barry y Saboya, 2015).

2.2 Nuestro recorrido en la construcción de la investigación colaborativa

En el desarrollo de una IC, como ya mencionamos, se distinguen tres momentos en el curso de una investigación. En líneas generales, en una primera etapa llamada co-situación, se reúnen investigadores y docentes, en un clima de diálogo y negociación, para definir conjuntamente un objeto de investigación relevante para ambos grupos. Una vez que se logra conciliar el objeto de la investigación, se da lugar a la etapa de co-operación. En ella, los DI diseñan con los docentes un espacio de estudio en el que la actividad reflexiva propicia una dinámica de co-construcción que posibilita el cuestionamiento hacia la concreción de los objetivos por los que ambas comunidades concurrimos al espacio. En el transcurso de las reuniones reflexivas, los datos que se van obteniendo y los resultados de la investigación, deben dar lugar a conocimientos matemático-didácticos, que sean fértiles tanto para los DA como para los DI. El análisis de datos recolectados durante la co-operación da lugar a la etapa de co-producción. A continuación, distinguimos cada etapa dando cuenta de su funcionamiento a lo largo de nuestra experiencia colaborativa.

2.2.1 Una problemática común, el proceso de co-situación

En párrafos anteriores mencionamos la necesidad de transparentar los intereses y preocupaciones de los DA y los DI por los cuales se participaría en una investigación colaborativa. Nos preguntamos aquí: ¿Cuál es el interés de trabajar juntos DA y DI en esta investigación? ¿En qué sentido nos enriquecemos ambos grupos compartiendo este proyecto? Como ya lo expresamos, en el caso de los DA, sus inquietudes se centran en la enseñanza de un conocimiento particular (la enseñanza de los números enteros), preocupados por mejorar el aprendizaje de sus alumnos. En el caso de los DI, nuestro interés se relaciona con aportar elementos que permitan crear nexos entre una ID, proveniente de una investigación del ámbito de la Didáctica de la Matemática, y prácticas de enseñanza singulares. Surgió así la inquietud respecto a ¿Cómo desarrollar una investigación que satisfaga esos intereses?

En el proceso de consensuar la definición del objeto de estudio, la participación de los DA fue sustancial en términos de relevar una problemática propia de sus prácticas de enseñanza de la matemática. De esta manera, en esa definición debimos atender a las preocupaciones de ambas comunidades, DA y DI, en un juego de negociaciones que permitió co-situar un objeto de investigación común a los intereses de docentes e investigadores (Barry y Saboya, 2015).

En los inicios de dichas negociaciones, los DA, movilizados por la voluntad de actuar para mejorar los aprendizajes de sus estudiantes y teniendo en cuenta las particularidades de sus contextos de trabajo, compartieron inquietudes en relación a los errores en la manipulación de los signos por parte de sus alumnos a lo largo de toda la escolaridad secundaria; preocupación que atañe también a los DA que enseñan en los cursos superiores. Así, la temática se fue configurando a partir de considerar los intereses de todos los DA participantes alrededor de la dificultad observada en los alumnos para apropiarse de las **reglas de los signos** al sumar y multiplicar números positivos con negativos, que es una cuestión que se plantea en todos los cursos. En este sentido los fragmentos que transcribimos a continuación muestran esta preocupación:

> DA1: (docente de 2° año, CEM N°14) (…) *los alumnos tienen dificultades por ejemplo con la suma y resta de números enteros. Les doy ejemplos de la "vida real": el número negativo para registrar una deuda y no da resultado* (Diario, 01-03-2012).

> DA2: (docente de 4° año, CEMN°14) (...) *podemos abordar los enteros y sus operaciones porque su enseñanza plantea dificultades que trascienden a la enseñanza de la matemática en todo el nivel medio* (Diario, 10-03-2012).

Esas inquietudes reseñan en qué medida llegamos a consensuar el objeto de estudio conjunto: la problemática de **repensar la enseñanza de los números enteros**. En este punto, se juega para el desarrollo de nuestra IC el criterio de doble verosimilitud, en términos de la doble relevancia social en el proceso de co-situar un objeto de investigación que responde a las preocupaciones de DI y DA.

La demanda de los DA no solo reconoció dificultades de aprendizaje de sus alumnos, sino que señaló cierta preocupación con relación al abanico de recursos que disponían desde hace tiempo, referentes a la temática en cuestión, y que no terminaba de hacer eco en sus aulas para ayudarlos a superar esas dificultades detectadas. Al organizar el trabajo y partiendo entonces de esta idea manifestada por los DA de cierta insuficiencia o incompletitud acerca de los recursos bibliográficos para pensar sus clases, se convino en embarcarnos en la búsqueda de materiales en el campo de la Didáctica de la Matemática sobre ese tema de enseñanza. En esa búsqueda, llegamos a los trabajos de investigación desarrollados por Cid (2000, 2002, 2015); Cid y Bolea (2010); Cid y Ruiz-Munzón (2011), que plantean introducir los números negativos en un entorno algebraico, trabajos que se ponen en consideración en la mesa de trabajo. Algunos de estos aportes bibliográficos aluden a los obstáculos epistemológicos, otros a las dificultades que presentan los alumnos, otros abordan los límites de la enseñanza de los números enteros en contextos de las magnitudes. Asumimos que nuestro ofrecimiento podía ser aceptado o no, y, en este último caso, estábamos abiertos a relanzar la búsqueda hacia otras posibilidades. Conforme se sucedían las reuniones, las lecturas y discusiones dejaron ver que la propuesta en consideración era bien recibida en el grupo de trabajo. En términos de la doble verosimilitud, los DA se vieron reflejados en los argumentos que originaron la ID en cuestión y, para los DI, aunque era una propuesta desconocida en su especificidad, su relevancia está en el marco de referencia y en las perspectivas de la enseñanza y el aprendizaje compartidos. Más aún, compartimos con las autoras los fundamentos epistemológicos y didácticos y la caracterización del hacer matemático como un trabajo de modelización (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) que se plasman en la ID que elaboraron.

La interpretación de la perspectiva de la propuesta no es sencilla, porque efectivamente requiere producir una ruptura en las concepciones pre-existentes para poder admitirla. Fue necesario abrir paso a discusiones y estudios de los fundamentos epistemológicos de la misma (en el apartado 3 desarrollamos más detalladamente estas cuestiones). Es así que en el espacio colaborativo redefinimos el objetivo a alcanzar en los siguientes encuentros, abocándonos entonces a estudiar y analizar dicha propuesta para su implementación en los cursos de los docentes dispuestos a hacerla. Nos propusimos realizar una adaptación de la misma para llevarla al aula y analizar los resultados de su implementación. Durante ese proceso los docentes estuvieron acompañados por el grupo investigador. Así, el embarcarnos en el proceso de adaptación de esta propuesta, nos permitió, como investigadores, entrar en contacto con la lógica del aula y con las ideas que los docentes ponían en juego en su trabajo. Por otro lado, se dio lugar a que los profesores se ubiquen en mejores condiciones para gestionar la propuesta en el aula, gracias a los estudios a *priori* que realizamos y a los análisis de la relación de los problemas propuestos con el conocimiento a enseñar. Al respecto uno de los DA, en su participación en una ponencia[10] expresó lo siguiente: *El análisis de la secuencia anticipadamente, que nos permitió estudiar los problemas con posibles respuestas que los estudiantes podrían hacer, aunque la realidad áulica no siempre era la esperada, nos daba seguridad sobre el conocimiento que estábamos trabajando* (DA 2: grabación 22-09-2017).

[10] Los integrantes del proyecto (tanto DI como DA) participamos en la *VIII Escuela de Didáctica de la Matemática* a través de una ponencia denominada "Problematización del conocimiento matemático en un espacio de trabajo colaborativo". Esta se desarrolló en 2017 en la ciudad de Neuquén, Argentina.

Como se observa, en el proceso de definición de un objeto sobre el cual investigar conjuntamente, dimos cuenta de las preocupaciones de los dos grupos, los docentes y los investigadores, atendiendo así, a uno de los principios de la investigación colaborativa, la **doble verosimilitud**. Precisamente, la doble relevancia social, según entendemos, estuvo dada, del lado de los DA en obtener, a partir del trabajo conjunto, una propuesta adaptada a sus aulas en función de sus necesidades originales, mientras que para los DI, al acordar un trabajo de esta envergadura posibilitó crear un puente, a partir de un mismo discurso construido sobre la ID, en la medida que dicho discurso soporte los fundamentos epistemológicos, cognitivos y didácticos, que a la vez considere las problemáticas escolares.

2.2.2 Una dinámica de trabajo conjunto, el proceso de co-operación

Una vez definida la problemática, comenzamos a preguntarnos ¿Cómo recolectar datos que nos permitirían documentar el proceso de investigación manteniendo los intereses de los DA y los DI, en los términos de una doble verosimilitud? ¿Cómo definir los roles de cada uno? ¿Cuáles serían los pasos a seguir? En esta etapa fue importante evitar los posibles deslizamientos que pueden darse, por ejemplo, caer en la postura de experto o de formador y olvidar el objeto de investigación.

Avanzamos en el estudio de los fundamentos de la propuesta contrastándolos con nuestras ideas e intentamos revelar cómo estas cuestiones viven en los tipos de problemas que las componen. Ese trabajo estuvo atravesado por los marcos de referencia que cada uno traía a los encuentros de estudio. En el recorrido, no siempre lineal, se fue configurando un intercambio de avances, retrocesos y detenciones que nos llevaron a cuestionar no solo las conceptualizaciones matemáticas sino también las didácticas. El estudio conjunto nos permitió vislumbrar que la propuesta estudiada se sostenía en un trabajo constructivo de ideas que, hasta el momento, eran reglas mnemotécnicas en la enseñanza habitual, como la regla de los signos de la multiplicación de enteros, para citar un ejemplo. Las detenciones, en muchas ocasiones, se produjeron cuando no comprendíamos claramente el nexo entre los fundamentos y las actividades que presentaba la propuesta. Circularon en las reuniones expresiones como: *Volvamos a la idea de diferencia, que juega un papel importante en la lógica de la propuesta, aunque aún no terminamos de comprenderla* (DI4: Diario 06-05-2013). Se progresó con entendimientos limitados, los que luego se volvieron a retomar. En ese sentido entonces una alarma se instaló para ahondar/reformular la cuestión que nos permitiría avanzar en comprensión. Además, en el seno del grupo se utilizaron las mismas palabras para referirnos a cuestiones diferentes: resolver problemas, diferencia para interpretar un sentido de la resta distinto al de quitar, entre otras. Se propuso registrar los acuerdos en un intento de esclarecer ideas, compartir vocabulario y disponer de un lugar al que se pueda recurrir para traer a la memoria dichos acuerdos. Otras detenciones estuvieron relacionadas con la implementación, pues las producciones de los alumnos y las intervenciones docentes nos devolvían nuevas preguntas, nuevas interpretaciones que requerían posicionarnos en un proceso de análisis y reflexiones que demandaba más tiempo.

Los registros de las reuniones se volcaron en un diario que representaba, como ya lo hemos mencionado, la memoria colectiva. Este diario se colocó en una carpeta de Dropbox compartida donde todos los integrantes del proyecto tuvieron acceso (tanto DI como DA). De esta manera, el documento se enriquecía con los aportes escritos por cada participante, que se distinguían en general con escritos de diferentes colores. Así, a partir de interpretaciones de pasajes de los encuentros y preguntas que se abrían, quedaban plasmadas las distintas concepciones y puntos de vista. Este documento de texto, además era una herramienta importante pues se concebía como un apoyo, tanto para las personas que no pudieron asistir a la reunión, pues les permitía ponerse en sintonía con el estado de conocimiento del grupo, como para comenzar la reunión siguiente y de esta manera evocar las cuestiones claves que estaban circulando y poder así seguir la lógica de la secuencia de actividades y no perder de vista los objetivos.

A lo largo del estudio, muchas veces nos detuvimos para comprender cómo **eso** que se dice, se traduce en la propuesta con los problemas. Por ejemplo, cargar de sentido la frase: “los programas de cálculo aritmético[11] (PCA) se transforman en objeto de enseñanza, en el marco de la modelización algebraica”, nos llevó muchas veces a revisitar la siguiente cita:

> (..) *en la modelización algebraica se entiende que el enunciado del problema describe un sistema acerca del cual se quieren obtener ciertas informaciones y las relaciones algebraicas que se establecen son el modelo algebraico (...) Ahora los programas de cálculo se convierten en un objeto de estudio, y el medio para estudiarlos es el cálculo algebraico* (Cid y Ruiz Munzón, 2011, p.3).

¿Qué significó para nosotros, como grupo, darle sentido a esa idea? Esto nos llevó a profundizar la noción de modelización y el rol de los PCA en la construcción de los números negativos. En el desarrollo de los distintos encuentros, a partir de actividades que nos

[11] Chevallard (2005) le da el nombre de programa de cálculo aritmético (PCA) a una cadena de operaciones aritméticas que se realizan a partir de los datos de un problema.

propusimos –lectura de artículos, resolución de actividades– se generó una dinámica no planificada de reflexión, dando lugar a una reapropiación personal de esas situaciones e interacciones, a propósito de interpretaciones que se hacen, y de experiencias que se comparten, propiciando que cada participante explicite su propio punto de vista. Esos puntos de vista que se discuten e intentan prevalecer vienen desde distintos lugares. Por una parte, de los investigadores-profesores coordinadores con sus marcos de referencia subyacentes y sus interrogaciones. Por otra parte, de los docentes con sus bagajes de conocimientos, sus prácticas de enseñanza y las restricciones y recursos de sus acciones específicas. Los DA, traen como excedente de visión en relación a los investigadores, un saber de experiencia relativo a la enseñanza de la matemática en las escuelas y conocen las condiciones y posibilidades actuales del trabajo docente. Los conocimientos que movilizan y producen están situados en la complejidad de sus prácticas, siendo los referentes de validación y apropiación crítica del saber académico. Los DI, a su vez, tienen como excedente de visión las teorías y metodologías a partir de las cuales analizan, interpretan y comprenden las prácticas escolares vigentes, problematizándolas y desnaturalizándolas (Fiorentini, 2011). En este sentido, la intención del trabajo colaborativo también subyace a la interacción entre las prácticas de enseñanza y la investigación. De ahí la idea de co-construcción de un saber en una zona interpretativa compartida entre investigadores y docentes (Bednarz, 2013).

Esta adaptación conjunta posibilitó la explicitación de los diferentes puntos de vista en los cuales era necesario acordar y negociar significados, confrontar posturas didácticas para enriquecer el análisis. El desafío colaborativo se concretizó en la medida en que las dos lógicas, el investigador con una sensibilidad práctica y el docente con una sensibilidad teórica, se cruzaron en el desarrollo de la actividad reflexiva. La lógica del cuestionamiento, como medio para desarmar los significados atrapados en la frase del ejemplo mencionado precedentemente, junto a las vinculaciones que se hicieron en torno a las prácticas de enseñanza, dieron lugar a una permeabilidad que viabilizó la entrada a una gestión de co-construcción.

Algunas de estas discusiones tenían que ver con la organización de la implementación en el aula. Se seleccionaron problemas para el aula, se los distribuyeron en días de clase, se previeron momentos de cierre, se explicitaron aspectos a destacar en cada clase en función de los problemas a utilizar. Asimismo, también se organizaron cómo acompañar al profesor en el aula, se discutieron el rol que cumplirían los observadores (se registraron y grabaron las clases), se hicieron análisis de lo observado, se consideraron y se decidieron cambios. Las transcripciones siguientes ilustran algunas intervenciones del docente en dos reuniones y dan cuenta de cómo él preveía el funcionamiento de la propuesta en su curso:

> DA1: (docente de 1°año 2°división, CEM N°15) (...) *ves la propuesta, resolvés los problemas ... pero qué pasa si no lo hacen…entonces necesitamos pensar, imaginar qué puede hacer un alumno… pensar cómo lo puede llegar a hacer un alumno, es complejo y entre todos algunas ideas surgen…* (Registro grabado, 05-03-2013).

> DA1: (docente de 1°año 2°división, CEM N°15) (...) l*a tarea 0*[12]*, sólo iría con el ítem A, pues lo que se involucra en el B podría paralizar a los chicos. Es la primera actividad y si no les sale tendrían una actitud negativa para con el trabajo, entonces me parece que no iría* (Diario, 04-04-2013).

Estas intervenciones muestran el conocimiento que el docente tiene de sus alumnos, sus límites y posibilidades, como lo dijimos anteriormente los DA traen un excedente de visión en relación a los DI, que al compartirlo con el grupo colaborativo dieron lugar al estudio y discusión en relación a la razón de ser de la tarea 0 en la propuesta. En el caso de los DI, esas intervenciones nos interpelaron para analizar y comprender las prácticas escolares, problematizarlas y ponerlas en tensión con los problemas sugeridos en la propuesta que estábamos implementando y las decisiones que se fueron tomando al respecto. Con este hilado de ideas, se fueron fundamentando los posicionamientos hasta la toma de una decisión en conjunto.

Ese proceso, que se fue gestando en los encuentros de trabajo, nos permitió decir que la experiencia dio lugar a reflexiones, interpretaciones, preguntas e intercambios de unos y otros que se iban sucediendo. Conforme se avanzaba estableciendo lazos conceptuales, a través del paso del tiempo, la dinámica de trabajo se encauzaba hacia una perspectiva analítica, la cual queda manifestada en la siguiente expresión de un DA: *cuando se empieza a trabajar la propuesta en conjunto es cuando se empieza a dar ese doble rol de docente e investigador* (DA2: grabación 22-09-2017).

No obstante, reconocemos diferencias en términos de fuerzas que guiaron, de algún modo, las reflexiones: fuerzas de naturaleza epistemológica y fuerzas vinculadas a la exploración del funcionamiento de dicha propuesta que proviene de un trabajo de investigación.

[12] La tarea 0 es la actividad inicial de la secuencia de actividades de Cid y Ruiz- Munzón (2011). Busca mostrar los límites del conocimiento aritmético para dar respuesta a ciertos tipos de problemas. El inciso b exige manipular ciertas relaciones algebraicas que hacen al docente dudar de la pertinencia del mismo.

A partir de nuestra experiencia, entendemos que la problematización es sustancial como modo de funcionamiento que permite una actividad reflexiva, dando lugar a una dinámica de co-construcción que posibilita la concreción de los objetivos de cada grupo.

2.2.3 Los desafíos de la difusión, nuestro proceso de co-producción

En la perspectiva colaborativa que hemos desarrollado entre investigadores y docentes de escuela secundaria, se ve reflejada la postura del investigador no sólo a lo largo de los procesos de co-situación y de co-operación, sino también en el momento del análisis y la difusión. Nos referimos a la sensibilidad práctica del investigador necesaria para respetar en cada momento el criterio de doble verosimilitud. ¿De qué trataría la sensibilidad del investigador en la etapa de la difusión de los resultados de la investigación? ¿Qué forma adquiere el criterio de doble verosimilitud en esta etapa? ¿En qué, la sensibilidad práctica del investigador, puede enriquecer la participación de los docentes?

Para referirnos al desafío de presentar los resultados integrando las preocupaciones de los docentes y de los investigadores de manera que sean creíbles para ambas comunidades, retomamos la **doble fecundidad de los resultados** en relación al criterio de doble verosimilitud.

A lo largo de los años de trabajo en colaboración, fruto del estudio, de las implementaciones en las aulas y de los análisis que de ello se derivaron, se fueron construyendo una serie de conocimientos de diferente naturaleza. Esto dio lugar a un proceso que no es lineal en el tiempo, pues los nuevos conocimientos que se generaron se reinvierten, originando nuevos objetivos de trabajo conjunto, de la mano de la resignificación de viejas ideas y de la necesidad de indagación en los encuentros y en las implementaciones en el aula. Proceso que permitió diversas elaboraciones con distintos alcances y profundizaciones a partir de las cuales emergieron producciones de distinta índole. El adquirir cierto estado de conocimiento en cuanto a la temática fue posibilitando una organización para producir resultados[13]. Producciones que impactan, en mayor y/o menor medida, en diferentes espacios profesionales, la formación inicial y continua y el ámbito de investigación, motorizados por los requerimientos propios que impone un proyecto de investigación subsidiado por una

[13] Del trabajo conjunto se produjeron publicaciones de artículos en revistas especializadas, ponencias para ser presentadas en congresos y Escuelas de Didáctica de la Matemática y talleres que se fueron desarrollando con la intención de difundir en la comunidad educativa conocimientos y experiencias.

institución. La elaboración de este capítulo junto a los otros que conforman este libro forman parte de esta última etapa de co-producción.

En el apartado siguiente presentamos un análisis para visibilizar, al menos así lo esperamos, la problematización y la producción involucradas en la colaboración que constituyen la esencia de nuestro trabajo.

3. La colaboración como medio de problematización y producción

Las discusiones que se dan en los espacios de trabajo conjunto corresponden, en general, a episodios que plantean los DA como, por ejemplo, el cierre de una clase, la significación de ciertas técnicas de cálculo, la evaluación, que dejan al descubierto la complejidad que reviste implementar una propuesta de enseñanza cuando es una producción del ámbito investigativo. Al sumergirnos en el análisis de estas cuestiones comenzamos a transitar un proceso de comprensión de la complejidad de la tarea docente a partir de visibilizar la problemática involucrada en la apropiación de las ideas claves de la nueva propuesta y la problemática de su puesta en aula que requiere adaptaciones, modificaciones, restricciones, cuestionamientos sobre perspectivas de enseñanza y de aprendizaje, en función de las condiciones reales en la que se aborda. Los debates y las reflexiones ocurrieron desde una perspectiva que sostiene y promueve la construcción de conocimientos por parte de todos los actores involucrados (estudiantes, DA y DI).

Este apartado pretende dar cuenta del proceso llevado a cabo en esas discusiones antes mencionadas, que ha sido costoso poder reconocer, para los DI, el nuevo conocimiento producido, como resultado del trabajo conjunto. Reconocer y cargar de sentido los aspectos estructurantes de la propuesta nos demandó muchos años de estudio y de procesamiento de ideas, de idas y vueltas de sucesivas adaptaciones e implementaciones que se iban consensuando y que requerían instalarse en la escuela durante tiempos prolongados, de aproximadamente dos períodos lectivos, distribuidos una parte en 1° año y otra parte en 2° año del nivel secundario. En este camino, siempre hemos intentado no perder de vista la construcción de significados sobre los sentidos en juego en la propuesta y el lugar del estudiante como productor. Esta tarea fue habilitando la construcción compartida de un marco de referencia, cimentando así una cierta cultura didáctica explícita entre DI y DA. Marco didáctico común, que si bien es compatible con el marco didáctico inicial de los investigadores, es diferente y está nutrido de otros aspectos.

Para presentar esta experiencia, distinguimos dos ejes de análisis –ni exhaustivos ni disjuntos, ni sucesivos– a partir de considerar ciertas problematizaciones de los espacios de trabajo colaborativo que consideramos potentes por las discusiones y reflexiones que se fortalecieron en significados en torno a ellas. Para estos ejes, hemos tenido en cuenta, por un lado, la reconstrucción de la relación problemas de la propuesta-conocimientos (Artigue, 2004) en la que se basa esta ingeniería didáctica. Por otro lado, el reconocimiento y relevamiento de condiciones didácticas de los análisis *a-priori* y *a-posteriori* de las implementaciones.

El primer eje, Disposición a la deconstrucción de ideas, está asociado a la comprensión de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica de la propuesta. Nos focalizamos en comprender y problematizar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje a la luz de la explicitación de relaciones didácticas. Este eje busca una mayor comprensión acerca del análisis de las selecciones realizadas por Cid y Ruiz-Munzón (2011) y Cid (2015), contrastándolo con lo que va sucediendo en la implementación en el aula. Este estudio conjunto que desarrollamos, muchas veces de manera sinuosa, vislumbra en qué sentido dichas selecciones contribuyen a avanzar sobre los aspectos constitutivos del objeto matemático números enteros.

El segundo eje, Conjunción/enlace con el carácter situado, tiene que ver más con el terreno, con lo que sucede en el aula pues hay elaboraciones que se construyen en relación al contexto, en función de las producciones de alumnos y de las intervenciones docentes. Hacemos foco en conceptualizar el accionar docente para instalar el conocimiento que se tiene en la mira, es decir se referencia en cómo leer las necesidades que se desprenden de la puesta en aula por parte de los DA. Tarea que ha requerido conceptualizaciones que se alzan luego de construcciones amasadas a base de discusiones, reconstrucciones de sentidos en juego que no solo se refieren a los conocimientos de la propuesta, sino a perspectivas de la enseñanza, del aprendizaje.

¿Cómo desarrollamos estos ejes de análisis a propósito de nuestro trabajo colaborativo y con esta propuesta de enseñanza de los números enteros en el contexto algebraico? Desglosamos cada uno de los ejes a partir de la selección de problematizaciones que consideramos fértiles para dar cuenta de las cuestiones mencionadas.

Nuestro interés, como ya lo anticipamos, estuvo centrado en la producción de conocimientos matemáticos-didácticos a propósito de adaptar una propuesta de enseñanza. En este marco colaborativo aparecieron múltiples cuestiones, de distinta índole, matemática, didáctica, social, pedagógica, institucional… que fueron delineando los intercambios en las distintas reuniones de trabajo. Cuestiones del tipo: ¿Cómo se involucra la idea de números enteros en los problemas? ¿Cómo nos referimos a los conocimientos que se van armando si aún no están blanqueados como tales? ¿Por qué la vinculación con lo algebraico? ¿Cómo se gestiona/advierte la ruptura con lo aritmético? ¿Cómo se ven esas cuestiones en lo que tradicionalmente se hace y su diferencia con esta propuesta? ¿En qué medida los procedimientos de los alumnos van dando cuenta del trabajo matemático que se pretende? nos llevaron a debatir y así construir/reconstruir sentidos, comprender más las elecciones que se iban sucediendo.

En ese sentido, es importante señalar, como primeras aproximaciones de nuestra experiencia colaborativa, que los análisis, reflexiones, debates que acontecieron en esos años de trabajo generaron acuerdos, tensiones, idas y vueltas, avances y paradas. Esos intercambios permitieron que cada uno de nosotros vaya visibilizando ciertos asuntos sobre la enseñanza que configuran redes de conceptos, sentidos, significados, representaciones, ideas que se reconstruyen y amplían. Aspectos que se convierten en problemáticos cuando se acepta el desafío de construir una adaptación de una propuesta –producto de una investigación– cuya dinámica de trabajo involucra cierta concepción de la enseñanza. A continuación, desarrollamos cada eje de análisis.

3.1 Primer eje de análisis: disposición a la deconstrucción de ideas

En líneas generales, un producto de investigación se puede reconocer como accesible cuando se estudian en profundidad las relaciones matemáticas implicadas y se hipotetiza acerca de cómo retomarlas e inscribirlas en conceptos más generales (Ver 2.2.1 Una problemática común...). Ese estudio es el que asociamos a este eje pretendiendo una comprensión de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica de la propuesta. En el camino de búsqueda de dicha comprensión estos conocimientos se tensionan con nuestras presuposiciones, los conocimientos previos…, que se movilizan en el desarrollo de los análisis de los fundamentos de los problemas. Lograr una integración de objetos y relaciones con otros aprendizajes, configuraron sucesivas y diversas apropiaciones cuyos matices se manifestaron en términos de deconstrucción de ideas, procesos que, además, se ven atravesados por cuestiones personales, institucionales, posiciones en el grupo de estudio, entre otras.

Una primera aproximación a la propuesta, en la senda de comprender los sentidos implicados, se hizo a partir de estudiar e identificar las opciones esenciales que conforman la organización matemática que la sostiene. ¿En qué medida las discusiones contribuyeron a analizar, desmenuzar, el meollo de la propuesta en términos de naturaleza epistemológica, cognitiva y didáctica?

Tomamos como puntos de partida los fundamentos epistemológicos[14] en los que se apoya la ingeniería didáctica. La no congruencia entre el conocimiento matemático-didáctico habitual arraigado sobre los números enteros y el planteo de la autora (Cid, 2015), nos llevó a fuertes interpelaciones, cuestionamientos internos en el plano cognitivo. Mientras que, en el plano didáctico, la propuesta estudiada se caracteriza por un funcionamiento del sistema de enseñanza basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998a) y la Teoría Antropológica de lo Didáctica (TAD) (Chevallard, 2005), que promueven la producción de conocimiento matemático problematizando la propia actividad matemática en las aulas. Este funcionamiento tensiona las prácticas habituales de enseñanza de un conjunto numérico basadas en una secuenciación de contenidos que comienza con una caracterización de dicho conjunto, para seguir luego con el orden y posteriormente plantear la operatoria correspondiente.

En este sentido, y a partir del planteo anterior, caracterizamos este eje como Disposición a la deconstrucción de ideas porque el proceso de trabajo conjunto nos permitió desarmar ideas construidas, ideas instaladas en nuestro repertorio matemático/didáctico a propósito del objeto de enseñanza desarrollado en la propuesta.

Adaptar una ingeniería didáctica lleva a distintas problemáticas que ponen en tensión la dupla conocimiento matemático/conocimiento didáctico. Varias cuestiones atraviesan esa tensión y han permanecido, con más o menos intensidad, a lo largo del tiempo en nuestro trabajo conjunto. Del lado del investigador, una cuestión se refiere a cómo traccionar entre el acompañamiento de un proceso de aproximaciones a una ID y la faceta de formación movilizada en esta perspectiva, en términos de permeabilidad, a partir de entender inquietudes e incertidumbres de los DA entrecruzadas con los propios intereses de producir conocimientos matemáticos/didácticos en relación a las prácticas de enseñanza. Del lado del docente, se juega una necesidad de vivenciar/experimentar una puesta en marcha en sus aulas, sobre elaboraciones provenientes de la investigación, en términos de permeabilidad sobre cierta apertura, a partir de un trabajo de acompañamiento y entonces observar/estudiar su plausibilidad. Otra cuestión que reconocemos es el papel que jugaron, en las discusiones, los

[14] Ver Cid, 2015, p. 255.

conocimientos propios que condicionaban la comprensión y que nos parecen relevantes de explicitar puesto que son parte del proceso que se da cuando se conviene en estudiar una ID para el aula. En ese sentido, el acompañamiento fue difícil en muchas ocasiones. Los avances, lentos y provisorios, estuvieron atravesados por esta tensión. La posibilidad de un trabajo de largo alcance junto al hecho de que en cada año lectivo volvíamos a rever, debatir, reflexionar sobre las elecciones implicadas en la adaptación/reformulación nos ha permitido evolucionar en esos aspectos. Años tras año, el trabajo se reformulaba con nuevas aproximaciones de la propuesta llevada al aula y ello nos posibilitaba reflexiones más profundas y mejores desentrañamientos de la secuencia, parados en aspectos conceptuales que hacen al objeto de enseñanza. Volver a discutir esas cuestiones con años de experiencias de aula nos permitió avanzar en resignificaciones. Creemos que, al adaptar una propuesta, emergió como necesidad del DI el ejercicio de una especie de “doble vigilancia epistemológica”: hacia el conocimiento mismo en el marco de los fundamentos de la propuesta de investigación y hacia el rol de acompañante en la reflexión, el cuestionamiento, la argumentación. En palabras de Barry y Saboya (2015): *el desempeño del DI implicaría atender a la sensibilidad didáctica que se juega en este proceso* (p. 11).

Para el análisis de este eje presentamos dos asuntos que, a nuestro entender, reflejan la problematización como dimensión estructurante del desarrollo del trabajo colaborativo, a partir de debates sobre aspectos relativos a los sentidos en juego de los objetos matemáticos involucrados. En primer lugar, bajo el apartado “Entre prácticas habituales y nuevas en torno a las reglas de cálculos”, presentamos un análisis que nos lleva a mostrar rasgos de lo colaborativo que permitieron desentrañar las significaciones imbricadas en técnicas de cálculo que se ejercitan en la enseñanza de estos números, inscriptas en una ruptura cognitiva que deviene de abordar dos universos juntos: lo numérico y lo algebraico. En segundo lugar, en la sección “Emergencia de nuevas significaciones en torno a la idea de número”, hacemos alusión al debate y reflexiones desplegadas al desarmar la idea de número, a partir de comprender los objetos algebraicos que emergen y los objetos aritméticos que cambian su significado.

3.1.1 Entre prácticas habituales y nuevas en torno a las reglas de cálculos

Una cuestión que atravesó al grupo de trabajo en reiteradas ocasiones ha sido el tratamiento de las reglas de cálculo que conlleva la propuesta. Nos referimos a discusiones que involucran la suma de números enteros en su vínculo con el cálculo algebraico que esta propuesta postula, y con modos tradicionales de hacer el cálculo.

Los primeros intercambios permitieron advertir en la regla "sumar y restar es lo mismo que" –correspondiente a la suma de enteros y que se construye en la propuesta– un corrimiento de la tradicional regla de los signos: "para sumar dos números enteros se restan sus valores absolutos y se coloca el signo del que tiene mayor valor". La problematización en torno a esta regla de cálculo[15] tiene que ver con adentrarnos en el proceso de deconstrucción de ideas matemáticas que subyacen a la regla de cálculo tradicional: ¿Qué limitaciones[16] comporta la regla tan usada con relación a la idea de número negativo en danza? ¿Cómo desentrañar toda la riqueza de los sentidos en juego subyacentes en la nueva regla y no pasar a reemplazar una por otra? ¿Qué aspectos son necesarios cargar de sentido? No nos interesa el cambio de una regla por otra en forma algorítmica, no queremos que sólo se cambie el discurso y se hable en términos de "sumar y restar es lo mismo que". El desarrollo de los sucesivos encuentros de trabajo estuvo guiado por la búsqueda de explicaciones para que ese cambio de discurso esté en consonancia con los fundamentos de la propuesta.

El análisis que compartimos sobre los objetos de enseñanza que emergen de las actividades, configuró, según creemos, un nudo central que permitió ir tocando el vínculo fuerte de la propuesta con el trabajo algebraico. Más precisamente, aludimos a las discusiones, traídas por los DA, a propósito de anticipaciones realizadas del tratamiento de un procedimiento de resolución muy frecuente en las prácticas habituales: "separar negativos por un lado y positivos por el otro y luego restar los resultados". Dicha inquietud favorece profundizar el debate al asumir la complejidad que implica la comprensión de aspectos epistemológicos implicados en una regla. En ese sentido, los intercambios interpelan a los DI en sus respectivos roles de coordinación del espacio de trabajo, pues la cuestión pone en vilo los fundamentos de la propuesta y, a los DA en sus roles de gestores del espacio-aula, al tensionar esta nueva perspectiva con la arraigada a deconstruir. Así, las discusiones rondan alrededor de estos interrogantes: ¿Qué tiene que ver la técnica de separar negativos y positivos con el álgebra involucrado en la propuesta? ¿Se puede usar esta técnica? ¿Por qué se descartaría si hasta ahora funciona? ¿Qué problemática matemática/didáctica hay en torno al uso o no de esa técnica?

En las interacciones colaborativas, se comenzó a alojar la idea de revisar algunos modos de hacer ligados a prácticas de enseñanza habituales. Empezaron a resonar en estos espacios

[15] Esta idea se trata en el capítulo 4 de este libro: Problematización y asuntos que se vuelven problemáticos en la enseñanza de los números enteros.

[16] Para ampliar sobre el tema sugerimos visitar Cid, 2015, cap. 4.

que, aunque no había aún comprensiones claras, se ponía en riesgo el sentido del negativo en la propuesta. El siguiente diálogo ejemplifica lo expresado precedentemente:

> (...)
>
> DA1: *¿Cómo pensaron ir dejando lo que se quiere que los alumnos aprendan? Porque los problemas están planteados en un contexto.*
>
> DA3: *Cuando fui armando el año pasado, iba aclarando qué quería de cada problema, y después del problema 5, tengo registrado que allí era conveniente fijar los conocimientos que nosotros consideramos más relevantes. Por ejemplo, en uno de los problemas que bajaban, bajaban, bajaban, eso se representa con el signo menos, o perdía, perdía, gasté, gasté, ... ¿Qué hacíamos con esas cantidades? Las fuimos sumando todas porque en todos los casos bajaban, o gastaban, y ¿Cómo quedó la expresión final? Quedó –20, entonces las cantidades se suman y quedaban con el mismo signo de la operación. En otros casos como el de las figuritas, perdió 9 y después recupera 7 ¿Cómo queda? Perdió lo representamos con un –, ganó con un +, ¿Qué pasó con la operación? Vamos viendo cuándo lo hacemos y qué; si lo hacemos al cabo de las 5 tareas o a medida que vamos trabajando con cada una.*
>
> DA1: *Claro porque todos estos problemas apuntan a lo mismo, entonces ver qué se rescata y cuándo. Porque tal vez uno por uno no tendría sentido.*
>
> (...)
>
> DA1: *Lo que digo, es que se está trabajando con los enteros, pero ¿Cómo saben que son números enteros?*
>
> DA4: *Porque nadie les dice.*
>
> DI1: *No están los números enteros así presentados.*
>
> DI3: *Están los números con signos adelante.*
>
> (...)
>
> DA2: *Esto que ellos se tienen que dar cuenta de los números de igual signo se suman… dos positivos se suman, dos negativos se suman.*
>
> DA3: *Esas cositas así no sé...*
>
> DI1: *No estamos con números negativos.*
>
> DI4: *Nosotros estamos siguiendo lo que proponen los autores y eso recién lo formalizan en la tarea 13.*
>
> (...)
>
> DI3: *Porque una pregunta de los chicos podría ser: ¿cómo baja baja, baja lo voy a sumar?*
>
> DI1: *Eso ni se lo cuestionan! Primero bajaron 5, después 4, entonces ¿cuántos bajaron? Bajaron 9, es natural. Decir que resto 5 y luego resto 4 es restar 9 es natural…no se necesita… porque no está el negativo!*
>
> (Extracto del Encuentro Nº 4, grabado 04-04-2013)

Este diálogo deja ver la influencia de conocimientos de una práctica habitual de los enteros que aparecen tensionando la fluidez en la toma de decisiones, pues hay términos que molestan[17] en el análisis de un procedimiento de resolución, a propósito de la matriz algebraica que sustenta la propuesta. La coordinación de ese intercambio por parte de los DI se sostiene a veces con silencios, otras veces con intervenciones direccionadas hacia el carácter epistemológico de la propuesta (*Están los números con signos adelante, no estamos con números negativos*). Hay aquí un viso de cómo tensiona, en el grupo de trabajo colaborativo, las ideas de la enseñanza tradicional con la perspectiva de la propuesta. Es decir, traer a la mesa de trabajo ese posible modo de calcular y proponer su consideración, pone al descubierto ideas arraigadas que se oponen a la perspectiva de Cid (2015).

Más aún, destacamos el rol de la variable tiempo (un año de trabajo conjunto, mencionado en las palabras de DA1: *Cuando fui armando el año pasado, iba aclarando qué quería de cada problema*), que deja ver vaivenes en el camino de la comprensión, al asignarle, en el modo de referirse, diferentes sentidos a la regla de cálculo. Cuestiones que en el decir de los intercambios entre DA se reconocen a partir de expresiones como… *esas cositas así no sé* como respuesta a dos *positivos se suman, dos negativos se suman.* En esos intercambios se podría traslucir un proceso de deconstrucción en el marco de elecciones para el aula, aunque se deja entrever que, en términos contextuales, el discurso sigue persistiendo *Las fuimos sumando todas porque en todos los casos bajaban, o gastaban, y quedó –20, entonces las cantidades se suman y quedaban con el mismo signo de la operación.* En este análisis reconocemos una apertura de uno de los DA, (DA3: *Esas cositas así no sé*) que, desde la investigación colaborativa, se manifiesta como una sensibilidad teórica por parte del DA en tanto se refiere a la "(...) «disposición» del profesional a «salir» momentáneamente de su práctica, a interesarse por la investigación, por las perspectivas teóricas puestas por el investigador" (Barry y Saboya, 2015, p. 11). Interpretamos que el DA sale momentáneamente del discurso habitual de esta regla de cálculo pues está preocupado al reconocer que el uso de dicha regla infecta la lógica de la propuesta (DA3: *Esas cositas así no sé*).

Las discusiones, reflexiones y acuerdos en los encuentros de trabajo tuvieron por intención favorecer diálogos para develar el vínculo entre el funcionamiento algebraico y la idea de número entero implicada. Intentar visibilizar ese vínculo nos llevó a la necesidad de elaborar argumentos que cuestionen el uso de esa técnica en relación a la propuesta. La búsqueda de ese esclarecimiento fue sostenida por el análisis que los investigadores condujeron

[17] Con términos que molestan nos referimos a la práctica habitual que remite relacionar el "bajan", con sumar negativos, que aquí no está admitido porque aún no se dio entrada a los enteros. Mientras que está admitido asociar "bajan" con restar, a partir de lo que se hace para resolver el problema.

en términos de entrecruzar los argumentos epistemológicos que las autoras consideran (Cid y Ruiz Munzón, 2011; Cid, 2015) y las interpretaciones que van surgiendo de los debates. Pues, las intervenciones de los DI pretendieron ir negociando un discurso anclado en prácticas tradicionales (*¿Cómo baja, baja...? ¿baja lo voy a sumar?*) con otro vinculado epistemológicamente a la regla de cálculo algebraica (*bajaron 5, después 4, entonces ¿Cuántos bajaron? Bajaron 9, es natural… Decir que resto 5 y luego resto 4 es restar 9 es natural…*). Para los investigadores el debate alrededor de una inquietud que los DA trajeron a partir de un procedimiento posible de sus alumnos, alertó sobre la complejidad que reviste pensar esa propuesta, producto de una ingeniería didáctica, para sus aulas. Complejidad que se manifestó por el camino a transitar al ir reconociendo los fundamentos que la sustentan y a la vez ir desarrollando ciertos aspectos que den cuenta de un accionar docente favorable en ese sentido. El trabajo colaborativo habilitó un camino enriquecedor para tratar esa complejidad al construir con otros el sentido de los objetos matemáticos en juego en la propuesta.

Es en la adaptación de las actividades y en las fases de análisis, *a priori* y *a posteriori* que, parafraseando a Perrin-Glorian (2019, p. 6), la colaboración entre todos resultó esencial y permitió hablar realmente de acción conjunta con aportaciones diferentes de los actores que contribuyeron a enriquecer el análisis.

3.1.2 Emergencia de nuevas significaciones en torno a la idea de número

La propuesta conlleva una idea de número[18] que no se dispone y su elaboración es abordada minuciosamente por un conjunto de numerosas actividades, en un juego de contextualización/descontextualización, que posiciona al álgebra como el medio para el surgimiento de los números negativos. El trabajo con esas actividades porta una serie de conocimientos provisorios e implícitos, necesarios de abordar en los encuentros de trabajo, pues los conocimientos propios en relación a prácticas de enseñanza de los enteros suelen estar alejados de la perspectiva epistemológica de la propuesta estudiada.

En estos espacios comenzaron a darse discusiones alrededor de la provisoriedad de los conocimientos, ¿Cuánto tiempo se sostendría la gestación de los nuevos números anclados en el contexto de los problemas? En otras palabras, nos interpelaba cuánto tiempo es necesario sostener de manera implícita los números negativos. Esta cuestión está atravesada por los condicionamientos docentes propios de la institución y del sistema escolar, teñida con las

[18] Ver capítulo 4 de este libro: Problematización y asuntos que se vuelven problemáticos en la enseñanza de los números enteros...

particularidades de lo situado que desarrollamos en el ítem siguiente. Las reuniones estaban imbuidas de planteos cotidianos relativos a las trayectorias escolares de los alumnos y el proyecto de enseñanza cuya continuidad[19] podría verse afectada. El tiempo de implementación de la propuesta no necesariamente es coincidente con el tiempo que dura un ciclo lectivo, y esto suma otra preocupación en torno a la regulación de los conocimientos provisorios, ya que, en algunos casos, podrían quedar pendientes de desarrollo para el próximo año. Planteos del tipo ¿Cómo asoma el número negativo en los problemas de la propuesta? ¿Cómo reconocemos la travesía del número entero en ella y en las producciones que surgen al resolver los problemas? guiaron las discusiones e intercambios en los encuentros entre DI y DA. Las ideas que surgieron del análisis llevan a reconocer que una ampliación de la idea de número tiene asociado un camino de aspectos provisorios y constitutivos del objeto que es necesario asumir colectivamente.

Con la intención de abocarnos a qué opciones podríamos considerar con relación a la provisoriedad de los conocimientos, los encuentros de trabajo se dedicaron a indagar cuáles son los criterios epistemológicos que subyacen a esta génesis escolar del número, de manera que nos dé indicios[20] acerca de cómo abordarlos. Para ello se puso en marcha un diálogo entre las miradas de DI y de DA con respecto a la significación de número involucrada. El cuestionamiento llevó a poner en vilo en la mesa de trabajo dos ideas fuertes, la primera que el objeto aritmético **resta** empieza a mutar, y la segunda que en el álgebra no hay condición previa para realizar el cálculo de una resta. Abordar esos asuntos nos llevó a preguntarnos: ¿Qué aporta interpretar la resta como diferencia, con relación a la idea de número? ¿Qué papel juega el álgebra en todo eso?

Las ideas referidas a inquietudes sobre la concepción de número fueron tema de discusiones en distintos encuentros que abarcaron varios años. En esas instancias se percibe un esfuerzo de reconstrucción de nociones matemáticas movilizadoras de ideas algebraicas que se venían gestando a través de los análisis de los problemas, facilitando iluminar otro costado de los objetos, difícil de apreciar. Lo laborioso del debate, en este caso, muestra la complejidad de la aprehensión de la propuesta y las sucesivas aproximaciones a ella que tuvieron lugar en el trabajo colaborativo a la vez que abrió las puertas a la producción matemático-didáctica

[19] Nos referimos al DA que manifiesta su preocupación en relación a la incertidumbre por la continuidad, para el próximo ciclo, en aquellos cursos que no estarían a su cargo.

[20] Cuestión que también hace explícito el DA, en su relato, haciendo evidente la necesidad de esclarecer este desafío asumido en relación a la apropiación de la lógica de la propuesta (Ver capítulo 5, de este libro: Lo colaborativo en acción, una experiencia sobre lo trabajado antes, durante y después de su implementación).

sobre las temáticas en cuestión. Creemos que las interacciones colaborativas generaron buenas condiciones para reconstruir la idea de número, al vislumbrar en las discusiones nuevos costados de estos objetos, vinculados a la idea de resta como diferencia y al cálculo algebraico como germen del número negativo.

La hoja de ruta que comienza con el uso de la letra para la escritura de expresiones y termina con la entrada triunfal del número negativo no fue lineal. En ese recorrido, los debates requirieron varias veces retomar ideas, establecer acuerdos provisorios, reformular inquietudes (*bueno todo este esfuerzo en clase con las actividades, sostener el trabajo algebraico… ¿A cambio de qué si todavía no hablamos de negativos*?). Esas interacciones colaborativas, apoyadas en relecturas y análisis (*a priori y a posteriori*) de las primeras implementaciones en aulas, según entendemos, hablan de una suerte de confluencia de un proyecto común con distinguidas particularidades. Por un lado, para el DI significaba jugar un doble juego de captura de ideas que no le son propias y, a la par, resguardar/sostener la vigilancia epistemológica de su puesta en aula. Por otro lado, para el DA, significaba cargar sobre sus espaldas la complejidad de la relación entre el conocimiento a enseñar y lo producido por sus alumnos. En otros términos, ese recorrido tuvo diferentes aproximaciones a las conceptualizaciones implicadas en la secuencia de problemas para todos los que participábamos de los encuentros. Particularmente para los DI, representó un abordaje de una vasta densidad, la dinámica de problematización fue permanente, otorgándole al trabajo colectivo una especial relevancia como posibilitador de mayores comprensiones. Abordaje que fue facilitado por el extenso tiempo de trabajo transcurrido y por la riqueza de los intercambios que se fueron sucediendo. El itinerario y las relaciones consecuentes de la tríada expresión algebraica/diferencia entre expresiones/número negativo, fueron vertebradores de la problematización mencionada. La gestión de coordinación de los encuentros en los que se dirimía los objetivos de la clase en relación a los problemas a abordar, fue laboriosa, puso en vilo la propia reconstrucción de ideas, para los DI, con respecto a las nuevas concepciones. No olvidemos que, para ese desarrollo de los encuentros, el hilo conductor del cálculo algebraico y numérico, en términos de objetivos-problemas, conocimientos-procedimientos posibles, debía guardar coherencia con las ideas epistemológicas subyacentes.

Explicitar este primer eje de análisis, nos permitió transparentar la complejidad intrínseca en la gestión y tratamiento de las ideas nodales de la propuesta, en el sentido de problematizar aquellas condiciones que favorecerían que una ID pueda llegar al aula. Estas reflexiones pretenden dar cuenta de avances y logros con relación a nuestros propósitos de investigación y destacar que el fortalecimiento de las ideas construidas se apoya, en gran medida, en la oportunidad que el grupo de trabajo tuvo en el ir y venir con el aula a lo largo del tiempo. Si bien esta tarea resulta ardua y costosa, ya que la estructuración de la ID colisiona fuertemente con nuestros propios conocimientos acerca de esos objetos, asumimos el compromiso y la responsabilidad de llevarla adelante por considerarla valiosa en términos de su contribución a la enseñanza. Esa complejidad abarca ideas de índole epistemológica, cognitiva y didáctica, que han podido abordarse en el espacio de trabajo y convenir en una adaptación que toma en cuenta las necesidades de los DA (Perrin-Glorian, 2016). Frente a la necesidad de comprensión, entramos a un juego matemático-didáctico involucrado en una ID externa y para ello nos adentramos en un proceso de construcción/deconstrucción/reconstrucción de concepciones. Así, nuestro desafío de la coordinación transitó un desarrollo problematizador en relación a la reconstrucción de ideas, con varias paradas revisadas y ampliadas a partir de las interacciones colaborativas. Entendemos que las reconstrucciones conceptuales se ponen en funcionamiento a través de discusiones que facilitan reconocer ciertos rasgos algebraicos. Por ejemplo, en los posibles procedimientos, en las ideas que los DA consideraron en los cierres, en las posibles interacciones fomentadas en la clase, en los sentidos en juego respecto de los números negativos que los DA impulsaron en la clase, en las interpretaciones que se hicieron de las producciones de los alumnos. Es decir, se evolucionó en la idea de número al amplificar el análisis sobre su concepción y la gestión de la clase de ese objeto.

3.2 Segundo eje de análisis: conjunción/enlace con el carácter situado

La propuesta objeto de estudio reviste cierta complejidad, no solo respecto al planteo original mencionado en el eje anterior, sino que conlleva una problemática más, la estructura que soporta la propuesta le es propia a la autora (Cid, 2015), el núcleo duro lo produjo otro, y entonces cabe preguntarnos en qué medida responde a los cuestionamientos de los DA. En ese sentido nos planteamos qué asuntos de una ID se necesitan poner en marcha para que se adapte a los requerimientos propios de un docente. Dicho de otro modo, en palabras de Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril y García (2016, p. 12) "¿Cómo se coordinan los aportes elaborados en el terreno de la investigación didáctica con los conocimientos que los docentes tienen acerca de sus alumnos a la hora de pensar posibles recorridos en el aula relativos a los contenidos de enseñanza?". Asumir esta complejidad significa problematizar los objetos de enseñanza en juego en la propuesta; las relaciones matemáticas que se involucran en las producciones de los alumnos al resolver las actividades o imbricadas en la propuesta[21]; la red de vínculos matemático/didácticos[22] que será necesario tejer, entre otros, para dar lugar a la singularidad de una enseñanza anclada en un aula y alumnos determinados, sin descuidar los aspectos centrales que la autora convino en contemplar y plasmar en la propuesta de manera constructiva implícita y/o explícitamente.

A lo largo de las sucesivas adaptaciones, se fueron integrando las vivencias del aula con las anticipaciones pensadas, conformando un medio cíclico. Dichas adaptaciones posibilitaron oportunidades de reelaboración, reconstrucción de comprensiones que a la vez permitieron una revisión de elecciones. Esas elecciones surgieron de interacciones entre DI y DA, entre DI-DA y producciones de los alumnos, entre DI-DA y observaciones de clase, provenientes de prácticas habituales de los DA y sus posibilidades de avance/reflexión/evolución.

El análisis que se despliega, a propósito de este eje y a partir del trabajo conjunto, nos lleva a reconocer la relevancia de debatir acerca de los aspectos de la propuesta que requieren especial atención para su adaptación, en términos de una secuencia consensuada y acomodada al aula del DA y permitiéndole así desplegar su juego (Perrin-Glorian, 2019). Las razones construidas colaborativamente y a partir de la ingeniería didáctica, constituyen puntos de apoyo para el despliegue de ese juego, influenciado también por los condicionamientos institucionales. Tales razones se forjan a través de las sucesivas y diversas apropiaciones cuyos matices dan cuenta de una paulatina problematización que enriquece y amplía las ideas y las significaciones de los conocimientos involucrados.

En algunas ocasiones ese proceso de idas y vueltas en la adaptación de la secuencia para el aula, por tratarse de una práctica constructiva, requería como dicen Artigue, Douady y Moreno (1995) un trabajo que pone énfasis en la construcción de sistemas de interpretación y toma de decisiones dentro de situaciones comunes/adaptadas conjuntamente promoviendo que los DA en sus implementaciones sean cada vez más sensibles a las cuestiones relacionadas con la calidad de la vida matemática en la clase. El desarrollo del trabajo conjunto nos permite analizar las posiciones simétricas con respecto a esa construcción mencionada anteriormente, pues los participantes estamos en una posición de co-construcción de conocimientos en la cual los DA son considerados actores claves que coadyuvan en la elaboración de hipótesis

[21] Nos referimos por ejemplo a la relación algebraica implicada en el enlace de problemas contextualizados y descontextualizados.
[22] Nos referimos, por ejemplo, al entramado de los tipos de problemas que contiene la propuesta.

interpretativas en relación directa al contexto en que se producen. Lo relevante de este proceso conjunto es cómo juega la doble verosimilitud con respecto al sostenimiento de un "rigor metodológico en la co-actividad reflexiva en torno a las prácticas que permite a la vez un espacio de recolección de datos para el investigador y la oportunidad de un desarrollo profesional para los docentes" (Bednarz, 2015, p.181).

Recuperamos los conceptos de sensibilidad teórica y práctica, como ya comentamos anteriormente (subapartado 2.2.2 de este capítulo), para mostrar en la especificidad de nuestro trabajo colaborativo una manera de habitar didácticamente la singularidad producida en la implementación. Los colores didácticos en las discusiones reflejaban diferentes niveles de análisis marcados por caminos no siempre lineales, a veces más semejantes a laberintos que abonaban perspectivas y argumentos, generando ciertos andamiajes en la colaboración misma y en la consolidación de posiciones. Esa consolidación se nutre de la consideración de diferentes puntos de vista que enlazan dos lógicas, una referida a la "sensibilidad práctica" de los DI y otra a la "sensibilidad teórica" de los DA, donde lo colaborativo se trasluce a partir de una permeabilidad puesta en marcha en una dialéctica entre ambas. En este marco ¿Cómo se manifiestan estas sensibilidades de los participantes en los espacios colaborativos? ¿Cómo juegan esas sensibilidades en los acuerdos, en los debates? Los matices que afloraron con intensidades diferentes, en relación a las sensibilidades en juego entre DI y DA, nos permiten interpretar cómo jugó fuertemente en la mesa de trabajo, entre otras cuestiones, lo relevante del carácter constructivo de la propuesta, a la hora de discutir su adaptación a las condiciones que ofrece este aula puesta a disposición por el docente.

Si bien la TSD nos provee herramientas teóricas que facilitan un análisis sobre la validez de las situaciones y ayuda a caracterizar el enfoque de los números enteros junto al álgebra, se requieren otras herramientas para configurar la adaptabilidad a la enseñanza ordinaria que nos permiten abordar una dialéctica entre los cuestionamientos que surgen con relación a las discusiones de orden epistemológico, didáctico y cognitivo y las prácticas usuales de enseñanza de los enteros (Perrin-Glorian, 2019). El trabajo colaborativo aporta así un escenario fértil para dar curso a la adaptación de la propuesta en el aula y dar funcionalidad a esa dialéctica. En este sentido, y a partir del planteo anterior, caracterizamos este eje como conjunción/enlace con el carácter situado, pues al mismo tiempo que se profundiza en comprensión de la estructura de la propuesta, se debate y acuerdan acciones para el desarrollo de las aulas de los DA que a su vez retroalimentan esas comprensiones.

El desarrollo de esta implementación abraza un complejo despliegue de cuestiones en relación a lo epistemológico, lo cognitivo y lo didáctico que caracterizan la envergadura de esta ID. Por ello, las interacciones que los DI sosteníamos a lo largo de los encuentros de trabajo, estaban más abocadas a fortalecer el accionar docente. Las reflexiones emergian de los análisis *a priori* y del ir y venir al aula, sin pretensiones prescriptivas ni exhaustivas, buscando explorar mejores condiciones de las tareas docentes, a partir de las discusiones referidas a las actividades, las posibles intervenciones, las relaciones matemáticas constitutivas de los conocimientos que los alumnos deben elaborar, entre otras.

Para este segundo eje analizamos dos asuntos que, a nuestro entender, hacen foco en aspectos relativos a distintas tareas docentes en el devenir del desarrollo de las clases, atendiendo a la heterogeneidad de los condicionamientos de enseñanza y de aprendizaje. Pretendemos mostrar en qué sentido lo situado hace mella en un abordaje conjunto durante varios años, que en términos de Perrin-Glorian y Baltar Bellemain (2016) constituyen los bucles iterativos, que contribuyen a la reconstrucción de una ID en función de lo necesario y plausible de los DA.

El primer asunto, “La gestión de la clase con relación a los conocimientos provisorios”, trata de desentrañar hechos/inquietudes del accionar docente en el aula relacionados con los avances de la adaptación. Dicho asunto está ligado a las discusiones en torno a la modelización algebraica que, bajo una lupa constructiva, suman en comprensión para un mayor margen de maniobra que acompase el baile de la adaptación. El segundo asunto, “El sentido de la evaluación en el proceso de implementación de la propuesta”, pretende dar cuenta de la problematización que giró, en los espacios colaborativos, alrededor de la evaluación, inscripta en una ruptura didáctica con prácticas habituales arraigadas. El debate en esencia refleja el tratamiento de la evaluación a partir de conversar en términos de conocimientos construidos por los alumnos, en términos de acciones docentes, en términos de trabajo conjunto, en términos de gestión de esos espacios colectivos, en términos de consolidación del puente investigación-prácticas de enseñanza. Aquí se dirime la cuestión de la legitimidad del trabajo emprendido; es decir, los instrumentos elaborados responden a las singularidades y entrañan el análisis de su legitimidad, a partir de atender a la esencia de los objetos matemáticos involucrados y al lugar del alumno productor en esas tareas.

Aunque también se entrelazan cuestiones de orden epistemológico y cognitivo, más vinculadas al primer eje, este análisis pretende explicitar los intercambios entre DI y DA en el seno del trabajo colaborativo a propósito del carácter particular de los requerimientos de los

DA, sin descuidar cierto control teórico sobre el curso dado en la implementación de la propuesta (Perrin-Glorian y Baltar Bellemain, 2016).

3.2.1 La gestión de la clase con relación a los conocimientos provisorios

Para este apartado, seleccionamos una demanda que afloró en los encuentros colaborativos y que consideramos, a nuestro entender, representativa del proceso de problematización y adaptación, transparentando a la vez, la necesaria permeabilidad de los actores en dicho proceso, lo cual deja ver el anclaje en lo situado. Esta demanda corresponde a una inquietud de uno de los DA de pensar cómo desarrollar cierres en las clases para ir destacando ideas que circulan en el aula, cuando aún no es tiempo de realizar conceptualizaciones de las nociones echadas a andar.

Las cuestiones que emergen de la exploración en el aula interpelaron los marcos de referencia. Por un lado, llevaron a considerar diversos dispositivos para encauzar la perspectiva constructiva de los conocimientos matemáticos implicada en la propuesta. Este trabajo significó ampliar el análisis de las condiciones de las situaciones para propiciar que los alumnos sean los protagonistas en sus aprendizajes. Es decir, los requerimientos que se debatieron (reformular una consigna, incluir más actividades de repaso, hacer afiche para disponer de las reglas de cálculos construidas por los alumnos,...) hablan, en muchos casos, de un proceso de escucha mutua, de toma de registro acerca de cómo avanza la clase a propósito de lo que se va desarrollando, teniendo en cuenta la incidencia que pueden tener las expresiones públicas, sean del profesor o de los alumnos. De este modo, el trabajo colaborativo impulsó una mirada sistemática a partir de la cual emergieron reflexiones para el accionar en tanto aportaciones que se dan lugar en el transcurrir de este trabajo (Fregona y Orús Báguena, 2011).

Compartimos en este tramo del apartado reflexiones y análisis a propósito de esta demanda como asunto problematizador que nos convocó a discutir cómo hacer una puesta en común de una clase, ¿Cuánto se avanzaría en discutir/blanquear respecto de los negativos, de los conocimientos puestos en juego en las actividades hasta aquí? ¿Qué conocimiento nuevo emerge en este momento? ¿Qué aportarían estas ideas para que los alumnos crezcan en sus conocimientos acerca de los negativos? ¿En qué sentido estos mojones aportarían a la conceptualización del recorrido algebraico implicado en la propuesta? Esas inquietudes nos interpelaron en relación a nuestro acompañamiento para crear condiciones en el debate en pos de encontrar ese hilado. ¿En qué medida los análisis impulsados contribuyen a esas condiciones para dar lugar a conceptualizaciones a partir de interpretaciones que realizamos a propósito de lo que se da en el aula, de lo que se propone y enlazar esas producciones con lo que se espera?

Hasta ese momento, en que surge la demanda en cuestión, el trabajo en el aula había avanzado a un punto tal que requería, para el DA, producir conclusiones colectivas de algunas ideas matemáticas que se venían elaborando acerca de la equivalencia entre expresiones. La complejidad de la puesta en común en este caso está acentuada porque se encuentra atravesada por lo provisorio en muchos sentidos. Identificamos dos cuestiones en su tratamiento conjunto, por un lado, concebir posibles intervenciones a partir de las producciones de los alumnos sin perder de vista nuestro objetivo, profundizando el análisis didáctico. Por otro lado, esa inquietud nos llevó a develar aspectos esenciales que subyacen en esa estructura intermedia de diseño de las actividades, que funciona en el pasaje entre el trabajo en contexto y los números negativos. Por ello, la gestión de los conocimientos provisorios es clave pues allí se ancla la construcción con sentido del objeto matemático número entero. En ese marco, en los encuentros de trabajo entre DI y DA comenzamos a conversar sobre los cierres y esto nos llevó a discutir el rol de los conocimientos provisorios cuando se asume el trabajo de una propuesta constructiva. Es decir, se discutió sobre el accionar de los DA para movilizar en el aula un tipo de trabajo matemático, en función de los problemas, con la intención de desentrañar cierta claridad acerca del modelo matemático inmerso en las situaciones de enseñanza. Asimismo, en estas discusiones emergieron otras cuestiones que consideramos por igual importantes en este juego de propuesta constructiva vs. enseñanza tradicional: ¿Con qué finalidad se discute en una clase? ¿Qué se discutiría? ¿Cómo organizamos esta discusión? ¿Por qué las discusiones generan avances? ¿Cómo dar curso a un proceso que lleve a construir conocimientos por parte de los alumnos? ¿Qué herramientas favorecen un despliegue a propósito de tal construcción por parte de los DA? Se fueron configurando intercambios, de manera progresiva en el trabajo conjunto, que dieron indicios de la necesidad de construir acuerdos con el fin de contribuir a la problemática de la ajenidad de una propuesta, resultado de una investigación.

Como venimos diciendo, las discusiones ahondaron sobre cómo maniobrar en el aula con las nociones que los problemas llevan a instalar, que, aunque constitutivas del objeto, no son institucionalizables[23] aún. Particularmente seleccionamos reflexiones que tuvieron lugar en el trabajo colaborativo a propósito de los primeros problemas de la propuesta. En la

[23] A modo de ejemplo, nos referimos a dar un lugar preponderante a “sumar cantidades”, “restar cantidades” por sobre los nuevos significados de los signos “+” y “-”. Ver capítulo 5, de este libro: Lo colaborativo en acción, una experiencia sobre lo trabajado antes, durante y después de su implementación.

organización de las actividades se previó un tratamiento vinculado a una instancia de institucionalización alrededor de la actividad 13. Uno de los DA creyó necesario cerrar antes, para no perder el norte. Esta cuestión puso al descubierto, desde nuestro punto de vista, sistemas en juego con intenciones diferentes. Uno de esos sistemas, refiere a la estructura de actividades que guardan cierta relación en términos de problema/conocimiento. Otro, subraya la importancia de lo situado, requiriendo un vínculo de esa dupla con el aula, transformándose en problema/conocimiento/aula del DA. El siguiente fragmento da cuenta de esta situación:

> (...)
>
> DA3: *Podría ir aclarando cuando los alumnos van haciendo las actividades y con relación a lo trabajado antes. Con los problemas anteriores que suben y bajan se obtiene una expresión amplificada y al final es… y así se van armando las ideas. Entonces se llega al momento en el que se dice "esto significa tal cosa".*
>
> (...)
>
> DA3: *Yo pienso en recuperar ideas ahora, porque más adelante hay actividades con puro trabajo algebraico, entonces les pediría que me den un contexto para que digan cómo hicieron esa expresión algebraica.*
>
> (...)
>
> DA3: *Está bueno lo que dice DA4,* (*"uno se puede ir dando cuenta de lo que se va adquiriendo. Vas viendo lo que hacen y lo que explicitan en lo que hacen. Aunque sabemos que se apunta a una escritura como x-2, ellos van usándola de manera implícita"*) *los alumnos se van dando cuenta de lo que hacen, pero al momento de resolver la expresión algebraica donde se acabó el contexto suben y bajan… me van a preguntar ¿qué tengo que hacer profe?*
>
> DA2: *Esto que ellos se tienen que dar cuenta de los números de igual signo se suman… dos positivos se suman, dos negativos se suman...*
>
> DA3: *Esas cositas así no sé...*
>
> DI1: *No estamos con números negativos.*
>
> DI4: *Nosotros estamos siguiendo lo que propone la autora y eso recién lo formaliza en la tarea 13.*
>
> (…)
>
> DI1*: Ella va tras esa idea que vos decís* (referida a la preocupación de institucionalizar la idea de número que menciona DA1) *formándola de a poco. La entrada a los negativos no es a partir de Z, sino del trabajo algebraico.*
>
> (Extracto del Encuentro Nº 4, grabado 04-04-2013)

En los intercambios de este fragmento, interpretamos anticipaciones que hacen los DA en relación con el futuro trabajo algebraico descontextualizado. En sus expresiones se puede vislumbrar la necesidad de construir un análisis que oriente el trabajo en el aula. Las interacciones colaborativas revelan la importancia del carácter situado en la adaptación e implementación que se discute. La inquietud ronda en torno a cómo se sostiene el trabajo matemático en el aula encaminado hacia la actividad 13, que en términos reales está lejos en el tiempo de las clases de los DA en función de sus condicionamientos institucionales (clases distribuidas en tres días semanales, feriados y/o contingencias edilicias, concurrencia interrumpida por parte de los alumnos, entre otros). Dicho de otro modo, la necesidad de los DA retrotrae a la discusión el carácter situado, su aula, sus alumnos y su necesidad de oficializar algunos conocimientos intermedios previos a la actividad 13, la cual identificamos como dedicada a institucionalizar una regla de cálculo. Pone en evidencia la necesidad de actuar como memoria de la clase en términos de relevar ideas que los alumnos van armando. La presencia de silencios por parte de los DI, tratando de no dar ideas didácticas armadas de antemano, favoreció intercambios y discusiones, en la búsqueda de argumentos, explicitaciones que reflejen las aproximaciones a la propuesta.

Al discutir posibles cierres de clase, a propósito de las tareas que se proponen a los alumnos, surgió la necesidad de un debate sobre las expresiones que comenzaron a circular en la clase, que requerían vincularse entre ellas y que además no constituyen objetos de enseñanza explícitos de los programas oficiales curriculares. Nos referimos por ejemplo a objetos matemáticos como equivalencia de expresiones, que es un conocimiento intermedio, necesario para que en un futuro se puedan institucionalizar los números enteros.

Este análisis permite interpretar el papel del trabajo colaborativo a la hora de explorar en un aula singular esta propuesta de investigación. Retomando la idea que antes mencionamos, queremos remarcar en qué consistió abordar la complejidad de los cierres de la clase. En las discusiones referidas a qué rescatar de cada grupo de problemas a la hora de llevarlos al aula, juega fuerte la jerarquización de conocimientos, la posible institucionalización que en este caso llevó a confrontar perspectivas diferentes[24]. De esta contrastación devienen producciones de conocimientos que dan cuenta de nociones, aspectos, conocimientos intermedios que es necesario concebir y gestionar.

En el trabajo colaborativo se discutió así sobre la identificación de los aspectos matemáticos del hacer y su vinculación con los programas curriculares vigentes que se ajustan

[24] Una más habitual, que lleva al docente a definir los objetos matemáticos, mostrar cómo se designan y usarlos en la resolución de ejercicios, que el DA1 hace explícito en el capítulo 5, de este libro: Lo colaborativo en acción, una experiencia sobre lo trabajado antes, durante y después de su implementación: “Es fundamental destacar aquí que tanto para los estudiantes como también en mi caso, no estábamos acostumbrados a este tipo de trabajo, suponía todo un desafío en el sentido que ellos debían ir construyendo sus propias estrategias de resolución y en mi lugar actuar más de mediador entre sus producciones y los conocimientos que debían ir circulando en el salón de clases”.

a los condicionamientos institucionales. Las reflexiones dieron lugar a ampliar el margen de maniobra de los DA. En otros términos, se produjeron reconstrucciones, para el aula, sobre una puesta en palabras de las ideas centrales de la regla de cálculo a instalar en un futuro inmediato[25]. Ideas que, hasta ahora se manifestaban a nivel de acción de los alumnos, comienzan a reconocerse a nivel de formulación de objetos matemáticos constitutivos del número entero.

El debate en el grupo colaborativo ayudó a hacer visible los aspectos inherentes de los objetos matemáticos que funcionan conjuntamente en lo numérico y lo algebraico, y de los aspectos inherentes a la gestión de una propuesta que se centra en la producción por parte de los alumnos. El trabajo en conjunto permitió dimensionar la actividad matemática que es necesaria de sostener, identificando conocimientos provisorios, funcionamiento algebraico, sentidos de los signos, reglas de cálculos, por un lado, y diferentes procedimientos posibles, ideas a destacar, tiempos de desarrollo, puestas en común, por otro lado. Es decir, el análisis permitió construir enlaces entre las ideas que configuran los objetos de enseñanza y su posible gestión de aula.

3.2.2 El sentido de la evaluación en el proceso de implementación de la propuesta

La problemática de la evaluación llega al espacio colaborativo en distintos momentos, traída por los DA, quienes pertenecen a diferentes lugares de trabajo y, por ende, responden a distintos condicionamientos institucionales. Por ello, consideramos que la evaluación se inscribe en una problemática más amplia, en relación a tales condicionamientos. La impronta particular de cada escuela nos invitó a tener en cuenta matices diferentes a la hora de responder la inquietud de cada DA.

Además, se pusieron de manifiesto distintos planos sobre la evaluación con la intención de dar cuenta de su complejidad sin pretensiones de un análisis exhaustivo de cada uno. Desde el plano del aprendizaje, se puso el foco en la mirada sobre el avance de la construcción de conocimientos, en términos de producciones de los alumnos a partir de lo que pueden hacer. Desde el plano de la enseñanza, se puso en cuestión esta práctica de enseñanza, en términos de dimensionar-valorar la lectura/interpretación que hemos podido conjugar entre adaptación y contexto de la implementación en relación a las elecciones, intervenciones, modificaciones

[25] Ver capítulo 5, de este libro: Lo colaborativo en acción, una experiencia sobre lo trabajado antes, durante y después de su implementación.

consensuadas. Y, por último, desde el plano de lo colaborativo, se trató de una evaluación del proceso de reflexiones y debates del colectivo docente.

Retomando lo expresado con respecto a las particularidades de las aulas de las escuelas[26] que formaron parte del proceso de trabajo conjunto, el entorno social de una de esas aulas jugó un papel primordial. Los debates alrededor de esta cuestión iban haciendo cada vez más visible el papel que juega el contexto institucional-social de la escuela en la enseñanza. Si bien en este escrito no ahondamos en el aspecto social, queremos mencionarlo pues influyó fuertemente en el trabajo de implementación de la propuesta adaptada. En nuestras reuniones, analizamos lecturas más globales vinculadas a trayectorias diferentes de aprendizajes, interactuamos con algunos especialistas en experiencias de trabajo con alumnos de poblaciones en riesgo que nos orientaron a tomar algunas decisiones didácticas alrededor de las dificultades que se daban en las aulas de los DA. En ese contexto se dio lugar a la primera demanda que analizaremos más abajo.

Como venimos destacando, el entorno social interviene de manera diferente en cada aula. Por esta razón, la problemática que el DA2 trae a considerar[27] requiere un tratamiento distinto al interior del grupo. Para este DA, es de interés relevante sustanciar la toma de una evaluación escrita para obtener una calificación que se acomode a los condicionamientos institucionales que operan sobre el docente. Entonces, debíamos con premura diseñar esta herramienta de evaluación acorde con los lineamientos constructivos de la propuesta. Su inquietud pone de manifiesto una mirada de la evaluación ligada, según entendemos, a la fertilidad del desarrollo sobre la adaptación efectuada. Dicho de otro modo, tradicionalmente la evaluación está asociada a una lógica reproductiva que, en términos de Chevallard (2012), distorsiona el sentido de la evaluación en la escuela. La idea que intentamos superar en los espacios colaborativos es aquella que está basada en configurar elecciones arbitrarias de conocimientos validados culturalmente por la sociedad y que conformarían actividades esenciales, inventadas en el ámbito escolar, supuestamente vinculadas a los objetos matemáticos. Mientras que, desde una perspectiva constructiva**,** la evaluación forma parte del proyecto de enseñanza, entonces el instrumento que se elabora debe transparentar, lo más

[26] La institución escolar a la que nos referimos corresponde a una escuela pública ubicada en una zona alejada del centro de la ciudad con una población en la que predominan dificultades socioeconómicas y posee un alto nivel de inasistencia. En muchas ocasiones la escuela debe proveer elementos escolares básicos para el desarrollo de las clases.

[27] La otra institución escolar, a la que pertenece el DA2, corresponde a una escuela pública de gestión privada. En líneas generales, se observa asistencia regular de los alumnos, materiales para las clases y hábitos de trabajo extraescolar.

fielmente posible, el proceso de producción de conocimiento matemático acontecido en el aula. En otras palabras, la discusión sobre esta cuestión nos posibilitó una retrospección del proceso desarrollado hasta el momento en los tres planos distinguidos anteriormente (aprendizaje, enseñanza y colaborativo). Entendemos que esta idea da origen a la segunda demanda que analizaremos más abajo.

La evaluación es una problemática difícil de precisar, sobre la cual parece no haber consenso, que nos ha interpelado con cuestionamientos del tipo: qué enfoques acerca de la evaluación circulan en el equipo; cómo diseñar una herramienta que contemple el proceso de construcción de conocimiento; cómo lograr coherencia entre el dispositivo de evaluación que se elabora y la enseñanza impartida; en qué sentido el dispositivo de evaluación reflejaría los aprendizajes potenciales de los alumnos; qué lecturas hacemos sobre las dificultades que observamos en los alumnos a la hora de dar cuenta de sus aprendizajes.

En diferentes momentos de las discusiones, fue necesario articular diversas actividades de revisión integradas a la propuesta con evaluaciones formativas específicas posibilitando así obtener una información más sistemática. En ese sentido, las miradas en el interior del equipo fueron ampliándose, poco a poco, con respecto a la evaluación y ciertas herramientas que contenían indicadores de avances que dan cuenta de la trayectoria de los aprendizajes de los alumnos, comenzaron a ser parte del propio proyecto.

Una de las discusiones, para dar lugar al requerimiento del DA1, nos llevó a adentrarnos en el análisis sobre el dispositivo que se propone de elaborar trabajos prácticos con un viso de control de los progresos de los alumnos. La regulación de los aprendizajes es una necesidad compartida entre el DA1 y sus alumnos, quienes viven una actividad matemática diferente a la habitual y reclaman ser evaluados[28]. El trabajo conjunto sobre esta demanda puede ser interpretado como otro rasgo colaborativo que impregnó a la propuesta con particularidades de este aula, adecuándola a las singularidades del contexto escolar y de las necesidades de los actores. El diseño del instrumento de evaluación bajo el título Trabajo práctico, aportó otro elemento para seguir los aprendizajes de los alumnos. A la vez permitió revisar si el conjunto de actividades que conformaba dicho dispositivo atendía a los aspectos nodales de la propuesta y al proceso de enseñanza llevado a cabo. Además de representar una instancia de trabajo individual que porta una nota, la evaluación devuelve a los alumnos información numérica reportando sus logros en función de los aprendizajes esperados. El debate sobre la elaboración

[28] Para más información ver capítulo 5, de este libro: Lo colaborativo en acción, una experiencia sobre lo trabajado antes, durante y después de su implementación.

de consignas, los tipos de tareas, la consideración de tiempos distintos a la hora de resolver una cuestión por parte de los alumnos, la posibilidad de revisión personal del trabajo convenido, la ausencia de la presión de la prueba, entre otros, abrió camino para la configuración de este formato evaluativo diferente. Así el Trabajo práctico concebido como oportunidad de revisitar los conceptos desde otras perspectivas, nos llevó a interpelarnos acerca de cómo analizamos la construcción de conocimientos por parte de los alumnos y cómo podrían plasmarse en ciertas consignas que muestren el grado de adquisición de esos conocimientos, sin remitirnos a una réplica del camino ya transitado ni caer en la pregunta directa de una definición. Es decir, nos preocupaba la manera como las consignas podrían recuperar el proceso personal de cada alumno, a la vez que sean una contribución para que el alumno tenga otra relación con el conocimiento. En otras palabras, el debate contiene un análisis de la validez del instrumento que acompaña al enfoque de la propuesta.

La otra demanda que traemos para el análisis corresponde al pedido explícito que hace el DA2 sobre tomar una prueba escrita a sus alumnos. Recordemos que el contexto institucional en este caso es diferente, según lo expresamos en párrafos precedentes. La discusión conjunta se direccionó en la elaboración y la explicitación de criterios de corrección de ese instrumento de evaluación. Entendemos que haber subrayado en las discusiones de los encuentros la consideración de la necesidad de calificar[29], en determinados cortes evaluativos periódicos, ayudó a reacomodar la idea de calificación sin desmedro de una evaluación como proceso continuo que se da a diario con las actividades que se proponen. Para este escrito nos abocamos a las discusiones con relación al análisis de las producciones de los alumnos correspondientes a esta prueba escrita. Interrogantes del tipo ¿Responde el instrumento al proyecto de enseñanza, las expectativas y cómo lo leemos? ¿Cómo lo reconfiguramos? ¿Qué cuestiones subyacen en la elaboración de los criterios de corrección? nos guiaron en las discusiones y contribuyeron a visibilizar su coherencia con la propuesta desarrollada. Dicho de otro modo, este asunto nos pareció dar testimonio de cómo la prueba escrita en los términos discutidos y consensuados en el trabajo colaborativo, constituyó un aporte a esta adaptación de una ingeniería didáctica.

El DA2 llega al encuentro colaborativo con las producciones de los alumnos, y pide cooperación para analizarlas a la luz de los objetivos previstos conforme al armado de la evaluación. El planteo, según interpretamos bajo cierta distancia temporal, nos lleva a pensar en los sentidos en juego que el hecho alberga. Uno de ellos hace foco en cómo mirar las

[29] Calificar en el sentido de asignar el grado de suficiencia o insuficiencia de los conocimientos utilizados en la prueba escrita.

producciones de los alumnos y analizar los avances de sus aprendizajes, dado que se trata de una propuesta constructiva. Otro sentido está vinculado con la posibilidad que una ID se cristalice en un aula común en función de sus peculiaridades. Los debates, aunque trataron la validez del instrumento, en esencia van más allá, pues concernieron a la validez de la propuesta. En ese sentido nos parece que el desarrollo de la propuesta se consolidó en los progresos de aprendizajes plasmados en las producciones de los alumnos. Dicha afirmación también deviene de un largo recorrido de vivencias en encuentros colaborativos que cierran una etapa para el DA2 quien, luego de tres años, toma la iniciativa de llevar la propuesta a sus aulas. Más aún, de alguna manera las discusiones a raíz de esta prueba escrita, conllevaron una evaluación del funcionamiento de la propuesta adaptada que involucró a todos los actores de este colectivo.

Como síntesis, la problemática de la evaluación de los conocimientos producidos, a partir del desarrollo de la adaptación colaborativa, se hizo presente como demandas que los DA trajeron a la mesa de trabajo. Abordarla nos llevó a nutrir las discusiones y así avizorar y atrapar otras dimensiones que ayudaron a desmenuzar la complejidad del sentido de la evaluación a la luz de un proceso constructivo. En tal sentido, nos permitimos hacer algunas reflexiones de distinto tenor. Reflexiones que traen a escena las relaciones entre problema-conocimiento, que se movilizaron, por ejemplo, en la selección y armado de las consignas del instrumento. Reflexiones también, de orden epistemológico-cognitivo-didáctico que se jugaron en la vigilancia de una ID que se está adaptando. Reflexiones, por último, que atañen a las relaciones imbricadas en la triada problema-conocimiento-aulas que surgieron cuando se consideró la potencialidad de la propuesta desarrollada. Estas ideas explicitadas engloban los tres planos distinguidos anteriormente, del aprendizaje, la enseñanza y el trabajo colaborativo. Cabe aclarar que aun cuando los debates van más allá de estas aulas, enfatizamos en todo momento el carácter situado de las decisiones acordadas que se pone de manifiesto en el proceso cíclico de la adaptación.

Desde una mirada en términos de IC, interpretamos que, al asumir el desafío de abordar la evaluación, una cierta permeabilidad de ambos actores, los DI y los DA, se pone en juego. La necesidad de los DA de evaluar los avances de los aprendizajes de sus alumnos, en los plazos requeridos por el sistema escolar, se combina con la intención de los DI de acomodar ciertos aspectos de una ingeniería didáctica para que esta resulte un recurso genuino en la enseñanza común y con el cuidado de no dejar “en la sombra otros elementos que también son pertinentes para la enseñanza” (Perrin-Glorian, 2014, p. 26). Así, tensiones entre las prácticas habituales de evaluación, los aspectos constitutivos de los objetos matemáticos a aprender y la perspectiva constructiva se dan lugar en los debates de los espacios conjuntos. Esas tensiones conllevan una actitud de escucha por parte del DI, al propiciar el tratamiento de la cuestión que también se enlaza con la oportunidad de hacer un balance del recorrido del trabajo de tantos años, a partir de organizar/pensar dispositivos para captar esa información. Así, las interacciones colaborativas generadas para responder a los requerimientos se configuraban, nuevamente, en una negociación de cuidados/vigilancia de los aspectos constitutivos de la secuencia de enseñanza.

4. Reflexiones finales

Esperamos con este trabajo conjunto aportar algunas reflexiones sobre la construcción de un **puente** entre una ingeniería didáctica, producto de una investigación, y la complejidad de un aula singular. Puente entendido como posibilitador de conexiones, de nexos entre lo epistemológico, lo cognitivo y lo didáctico de la ingeniería didáctica con el contexto del aula a la que se adaptó y en la que se implementó. Puente también concebido como espacio para reflexionar, para conceptualizar junto a la perspectiva de los DA las finalidades y la naturaleza de las situaciones construidas en el marco de la ID (Barry y Saboya, 2015, p. 4). En particular, con este puente deseamos responder a interrogantes del tipo: ¿Cómo favorecer y legitimar el vínculo entre investigación y enseñanza, en relación a la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros y el álgebra?

Desentrañar aspectos tales como la relevancia de la modelización, el lugar del alumno como productor de conocimientos, son las marcas sustanciales que dan vida a esta propuesta de investigación para el aula. En este sentido creemos que lo colaborativo ha sido central para atrapar ideas que echan luz al despliegue de los constructos claves de un producto de investigación (Cid, 2015), para que resuene en la enseñanza en las aulas, con un impacto positivo en los aprendizajes. El trabajo conjunto, además, favoreció legitimar que una propuesta diferente a la habitual pueda existir en la escuela aunque su producción se originó a partir de una tesis doctoral.

Caracterizar las discusiones nos llevaron a posicionarnos en un lugar de problematización, sobre dudas e incertidumbres imbricadas en la apropiación del marco de referencia. En este proceso las ideas resuenan y conflictúan, a partir de lo que cada uno dispone sobre los objetos matemáticos, en términos de adaptaciones/acomodaciones. En el desarrollo de los encuentros de trabajo en relación al estudio del conjunto de actividades para el aula y sus fundamentos, cohabitó una idea de ruptura con la enseñanza tradicional de los números enteros. Las discusiones, reflexiones, elecciones que se dieron entre DI y DA tomaron esas experiencias que, en muchas ocasiones, traccionaron y se contrapusieron a concepciones arraigadas –necesarias de superar– para dar lugar a nuevas resignificaciones y comprensiones de la perspectiva considerada. En ese sentido, las experiencias y concepciones relativas al objeto matemático "número entero" son las bases a partir del cual se elaboraron las adaptaciones de la propuesta lo que se suma a las cuestiones que emergieron de la exploración que se iba efectuando en un contexto de apertura a otras posibilidades, con otras gafas con las cuales mirar, interpretar y analizar.

La construcción de los ejes de análisis (disposición a la deconstrucción de ideas, conjunción/enlace con el carácter situado), en términos de producción matemático-didáctica, procuraron consolidar las conceptualizaciones que sistematizan las problematizaciones que tuvieron lugar en los espacios de este grupo de trabajo colaborativo. En el desarrollo de los encuentros se fueron identificando cuestionamientos traídos, inicialmente, por los DA. Tanto el proceso de resignificación de ideas como la consideración del carácter particular/situado de este proyecto, han constituido un desafío tanto para llevar adelante el trabajo conjunto como para la escritura de este capítulo.

Asimismo, el espacio de encuentro hizo posible comprender la red de ideas involucradas en la propuesta a nivel de conocimientos provisorios, que permite armar un camino hacia la construcción del concepto de número entero. Para ello nos adentramos en un proceso de cuestionamiento de los objetos matemáticos en juego. Explorar las preguntas ¿Cómo atraviesa la provisoriedad a esos objetos? y ¿En qué sentido estamos pensando que se juega lo provisorio? nos permitió estructurar el contenido de los ejes. Particularmente, dio lugar al planteo del primero de ellos, "disposición a la deconstrucción de ideas". En ese sentido, un matiz que nos remitió a lo provisorio tiene que ver con el enfoque constructivo de la propuesta. Así, cuando se buscó identificar aspectos nodales de la misma susceptibles de dar curso a la adaptación, fuimos reconociendo conocimientos provisorios, por ejemplo, las reglas de cálculos entre sumandos y sustraendos como parte de las razones epistemológicas de la estructura creada por la autora. Otro matiz asociado a lo provisorio y más vinculado al segundo eje conjunción/enlace con lo situado, tiene que ver con la incertidumbre generada por el enfoque mismo de la enseñanza y lo producido en el aula. El trabajo conjunto de abordar la validez de las afirmaciones que surgieron, a propósito de los problemas y su gestión en el aula, nos llevó a un análisis de los alcances y puntos de apoyo de los argumentos que se pusieron en juego. De esta manera lo colaborativo otorgó legitimidad a lo provisorio imbuido en ambos ejes, y a la vez se constituyó en sostén de las prácticas de la enseñanza de esta propuesta adaptada, pues la búsqueda de argumentos para pensar intervenciones en el aula sirvió de ayuda y amplió el accionar docente. Ese análisis permitió producir lecturas interpretativas en relación a lo provisorio involucrado en cada actividad. Más aún, aportó claridad en relación a lo epistemológico y dejó visible su anclaje en lo algebraico. Es importante destacar que el carácter singular de estas reflexiones colaborativas no tiene pretensiones prescriptivas sino contribuir en el estudio de las condiciones (de una ID) para la implementación en el aula, de manera de aumentar los márgenes de maniobra de los DA en su despliegue (Perrin-Glorian y Baltar Bellemain, 2016).

El proceso cíclico en la implementación de la propuesta consolidó la elaboración del segundo eje, conjunción/enlace con el carácter situado. En ese proceso cíclico, no siempre lineal, se avanzó y se retrocedió a partir de un ir y venir de lo que anticipamos *a priori* de las clases y lo que nos devuelve lo sucedido en el aula. En los encuentros de trabajo, que en muchos casos se producían a partir de la implementación que se estaba desarrollando, aparecían inquietudes en torno a la regulación de las condiciones matemática/didácticas *a priori* con los indicadores sociales, temporales, institucionales, conceptuales que nos devolvía el aula; en torno a la interpretación de los sucesos de la clase a propósito de las elecciones efectuadas; en relación a si lo pensado previamente aportaría al funcionamiento de esta clase con estos alumnos; en torno a la vinculación de los conocimientos matemáticos con el quehacer inherente a esos objetos y la producción de estos alumnos. Los asuntos del aula nos devolvían más inquietudes que enriquecieron las discusiones, lo cual nos posibilitó dar lugar entonces a responder algunas de nuestras preocupaciones iniciales.

El análisis de los asuntos problematizadores nos permitió captar rasgos sustanciosos inmiscuidos en nuestro proceso de trabajo conjunto dejando abierto ciertos interrogantes. En ese sentido, por ejemplo, ocuparnos de la problemática de la evaluación con sus matices, también nos abrió la puerta para intentar considerarla en términos de legitimidad del trabajo conjunto llevado a cabo. Así, se desnaturaliza la prueba (entendida como evaluación), logrando profundizar el análisis de lo que se permite conocer. Una cierta relación implicada en la dupla investigación/prácticas de enseñanza entró en el análisis a propósito de esta problemática. Cuestiones de la práctica de enseñanza, muchas de las cuales vienen de posicionamientos habituales o de condicionamientos institucionales, dieron lugar a nuevas producciones. Ahondar en ese camino nos permitiría robustecer la fertilidad del trabajo conjunto para adaptar una secuencia de actividades producto de una ingeniería didáctica. ¿Qué aspectos se favorecen?

¿Cuáles quedan por develar? ¿Cómo favorecer una mirada del proceso con un instrumento que se sostiene con las normas escolares vigentes? Estas son algunas apreciaciones incipientes que quedan aún sin saldar.

Creemos que la distinción de los dos ejes de análisis nos brindó la posibilidad de tomar conciencia acerca de la complejidad que comprende una multiplicidad de factores incidentes a la hora de tomar un resultado del terreno de la investigación didáctica para su puesta en aula. El desafío de enfrentar esa cantidad de variables en un trabajo colaborativo posibilitó un cierto manejo de esa complejidad; lo colaborativo allanó el camino en términos de la construcción del puente entre la investigación y la enseñanza. El interés de pensar la enseñanza para las aulas de los DA participantes, proporcionó un carácter viable al estudio realizado y entonces ya no hay análisis hipotético, sino en acto. Los avances en este proceso de trabajo colaborativo nos muestran una vía posible para la construcción de este puente, su profundización nos moviliza a continuar en esta dirección.

Referencias

Anadón, M. (2008). La investigación llamada "cualitativa": de la dinámica de su evolución a los innegables logros y los cuestionamientos presentes. *Investigación y Educación en Enfermería*, 26(2), 198-211.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Colombia: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática: ¿que nos ofrece hoy la Didáctica de la Matemática para afrontarlos? Université Paris 7 Denis Diderot.

Barry, S. y Saboya M. (2015). Un éclairage sur l'étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques. R*echerches Qualitatives*, 34(1), 49-73. http://www.recherche-qualitative.qc.ca/documents/files/revue/edition_reguliere/numero34(1)/rq-34-1-numero-complet.pdf

Bednarz, N. (2009). Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques: Une nouvelle entrée sur la conception d'activités en mathématiques à l'intersection de pratique en classe et recherche. http://www.ardm.asso.fr/ee16/documents/cours/theme1-complet/cours-Bednarz-complet/docs-preparatoires/ConferenCIEAEM.pdf

Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement: ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. En N. Bednarz (Directora) *Recherche collaborative et pratique enseignante Regarder ensemble autrement*, (13,30), París, Francia: L'Harmattan.

Bednarz, N. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation*, 39 (1), (pp. 171-184), Armand Colin. https://www.revues.armand-colin.com/sciences-leducation/carrefours-leducation/carrefours-leducation-ndeg-39-12015/recherche-collaborative

Bednarz, N. (2017). *Analyse et diffusion: les défis de la double vraisemblance.* VIII Escuela de Didáctica de la Matemática. Neuquén, Argentina.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Brousseau, G. (1998a). Fondements et méthodes de la didactique. *Théorie des situations didactiques.* Editions: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998b). Fundamentos y métodos de la didáctica. *SERIE "B" TRABAJOS de ENSEÑANZA* Nº 5/2015. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina. https://www.famaf.unc.edu.ar/documents/902/BEns05.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'education secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux y P.L. Hennequin (eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*, 168, (pp. 239-263). París.

Chevallard, Y. (2012). ¿Cuál puede ser el valor de evaluar? Notas para desprenderse de la evaluación "como capricho y miniatura", en Fioriti - Cuesta (comp) *La evaluación como problema. Aproximaciones desde las didácticas específicas*. Ed. Miño y Dávila. Bs. As.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Editorial ICE/HORSORI, Barcelona.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín SI-IDM*, 10, 1-15.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, vol. 2, 529-542, I.C.E. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner et al. (eds.), *Difuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, vol. 1, 575-594. IUFM de l'Académie de Montpellier.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD*, 579-604. CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative: l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, 18, 77-105.

Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative: nouvelle dynamique de recherche en éducation. En Anadón, M. (Dirección) y L´Hostie, M. (Colaboradora). *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation*, 51-76.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. y Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. Revue des sciences de l'éducation, 27 (1), 33-64. https://doi.org/10.7202/000305ar

Dubet, F. (1994). Sociologie de l'expérience. Éditions du Seuil.

Fiorentini, D. (2011). Investigação em Educação Matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação. VIII Conferencia Interamenricana de Educação Matemática. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2910/1225

Fregona, D. (1996). ¿Cuál es el lugar de la didáctica de la matemática en la formación de profesores de matemática? *Primer Congreso Internacional de Profesores.* Facultad de Formación Docente. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fé. Argentina.

Fregona, D. y Orús Báguena, P. (2011). *La noción de medio en la Teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática.* Ed. libros del Zorzal, Buenos Aires.

Perrin-Glorian, M.J. (2014). Condicionamientos de funcionamiento de los docentes en el colegio secundario: lo que nos enseña el estudio de “cursos flojos”. *SERIE “B” TRABAJOS de ENSEÑANZA, Nº 4*/2014, Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina. Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona y Mabel Aguilar con la colaboración del equipo del Programa de Transformación de la Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires. https://www.famaf.unc.edu.ar/documents/903/Perrin-Glorian.pdf

Perrin-Glorian, M. J. (2019). A l’interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. *1er Congrès international de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique La TACD en questions, questions à la didactique*, Bretagne-UBO. https://www.researchgate.net/publication/336602428_A_l'interface_entre_recherche_et_enseignement_les_ingenieries_didactiques

Perrin-Glorian, M.J. y Baltar Bellemain (2016). L’ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l’enseignement et la formation des maitres. *I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática.* Brasil. https://www.researchgate.net/publication/341398185_L'INGENIERIE_DIDACTIQUE_ENTRE_RECHERCHE_ET_RESSOURCE_POUR_L'ENSEIGNEMENT_ET_LA_FORMATION_DES_MAITRES

Robert, A. y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants des mathématiques: une double approche. *La Revue Canadienne del’Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, 2(4), 505-528.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M.E., Becerril,M., García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 9-29.

Capítulo 3

La introducción escolar de los números enteros en un entorno algebraico: razones y principios que la sustentan

Eva Cid - Universidad de Zaragoza

1. Introducción

Cuando empecé, a finales de los años 70 del siglo pasado, mi andadura como profesora de Educación Secundaria, me sorprendieron las dificultades de los alumnos en los cálculos algebraicos. Cometían multitud de errores por los que yo no recordaba haber pasado a su edad y me resultaba muy difícil ponerme en su lugar y tratar de entender a qué lógica de razonamiento se debían. Hay que decir que yo era una licenciada en Matemáticas y que mi incorporación al profesorado, como la de todos los de mi generación, se produjo después de unas oposiciones en las que lo único que se evaluaba eran nuestros conocimientos matemáticos. Por consiguiente, ingresábamos en la profesión sin haber recibido ninguna formación didáctica.

Pero, no solo tenía un déficit didáctico en mi formación, también tenía un déficit matemático, a pesar de todo el bagaje cultural que me había proporcionado mi carrera. Descubrí que no era capaz de razonar de manera sensata con mis alumnos para tratar de convencerlos de que su manera de calcular no era correcta. Tuve que esforzarme bastante para entender, siquiera parcialmente, lo que pasaba. Y así, después de un tiempo de reflexión, comprendí que los alumnos suponían que la raíz y la potencia eran distributivas respecto a la suma, de ahí que escribieran $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ ó $(a+b)^2=a^2+b^2$; que suponían también que la equivalencia de fracciones se extendía al caso en el que se sumaba un mismo número a numerador y denominador, etc. Años después leí un artículo de Artigue (1990) en el que caracterizaba este tipo de comportamientos como un fenómeno de *regularización formal abusiva*.

Otro tipo de errores tenían una explicación menos evidente. Cuando mis alumnos sustituyeron una letra por su valor numérico y escribieron que $3+5x=3+5.2=8.2=16$ mis explicaciones no les convencieron. Para ellos lo lógico era operar de izquierda a derecha, era lo que habían hecho siempre en aritmética, y por lo tanto, primero se hacía la suma y después el producto. Tuve que analizar cuáles eran las reglas que yo seguía al hacer los cálculos. Comprobé que la regla que utilizaba no era, por supuesto, una regla de efectuar los cálculos de izquierda a derecha, sino que había una jerarquía en las operaciones: primero se efectuaban las potencias, después los productos y, por último, las sumas y restas, y los paréntesis se utilizaban para dar prioridad a unas operaciones frente a otras. Yo había interiorizado esas reglas sin que nadie nunca me las hubiera explicitado y, desde luego, en los textos que utilizaba en mis clases no se hablaba de la *jerarquía de las operaciones*. Ha habido que esperar hasta comienzos del siglo XXI para que los libros de texto recojan estas reglas. Esto me hizo entender que para "hacer matemáticas" yo utilizaba informaciones de las que ni siquiera era consciente y nunca había verbalizado y que esto era un problema en la enseñanza. Más tarde, leyendo a Brousseau (1988), me enteré de la distinción entre *conocimiento* y *saber* que da cuenta de ese fenómeno.

Y cuando los alumnos escribían que $x - 5 + 3 = x - 8$, ¿cómo explicarles que ese cálculo era erróneo? Naturalmente, si dábamos a *x* un valor, por ejemplo, 20, se comprobaba que $20 - 5 + 3 = 15 + 3 = 18$, mientras que $20 - 8 = 12$. Por tanto, esas expresiones no podían ser iguales. Pero este razonamiento no convencía a mis alumnos. Ellos entendían que si la primera operación no se podía hacer, pues hacían la segunda, es decir, la suma entre 5 y 3. Tampoco les afectaban mis afirmaciones de que con las restas no se podía hacer lo mismo que con las sumas porque la resta no tenía las propiedades asociativa ni conmutativa. Y cuando les decía que tenían que considerar que los números eran –5 y +3, es decir, números enteros, ¿dónde estaba el signo que indicaba la operación que había entre ellos? También aquí necesité dedicar un tiempo hasta que comprendí que en álgebra no solo se suprime el signo que indica el producto, sino también el que indica la suma. Por tanto, $x - 5 + 3 = x + (-5) + (+3)$, donde el signo que indica la operación binaria entre números enteros se suprime. Y ¿Cómo se distingue un producto de una suma? Pues escribiendo $-5 + 3$ en el primer caso y (–5)(+3) en el segundo. Tampoco hablaban de esto los textos escolares de finales del siglo XX.

Poco a poco, mis inquietudes didácticas me llevaron a leer libros y artículos que me ofrecieran soluciones y a buscarlas por mí misma trabajando en colaboración con otros colegas. Finalmente, mi interés creciente por la didáctica de las matemáticas acabó conduciéndome a una escuela de Magisterio, donde se formaba a los futuros profesores de Educación Primaria, que con los años se transformó en una Facultad de Educación que formaba también a los futuros profesores de Educación Secundaria.

Dentro ya del ámbito universitario me planteé hacer una tesis que el profesor Guy Brousseau de la Universidad de Burdeos I muy amablemente aceptó dirigir, sugiriéndome como tema el estudio de los posibles obstáculos epistemológicos en los números negativos, tema sobre el que, en aquellos momentos, había una cierta controversia en la comunidad francesa de investigadores en didáctica de las matemáticas. Y, con el tiempo, esta investigación, que se describe en parte en este capítulo y afectó también a otros aspectos de la didáctica de los números negativos, terminó acercándome a la problemática que plantea la transición escolar de la aritmética al álgebra y me volvió a conectar con mis intereses iniciales por las dificultades de los alumnos en el cálculo algebraico y la forma de ayudarles a superarlas.

2. Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos

A finales del siglo XX, las investigaciones sobre la didáctica de los números negativos se centraban en la búsqueda de un buen *modelo concreto* para la introducción escolar del número entero[1]. Existía, por supuesto, un número significativo de investigaciones[2] que ponían de manifiesto las dificultades y errores de los alumnos en tareas que involucraban números negativos, o que proponían otras introducciones del número negativo que no se basaba en modelos concretos, pero la idea dominante era que las dificultades de los alumnos se debían a que no se habían utilizado adecuadamente los modelos concretos para poner de manifiesto la estructura algebraica de Z . En este sentido, un gran número de publicaciones se refería a nuevos modelos concretos o a nuevas maneras de usar en el aula los ya conocidos.

De hecho, dada la proliferación de modelos concretos, Janviér (1983) propuso una clasificación de dichos modelos que con algunas modificaciones (Cid, 2002) es la siguiente:

Modelo de neutralización. Se basa en las acciones que se pueden ejercer sobre las cantidades de una magnitud con dos sentidos que se neutralizan entre sí: deudas y haberes, pérdidas y ganancias, entradas y salidas de un recinto o de un medio de locomoción, cargas eléctricas positivas o negativas, puntuaciones positivas o negativas, operadores aditivos o sustractivos, fichas o bloques de dos colores que se neutralizan, etc.

En este modelo la suma se interpreta como una reunión o añadido de cantidades de magnitud de uno u otro sentido, seguida del correspondiente proceso de neutralización,

[1] Momento en el que la institución escolar afronta por primera vez la enseñanza de los números positivos y negativos y de las reglas de los signos.

[2] En Cid (2004, 2015) puede encontrarse una relación pormenorizada de las publicaciones sobre propuestas de enseñanza de los números negativos.

mientras que la resta, se relaciona con la acción de quitar o separar. Si en el minuendo no hay suficientes objetos o cantidad de magnitud de un mismo sentido para poder ejercer la acción de quitar se añaden parejas de objetos o de cantidades de magnitud iguales con los dos sentidos. Los signos + y – se utilizan por tanto para indicar uno u otro de los sentidos de la magnitud y también para indicar las acciones de añadir (reunir) o quitar (separar), como es habitual en aritmética.

Más difícil resulta la justificación del orden y el producto de enteros. De hecho, muchas de las propuestas de utilización del modelo concreto se referían únicamente a la introducción de la estructura aditiva de los números enteros. En el caso del orden, es necesario introducir una condición adicional, la de "mejor situación" (–2>–6 porque el que tiene una deuda de 2€ o una puntuación negativa de 2 puntos está en mejor situación que el que tiene una deuda de 6€ o una puntuación negativa de 6 puntos), y en el caso del producto es necesario interpretar que uno de los signos se refiere a operación binaria y el otro al sentido de la magnitud: (–3)(–2) significa que tengo que quitar tres veces la cantidad de magnitud representado por –2.

Modelo de desplazamiento. Se basa en el desplazamiento a lo largo de un camino en el que la posición considerada como inicial no se corresponde con el principio o el final del camino: personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino formado por casillas adosadas, termómetros o escalas de diversas magnitudes, ascensores o escaleras que bajan a los garajes o suben a los pisos, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, años antes y después de Cristo, desplazamientos representados por vectores unidireccionales que actúan sobre posiciones de la recta numérica, etc. Las distintas posiciones se numeran a partir de la posición inicial, añadiendo el signo + ó – según que el sentido de recorrido sea uno u otro. También se cuantifican los desplazamientos, indicando con los signos + o – si se producen en uno u otro sentido de recorrido. En este modelo, los números enteros pueden indicar tanto posiciones como desplazamientos.

La suma de enteros se justifica, bien como un desplazamiento aplicado a una posición para obtener otra posición, bien como una composición de desplazamientos que da como resultado otro desplazamiento, bien como una composición de desplazamientos que se aplica a la casilla cero dando como resultado una nueva posición, mientras que la resta significa la operación inversa de cualquiera de las anteriores.

El orden se establece imponiendo que el sentido de recorrido que se asocia con el signo + es prioritario e induce una relación de orden entre posiciones (una posición es menor que otra porque "está antes" cuando se recorre el camino siguiendo el sentido positivo). El producto se interpreta como composición repetida de desplazamientos para obtener un desplazamiento resultante al que se le cambia o no el sentido según que el entero que indica la repetición sea negativo o positivo. También puede interpretarse que el desplazamiento resultante se aplica a la posición cero y, en ese caso, representa la nueva posición. Algunos autores incorporan al modelo el concepto de velocidad positiva o negativa y tiempo pasado y futuro.

La introducción escolar de los números enteros por medio de modelos concretos se sostenía en la supuesta similitud de la estructura algebraica de Z con otros sistemas de objetos que se consideraban familiares a los alumnos o más capaces de despertar su interés. Se suponía que éstos, a partir de su experiencia con el modelo, podían conjeturar o, al menos, dar sentido a sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, por analogía, extenderlas al conjunto de los números enteros.

Pero, ya en los años de mayor proliferación de las propuestas de enseñanza basadas en modelos concretos, se oían voces críticas. Algunas se referían a que la supuesta familiaridad de los alumnos con los modelos concretos no era tal, sino que exigía un trabajo de aula adicional para conseguir que el alumno entendiera el funcionamiento del modelo concreto antes de pasar a establecer su analogía con el conjunto Z. Otras indicaban que los modelos concretos justificaban eficazmente la suma de enteros, pero en menor medida la resta y con bastantes dificultades el orden y el producto de enteros. Pero las voces más discrepantes con la utilización de los modelos concretos se encontraban entre los que habían investigado obstáculos epistemológicos en la historia del número negativo.

3. La noción de obstáculo epistemológico

Según Brousseau (1983), en la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones en las que ésta interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas, un subconjunto de situaciones. Y esa elección puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos y saberes[3] referentes a la noción matemática que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones, pero que no son

[3] El *conocimiento* es aquella información que permite a un sujeto, enfrentado a una situación, elegir una estrategia de resolución en lugar de otra, siempre que esa posibilidad de elección exista y no sea aleatoria. En cambio, el *saber* es el instrumento cultural de identificación y de gestión social del conocimiento. El conocimiento es un medio de decisión al nivel de la acción y es propio del sujeto, mientras que el saber es un instrumento al nivel de la cultura, de la comunicación, que vive en determinadas instituciones y se manifiesta a través de los textos que se escriben en su seno. (Brousseau, 1988; Margolinas, 2014).

eficaces e, incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones. De manera que la ampliación del campo de problemas va a obligar a la concepción a evolucionar, modificando alguno de sus aspectos, para adaptarse a las nuevas situaciones.

Pero, podríamos encontrarnos con una concepción a la que ya no fuera posible hacerla evolucionar para que asumiera nuevos campos de problemas, en cuyo caso no quedaría más alternativa que el rechazo de la concepción y su sustitución por otra. En estos casos, en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, diremos que la concepción es un obstáculo. Y esta *concepción obstáculo* (o simplemente *obstáculo*) se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes. Será indispensable identificar el obstáculo e incorporar su rechazo a la nueva concepción.

> *El error y el fracaso no tienen el papel simplificado que se quiere hacerles jugar a veces. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, tal como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. (Brousseau, 1983, p. 171).*

Atendiendo a su origen, Brousseau (1983) define los siguientes tipos de obstáculos:

- *Obstáculo ontogenético*, cuando es una consecuencia de las limitaciones propias del estado de maduración neurofisiológica del alumno. El obstáculo lo constituyen entonces determinados esquemas operatorios o modelos espontáneos que aparecen de forma natural en el curso de su desarrollo psicológico.
- *Obstáculo cultural*, cuando es consecuencia de creencias o prácticas propias de la cultura general de una sociedad.
- *Obstáculo didáctico*, cuando la concepción obstáculo se debe, únicamente, a las elecciones didácticas realizadas en el seno del sistema educativo y no es susceptible de una renegociación por parte del profesor en el marco restringido de la clase.

- *Obstáculo epistemológico*[4], cuando ese obstáculo se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época tuvo que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo.

Las nociones de concepción y de obstáculo tienen una repercusión inmediata en la práctica docente. Es importante decidir si los errores que cometen los alumnos están ligados por una determinada concepción porque eso nos proporcionará pautas de corrección más eficaces. Una concepción saca a la luz las relaciones existentes entre errores distintos y aparentemente independientes unos de otros, lo que hace concebir la esperanza de que actuando sobre la concepción, por medio de la presentación a los alumnos de un número reducido de situaciones, se pueda conseguir que los errores desaparezcan sin necesidad de emprender la tediosa tarea de corregirlos uno por uno. En otras palabras, la consideración de que distintos errores pueden ser consecuencia de una misma concepción abre la puerta a la posibilidad de erradicarlos con más éxito por medio de acciones didácticas más limitadas en el tiempo, pero más pertinentes.

También la determinación de si una concepción constituye o no un obstáculo y qué tipo de obstáculo tiene implicaciones importantes en la práctica docente. Si la concepción no es un obstáculo, el trabajo del profesor deberá centrarse en la presentación de situaciones de enseñanza que favorezcan su evolución, mientras que, si lo es, será necesario atacar esa concepción hasta conseguir que el alumno la rechace y esto último exige acciones didácticas mucho más radicales. Además, los obstáculos de origen didáctico deberían ser evitados modificando adecuadamente las condiciones de enseñanza, mientras que los de origen epistemológico son inevitables, y la acción del profesor deberá ir encaminada a promover la *ruptura epistemológica* con la concepción anterior, es decir, a crear las condiciones didácticas que permitan al alumno rechazar explícitamente el obstáculo e incorporar su rechazo a la nueva concepción.

4. La epistemología de los números negativos

Aun cuando Brousseau desarrolló sus ideas sobre los obstáculos epistemológicos en el contexto de sus investigaciones sobre los números racionales y decimales, el artículo de Glaeser (1981), hizo que fijase su atención en los números negativos. Glaeser, haciéndose eco de las ideas de

[4] La primera formulación del obstáculo epistemológico se debe a un filósofo de la ciencia: Bachelard (1938). Brousseau (1976, 1983) la hizo suya y la adaptó, defendiendo su utilidad en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.

Brousseau sobre los obstáculos epistemológicos, hizo una revisión histórica, de los números negativos descubriendo, a través de la lectura de algunas fuentes originales, que desde la primera formulación de la regla de los signos en la cultura occidental (Diofanto, siglo III d.C.), hubo que esperar hasta muy avanzado el siglo XIX para que aquellos objetos de los que hablaba Diofanto adquirieran un status como números: los números negativos.

Glaeser atribuyó este hecho a la existencia de distintos obstáculos epistemológicos que detallaba en su artículo. Ahora bien, la forma en que el autor interpretaba la noción de obstáculo epistemológico difería de la propuesta de Brousseau, hecha en 1976, por lo que este último, en un artículo publicado en 1983, la precisó con más detalle, quedando pendiente su utilización para describir la génesis y evolución histórica del número negativo, es decir, su epistemología.

La larga y conflictiva historia de los números negativos sorprendió a la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas por cuanto en los textos de historia de las matemáticas de aquellos años apenas había menciones a las dificultades que tuvieron los matemáticos para darles sentido y para incluirlos en su corpus teórico. De ahí que el artículo de Glaeser siga siendo referencia obligada para cualquier investigador de la historia o la didáctica de los números negativos.

Una de sus consecuencias es el interés que se despertó por investigar la epistemología de los números negativos (Lizcano, 1993; Schubring, 1986, 2014; Glière, 2007; entre otros), aun cuando, en general, no se estudiaba en términos de obstáculos epistemológicos. En particular, Lizcano propone que se utilicen los términos *negatividad* y *formas de negatividad* para indicar aquellas nociones que habitualmente se consideran antecedentes históricos del número negativo, pero que, en su momento, no fueron entendidas como números, ni pueden interpretarse como un proceso continuo que desemboca, inevitablemente en el número negativo actual.

Otra consecuencia fue su influencia en las publicaciones sobre didáctica de los números negativos, dando lugar a investigaciones sobre las concepciones de los alumnos y a críticas importantes respecto a la pertinencia de utilizar modelos concretos para enseñar el número negativo. En particular, tanto Glaeser (1981) como Brousseau (1983) consideraban que la introducción escolar mediante modelos concretos afianzaba una concepción del número negativo que históricamente se había revelado como un obstáculo para llegar al concepto actual. Sin embargo, aunque se generalizó la referencia a los obstáculos epistemológicos en los artículos sobre propuestas didácticas, éstas siguieron planteando mayoritariamente el uso de modelos concretos.

5. Los obstáculos epistemológicos en la negatividad matemática

El estudio pormenorizado de las obras de algunos matemáticos relevantes en la historia de las matemáticas permitió a Cid (2000, 2015) caracterizar, de acuerdo con la definición de obstáculo propuesta por Brousseau, dos concepciones obstáculo en la epistemología de la negatividad matemática:

Primer obstáculo epistemológico: los sustraendos. Es una concepción que se desarrolla a lo largo de muchos siglos, prácticamente desde el siglo III d.C. hasta el siglo XVII. Tiene su origen en la *Arithmetica* de Diofanto que es una colección de problemas aritméticos resueltos en los que se buscan números que cumplen ciertas condiciones expresadas en términos de operaciones aritméticas. Los datos son números naturales abstractos, es decir, no contextualizados, lo mismo que las soluciones, aun cuando en este último caso pueden ser también razones de números naturales[5].

Es aquí donde aparece por primera vez la formulación de la regla de los signos multiplicativa: *Falta multiplicada por falta hace presencia, falta multiplicada por presencia hace falta.* (Citado por Lizcano, 1993, p. 236).

Y ¿Por qué, en un entorno de resolución de problemas aritméticos, necesita Diofanto enunciar la regla de los signos? Pues porque el método de resolución de esos problemas es algebraico, es decir, está basado en la existencia de una incógnita y el planteamiento de la ecuación que permite encontrar su valor numérico. De hecho, se considera que la *Arithmetica* es el texto fundacional del álgebra. Eso sí, de un álgebra que es una mera técnica de resolución de ecuaciones al servicio de la aritmética y cuya justificación se basa en las propiedades de las operaciones aritméticas y en la obtención de resultados válidos en el ámbito aritmético.

La *Arithmetica* es una obra que corresponde al periodo alejandrino tardío de la cultura griega y está muy influenciada por las culturas de Egipto y de Oriente Medio. Representa una

[5] Un ejemplo del tipo de problemas que resolvía Diofanto puede ser el siguiente: *Encontrar dos números tales que su suma y su producto sean números dados*. Una vez enunciado el problema, imponía las condiciones que garantizaban la existencia de una solución en términos de números naturales o razones de naturales: *No obstante, es necesario que el cuadrado de la semisuma de los números a encontrar exceda en un cuadrado el producto de dichos números*. Finalmente, fijaba los datos: *Propongámonos pues que la suma de los números forma 20 unidades y que su producto forme 96 unidades*, y solucionaba el problema mediante métodos algebraicos (Ver Eecke, 1959, p. 36-38).

forma funcional de organizar el saber, una organización basada en el uso y validada por él, típica de estas últimas civilizaciones. Estamos muy lejos del punto de vista axiomático-deductivo y geométrico de Euclides.

En este contexto, la presencia de la incógnita obliga a efectuar operaciones cuyos términos son a su vez operaciones indicadas. Por ejemplo, la necesidad de simplificar la expresión $10 - 4(x - 3)$ exige multiplicar un número por una diferencia y efectuar una diferencia cuando el segundo término es, a su vez, una diferencia. Es decir, la existencia de la incógnita obliga a trabajar con operaciones cuyos términos son, a su vez, operaciones indicadas[6]. Y, en la práctica, esto se convierte en un cálculo entre sumandos y sustraendos. La resolución algebraica transforma un cálculo entre números sin determinación en un cálculo entre números que suman o restan. De ahí, la necesidad de definir cómo se multiplica un sumando (una "presencia") por un sustraendo (una "falta") o dos sustraendos.

Ahora bien, el hecho de que Diofanto desarrolle un cálculo con sumandos y sustraendos, no significa que los acepte como números. Todo sustraendo tiene que ir precedido por un minuendo mayor o igual que él, por un minuendo del que el sustraendo se pueda restar. Desde el principio identifica los sumandos con los números naturales, pero no acepta los sustraendos aislados como soluciones de las ecuaciones, y menos como números. La razón es que no tiene ninguna necesidad de aceptarlos como tales. Los sustraendos son elementos intermedios del cálculo que le ayudan a encontrar la solución, pero ésta tiene que tener sentido en el ámbito aritmético y en el pensamiento griego un sustraendo aislado no puede tenerlo.

Según Lizcano (1993), en la cultura griega los conceptos, en particular los conceptos matemáticos, se obtienen por un proceso de "abstracción" del mundo sensible. Este proceso consiste en abstraer, separar determinadas características de los objetos o grupos de objetos. De ahí que los números naturales o razones de números naturales se consideren abstracciones del mundo sensible que indican la pluralidad de objetos o el "tamaño" de las cantidades de magnitud y cuyas operaciones y propiedades quedan validadas por el comportamiento de los conjuntos de objetos o de las cantidades de magnitud cuando se los somete a determinadas acciones físicas: añadir, reunir, sustraer, separar, reiterar, repartir, etc. La aceptación de los sustraendos como números rompería con este sistema de validación. Ahora sumar ya no siempre significaría aumentar, ni restar significaría siempre disminuir, ni dividir, repartir, etc.

[6] El álgebra de Diofanto era de tipo retórico, es decir, utilizaba pocos símbolos y los razonamientos y operaciones se expresaban en lenguaje natural, pero se enfrentaba a los mismos cálculos algebraicos que actualmente se expresan en lenguaje simbólico.

Es además una visión estática del mundo sensible en la que lo “normal” es el reposo y las cantidades de magnitud se miden sobre objetos inmóviles. Lo opuesto al “ser” es el “no ser”, no se concibe una oposición dinámica entre lo que puede “ser de un modo” o “ser de otro modo”. En estas condiciones, “sustraer” significa quitar algo que previamente existe para dejar al descubierto la “diferencia”. Una diferencia negativa no puede ser asumida porque representaría la acción de “sustraer de donde no hay” y la diferencia, resultado de esa operación imposible, pertenecería al ámbito de “lo que no es” o de lo que es “menos que nada”, lo que también es inadmisible para el pensamiento griego (Lizcano, 1993).

Estamos por tanto ante una concepción que principalmente se caracteriza por:

- La existencia de una negatividad matemática expresada en términos de reglas de cálculo con sumandos y sustraendos, donde los sustraendos son elementos intermedios del cálculo algebraico, que deben desaparecer en las soluciones finales de los problemas.
- La negativa a aceptar los sustraendos como números, basada en la interpretación del número y sus operaciones como abstracciones de un mundo sensible en el que no se concibe más oposición que la de “ser” o “no ser”.
- La negativa a aceptar los sustraendos como soluciones de las ecuaciones, basada en la interpretación del álgebra como una prolongación de la aritmética, como una *aritmética generalizada* en la que los objetos algebraicos tienen que tener sentido en el ámbito aritmético.

Estas características permanecerán durante muchos siglos, a pesar de que otros aspectos de la concepción evolucionan a lo largo del tiempo:

- Los números siguen siendo números sin determinación, pero la consideración de número se va ampliando a los racionales y, más tardíamente, a los irracionales.
- El álgebra se convierte en un objeto de estudio en sí misma (Al-Khwarizmi, *Hisab al-jabr wa’l-muqabalah*, siglo IX) y desemboca en una teoría general de ecuaciones, una vez encontradas las resolventes de las ecuaciones de tercer y cuarto grado (Cardano, *Ars Magna*, 1545) y ante los intentos infructuosos por encontrar la resolvente de la ecuación de quinto grado. Finalmente, los problemas que afronta el álgebra ya no están totalmente condicionados por la aritmética, pero sigue interpretándose como una *aritmética generalizada*.

- El álgebra retórica inicial se va transformando lentamente en un álgebra simbólica: Chuquet, en 1484, introduce la notación de los exponentes; Rudolff, en 1525, propone el símbolo de la raíz; Stifel, en 1544, populariza lo signos + y –, y utiliza la letra para indicar la incógnita; Recorde, en 1557, introduce el signo =; Vieta, en 1591, propone utilizar las letras, no solo para indicar incógnitas, sino también para denotar parámetros, lo que le permite expresar en forma genérica las ecuaciones; etc. (Kline, 1992).

Pero a medida que el álgebra se desarrolla y evoluciona hacia una teoría de ecuaciones, se va haciendo más evidente la necesidad de admitir las soluciones negativas e imaginarias. Es entonces cuando la existencia del obstáculo epistemológico se pone de manifiesto. Cuando la comunidad matemática sigue negándose a aceptar las soluciones negativas e imaginarias, a pesar de que la no aceptación de esas soluciones está impidiendo el establecimiento de una teoría de ecuaciones en toda su generalidad, teoría que está en el punto de mira de los matemáticos de la última época de la concepción y forma parte de la problemática que están interesados en abordar. Y si ocasionalmente las acepta, siente la necesidad de defenderse de las objeciones que se puedan plantear llamándolas soluciones *falsas*, *absurdas*, *ficticias, imaginarias, sofísticas*, etc.

Segundo obstáculo epistemológico: las cantidades negativas. En esta concepción, que se desarrolla entre los siglos XVIII y buena parte del siglo XIX, los sustraendos son asumidos como soluciones de las ecuaciones y como puntos o segmentos orientados de la recta real, pero se desata una importante polémica acerca de su naturaleza.

El contexto científico es ahora muy diferente. La distinción que establece Vieta entre *logística speciosa* y *logística numerosa* que le permite separar un álgebra que opera con *especies* o *formas de cosas* de un álgebra que opera con números (Kline, 1992) abre la puerta a la modelización algebraica de la geometría (Fermat, 1637; Descartes, *La Géométrie*, 1637*) y* del cálculo infinitesimal (Newton, los *Principia*, 1687; Leibniz, *Acta Eruditorum*, 1684, 1686). Esto conlleva el desarrollo del concepto de abscisa y la construcción de la recta real. Los sustraendos ya no solo aparecen como soluciones de las ecuaciones, sino que empiezan a entenderse como puntos de la recta real o, al menos, como representaciones de segmentos orientados con origen en el cero.

Además, la aparición de magnitudes físicas: fuerza, velocidad, aceleración, etc., cuya representación cuantitativa exige no sólo un número, sino también una referencia a una dirección y un sentido, lo que terminaría conduciendo a las magnitudes vectoriales, cambia la manera de interpretar el mundo sensible. Ya no es un mundo en reposo, sino un mundo dinámico que acepta la existencia de magnitudes con dirección y sentido, y la incorporación a la medida de referencias a dichos aspectos. También contribuye a ello, la aparición de escalas para medir las temperaturas, donde el cero ya no significa ausencia de cantidad de magnitud, sino que es un cero convencional.

Estos cambios facilitan la consideración de los sustraendos como *cantidades negativas* porque pueden ser explicados en términos de medidas de cantidades de magnitud con dos sentidos (deudas y haberes, etc.) o de magnitudes relativas (temperaturas, etc.). El cero absoluto de la concepción anterior se transforma en un cero origen a partir del cual se generan los dos sentidos de la magnitud o en un cero que representa una cantidad de magnitud convencional, lo que puede dar sentido a las cantidades menores que cero. Aparecen también las diferencias orientadas, entendidas como resultado de la acción de comparar, lo que permite interpretar una diferencia negativa como el resultado de comparar dos medidas cuando la primera es menor que la segunda.

Se establecen así las *cantidades negativas*, tanto racionales como irracionales, que junto con las *cantidades positivas*, reciben el nombre de *cantidades reales* para diferenciarlas de las *cantidades imaginarias* que no pueden interpretarse como medidas ni como puntos de la recta real. Ahora las cantidades negativas se aceptan como soluciones de las ecuaciones, pero eso no quiere decir que se acepten como números. Las cantidades positivas pueden reducirse a medidas sin determinación, es decir, a números, pero eso no sucede con las cantidades negativas. Cauchy lo explica muy bien:

> *Utilizaremos siempre la denominación de número con el sentido que tiene en aritmética, haciendo nacer los números de la medida absoluta de las magnitudes y aplicaremos la denominación de cantidad a las cantidades reales positivas o negativas, es decir, a los números precedidos de los signos + o –. Además, nosotros interpretamos las cantidades como destinadas a expresar crecimientos o disminuciones; de suerte que una magnitud será simplemente representada por un número si nos contentamos con compararla con otra magnitud de la misma especie tomada como unidad, y por ese número precedido de un signo + o – si se la considera como debiendo servir al crecimiento o disminución de una magnitud de la misma especie.* (Cauchy, *Cours d'Analyse*, 1821).

Es decir, las cantidades positivas y negativas siguen siendo los sumandos y sustraendos de la concepción anterior, pero ahora su estatus ha cambiado: reciben un nombre y tienen sentido como objetos aislados, aunque su consideración como números sigue en entredicho.

Consideramos que las características principales de esta concepción son:

- La existencia de una negatividad matemática expresada en términos de cantidades negativas que actúan como elementos intermedios del cálculo algebraico, pero que también se aceptan como soluciones de las ecuaciones y como puntos o segmentos orientados de la recta real, aunque su aceptación como números sigue generando una fuerte controversia.
- El álgebra entendida como un dominio propio de las matemáticas que trasciende la aritmética, pero que le debe a esta última los principios en los que se basa y el método de validación de sus resultados.
- Una visión dinámica de la magnitud que permite incorporar a la medida referencias a la dirección y el sentido, pero que sigue considerando el número como resultado de la medida de cantidades de magnitud en reposo y no puede concebirlo de otro modo. Esto liga la definición del número y el establecimiento de sus operaciones y propiedades a evidencias observadas en el mundo de los sentidos a las que no se puede objetar.
- La exigencia de una fundamentación lógico-deductiva de los objetos algebraicos que contrasta con la presentación justificada por el uso, propia de la concepción anterior.

Esta última exigencia, que en la concepción anterior apenas existía, obliga a recurrir a una fundamentación lógico-deductiva basada, bien en la geometría euclídea, bien en las acciones físicas sobre cantidades de magnitud que dan sentido a las operaciones aritméticas entre medidas, bien en la necesidad de conservar las propiedades de las operaciones aritméticas cuando se extienden a nuevos objetos algebraicos (lo que Hankel (1867) llamó "el principio de permanencia de las leyes formales"). Pero ninguno de estos modos de validación es satisfactorio. El recurso a la geometría euclídea difícilmente permite justificar las cantidades negativas y los otros dos modos de justificación son contradictorios entre sí, sobre todo en lo que se refiere a la estructura ordinal y multiplicativa de los números reales.

En efecto, en lo que se refiere al orden, el principio de permanencia de las leyes formales exige un orden total compatible con las operaciones de suma y producto, mientras que el recurso a las magnitudes con dos sentidos promueve órdenes parciales (uno en el sentido positivo y otro en el sentido negativo) que obstaculizan la aceptación del orden total. En cuanto al producto, desde el punto de vista del cálculo algebraico interesa concebirlo como una operación interna, pero la justificación a través de magnitudes relativas o con dos sentidos conduce, más bien a una operación externa en la que uno de los términos hace una función de escalar. En el caso de las magnitudes relativas aparece también una consideración de la suma como una operación externa compuesta de una posición y un desplazamiento.

Los matemáticos de la época se debaten entre dos obligaciones. Por un lado, la de justificar la estructura de cuerpo conmutativo totalmente ordenado propia de los números reales, derivada de la aplicación del principio de permanencia de las leyes formales y necesaria para fundamentar las técnicas de cálculo algebraico. Por otro lado, la obligación de justificar dicha estructura utilizando para ello referencias al comportamiento de las magnitudes con dos sentidos o magnitudes relativas que queda mucho mejor reflejado en una estructura de espacio vectorial unidimensional o de espacio afín unidimensional (Cid, 2002). Aunque, por supuesto estas estructuras son isomorfas al cuerpo de los números reales, poner de manifiesto la estructura vectorial o afín de $\mathbb{R}$ no es el mejor camino para justificar una estructura que contiene dos operaciones internas y un orden total compatible con ellas.

En esta concepción, las continuas referencias a la medida y al comportamiento de las magnitudes siguen generando profundas controversias en torno a la fundamentación de las cantidades negativas. Este segundo obstáculo epistemológico se supera cuando finalmente se asume:

- Un álgebra totalmente independiente de la aritmética en la que las letras se refieren a objetos abstractos que no tienen por qué ser números y en la que se definen estructuras algebraicas que no tienen por qué responder a las estructuras algebraicas propias de la aritmética (Peacock, *A treatise on algebra*, 1830), lo que conduce al desarrollo del álgebra abstracta y a la proliferación de diversas estructuras algebraicas.
- Una definición axiomática de los números (Hankel, *Vorlesungen uber die complexen Zahlen und ihre Functionen,* 1867), independiente de los procesos de medida y de la geometría euclídea, y sin referencias al mundo sensible, lo que permite la fundamentación aritmética y algebraica del análisis y la geometría, abandonando el recurso a la *intuición geométrica*.

La decisión final fue aceptar como números todos aquellos elementos que se necesitan para completar $\mathbb{Q}$ –en el sentido de que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}$ acotado superiormente tenga supremo o que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ tenga límite–, lo que conduce al conjunto $\mathbb{R}$. Además, se consideraron también números todos aquellos elementos que pertenecen a la clausura algebraica de $\mathbb{R}$**,** lo que da lugar al conjunto $\mathbb{C}$. De esta manera, con el establecimiento de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, se cubrieron las necesidades de las matemáticas de finales del siglo XIX y los números positivos y negativos quedaron subsumidos en los distintos conjuntos numéricos.

6. Los obstáculos epistemológicos en el aula

La determinación de obstáculos epistemológicos en la historia de las matemáticas interesa a la didáctica si se constata la pervivencia de dichos obstáculos en el proceso de enseñanza, es decir, si podemos demostrar o, al menos, mostrar indicios relevantes de la existencia en las aulas de concepciones obstáculo que tienen puntos en común con las encontradas en la epistemología del número negativo.

En este sentido, conviene recordar los efectos del fenómeno de *inversión del proceso de modelización matemática* (Cid, 2002) que se produce en la enseñanza de las matemáticas elementales. Actualmente, las matemáticas se utilizan para modelizar otras muchas ciencias. En el proceso de modelización matemática el objeto de estudio es un cierto sistema físico o social acerca del cual se quiere obtener información, utilizando para ello el modelo matemático que lo representa. Pero en la enseñanza de la aritmética elemental en la educación infantil y primaria esta relación entre objeto de estudio y modelo se invierte: el sistema que se modeliza es la noción aritmética (la suma y resta de los números naturales, por ejemplo) y el sistema físico (las situaciones de "añadir o quitar", por ejemplo) es el dispositivo mediador, el modelo, que permite obtener información y justificar ante los escolares el comportamiento de la noción matemática.

En estas condiciones las nociones aritméticas quedan intrínsecamente ligadas al sistema físico que las modeliza y a las experiencias sensoriales de los niños. Por ejemplo, para un alumno de primaria "sumar" y "aumentar" es lo mismo porque es inconcebible que después de un proceso de "añadir" o de "reunir" se pueda producir una "disminución". Y gracias a este conocimiento ha podido resolver con éxito muchos problemas aritméticos. Resulta, por tanto, evidente que esta concepción del número, adquirida a lo largo de muchos años de enseñanza y de percepciones personales, va a convertirse en un obstáculo cuando se inicie la enseñanza del número entero, obstáculo que tiene algunos puntos en común con el primer obstáculo epistemológico encontrado en la historia de los números negativos y que es inevitable, dado que la enseñanza de la aritmética elemental no se puede afrontar de otra manera. Es, por consiguiente, un obstáculo constitutivo del saber, que no se puede soslayar y que debe superarse.

Podríamos pensar ahora que la introducción escolar del número entero mediante modelos concretos ayudaría a superar dicho obstáculo, pero eso es discutible. En primer lugar, dicha justificación sigue las pautas de inversión del proceso de modelización propio de la aritmética, ligando el significado, propiedades y operaciones del número entero a las acciones físicas que se puedan ejercer sobre cantidades de magnitudes relativas o con dos sentidos, lo que refuerza la consideración del número como medida y las formas de hacer propias de la aritmética elemental. Además, el comportamiento de las magnitudes relativas o con dos sentidos justifica con dificultad la estructura ordinal y multiplicativa de los números enteros porque, como ya hemos comentado anteriormente, tiene una mayor analogía con las estructuras de espacio vectorial o afín. De hecho la consideración de la cantidad negativa fue un segundo obstáculo epistemológico a superar para llegar a los actuales conjuntos numéricos.

Naturalmente, no todas las características de los obstáculos epistemológicos descritos en la historia van a encontrarse en las concepciones de los alumnos. Por ejemplo, es difícil que las preocupaciones de los matemáticos por la fundamentación lógica de los números negativos formen parte de las concepciones de los alumnos. A cambio, en las producciones de los alumnos nos encontramos con un rosario de errores que indican la pervivencia de la concepción sobre los números adquirida en la educación primaria y el intento de encajar en ella el número entero sin necesidad de modificarla, ni mucho menos de rechazarla.

Entre las causas que están detrás de muchos de esos errores[7] podemos reseñar las siguientes:

- No se tiene en cuenta la polisemia[8] del signo –. Los números enteros se manejan como si fueran números naturales y el signo – se interpreta sólo como indicador de una resta entre números naturales. Si la resta no es efectuable en $\mathbb{N}$, se invierten los términos de la resta, o bien el signo – se ignora o se transforma.
- Se utilizan indebidamente los modelos concretos, lo que da lugar a errores al efectuar las operaciones. Por ejemplo, “7 – (–2) es igual a 5 porque restar es ir hacia la izquierda”.

[7] En Cid (2004, 2015) puede encontrarse una relación detallada de las investigaciones sobre dificultades y errores de los alumnos en la resolución de tareas en las que intervienen números negativos.

[8] El signo – puede tener tres significados: indica una operación binaria (significado *operativo binario*), o bien que un número es negativo (significado *predicativo*), o bien que un término es opuesto a otro (significado *operativo unario*).

- Se confunden las reglas de los signos aditivas con las reglas de los signos multiplicativas y se gestionan con dificultad expresiones en las que aparecen dos signos – sucesivos.
- Se reconoce que los números enteros negativos son menores que los positivos, pero la relación de orden entre los enteros negativos se establece en el mismo sentido que la de sus valores absolutos, es decir, aparecen dos órdenes parciales sobre la recta real, en lugar de un orden total, ligados al sentido de recorrido que se sigue al dibujar la recta.
- Se evitan los números negativos aislados: datos, resultados de un cálculo, soluciones de una ecuación, o que figuran al comienzo de una expresión algebraica o numérica. Frecuentemente, la manera de evitarlos consiste en transformarlos en números positivos o en expresar verbalmente su situación en el contexto del problema.
- No se aceptan respuestas que contradigan la relación existente entre las operaciones aritméticas y las acciones ejercidas sobre las cantidades de magnitud. Por ejemplo, "¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 de 2?" "No, porque la suma tiene que ser mayor".
- No se concibe que las letras puedan tomar valores negativos. Por ejemplo, "¿Qué tipo de número será $\sqrt{(-x)}$?" "Será un número imaginario".
- Se prefieren los métodos de resolución en $\mathbb{N}$, aun cuando una resolución en $\mathbb{Z}$ sea más adecuada para obtener la respuesta a un problema de una manera más económica.

Por todo lo dicho, entendemos que hay indicios claros que permiten suponer que la comprensión y manejo del número entero se va a ver obstaculizado por las concepciones de los alumnos sobre el número que les han permitido tener éxito en la resolución de tareas aritméticas elementales o por concepciones adquiridas como consecuencia de una enseñanza del número entero basada en modelos concretos.

7. El número entero en los textos escolares

A continuación, analizaremos cómo afrontan los libros de texto[9] la enseñanza del número entero y, en particular el rechazo y superación del obstáculo epistemológico. Para ello, atendemos a los siguientes aspectos:

[9] Nos referimos a textos escolares españoles de Matemáticas de 1º de ESO (Educación Secundaria Obligatoria), curso que corresponde a alumnos de 12-13 años. Las editoriales consultadas son Anaya, Bruño, Edelvives, Oxford, Santillana, SM y Vicens-Vives, todas ellas con una fuerte implantación en el sistema educativo español.

- *La razón de ser de los números enteros*. La epistemología nos muestra que la razón de ser de los números negativos y positivos es el cálculo algebraico. Es en el entorno de un cálculo en el que algunas de las operaciones no son efectuables donde se pone de manifiesto la necesidad de sustituir las operaciones entre números sin determinación por las operaciones entre sumandos y sustraendos, lo que da lugar a la primera forma de negatividad.

Sin embargo, en los textos escolares, el número entero, se introduce en el ámbito aritmético y utilizando con más o menos énfasis la referencia a los modelos concretos. La razón que se ofrece a los alumnos para introducir este nuevo objeto matemático es la necesidad de representar temperaturas, transacciones económicas, altitudes, ascensores o fechas. Pero esa necesidad es ficticia. Se puede hablar, y de hecho se habla, de temperaturas por encima y debajo de cero, de deudas y haberes o de pérdidas y ganancias, de altitudes por encima o debajo del nivel del mar, de ascensores que suben a los pisos o bajan a los garajes, o de años antes o después de Cristo. Únicamente la aparición de los termómetros digitales ha fomentado recientemente el uso de números negativos para indicar las temperaturas por debajo de cero.

Podría pensarse que, aunque la referencia al sentido de la magnitud puede expresarse en el lenguaje común, esa simbolización es necesaria para resolver problemas aritméticos en los que intervienen magnitudes relativas o con dos sentidos. Los libros de texto así lo indican cuando dicen que estos nuevos números permiten resolver problemas como los siguientes:

Un saltador de trampolín se lanza desde una plataforma ubicada a 20 m de altura y alcanza a sumergirse 5 m bajo el agua. ¿Qué distancia hay entre el punto inicial y el punto final de lanzamiento? (SM, 2020, p. 36)

Una estación de montaña presenta este resumen de la evolución de sus finanzas a lo largo de un año:

Marzo – Junio:	Pérdidas de 5675 €/mes.
Julio – Agosto:	Ganancias de 4280 €/mes.
Septiembre – Noviembre:	Pérdidas de 3240 €/mes.
Diciembre – Febrero:	Ganancias de 9720 €/mes.

¿Cuál fue el balance final del año? (Anaya, 2020, p.82)

En el primer enunciado la solución que esperan los autores del texto es: $(+20) - (-5) = 20 + 5 = 25\,m$ de distancia. En el segundo sería: $(-5675) + (+4280) + (-3240) + (+9720) = -5675 + 4280 - 3240 + 9720 = 5085\ €$ de beneficio anual. Sin embargo, esta forma de resolver no deja de ser artificiosa, pues estos problemas se pueden resolver con mayor economía de medios utilizando los números naturales.

La realidad es que la técnica aritmética de resolución de problemas consiste en diseñar un camino operacional que, partiendo de los datos numéricos de que se dispone, nos lleve a las soluciones buscadas. Y es el sentido que tienen los números dentro del contexto el que permite decidir en cada momento cuál es la operación a realizar y entre qué datos. Es por tanto una resolución casi permanentemente contextualizada, lo que hace que no sea necesario simbolizar dicho contexto más allá de los números que indican el resultado de las medidas absolutas. La aritmética no justifica la necesidad de introducir los números enteros y mucho menos la simbolización del sentido de la magnitud mediante los signos + y –, que hasta ahora indicaban las operaciones binarias de suma y resta. La razón de ser que proponen los textos para justificar la necesidad de introducir el número entero no resulta creíble ni siquiera para sus autores que, en cuanto pueden, abandonan los modelos concretos presentados inicialmente para pasar a un tratamiento formal del tema o casi formal, utilizando como objeto intermedio la recta numérica.

- *La justificación de la estructura algebraica de los números enteros.* A pesar de todo lo que se insistió durante las décadas 80 y 90 del siglo pasado para que se usasen con profusión los modelos concretos, los libros de texto actuales, o bien recurren a definiciones formales sin pretender justificar la estructura del conjunto $\mathbb{Z}$, o bien se valen mayoritariamente del modelo de la recta numérica y los desplazamientos sobre ella. Para justificar el orden y la suma en $\mathbb{Z}$ suelen utilizar el sentido de recorrido de la recta de izquierda a derecha y la composición de desplazamientos que traslada la posición cero a una posición final pasando por una posición intermedia. Algunos libros abandonan ya el modelo de la recta numérica en el caso de la resta para presentarla como operación inversa de la suma y bastantes de ellos se olvidan del modelo de la recta e introducen el producto y cociente de enteros mediante una definición formal o, en el caso del producto, como una suma o una resta repetida de números positivos o negativos. Este formalismo puede estar detrás de las confusiones entre las reglas de los signos aditivas y multiplicativas observadas en los alumnos.

Pero el cuasi abandono de los modelos concretos como medio de justificación de la estructura de $\mathbb{Z}$ no ha sido sustituido por ningún otro método que pueda cumplir ese papel. Aunque no se explicite, la justificación sigue dependiendo de una concepción del número entendido como resultado de la medida y ligado a las acciones físicas ejercidas sobre las cantidades de magnitud. En otras palabras, se sigue incidiendo en aquellas formas de concebir el número que constituyeron el primer obstáculo epistemológico que los matemáticos tuvieron que superar para llegar al concepto actual. Y ese obstáculo, constitutivo del saber, se va a reproducir en el aula porque esa es la concepción del número que el alumno ha adquirido en la educación primaria y no hay nada en la enseñanza del número entero que promueven los textos escolares que le ayude a afrontarlo y a superarlo.

No solo los intentos de justificación basados en modelos concretos contribuyen a reforzar la concepción obstáculo, también lo hace la manera de definir las operaciones, reducidas, a través del valor absoluto, a operaciones entre números naturales con el añadido de algunas consideraciones sobre los signos. Y también el hecho de que en ningún caso se explicitan las diferencias existentes entre las propiedades de los números enteros y de los números naturales. La superación del obstáculo exigiría provocar una ruptura epistemológica, mostrar que la aparición de los números enteros nos introduce en un mundo cuyas reglas de funcionamiento ya no se corresponden enteramente con las que estábamos acostumbrados a asumir en la aritmética y que eran el instrumento que nos permitía resolver problemas.

Ahora el cero ya no significa la ausencia de cantidad de magnitud, sino que pasa a ser un cero origen o convencional que permite la existencia de números menores que cero. El significado prioritario de la resta ya no está asociado a la acción de quitar o separar sino a la acción de comparar y se convierte en una *diferencia*. El resultado de la suma no siempre es mayor o igual que cualquiera de sus sumandos; el minuendo de una diferencia no tiene que ser mayor o igual que el sustraendo; el resultado de un producto de factores distintos de cero no tiene que ser mayor o igual que cualquiera de sus factores; el dividendo de una división no siempre es mayor o igual que el cociente; si un número es menor que otro al multiplicarlos por un mismo número no siempre se mantiene el sentido de la desigualdad, etc. No poner de manifiesto estas diferencias hace creer a los alumnos que las propiedades de $\mathbb{N}$ siguen cumpliéndose en $\mathbb{Z}$.

- *El cálculo con números enteros y su simbolización.* La algebrización de la aritmética, resultado de la reforma de la enseñanza de las matemáticas llevada a cabo en los años 60-70 del siglo pasado, trajo como consecuencia que los símbolos que antes eran exclusivos del ámbito algebraico (signos de las operaciones, símbolos de las relaciones, paréntesis, letras, etc.) pasaron a formar parte del ámbito aritmético (Chevallard, 1985a). Por tanto, en la enseñanza de los números enteros, todos ellos se dan por conocidos, y no son objeto de estudio, cuando, en muchos casos, su significado sufre transformaciones importantes.

En particular, la utilización de los signos + y – como signos *predicativos*, es decir, como signos que indican una cualidad del número, aporta un significado adicional al propio de la aritmética como signos *operativos*, indicadores de operación binaria entre números sin determinación. Aparece así la *notación completa* en la que los números enteros se encierran entre paréntesis intercalando entre ellos el signo que indica la operación binaria a realizar. Pero esta notación resulta bastante engorrosa y es poco utilizada. Desde el punto de vista algebraico, la posibilidad de sustituir una diferencia por una suma con el opuesto permite transformar todas las operaciones en sumas y el signo que indica esa suma se suprime. Por ejemplo, $(-3)+(-5)-(+4)-(-3)=(-3)+(-5)+(-4)+(+3)=\ -3-5-4+3$, donde todos los signos son predicativos y el signo que indica la suma como operación binaria se ha suprimido[10]. De esta manera, se pasa a la *notación incompleta*.

Sin embargo, este paso que no es en absoluto trivial, apenas se menciona en los libros de texto. Algunos textos pasan de la notación completa a la incompleta sin explicar cómo lo hacen. Otros explican que utilizan la regla de supresión de paréntesis precedidos por un signo + ó – sin aclarar cuál es el significado de los signos que permanecen. Ahora bien, el hecho de que pongan este tipo de operaciones bajo el epígrafe de “sumas y restas combinadas” hace pensar que están interpretando dichos signos como operativos, antes que como predicativos. Esto contribuye a reforzar la interpretación del cálculo en el ámbito aritmético, cuando ahora es esencial asumir que los cálculos se hacen entre números que están en todo momento ligados al signo que les precede. El énfasis inicial en la notación completa, y las instrucciones que promueven la supresión de los signos predicativos, en lugar de los signos operativos binarios, dificultarán posteriormente el cálculo algebraico, porque es precisamente el hecho de considerar que todos esos números están ligados por una suma lo que nos va a permitir conmutarlos, asociarlos o neutralizarlos con sus opuestos, según las necesidades del cálculo, dadas las “buenas” propiedades de dicha operación.

Otro aspecto que puede tener consecuencias indeseables en el establecimiento de buenas prácticas de cálculo algebraico es la algoritmización de las técnicas de cálculo con números enteros. También aquí continúa jugando su papel la tradición aritmética puesto que la escuela dedica mucho tiempo a la enseñanza de los algoritmos de las operaciones aritméticas entre números naturales, decimales o fraccionarios. De acuerdo con el modo de hacer

[10] También el producto y el cociente se reducen a una sola operación porque el cociente puede interpretarse como el producto por el inverso. En este caso, se suprime el signo que indica la operación binaria, pero se mantienen los números enteros entre paréntesis.

aritmético, los textos tienden a algoritmizar las técnicas de cálculo que afectan a las expresiones numéricas, mediante órdenes del tipo “suma los positivos, por un lado, los negativos por otro y después resta los resultados”, o bien “si las operaciones tienen la misma jerarquía, opera de izquierda a derecha”, obviando toda posibilidad de búsqueda del modo más simple de realizar las operaciones. Pero las expresiones numéricas son el preludio de las expresiones algebraicas y el cálculo algebraico no es un cálculo algorítmico, es un cálculo que exige reflexión y toma de decisiones porque está regido por principios de economía y de adecuación al fin que persigue.

En resumen, entendemos que la transposición didáctica del número entero que promueven los textos escolares:

- No fomenta la ruptura epistemológica necesaria para desligarse de una concepción que históricamente ha supuesto un obstáculo epistemológico que ha sido necesario confrontar y superar. Una concepción superadora del obstáculo es una concepción consciente de su existencia y que lo rechaza explícitamente y nada en la génesis del número entero que proponen los textos escolares pone de manifiesto que ese obstáculo exista y, todavía menos, incorpora los medios para su rechazo.
- Transmite unas técnicas de cálculo con números enteros que van a constituirse en un obstáculo didáctico para el desarrollo de unas buenas técnicas de cálculo algebraico. La pervivencia de los significados aritméticos de los signos de las operaciones y relaciones, la reducción de las operaciones entre números enteros a las operaciones entre números naturales, la algoritmización de las técnicas de cálculo con números enteros, el énfasis inicial en el uso de la notación completa y la mala praxis en el paso de la notación completa a la incompleta, van a obstaculizar el establecimiento de unas técnicas algebraicas de cálculo basadas en la reflexión, la economía y la funcionalidad.

8. El marco teórico para el diseño de la secuencia didáctica

El problema que nos planteamos ahora es el de diseñar una secuencia didáctica del número entero, pero para ello necesitamos seguir explicitando el marco teórico en el que nos posicionamos: el de la *didáctica fundamental* desarrollada en Francia a partir de los años 70 del siglo pasado y cuyos mayores exponentes son Guy Brousseau con su Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) e Yves Chevallard con su Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

La TSD parte de una concepción constructivista del aprendizaje, en el sentido piagetiano, pues considera que el alumno aprende por adaptación a un medio, fuente de dificultades y desequilibrios cuya superación propicia la adquisición del nuevo conocimiento. Partiendo de esta hipótesis, Brousseau (1986) sitúa en el centro de su teoría la noción de *situación a-didáctica* entendida como la interacción entre un alumno o grupo de alumnos y un medio formado por objetos materiales o simbólicos desprovisto de intencionalidad didáctica. El conocimiento surge entonces como una estrategia de adaptación a ese medio y su pertinencia y validez debe quedar establecida, no por la autoridad del profesor, sino por su eficacia adaptativa.

En la TSD se postula incluso que cada conocimiento matemático puede caracterizarse por una o más situaciones a-didácticas que preservan su sentido y que reciben el nombre de *situaciones fundamentales*. Es más, se afirma que

> (…) "un *conocimiento matemático* está definido por las *situaciones* que lo determinan, esto es, por un conjunto de situaciones para las que dicho conocimiento es idóneo porque proporciona la solución óptima en el contexto de una institución determinada. Las situaciones contienen la "razón de ser" del conocimiento que definen, esto es, las cuestiones que le dan sentido, así como las restricciones que limitan su uso en una institución determinada y las aplicaciones potenciales del mismo". (Gascón, 2013, p.79).

Brousseau (1982b) introduce también la noción de *variable didáctica* de una situación como aquella característica de la situación que puede variarse a voluntad del profesor y, según los valores que toma, modifica las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para afrontar la situación. Se supone que la modificación de las variables de la situación fundamental dará lugar a los diferentes sentidos y usos del conocimiento en juego. Pero, para establecer la sucesión de valores que deben tomar las variables didácticas se necesita definir un *modelo epistemológico de referencia* (Gascón, 2013, 2014), entendido como un modelo teórico de la génesis y evolución del conocimiento, que guíe la elaboración de la secuencia de situaciones fundamentales que caracterizan dicho conocimiento.

Por supuesto, esta exigencia no nos obliga a reproducir la epistemología del saber que podemos encontrar en la historia de las matemáticas. El modelo epistemológico de referencia puede guiar una génesis y evolución del conocimiento que sea artificial, en el sentido de que no coincida con la génesis histórica, siempre que las *razones de ser* que ofrezca sean "verdaderas", es decir, sean razones ineludibles ligadas a la naturaleza del problema matemático planteado, y no razones didácticas que respondan a los intereses docentes del profesor. Según Gascón (2014), los modelos epistemológicos de referencia son modelos alternativos que cuestionan los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diversas instituciones y sirven como sistema de referencia para abordar fenómenos didácticos. Esto nos introduce en la dimensión institucional del saber que desarrolla la TAD a través de la noción de *transposición didáctica*.

En la TAD se considera que el saber vive en las instituciones y que al pasar de unas a otras sufre transformaciones que cambian su naturaleza. En particular, a las transformaciones que sufre el *saber sabio*, es decir, el saber depositado en la institución de productores de dicho saber, cuando pasa a una institución de enseñanza y se convierte en *saber a enseñar* y *saber enseñado*, se le da el nombre de transposición didáctica (Chevallard, 1985b). El resultado de esa transposición puede ser un saber alejado de las necesidades y problemáticas que constituyen su razón de ser y de los usos donde halla su sentido. La medida de la distancia existente entre el saber sabio y el saber enseñado nos permite ejercer una *vigilancia epistemológica* sobre el proceso de enseñanza y, sobre los modelos epistemológicos dominantes en la institución de productores del saber y en la institución docente.

Por otro lado, no hay que olvidar que, aunque se ha puesto el énfasis en la situación a-didáctica, esta se elige con una intención didáctica muy clara: la de que el alumno construya un nuevo conocimiento matemático en interacción con un medio propuesto por el profesor, por lo que, a su vez, hay que considerarla incluida en una *situación didáctica* más amplia entendida como:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau; 1982a).

Ni tampoco se puede obviar al

> (…) alumno como un sujeto institucional cuyos procesos de adaptación están condicionados no solo por la tarea matemática y las interacciones posibles con el medio, sino también por su conocimiento de las normas institucionales que condicionan su relación con el enseñante y con el saber (Artigue, 2002).

Y ese condicionamiento institucional viene regido por el *contrato didáctico*, un contrato que regula “las obligaciones recíprocas del profesor y del alumno, implícitamente aceptadas y específicas del conocimiento enseñado” (Brousseau, 1982c). En una situación a-didáctica el contrato didáctico cambia y el profesor ya no es un trasmisor de saberes, sino un mediador en la construcción de conocimientos de sus alumnos. Para empezar, la situación a-didáctica plantea una dificultad: tiene que ser lo suficientemente cercana al alumno para que éste piense que la puede resolver con los conocimientos antiguos y, al mismo tiempo, lo suficientemente alejada para que esta estrategia inicial se revele enseguida ineficaz y obligue al alumno a modificar y acomodar sus conocimientos para responder a la situación (Brousseau, 1988).

La función del profesor es ahora la de provocar en el alumno las adaptaciones deseadas mediante una elección adecuada de la situación a-didáctica que le propone y conseguir que el alumno construya el nuevo conocimiento como consecuencia de su acción y retroacción con el medio. Al trabajo del profesor para conseguir que el alumno acepte esta responsabilidad se le da el nombre de *devolución de la situación* (Brousseau, 1986). Sin embargo, hay que matizar el rol del profesor en la situación a-didáctica. El profesor no puede quedarse totalmente al margen, sin intervenir, porque el desarrollo de la situación le va a obligar, en muchas ocasiones, a renegociar la devolución de la situación, lo que incluso puede afectar a la significación del conocimiento en juego (Brousseau, 1982b).

Junto a la devolución, la otra función del profesor es la de la *institucionalización* (Brousseau, 1988). Una vez que el alumno adquiere un conocimiento como estrategia de resolución en el seno de una situación a-didáctica, ese conocimiento se puede convertir, como mucho, en un *saber de la clase*, como consecuencia de la comunicación y validación de los resultados entre los alumnos. Por consiguiente, el profesor debe desarrollar situaciones de institucionalización, es decir, situaciones en las que ese conocimiento o saber de la clase se sitúe en la cultura de la sociedad y se convierta en un instrumento al servicio de la gestión y la interacción social. Además, una vez construidos los conocimientos e institucionalizados como saberes, es necesario que el alumno se ejercite en las técnicas aparecidas como estrategias de resolución. Para ello, el profesor debe plantear situaciones didácticas, es decir, situaciones en las que manifiesta su intención de que el alumno adquiera un saber que ha sido explicitado de antemano.

Por último, queda por comentar que el diseño de la secuencia didáctica se enmarca en el proceso que se conoce como *ingeniería didáctica*, expresión que hace referencia al trabajo del ingeniero que, basándose en conocimientos científicos, elabora prototipos que tiene que confrontar con una realidad compleja que la ciencia no puede abordar en su totalidad. Si nos ceñimos al ámbito de la didáctica, según Artigue (1995), los conocimientos científicos en los que se basa el diseño del prototipo, es decir, de la secuencia didáctica, suelen hacer referencia a:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación (Artigue, 1995, p.38).

A estos *análisis preliminares* le sigue el *análisis a-priori* que contiene una parte descriptiva y una parte predictiva: se describe la secuencia didáctica, basada en un modelo epistemológico de referencia y en la elección de los distintos valores que pueden tomar las variables didácticas de la situación o situaciones fundamentales, y se predicen los comportamientos y concepciones de los alumnos, resultado de haber vivido esa secuencia didáctica. Después de la *experimentación* de la secuencia didáctica, *el análisis a posteriori* nos dice si los comportamientos y concepciones observados en la fase de experimentación responden a las predicciones hechas en el análisis a-priori. Si no es así, la secuencia didáctica tendrá que ser reformulada. En cualquier caso, aun cuando una secuencia didáctica produzca los resultados que se esperan de ella en una institución educativa determinada, eso no garantiza esos mismos resultados en otra institución educativa. En cada momento, el prototipo deberá adaptarse a las condiciones y restricciones que impone la institución en la que se quiera implementar.

La secuencia didáctica que presentamos en los apartados siguientes es un producto de ingeniería didáctica. Los análisis preliminares realizados en los apartados anteriores nos permiten delimitar el problema didáctico al que nos enfrentamos: el de diseñar una secuencia didáctica del número entero que afronte la superación de los obstáculos epistemológicos, que evite la aparición de obstáculos didácticos y que permita al alumno construir una concepción inicial del número negativo que evolucione con facilidad hacia concepciones cada vez más cercanas al concepto matemático (Cid, 2015). En los siguientes apartados explicitamos los principios epistemológicos y metodológicos en los que se basa el diseño de la secuencia didáctica, así como las circunstancias de su experimentación y los resultados obtenidos.

9. El álgebra como instrumento de modelización

Como ya hemos comentado anteriormente, la razón de ser histórica del número negativo fue el cálculo algebraico y los intentos de crear condiciones de necesidad que justifiquen su introducción escolar en el ámbito aritmético no resultan creíbles. Por tanto, entendemos que el entorno de introducción de los números enteros debe ser el álgebra. Ahora bien, ¿qué álgebra? Porque la consideración inicial del álgebra como un mero cálculo al servicio de la aritmética ha jugado un papel contradictorio en su desarrollo. Desde luego, la estructura algebraica de sumandos y sustraendos, base de todo el cálculo algebraico, pudo ser establecida gracias al conocimiento de la estructura algebraica de las operaciones aritméticas. Pero, por otro lado, la dependencia de la aritmética ha obstaculizado el paso a un álgebra abstracta, necesaria para darle un estatuto numérico a los sustraendos.

Sin embargo, el modelo epistemológico dominante en la institución escolar es precisamente el de un álgebra entendida como una *aritmética generalizada*. Según Gascón (1993), Bolea (2003) y Ruiz-Munzón (2010) el álgebra escolar resalta las similitudes entre la aritmética y el álgebra y trata de presentar la segunda como una continuación de la primera en la que no cabe la visión de un álgebra cuyos objetivos y técnicas sean radicalmente distintos de los de la aritmética. Como consecuencia:

- El objetivo inicial del álgebra escolar sigue siendo el mismo que el de la aritmética: encontrar las soluciones numéricas de los problemas aritméticos, en detrimento de un álgebra que busque construir un modelo algebraico del problema que permita estudiarlo en toda su generalidad.
- Las letras indican siempre incógnitas numéricas que hay que determinar y se establece una distinción absoluta entre los números conocidos y los desconocidos, mientras que la potencia del álgebra viene dada por la utilización de letras para indicar, no solo incógnitas, sino también variables, parámetros o números genéricos, lo que permite utilizar el cálculo algebraico para estudiar tipos de problemas y para demostrar propiedades.

- El cálculo algebraico se concibe como una simple prolongación del cálculo aritmético, con la única salvedad de que algunos números han sido sustituidos por letras cuando, en realidad, el primero se rige por reglas sintácticas muy diferentes de las del segundo.
- Se desarrolla un aprendizaje formal de distintas técnicas: calcular, simplificar, desarrollar, factorizar, etc., que impide que los alumnos se enfrenten al problema de elegir el cálculo más adecuado, según el fin propuesto.

Esto nos obliga a buscar un modelo epistemológico alternativo del álgebra escolar que haga muy visible la ruptura epistemológica que supone el quehacer algebraico frente al aritmético, porque sólo asumiendo esta ruptura podrán los alumnos rechazar los obstáculos epistemológicos y evitar los obstáculos didácticos. Por ello, asumimos un modelo epistemológico de referencia basado en la consideración del álgebra como *instrumento de modelización algebraico-funcional*, en la línea propuesta por Chevallard, Bosch, Gascón y Ruiz-Munzón[11]. Estos autores consideran que el álgebra no debe aparecer inicialmente al mismo nivel que los demás dominios matemáticos que se estudian en la escuela (aritmética, geometría, análisis, etc.), sino como un instrumento genérico de modelización de todas las matemáticas que transforma completamente las condiciones del trabajo matemático. El primer paso sería la simbolización algebraica de la cadena de operaciones aritméticas que resuelve un problema aritmético, lo que Chevallard llama un *programa de cálculo aritmético* (PCA). En las expresiones algebraicas resultantes las letras pueden tener un papel como variables, incógnitas o parámetros. Esto convierte los PCA en objeto de estudio a través de las expresiones algebraicas que los modelizan y amplía el campo de las soluciones posibles.

Ya no se trata solo de encontrar valores numéricos que solucionen el problema, sino que la expresión algebraica, al poner de manifiesto la estructura del PCA, permite simplificarlo y hacerlo más eficaz para obtener soluciones numéricas, relacionarlo con otros PCA y demostrar propiedades, con lo que se sobrepasa el ámbito de los problemas aritméticos iniciales (Ruiz-Munzón, 2010). De este modo, se va desarrollando un proceso de algebrización que presenta el álgebra como una herramienta que posibilita abordar las cuestiones teóricas que surgen en distintas áreas de la matemática elemental y agrupar las tareas en tipos de problemas, generalizando los procesos de resolución (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2015).

[11] En Gascón, Bosch, y Ruiz-Munzón (2017) puede encontrarse una relación detallada de los trabajos y autores que desarrollan la línea de investigación del álgebra entendida como instrumento de modelización.

Consideramos pues que el álgebra entendida como instrumento de modelización algebraico-funcional es un buen lugar para la introducción del número negativo porque, por un lado, el punto de partida son los problemas aritméticos, lo que permite relacionar la estructura de sumandos y sustraendos con la estructura de las operaciones aritméticas ya conocida por los alumnos y, por otro lado, presenta un álgebra que no se reduce a una aritmética generalizada, lo que ayuda a poner de manifiesto la ruptura epistemológica que supone el paso de la aritmética al álgebra.

Pero la introducción de los números negativos necesita de determinados objetos algebraicos cuyas técnicas de manipulación no se pueden desarrollar hasta que no se dispone de las reglas de los signos. Esto exige que, a diferencia de lo que sucede en la introducción tradicional del álgebra escolar, se establezcan momentos distintos para la presentación de los objetos algebraicos y para el desarrollo de las técnicas que les afectan. Como consecuencia, tanto el orden de presentación de los objetos algebraicos como el momento de aparición de las técnicas de manipulación de dichos objetos quedan condicionados por la necesidad de introducir los números negativos (Cid, 2015).

Además, la exigencia de enfatizar el significado de la diferencia, entendida como resultado de la acción de comparar, frente a la resta, entendida como resultado de la acción de sustraer, imprescindible para dar significado a la diferencia entre números enteros, obliga a trabajar desde el primer momento la comparación entre programas de cálculo. En cambio, la introducción del simbolismo algebraico se lleva a cabo a un ritmo mucho más lento de lo habitual debido al desconocimiento inicial de las reglas de los signos. Pero esto está en consonancia con el desarrollo histórico del simbolismo algebraico, resultado de una labor de transcripción que se prolongó durante bastantes siglos, y con el hecho de que el uso temprano de los símbolos algebraicos en aritmética ha modificado en parte un significado que hay que volver a recomponer.

10. El modelo epistemológico de referencia de los números enteros

El diseño de una secuencia didáctica exige tomar muchas decisiones, unas de orden epistemológico que afectan a las características de la génesis y evolución del saber que se va a poner en juego, y otras de orden didáctico que se refieren al tipo de situaciones que se van a diseñar y los contratos didácticos que se pretende establecer. En este apartado se desglosan las etapas del modelo epistemológico de referencia (MER) de los números enteros que rige nuestro diseño (Cid y Bolea, 2010; Cid, 2015; Cid, Muñoz-Escolano y Ruiz-Munzón, 2020).

10.1 Primera etapa del MER de los números enteros.

En esta primera etapa se plantean problemas aritméticos que se resuelven mediante sumas y restas, es decir, mediante programas de cálculo aditivos. La formulación simbólica de estos programas, en los que algunos datos son desconocidos y deben indicarse mediante letras, conduce a expresiones algebraicas del tipo $a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots$, *donde a, b, c, d,* etc., son números positivos o letras que solo pueden tomar valores positivos y que pueden ir acompañadas de un coeficiente distinto de uno. La necesidad de responder a las preguntas formuladas en los enunciados de los problemas aritméticos nos obliga a pasar de las sumas y restas entre números sin determinación a la composición de sumandos y sustraendos.

Por ejemplo, si la expresión algebraica que simboliza el PCA que resuelve un problema es $a - 12 - 5$, la interpretación de los signos – como signos operativos binarios entre números naturales no nos permite simplificar esa expresión pues es necesario obtener el resultado de a – 12 para poder después restarle 5, y eso no es posible. Hay que pensar en términos de “si al número genérico a le tengo que restar 12 y después 5 eso equivale a restarle 17” y ese razonamiento justifica que $a - 12 - 5 = a - 17$. Pero eso significa reinterpretar los signos – como signos que acompañan a un número indicando su condición de sustraendos y la operación entre ellos como una composición de traslaciones[12].

Las técnicas que se desarrollan en esta etapa son las reglas de composición de sumandos y sustraendos y de simplificación de expresiones algebraicas aditivas. Aparecen otros objetos algebraicos que no son objeto de institucionalización ni de desarrollo de las técnicas que les afectan. Entre ellos: las funciones afines y sus tablas de valores, la función afín inversa y las igualdades entre expresiones algebraicas en su doble vertiente de identidades y ecuaciones.

En esta etapa se afronta el cambio de significado de algunos objetos aritméticos al convertirse en objetos algebraicos:

- La letra, que en aritmética es una inicial que indica la unidad de medida o el nombre genérico de los elementos del conjunto cuyo cardinal se busca, ahora indica un cardinal.
- Los signos + y –, que en aritmética tienen sentido como signos *operativos binarios* entre número sin determinación e indican que una operación debe ser ejecutada, pasan a tener

[12] Al signo que acompaña a un término indicando que es un sumando o un sustraendo lo llamaremos signo *operativo binario generalizado*. Es una acepción que hoy en día no se utiliza porque ha sido sustituida por el significado predicativo del signo, pero que nosotros utilizamos en nuestra secuencia como elemento intermedio entre el signo operativo binario y el signo predicativo.

sentido como signos que indican la cualidad de sumando o sustraendo del término situado a su derecha (signos *operativos binarios generalizados*).

- Las técnicas de cálculo ya no son algorítmicas, como en aritmética, sino que exigen una reflexión y toma de decisiones que dependen de la funcionalidad del cálculo y del principio de economía que lo rige, fomentando la búsqueda de formas sencillas de hacer los cálculos.

10.2 Segunda etapa del MER de los números enteros. En esta etapa se prioriza la diferencia como resultado de la acción de comparar frente a la resta como resultado de la acción de sustraer. Esto introduce las diferencias con signo y su interpretación como un valor absoluto que cuantifica la diferencia y un signo que indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo término. Se introduce el paréntesis como indicador de la longitud de un sustraendo. Se sigue imponiendo la restricción de que algunos de los datos que intervienen en el problema son desconocidos, lo que da lugar a diferencias entre expresiones algebraicas. Se reinterpreta el signo – como signo *operativo unario* (signo que transforma un sumando en sustraendo y viceversa). Esto conduce a las reglas de supresión de paréntesis y permite establecer la equivalencia entre expresiones con paréntesis y sin paréntesis.

Las técnicas que se desarrollan son: la comparación de expresiones algebraicas del tipo $ax + b$, con a, b y x pertenecientes a $\mathbb{N}$, el cálculo de la diferencia entre dos expresiones algebraicas y la supresión de paréntesis y simplificación de expresiones algebraicas que los contienen. Otros objetos algebraicos que aparecen sin institucionalizarse ni desarrollar las técnicas que les afectan son las desigualdades entre expresiones algebraicas aditivas, entendidas, bien como desigualdades que se cumplen para todo el dominio de las variables, bien como inecuaciones.

Los objetos aritméticos que cambian su significado en esta etapa son:

- La diferencia que ahora se interpreta como el resultado de una comparación antes que como el resultado de una sustracción, lo que permite darle sentido a una diferencia negativa e iniciar una técnica de comparación de expresiones algebraicas basada en el estudio de su diferencia.

- Los signos =, < y > que se reinterpretan como signos de relación, incidiendo especialmente en el signo = que en aritmética es simplemente un conector entre una operación indicada y su resultado.

- La igualdad y la desigualdad, que en aritmética sólo pueden tener un valor de verdad: verdadero o falso, mientras que en álgebra indican una relación verdadera o falsa para todo valor de las letras o una relación verdadera sólo para determinados valores de las letras.

10.3 Tercera etapa del MER de los números enteros. En esta etapa se incluyen problemas aritméticos en los que el PCA que los resuelve contiene productos en los que uno de los factores es a su vez una suma o diferencia. En la expresión algebraica que simboliza el PCA se introduce el paréntesis como indicador de la longitud de un factor y se pone de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva porque reduce el producto entre un número y una suma o diferencia a un producto entre sumandos y sustraendos, estableciéndose las reglas multiplicativas de los signos. Se reproduce el cálculo de diferencias que ya se había trabajado anteriormente, pero con la novedad de que los términos de las diferencias son a su vez productos de números por una suma o diferencia.

Las técnicas que se desarrollan en esta etapa son: el producto de un sumando o un sustraendo por una suma o diferencia, el uso de la propiedad distributiva para desarrollar o factorizar expresiones algebraicas y la simplificación de expresiones algebraicas aditivo-multiplicativas, utilizando las reglas de la *jerarquía de las operaciones*. La aparición de expresiones que contienen productos pone todavía más de manifiesto la diferencia entre las técnicas aritméticas y algebraicas. La necesidad de tener en cuenta la jerarquía de las operaciones impide la puesta en práctica de reglas algorítmicas como “opera de izquierda a derecha” o “separa positivos de negativos”. Además, el hecho de que la propiedad distributiva pueda utilizarse en el sentido de desarrollo o de factorización obliga a tener en cuenta la finalidad del cálculo.

10.4 Cuarta etapa del MER de los números enteros. Aparecen ahora los modelos concretos que se utilizan habitualmente en la introducción escolar del número entero (ganancias y pérdidas, movimientos a derecha o izquierda, temperaturas, etc.), pero con un tratamiento muy diferente. El trabajo con los modelos concretos en el ámbito aritmético no proporciona una razón de ser de los números enteros, pues basta una modelización aritmética en términos de números naturales para encontrar respuesta a las preguntas planteadas. En cambio, la utilización de esos mismos modelos en un contexto algebraico, en el que las reglas de cálculo con sumandos y sustraendos ya están establecidas, permite mostrar la gran ventaja que supone representar determinadas cantidades por medio de sumandos y sustraendos: la unificación de las fórmulas.

Por ejemplo, si damos a las letras valores numéricos positivos y negativos, podemos calcular la diferencia de temperaturas utilizando una sola fórmula, independientemente de que sean temperaturas sobre cero o bajo cero, o la distancia entre dos móviles que parten de un mismo punto, independientemente de que se muevan en un sentido o en otro. Y esto conduce a la reinterpretación de los sumandos y los sustraendos como cantidades positivas y negativas y, a continuación, como nuevos números: los números enteros, y a la consolidación de un nuevo significado de los signos + y –: su sentido *predicativo*. Ya no son signos que indican una operación, sino signos que indican una “cualidad” de los números. Y los paréntesis asumen una nueva función: la de delimitar los números enteros. Pero la conversión de los sumandos y sustraendos en números tiene su contrapartida: propiedades que antes cumplían “todos los números” y que formaban parte de las estrategias de resolución de los problemas aritméticos, ahora ya no son universales y hay que establecer su dominio numérico de validez.

Las técnicas que se ejercitan en esta etapa son: las operaciones y la ordenación de números enteros, la obtención del valor numérico de una expresión algebraica en la que las letras pueden tomar valores en $\mathbb{Z}$, la comparación de expresiones algebraicas de primer grado en $\mathbb{Z}$, estudiando el signo de la diferencia, y la reducción de la notación completa en las expresiones algebraicas a la notación incompleta.

Hay que advertir también que en este MER de los números enteros se invierte el recorrido escolar habitual en la presentación de las notaciones. Se comienza presentando la *notación incompleta*, es decir, la notación en la que se han suprimido los signos + y – como indicadores de una operación binaria entre números naturales o enteros, para terminar, presentando la *notación completa*, es decir, la notación que conserva los signos + y – como signos operativo binarios en $\mathbb{Z}$, y mostrando las reglas de paso de la segunda a la primera. La razón de este cambio es que si se analizan las técnicas de cálculo algebraico se observa que se trabaja siempre con notaciones incompletas y ante una expresión escrita en notación completa, se procede, en primer lugar, a transformarla, rescribiéndola en notación incompleta.

11. La situación fundamental de los números enteros

El comienzo del álgebra, tanto histórico como escolar, se basa en el desarrollo de las técnicas de resolución mediante ecuaciones. Sin embargo, nuestra opción no es la de plantear problemas aritméticos susceptibles de ser resueltos utilizando ecuaciones, dado que el desconocimiento inicial de las reglas de los signos hace muy difícil el desarrollo de una técnica de resolución de ecuaciones, sino plantear problemas aritméticos que pueden ser resueltos mediante un PCA, pero en el que la falta de algún dato impide llevarlo a efecto y obliga a simbolizarlo mediante una expresión algebraica.

De esta manera la solución de un problema aritmético ya no será uno o varios números, sino una expresión algebraica que guarda memoria de las operaciones a realizar y que en su forma canónica permite dar solución al problema cuando el dato o datos desconocidos se hagan patentes, sin necesidad de rehacer todos los razonamientos que llevaron a la constitución del PCA ni todas las operaciones que constituyen el programa. Además, el estudio de las expresiones algebraicas que modelizan los programas de cálculo aritmético que solucionan los problemas va a permitir operar en términos de sumandos y sustraendos e iniciar una de las formas de la negatividad matemática.

Pasamos así de una actividad de resolución de problemas a una actividad propia del álgebra: la resolución de tipos de problemas mediante la obtención de una o varias fórmulas que permiten la resolución. Esto escenifica mejor la ruptura epistemológica entre el álgebra y la aritmética que es necesario plantear y además permite una entrada más suave en el cálculo algebraico, dejando las técnicas de resolución de ecuaciones para el momento en que las técnicas de cálculo con números positivos y negativos estén establecidas.

De acuerdo con lo anterior, la situación fundamental la constituyen problemas aritméticos donde alguno de los datos que forma parte del programa de cálculo aritmético que resuelve cada uno de ellos es desconocido, lo que impide una solución numérica y exige una solución formulada en términos de una expresión algebraica o de una relación entre expresiones algebraicas (Cid, 2015).

Lo que nos permite caracterizar esta situación como situación a-didáctica es el hecho de que los alumnos tienen un conocimiento anterior, el cálculo aritmético, que les ofrece una estrategia de base para afrontar la situación, pero la presencia de las letras va a obligarles a modificar dichas estrategias, pasando en varias etapas de un cálculo entre números sin determinación a un cálculo entre números positivos y negativos. Ahora bien, hay que tener en cuenta que en la negociación entre el profesor y los alumnos para que estos acepten la devolución de la situación, el profesor debe hacer explícitas dos restricciones:

- los datos desconocidos necesarios para resolver el problema aritmético deben representarse mediante letras y

- las expresiones algebraicas que intervienen como solución final del problema deben quedar lo más simplificadas posibles.

La elección de las variables didácticas de la situación y de los valores que pueden tomar viene determinada por las etapas del MER del número entero anteriormente definido y va a poner de manifiesto los distintos aspectos del conocimiento que se pretende enseñar. Son las siguientes (Cid, 2015):

- *Sentido de la situación*: Directo, cuando se trata de encontrar la expresión algebraica que soluciona un problema aritmético, o inverso cuando se busca el enunciado de un problema aritmético cuya solución es una expresión algebraica dada.
- *Tipo de solución*: Un valor numérico, una expresión algebraica o una relación entre expresiones algebraicas.
- *Estructura semántica*: Los problemas aritméticos son de una o varias etapas, pero cada una de ellas puede caracterizarse[13] como ETE, ECE y TTT, para las situaciones aditivas, y EEE y ECE, para las situaciones multiplicativas.
- *Tipo de expresión algebraica*: Aditiva sin paréntesis, aditiva con paréntesis que encierran sustraendos o aditivo-multiplicativa con paréntesis que encierran factores.
- *Tipo de notación*: Completa o incompleta.
- *Número de datos desconocidos*: Uno o dos.
- *Significado de la letra*: Variable, incógnita, parámetro o número genérico.
- *Dominio de las letras*: $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$.
- *Objetos de referencia de la negatividad matemática*: Sumandos y sustraendos, diferencias positivas y negativas, cantidades positivas y negativas, números enteros.
- Significado de los signos + y –: Operativo binario entre números sin determinación, operativo binario generalizado, operativo unario, predicativo u operativo binario entre números con determinación.

Una vez establecida la situación fundamental y sus variables, ya estamos en condiciones de diseñar la secuencia didáctica de los números enteros, variando adecuadamente los valores

[13] De acuerdo con las clasificaciones aditivas y multiplicativas de Vergnaud (1982; 1988), modificadas por Cid, Godino y Batanero, (2003).

de las variables de acuerdo con las etapas definidas en el modelo epistemológico de referencia (Cid y Ruiz-Munzón, 2011; Cid, 2015).

12. La Secuencia Didáctica de los Números Enteros: descripción, experimentación y resultados

La secuencia didáctica diseñada figura en el anexo a este capítulo y consta de seis secciones:

- Sección 1. Cómo construir expresiones algebraicas.
- Sección 2. Cómo simplificar expresiones algebraicas.
- Sección 3. Cómo comparar expresiones algebraicas.
- Sección 4. Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas.
- Sección 5. Cómo multiplicar expresiones algebraicas.
- Sección 6. Cómo operar los números con signo.

Las secciones 1 y 2 corresponden a la primera etapa del MER, las secciones 3 y 4 a la segunda etapa, la sección 5 a la tercera etapa y la 6 a la cuarta etapa. Cada una de las secciones contiene situaciones a-didácticas (salvo la sección 2), situaciones de institucionalización y situaciones de ejercitación de las técnicas que se institucionalizan.

La secuencia didáctica que se presenta en el anexo está modificada respecto a la secuencia diseñada inicialmente como consecuencia de la experimentación realizada durante los cursos 2008-09 y 2009-10 en el IES (Instituto de Educación Secundaria) Costa y Llobera de Barcelona, en los cursos 1º de ESO (alumnos de 12-13 años) y 2º de ESO (alumnos de 13-14 años)[14]. La duración temporal aproximada de la secuencia fue de 3 horas de clase para cada una de las secciones 1, 2, 3 y 5; 4 horas de clase para la sección 4; y 6 horas de clase para la sección 6.

La metodología utilizada en las situaciones a-didácticas fue la de trabajo en grupos pequeños (grupos de 4 alumnos) con intervenciones puntuales de la profesora[15], en cada uno de los grupos, cuando era necesario renegociar la devolución de la situación. Después se ponía

[14] La descripción detallada de la secuencia didáctica, así como de la experimentación realizada y sus resultados puede encontrarse en Cid (2015).
[15] Las clases las impartió la profesora de la asignatura acompañada de una observadora que registró los hechos sucedidos.

en común el trabajo de los grupos y se institucionalizaba el saber de la clase. En cuanto a las situaciones de ejercitación de las técnicas, se resolvían individualmente, pero se ponían en común enfatizando los principios de economía y funcionalidad de los cálculos. Finalmente, los alumnos tenían que realizar pruebas individuales para controlar los conocimientos y saberes adquiridos.

A continuación, desglosamos en función de las etapas del MER, tanto los resultados de la experimentación observados en el desarrollo de las clases como los observados en la realización de las pruebas individuales:

- *Primera etapa (Secciones 1 y 2).* La mayor parte de los alumnos no tienen inconveniente en obtener una expresión algebraica como solución de un problema, reconocen la identidad de las expresiones algebraicas, aunque se expresen con letras distintas y las utilizan para completar tablas de valores. Sin embargo, bastantes alumnos siguen resolviendo los problemas en forma aritmética y solo al final escriben la expresión algebraica que da respuesta al problema.

También aceptan mayoritariamente darles a los signos + y – un significado operativo binario generalizado en las expresiones aditivas sin paréntesis y reinterpretar las operaciones de suma y resta de números naturales como composición de traslaciones. Esto no les impide cometer bastantes errores de cálculo que corrigen por sí mismos con rapidez cuando la profesora les llama la atención sobre ellos. Por último, interiorizan los principios de reflexión y economía propios del cálculo algebraico y un porcentaje importante de alumnos se preocupa por realizar las simplificaciones y operaciones entre expresiones algebraicas de la manera más sencilla posible. Sin embargo, la gestión del signo = sigue siendo prioritariamente aritmética y la mayor parte de los alumnos no unen con dicho signo los pasos intermedios en la simplificación de expresiones algebraicas. También la falta de buenas técnicas de cálculo mental dificulta la realización de los cálculos de una manera más económica.

- *Segunda etapa (Secciones 3 y 4).* Prácticamente todos los alumnos entienden el significado matemático de la palabra ‘diferencia’ y la relacionan con la comparación, utilizando comparaciones de expresiones algebraicas para resolver problemas aritméticos. Un porcentaje apreciable de alumnos sabe también ordenar expresiones algebraicas de primer grado cuando el sentido de la desigualdad no depende de la variable. En cambio, el número de alumnos capaz de resolver una inecuación de primer grado es pequeño, aunque la percepción de que el sentido de la desigualdad cambia con el valor de la variable es muy general.

El escollo fundamental se encuentra en el uso de los paréntesis. La mayor parte de los alumnos no ve la necesidad de encerrar entre paréntesis el sustraendo de una diferencia, lo que da lugar a un cálculo erróneo. Pero tampoco ven la necesidad de modificar los signos de los términos contenidos en un paréntesis precedido del signo – cuando suprimen el paréntesis; se limitan a modificar el signo del primer término. Solo el 50% de los alumnos suprimen correctamente los paréntesis precedidos del signo –, a pesar de la insistencia de la profesora.

- *Tercera etapa (Sección 5)*. La entrada en la sección 5 supone una regresión importante. Los alumnos, que a esas alturas aceptaban con toda naturalidad el uso de letras para resolver problemas aritméticos, no se sienten autorizados para utilizar la notación algebraica en un contexto geométrico: consideran que no pueden dibujar rectángulos sin conocer sus medidas y que no pueden encontrar soluciones numéricas, las únicas que consideran válidas, porque algunos de los datos son desconocidos. Incluso vuelven a utilizar el signo *x* para indicar el producto cuando anteriormente ya lo habían abandonado. Para que acepten la tarea es necesario que la profesora les asegure que en la fórmula del área de un rectángulo se pueden sustituir las letras por expresiones que contengan otras letras y que el dibujo de un rectángulo es un boceto para facilitar el razonamiento y que no tiene que responder a medidas precisas. Además, los alumnos habían olvidado la propiedad distributiva, clave para el manejo de las expresiones aditivo-multiplicativas con paréntesis y fue necesario proponer ejercicios de desarrollo y factorización de expresiones.

A pesar de todo, los alumnos llegan a entender la interpretación geométrica del producto de expresiones algebraicas y se desempeñan razonablemente bien en la simplificación de expresiones aditivo-multiplicativas salvo cuando el número que multiplica a un paréntesis va precedido de un signo –, en cuyo caso una parte de ellos aplican la propiedad distributiva sin modificar el signo de los términos incluidos en el paréntesis.

- *Cuarta etapa (Sección 6).* La experimentación muestra que la propuesta didáctica ha subestimado el salto epistemológico que supone pasar del significado operativo binario generalizado y operativo unario de los signos + y – al significado predicativo y operativo binario entre números enteros. Las dificultades de los alumnos para pasar de la notación completa a la incompleta ponen de manifiesto que no es suficiente el conocimiento sobre cómo operar las expresiones algebraicas para deducir las reglas de cálculo entre números enteros. Finalmente, tal como muestran los resultados de las pruebas, alrededor del 80% de los alumnos pasan correctamente de la notación completa a la incompleta en las sumas y restas de números enteros, pero es un porcentaje bastante menor el que realiza con corrección los productos y cocientes de números enteros.

En cuanto al orden, el argumento de su necesaria compatibilidad con la suma no produce ningún rechazo en el aula y mayoritariamente se asume que el signo de la diferencia indica el orden entre el minuendo y el sustraendo y los números negativos se ordenan correctamente. Por otro lado, más de la mitad de los alumnos entienden que la posibilidad de dar valores negativos y positivos a las variables permite unificar las fórmulas. Las dificultades aparecen cuando se intenta encontrar el valor numérico de una expresión algebraica dando un valor negativo a la variable pues, en un primer momento, nos encontramos con una notación completa que adjudica un nuevo papel a los paréntesis y a los signos + y – que hay que aprender a gestionar.

Por último, los alumnos no ponen mayores reparos en asumir los sumandos y sustraendos o las cantidades positivas y negativas como nuevos números: los números enteros, pero en lo que se refiere a las diferencias entre las propiedades de los números enteros y los números naturales, apenas se pudieron tratar por falta de tiempo. Tampoco se hizo apenas hincapié en la modificación que sufren las desigualdades entre expresiones algebraicas al tomar las variables valores en $\mathbb{Z}$, a pesar de lo cual, varios alumnos fueron capaces de resolver correctamente las dos inecuaciones de primer grado en $\mathbb{Z}$ que se plantearon en las pruebas finales.

13. La modificación de la secuencia didáctica

Como ya comentamos en apartados anteriores, la secuencia didáctica del número entero se diseña con el objetivo de que afronte la superación de los obstáculos epistemológicos, que evite la aparición de obstáculos didácticos y que permita al alumno construir una concepción inicial del número negativo que evolucione con facilidad hacia concepciones cada vez más cercanas al concepto matemático (Cid, 2015).

El análisis a posteriori de la secuencia didáctica nos muestra que su puesta en práctica en condiciones normales de aula es factible y que permite poner de manifiesto la ruptura epistemológica que supone pasar del quehacer aritmético al algebraico y del número natural al número entero, lo que favorece la superación del obstáculo epistemológico. Además, el tratamiento dado a las escrituras algebraicas y el hecho de haber convertido en objeto de estudio los distintos significados de los signos puede ayudar a evitar obstáculos didácticos.

Sin embargo, la experimentación de la secuencia didáctica ha puesto de manifiesto diversas disfunciones que deben ser corregidas. Algunas de ellas se deben a restricciones institucionales, sobre todo de tiempo, que impidieron, en su momento, desarrollar con el suficiente detalle algunas partes de la secuencia. Otras se deben a que no se ha estimado en toda su profundidad la ruptura epistemológica que supone el paso del cálculo con sumandos y sustraendos al cálculo con números enteros. La secuencia didáctica que se presenta en el anexo ya ha sido modificada para tratar de corregir algunas de las disfunciones observadas, pero es necesario volver a experimentarla y seguir modificándola hasta conseguir acercarnos más al objetivo propuesto.

Por otro lado, esta secuencia didáctica es un prototipo que ha funcionado en una institución determinada, pero que debería ser adaptada si se pretende implementarla en instituciones que responden a características institucionales diferentes. En este sentido agradezco mucho a las profesoras Patricia Detzel y Rosa Martínez[16] de la Universidad Nacional del Comahue (Argentina), así como a los demás componentes del grupo de investigación del que forman parte, sus años de trabajo analizando esta secuencia didáctica, adaptándola a las condiciones y restricciones de las instituciones educativas argentinas y describiendo su experimentación y los resultados obtenidos, en el marco de un proyecto de investigación colaborativa.

[16] Las profesoras Patricia Detzel y Rosa Martínez forman parte de un grupo de investigación colaborativo, de la Universidad Nacional del Comahue, compuesto además por los profesores: María Elena Ruiz, Emanuel Issa, Lucas Colipe, René Morari, Analía Petich, Ethel Barrio, Juan Zambrano y José Cumín.

Referencias

Anaya (2020). *Matemáticas. 1 ESO*. Libro de texto. Grupo Anaya.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241-286.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue et al. (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-60. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? En A. Terrisse (ed.), *Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes.* Les dossiers des sciences de l'éducation, 8, 59-72. Lyon: Persée.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XVIIIe rencontre de la CIEAEM*, 101-117, Louvain-la-Neuve.

Brousseau, G. (1982a). D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique**.** *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, 39-60, IREM d'Orléans**.**

Brousseau, G. (1982b). *Petit panorama de la didactique des mathématiques***.** Manuscrito no publicado**.**

Brousseau, G. (1982c). Les «effets» du «contrat didactique»**.** *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, IREM d'Orléans**.**

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2),165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Les differents rôles du maitre. *Bulletin de la Association Mathématique du Québec*, 23, 14-24.

Cauchy, A.L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. París: Imprimerie Royale.

Chevallard, Y. (1985a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1985b). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín SI-IDM*, 10, 1-15.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, vol. 2, 529-542, I.C.E. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2004). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. En E. Palacián et al. (eds.), *Aspectos didácticos de Matemáticas. 9*, 35-80, I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner et al. (eds.), *Difuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, vol. 1, 575-594. IUFM de l'Académie de Montpellier.

Cid, E., Godino, J.D. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Cid, E., Muñoz-Escolano, J.M. y Ruiz-Munzón, N. (2020). Research on negative numbers in school algebra. En M.Bosch et al. (eds.): *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. A Comprehensive Casebook*, 61-76. London and New York: Routledge.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (eds.), *Un panorama* *de la TAD. An overview of ATD*, 579-604. Centre de Recerca Matemática (CRM), Universitat Autónoma de Barcelona.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), 295-332.

Gascón, J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 69-87.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, Especial 25 Años, 99-123.

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*, 25-47. Zaragoza: SEIEM.

Glaeser, A.J. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

Glière, G. (2007). *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de D'Alembert à nos jours. Le passage des quantités aux nombres*. Atelier National de Reproduction des Thèses, Lille.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen uber die complexen Zahlen und ihre Functionen*. Leipzig: Leopold Voss.

Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. *Proceedings of the 15th Annual Conference of PME-NA*, 295-300, Montreal.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques. *Revue française de pédagogie*, 188, 13-22.

Peacock, G. (1830). *A treatise on algebra*. Cambridge: J. y J.J. Deighton.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral. Departament de Matemátiques. Universitat Autónoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Journal of Research in Mathematics Education (Redimat),* 4(2), 106-131.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x*, 12, 5-32.

Schubring, G. (2014). Problems of transmission and translation. The case of MacLaurin on negative numbers. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2-3), 285-296.

SM (2020). *Matemáticas. 1 ESO*. Libro de texto. Grupo SM.

Ver Eecke, P. (1959). *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. París: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective,* 39-59. Hillsdale (New Jersey): Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades (Research Agenda in Mathematics Education)*, vol.2, 141-161. Hillsdale (New Jersey): Lawrence Erlbaum Associates.

ANEXO

1. CÓMO CONSTRUIR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Tarea 1. Laura se llevó sus cromos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 cromos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos cromos le quedaron después de jugar?

Tarea 2. Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Gerona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Gerona?

Tarea 3. Completa las tablas siguientes sobre el número de pasajeros del tren anterior.

Número de pasajeros que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Gerona
427	
1582	
a	

Número de pasajeros que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Gerona
	45
	876
	c

Tarea 4. María va de compras. Lleva 120 €. Compra primero un pantalón que le cuesta 40 € y después unos zapatos. Por último, compra un libro por 15 €. ¿Cuánto dinero le queda?

Tarea 5. Si María nos dice que le han quedado 30 €, ¿podemos averiguar cuánto le han costado los zapatos? ¿Y si le quedan 15 €? ¿Y si solo le quedan 5 €?

Tarea 6. Un ganadero tiene vacas y ovejas. Las vacas paren 21 crías y las ovejas, 57. Además el ganadero vende 30 vacas y 70 ovejas.

Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares y el caso general.

Nº inicial de vacas	Nº inicial de ovejas	Nº inicial de animales	Nº final de vacas	Nº final de ovejas	Nº final de animales

80	150				
			65	120	
50					
				90	

Tarea 7. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución y escríbela lo más simplificada posible.

E1) $a + 5 + 8 - 6$

E2) $b - 6 - 10 - 4$

E3) $12 - a - 5$

2. CÓMO SIMPLIFICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Tarea 8. Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:

(a) d – 7 – 4 + 10 = d – 3 + 10 = d – 13

(b) 27 – q – 8 – 8 = 27 – q – 0 = 27 – q

(c) 18 – 5 + x + 5 – 8 = 18 + x – 8 = 18 – 8 + x = 10 + x

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

Tarea 9. Completa las siguientes frases:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Tarea 10. Completa las siguientes frases:

Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que _____________ primero 2 y ______________ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que______________ primero 2 y ______________ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y ______________ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que______________ primero 2 y ______________ después 5.

Tarea 11. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$45 - f + g - 10 + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19$$

teniendo en cuenta que antes de empezar a operar debes leer toda la expresión y analizar qué operaciones conviene efectuar primero para que el cálculo resulte lo más sencillo posible. Por ejemplo, observa si un mismo número o letra aparece unas veces restando y otras sumando porque eso permite suprimirlo. Procura también realizar primero aquellas operaciones que dan lugar a números más sencillos y más fáciles de operar.

Tarea 12. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

E1) 30 + w – 10 + 12 – v

E2) h – 25 – 25 + 50 – 7

E3) m – 45 + 44 – 17 + 18 + 27 – 3

E4) 100 – a – b – c – 80 + 6

E5) p – 15 + 85 + 36 + 24 – 35 – 1

E6) 100 – r – n + 48 – 99 – 18

E7) 65 + 84 – 82 – 13 + 15 – 16 – 4

Tarea 13. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

E1) s + 72 – 67 + s + 67 – 48 – 72 – 5 – s +50

E2) 200 + n +m + n + m –50 + m

E3) 35 – a – a – a – a – a + 60

E4) 3f + 77 + 5f – 82 +23 + 82 – 2f

E5) 17p + 26 – 32q – 16 + 12q + 3p

E6) 150 – 6y – 6y + 267+ 12 y – 66 + 150

E7) 4a – 8b – 6c – 3a + 18b

3. CÓMO COMPARAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Tarea 14. Javier tiene cierto número de cromos, Carmen tiene cinco más que Javier y Carlos el doble que Javier. Si Javier y Carmen juntan sus cromos, ¿tendrán entre los dos más o menos cromos que Carlos? ¿Quién tiene más cromos, Javier, Carmen o Carlos? ¿Y quién tiene menos?

Tarea 15. Laura tiene 35 € más que Alberto y Clara 20 € menos que Alberto. Van a comprar un regalo. Indica cuánto dinero les queda después de comprar el regalo, en los casos siguientes:

a) El regalo cuesta tres veces el dinero de Alberto.

b) El regalo cuesta 24 €.

c) ¿Podrán pagar el regalo si vale 105 €?

Tarea 16. Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:

María	Adrián	Luisa
Recibe 10 €	Gasta 5 €	Recibe 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Recibe 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Recibe 15 €
	Recibe 30 €	Gasta 35 €

a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

(b) Si al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y este 30 € menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

Tarea 17. Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.

E1) $x + 1$ $\quad$ $x - 10$

E2) $p - 7$ $\quad$ $p - 3$

E3) $2a + 5$ $\quad$ $3a + 12$

E4) $25 - z$ $\quad$ $25 - 2z$

E5) a – 4b   a + b

E6) 3n + 5   2n + 30

Tarea 18. Escribe una expresión algebraica que sea mayor y otra que sea menor que cada una de las expresiones que vienen a continuación.

E1) b – 45

E2) r – 27 + 2r – 38 + 17 – r

E3) 33 – 2a

Tarea 19. Escribe una expresión algebraica que sea

E1) 6 unidades mayor que y – 13

E2) 11 unidades menor que 2c – 1

E3) 4 veces mayor que 2n + 3m

E4) 11 veces mayor que 16 – 3a

4. CÓMO ENCONTRAR LA DIFERENCIA ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Tarea 20. Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?

678 + 99	47 + 98	157 – 99	123 + 39	87 – 29
601 – 103	427 + 397	212 – 198	117 – 22	

Tarea 21. Coloca los signos + y – que faltan en las siguientes igualdades:

765 – (100 – 1) = 765 – 99 = 765 __ 100 __ 1

80 – (30 – 1) = 80 – 29 = 80 __ 30 __ 1

141 – (100 + 2) = 141– 102 = 141 __ 100 __ 2

92 – (42 +3) = 92 – 45 = 92 __ 42 __ 3

325 + (200 – 3) = 325 + 197 = 325 __ 200 __ 3

Tarea 22. I) Efectúa las operaciones siguientes, teniendo en cuenta que las operaciones entre paréntesis han de hacerse primero.

a) 12 – (8 – 3) b) 12 – (8 + 3)

c) 12 + (8 – 3) d) 12 + (8 + 3)

II) Efectúa las operaciones siguientes:

e) 12 – 8 – 3 f) 12 – 8 + 3

g) 12 + 8 – 3 h) 12 + 8 + 3

III) Completa la siguiente tabla, colocando al lado de las operaciones del apartado I), las operaciones del apartado II) que tienen el mismo resultado.

Apartado I	Apartado II
12 – (8 – 3)	
12 – (8 + 3)	
12 + (8 – 3)	

12 + (8 + 3)	

Tarea 23. Completa las siguientes frases:

Sumar (a + b) es lo mismo que _______________ a y ________________ b.

Sumar (a – b) es lo mismo que _______________ a y ________________ b.

Restar (a + b) es lo mismo que _______________ a y ________________ b.

Restar (a – b) es lo mismo que _______________ a y ________________ b.

Tarea 24. a) Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?

Nº de canicas de Javier	
Nº de canicas de Carlos	
Nº de canicas de Marcos	
Nº de canicas de Enrique	
Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique	

b) ¿Si sabemos que la diferencia entre el número de canicas de Javier y el de Marcos es 4, ¿cuál será la diferencia entre el número de canicas de Carlos y el de Enrique?

c) Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique
7	
20	

	18
	24
d	
	e

Tarea 25. Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:

i) 7p + 3q 2p – 2q

ii) 4t – 6 – 15 4t – 3 – 2

iii) 21 – 2m +3 – 23 + 5m 10m – 30 + 5m + 25

Tarea 26. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera súmale 7. El resultado réstaselo a 31 y súmaselo a otro número cualquiera.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y réstale 25. El resultado réstaselo al número inicial multiplicado por 9.

c) A 20 réstale un número cualquiera multiplicado por dos. Al resultado que se obtiene, réstale la diferencia entre 30 y el número cualquiera inicial multiplicado por cuatro. A todo eso, súmale 50.

Tarea 27. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

E1) a – (a – 8) + b – 8 – (a + 10)

E2) 17 – (4 – x) + (5 – y) – 15 – 2

E3) c + (25 – c + 15) – (25 – c – 15)

E4) 2m – (7 – 5m) – (7m + 5)

E5) 20 – 10z – (5z – (10 – 2w))

Tarea 28. Cuando las expresiones algebraicas solo contienen números, las operaciones indicadas en los paréntesis siempre se pueden efectuar. Pero, a veces, es mejor deshacer los paréntesis sin hacer las operaciones, porque así el cálculo resulta más sencillo de hacer.

Efectúa los cálculos que se indican en las siguientes expresiones algebraicas, decidiendo en cada caso si es mejor efectuar las operaciones de los paréntesis o deshacerlos sin efectuar esas operaciones.

a) 45 – (371 – 87) + 372 – 87 Deshacer paréntesis: SI NO

b) 8 + 20 – (45 – 44 + 3) Deshacer paréntesis: SI NO

c) 13 + (27 – 20) – (25 – 10 – 15) Deshacer paréntesis: SI NO

d) 5 – (4 – (3 – (2 – 1))) Deshacer paréntesis: SI NO

e) 4578 + 3127 – 578 – (127 +841 + 512) + 841 + 12 Deshacer paréntesis: SI NO

5. CÓMO MULTIPLICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Tarea 29. i) Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es $A = ba$, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura).

a

b

Si nos dicen que a = 3 cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

ii) Si ahora te dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados? ¿Cuánto habrá aumentado su área?

Tarea 30. a) Aplica la propiedad distributiva a las siguientes expresiones para suprimir los paréntesis.

i) 10(a – b)

ii) 4 + 5 (x + 22)

iii) 12(n + m – 4) – 5n + 40

b) Aplica la propiedad distributiva en sentido inverso en las siguientes expresiones (Esta operación recibe el nombre de “sacar factor común”).

i) 3t – 3v + 3z

ii) 5v – 10

iii) 24m + 12

Tarea 31. i) Dibuja un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm. Si el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm obtenemos un nuevo rectángulo. Dibuja este segundo rectángulo. Expresa la longitud de los lados de los dos rectángulos.

ii) ¿Qué pasará con el área del segundo rectángulo?, ¿disminuirá o aumentará respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?

iii) ¿Que longitud tiene que tener el lado desconocido para que los dos rectángulos tengan la misma área?

Tarea 32. A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 5 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.

a) Haz un dibujo del primer rectángulo.

b) Haz un dibujo del segundo y tercer rectángulos.

c) Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos. ¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?

Tarea 33. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $15 – 4(3x – 5) + 2(5 – 7a)$

b) $3p +6q – 3(p + 12 + 2q)$

c) $n(3 + 7n – 6) – m(5 – 6m +2)$

d) $3(6 – 5(3b – 4 +c) + 10b) + 2(5b – 2c)$

e) $7(5 – a) + 11(5 – a) – 9(5 – a)$

Tarea 34. Completa las siguientes frases:

Sumar 2(a + b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Sumar 2(a – b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Restar 2(a + b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Restar 2(a – b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Tarea 35. Tres rectángulos tienen un lado igual que mide 2 cm y sus áreas miden 6 cm^2, 6 + 2a cm^2 y 6 – 4a cm^2.

a) ¿Cuánto mide el otro lado de cada rectángulo?
b) ¿En cuánto se diferencian los lados distintos de los rectángulos?

Tarea 36. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, indica cuántas veces mayor o menor es una que otra.

a) 36t – 4 es _______ veces ________ que 18t – 2

b) 6m + 4n es _______ veces ________ que 16(2n +3m) – 10(2n + 3m)

c) $30c - 60 + 20b$ es _______ veces _______ que $2b + 3c - 6$

d) $7(456x - 319y)$ es _______ veces _______ que $56(456x - 319y)$

Tarea 37. Efectúa las siguientes operaciones de la forma más sencilla posible:

a) $2(17 - 4 \cdot 3) + 5 - 3^3$

b) $(9^2 - 7^2) - (9 - 7)^2$

c) $47(4 \cdot 15 - 35) - 17 \cdot 25$

d) $45 - 5(20 - 4(15 - 3(10 - 6)))$

e) $8 + 2 \cdot 6 - 5 \cdot 6 + 9 \cdot 6 - 4 \cdot 6$

Tarea 38. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera réstale 25. El resultado multiplícalo por 2 y réstaselo a 100. Al resultado réstale 50.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y súmale 2. El resultado vuelve a multiplicarlo por 2 y réstaselo al número inicial multiplicado por 7.

c) A 10 réstale un número cualquiera multiplicado por 5. Multiplica el resultado por 6. Ahora a 10 súmale el mismo número de antes multiplicado por 6 y el resultado multiplícalo por 5. Resta las dos expresiones obtenidas.

6. CÓMO OPERAR LOS NÚMEROS CON SIGNO

Tarea 39. Alberto juega a los cromos. En la primera partida pierde tres cromos, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco cromos y en la cuarta pierde cuatro cromos.

a) ¿Cuántos cromos ganó o perdió?

b) Completa la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió en total
+4	
–6	
	+5
	–3

Tarea 40. Después de jugar dos partidas, Alberto solo se acuerda de que en la primera ganó cuatro cromos. Ana también ha jugado a los cromos y sabe que en la primera partida perdió dos cromos, pero tampoco se acuerda de lo que pasó en la segunda. Completa la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió Alberto en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió Ana en la segunda partida	Diferencia entre el nº de cromos ganado en total por Alberto y el ganado en total por Ana
a	b	
+3	–1	
–3	+4	
+2		+3
–1		–4

	+5	–2
	–2	+2

Tarea 41. En las siguientes expresiones las letras indican ganancias o pérdidas en partidas de cromos. Encuentra el valor numérico de las expresiones, sustituyendo las letras por los números que se indican.

E1) $p - q + 10$ siendo $p = +7$ y $q = +3$

E2) $12 - x - y$ siendo $x = -5$ e $y = +8$

E3) $2(6 - a)$ siendo $a = -4$

E4) $a - 3(b - 1)$ siendo $a = 2$ e $y = -6$

E5) $3(2 - 3n) - 2(3 - m)$ siendo $n = -5$ y $m = 1$.

Tarea 42. Efectúa las siguientes operaciones:

E1) $(-200) + (+300) + (-100) + (-100)$

E2) $(+37) - (-40) - (+23) + (-17)$

E3) $8 + 2((-72) - (-12)) - 18$

E4) $(4x - 7x) - (2x - 6x) + (5x - 10x)$

E5) $((-5) + (-3) - (-1)) - ((-5) - (-3) + (-1))$

Tarea 43.

Completa las siguientes frases:

Sumar un número que suma es lo mismo que ______________ dicho número.

Sumar un número que resta es lo mismo que ______________ dicho número.

Restar un número que suma es lo mismo que ______________ dicho número.

Restar un número que resta es lo mismo que ______________ dicho número.

Tarea 44. a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y encuentra la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra.

1) 6 sobre cero y 5 bajo cero

2) 7 sobre cero y 2 sobre cero

3) 3 bajo cero y 8 bajo cero

b) Si llamamos *T* a la temperatura más alta y *t* a la más baja, escribe la diferencia de temperaturas y utiliza esa fórmula para encontrar las diferencias en los casos anteriores. Comprueba si se obtienen con la fórmula las mismas diferencias que antes.

Tarea 45. Ya sabemos que si una diferencia es positiva significa que el primer término de la diferencia es mayor que el segundo término. En cambio si la diferencia es negativa eso quiere decir que el primer término es menor que el segundo.

Calcula las siguientes diferencias y utiliza el resultado para decidir cuál de los números es mayor o menor, escribiendo el símbolo < ó > entre ellos.

a) (+12) – (+8)	+12 ____ +8
b) (+5) – (–10)	+5 ____ –10
c) (–6) – (+2)	–6 _____ +2
d) (–15) – (–3)	–15 _____ –3
e) (–11) – (+11)	–11 ____ +11
f) (–2) – (–6)	–2 _____ –6

Tarea 46. Lee el siguiente texto:

Hasta ahora hemos visto unos nuevos objetos matemáticos: los números naturales precedidos de un signo + ó –. Sabemos además cómo sumarlos, restarlos y compararlos. En determinados problemas también nos sirven para dar valores a las letras. En resumen, se puede hacer con ellos lo mismo que hacíamos con los números naturales, así que vamos a considerar que estos objetos son también números y les llamaremos NÚMEROS ENTEROS.

Los números enteros son números naturales precedidos de un signo + ó –. A los números naturales precedidos de un signo + se les llama enteros positivos y son equivalentes a los números naturales. A los números naturales precedidos de un signo – se les llama enteros negativos.

Se dice que -2 es el opuesto de +2 y que +2 es el opuesto de –2. Por tanto, también se puede considerar que los números enteros son los números naturales con el añadido de sus opuestos.

Más adelante veremos que los números decimales y las fracciones también se pueden ampliar añadiendo sus opuestos y obtendremos los NÚMEROS RACIONALES.

Tarea 47. a) Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros.

+14, –18, +36, +4, –12, –5, –20, +10, +8, 0

b) Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros.

7, –7, 1500, –3568, –3569, –83, 1, 13, –100, 5

Tarea 48. a) Coloca el signo < ó > entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras solo pueden tomar valores positivos.

1) 9 – a ____ 6 – a

2) 4q – 5 ____ 4q – 8

3) z + 2 _____ 2z + 5

4) d ______ – d

5) m – 2n ____ 3m – n

b) Coloca de nuevo el signo < ó > entre las parejas de anteriores, suponiendo ahora que las letras sólo pueden tomar valores negativos.

1) 9 – a ____ 6 – a

2) 4q – 5 ____4q – 8

3) z + 2 _____ 2z + 5

4) d ______ – d

5) m – 2n _____ 3m – n

c) En las desigualdades anteriores, si las letras pueden tomar valores positivos y negativos, ¿a partir de qué números o relaciones entre números cambia el sentido de la desigualdad?

Tarea 49. Las propiedades siguientes son ciertas para los números naturales. Indica si también se cumplen en los números enteros.

1) Los sumandos son siempre menores o iguales que el resultado de la suma.

2) El minuendo de una resta es siempre mayor o igual que el resultado de la resta.

3) Si los factores de un producto son todos distintos de cero, entonces son menores o iguales que el resultado del producto.

4) El dividendo de una división es siempre mayor o igual que el cociente.

5) No hay ningún número que sea menor que cero.

Tarea 50. Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros.

(+3)(+5)

(+3)(–5)

(–3)(+5)

(–3)(–5)

Tarea 51. Completa las siguientes frases:

Al multiplicar un número positivo por un número positivo se obtiene un número ______________________

Al multiplicar un número positivo por un número negativo se obtiene un número ______________________

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un número ______________________

Al multiplicar un número negativo por un número negativo se obtiene un número ______________________

Tarea 52. Completa las siguientes multiplicaciones, escribiendo el número que falta.

(+3)(   ) = +12

(–7)(   ) = +21

(+5)(   ) = –15

(–6)(   ) = –24

Tarea 53. Realiza las siguientes divisiones de números enteros:

(+12) : (+3)
(+21) : (–7)
(–15) : (+5)
(–24): (–6)

Capítulo 4

Problematización y asuntos que se vuelven problemáticos en la enseñanza de los números enteros. Adaptación de una propuesta

Patricia Detzel - María Elena Ruiz - Ethel Barrio - Lucas Colipe - René Morari

1. Introducción

En la Universidad Nacional del Comahue desarrollamos a partir del año 2012 una investigación desde una perspectiva colaborativa, con profesores de escuelas secundarias, en la que estudiamos y adaptamos una propuesta de enseñanza de los números negativos en un entorno algebraico para su implementación en aulas de la región (Cid y Ruiz-Munzón, 2011; Cid, 2015).

Esta propuesta que estudiamos y fuimos adaptando para su implementación[1], es una propuesta constructiva, innovadora y no se corresponde con el modo de presentación de la enseñanza habitual referida a este contenido, pues abarca de manera conjunta los números negativos con lo algebraico. En general, los números negativos se introducen en el primer año de la escuela secundaria en un entorno aritmético donde inicialmente se definen los números enteros, se establece el orden y luego se abordan las operaciones. Las reglas de cálculo de estos números se justifican recurriendo a ciertos modelos concretos (deudas y haberes o pérdidas y ganancias, juegos con puntuaciones positivas o negativas, personas que entran o salen de un recinto o que recorren un camino con dos sentidos, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, etc.) que actúan por analogía (Detzel, Barrio, Petich y Martinez, 2014).

Durante varios años, entre investigadores y docentes, nos involucramos para (re)pensar ajustes de esta propuesta en función de los condicionamientos institucionales, dando por supuesta la validez teórica de las situaciones en el plano epistemológico y cognitivo. Este camino supuso transitar entre lo que se sabe y se puede enseñar, y entre lo que se desea enseñar pero no se sabe y es necesario aprender. En este sentido, nos cuestionamos cómo emprender

[1] La implementación de la propuesta adaptada se realizó en las aulas de los docentes de escuelas secundarias participantes del grupo colaborativo.

este camino, cómo abordamos los nuevos objetos que emergen de la propuesta, cómo hacer explícitas esas rupturas/diferencias en términos de conocimientos matemático-didáctico. En este andar fue necesario, hacia el interior del grupo, un proceso de deconstrucción y una reconstrucción del conocimiento matemático-didáctico que dé lugar a la problematización y comprensión de las cuestiones matemáticas involucradas en esta propuesta, para poder implementarla en aulas singulares. Atender estas cuestiones fue una tarea compleja que demandó mucho tiempo y nos llevó como grupo colaborativo a la búsqueda de nuevos significados, que implicó una deconstrucción de ideas, y a discernir puntos claves de la propuesta que se pusieron en tensión con nuestras concepciones. Así, adentrarnos en este proceso de deconstrucción y reconstrucción del conocimiento matemático-didáctico, que fundamenta y organiza la acción sobre la enseñanza de los números negativos, nos posibilitó dotarlos de sentido en un entorno algebraico.

Es compartida por varios investigadores (Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril y García, 2016, 2019; Perrin-Glorian y Bellemain, 2016; Perrin-Glorian, 2019; Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier y Lebuis, 2001; Bednarz, 2013, 2015; Fiorentini, 2013) y tal como se expresa con más detalle en el capítulo 2 de este libro, la necesidad de un estudio conjunto –entre docentes e investigadores– de propuestas constructivas para la enseñanza de la matemática, producto de investigaciones que por ser genéricas, deben atender a las condiciones para ser implementadas en aulas comunes. Se trata de organizaciones matemáticas independientes de los condicionantes del funcionamiento institucional donde los sujetos que intervienen tienen un carácter genérico. Así, las situaciones de estas propuestas constructivas provenientes de la investigación son modelos para una potencial enseñanza que dan lugar a la construcción de conocimiento con sentido (Brousseau, 1983, 1986). Por esta razón, es necesario entonces estudiar y articular, en el interior del grupo colaborativo, lo genérico con lo singular, en una dinámica de problematización constante, que resulte más dialéctica con las prácticas de enseñanza en aulas particulares de nuestra zona.

Atender lo singular nos llevó a la construcción de adaptaciones en un proceso de colaboración cuyo objeto de estudio son conocimientos matemático-didácticos de los números negativos en un contexto algebraico. Entendemos que es ahí donde cobran sentido los modos de funcionamiento de las clases reales, donde se ponen en juego los conocimientos de los docentes y sus prácticas en relación a este contenido matemático, las maneras de llevar adelante esta propuesta, su margen de maniobra, las interacciones de los alumnos, entre otras cuestiones.

De esta manera buscamos integrar aspectos inherentes a la propuesta con el trabajo docente donde las prácticas de enseñanza cobran un rol fundamental.

Así, es intención de este escrito atender a ciertos interrogantes que se fueron gestando a lo largo de varios años en el grupo colaborativo: ¿En qué medida el estudio *a priori* de las situaciones genéricas permite contemplar las particularidades del aula? ¿En qué sentido el trabajo compartido interpela la comprensión del proceso de apropiación de los saberes mediante la deconstrucción/reconstrucción de los mismos? ¿Cómo lograr una transposición didáctica que implique el paso del conocimiento de referencia al conocimiento por enseñar y al conocimiento realmente enseñado en la clase? ¿Cómo se da un diálogo genuino entre la conceptualización de los objetos matemáticos que emergen de la propuesta y las prácticas habituales?

Para aproximar algunas respuestas a la hora de pensar posibles recorridos en el aula en relación a la enseñanza de los números negativos en el ámbito algebraico, presentamos en este capítulo muchas, pequeñas y variadas relaciones que supone un trabajo de deconstrucción y de reconstrucción del objeto de enseñanza en el interior del grupo colaborativo. De este modo, el conocimiento matemático-didáctico deviene en eje de nuestras discusiones a partir de problematizar, tanto a los objetos matemáticos involucrados en la propuesta estudiada como a los asuntos derivados del objeto matemático que se vuelven problemáticos a la hora de su implementación en las clases comunes.

La convergencia de estas cuestiones en los espacios de estudio compartido –la problematización y los asuntos que se vuelven problemáticos– abre un diálogo entre lo ideal y lo posible que nos lleva a un trabajo de reconceptualización de los objetos en juego. Es la teoría, lo genérico, que hace posible analizar situaciones *a priori* (Perrin-Glorian y Bellemain, 2016); en nuestro caso, la problematización de los números enteros en el ámbito algebraico, y es la adaptación de la propuesta y su implementación la que enfrenta esta teoría con la eventualidad de lo cotidiano, con la realidad del aula, con lo posible, con lo singular, generando asuntos que se vuelven problemáticos.

Abordaremos la problematización del rol de las expresiones algebraicas en el desarrollo de las técnicas de simplificación de algunas expresiones; como así también en la comparación de las mismas. En este sentido hablamos de un proceso de reconceptualización de los objetos pues la propuesta que estudiamos considera que la razón de ser de los números negativos viene dada por el trabajo con el cálculo algebraico. Se parte de operaciones aritméticas con números naturales ya conocidas por los alumnos y se resuelven problemas contextualizados que hacen aparecer modelos/expresiones algebraicas. El trabajo con estas expresiones algebraicas permite que los números naturales comiencen a funcionar como sumandos y sustraendos[2]. El tratamiento de cómo funcionan estos modelos da lugar, por un lado, a las reglas de cálculo entre sumandos y sustraendos y estas nuevas reglas son las que van a justificar las operaciones con números enteros. Por otro lado, reconocer las nuevas concepciones que la propuesta trae aparejada en referencia al nuevo significado de la resta como diferencia y a la ampliación del concepto de número, abona la idea de por qué el número negativo se da en un contexto algebraico. Estas reconceptualizaciones las desarrollamos en el apartado 2, Problematización de los objetos matemáticos inherentes a la propuesta didáctica.

Al ser una propuesta constructiva es importante focalizar en los modos de gestión de la clase y atender los asuntos que se volvieron problemáticos a la hora de su implementación para anticipar posibles intervenciones, en cada una de las actividades planteadas. Dichas intervenciones se pensaron de modo que, a partir de las ideas que surjan de la resolución de los diferentes problemas se institucionalicen los conocimientos a enseñar. Sin embargo, advertimos que no todas las cuestiones matemáticas que deberían aparecer, van a surgir de la interacción de los alumnos con las actividades que resuelven, hay cuestiones donde es el docente el que tendrá que intervenir para hacerlas explícitas y éste es un tema que toma importancia, en los espacios de discusión del grupo colaborativo. En el apartado 3, Problematización de asuntos vinculados a la enseñanza, analizamos estas cuestiones que devienen de la implementación.

Nuestras conclusiones retoman esos puntos claves que resultaron ejes de nuestras discusiones a partir de problematizar los objetos matemáticos involucrados en la propuesta y los asuntos que se vuelven problemáticos a la hora de su implementación en las aulas comunes de la región.

2. Problematización de los objetos matemáticos inherentes a la propuesta didáctica

En la enseñanza habitual vemos que los números enteros y el álgebra se presentan como dos dominios de conocimiento disjuntos. Sin embargo, esta propuesta plantea su introducción en forma simultánea, estableciendo un vínculo estrecho entre ambos dominios. Se propone una introducción que toma como base conocimientos del cálculo aritmético que los estudiantes

[2] Son las peculiaridades del cálculo algebraico las que fuerzan a operar con sumandos y sustraendos, en vez de con números.

disponen y se pretende, mediante rupturas, hacerlos evolucionar hacia nuevos conocimientos algebraicos, los que se constituirán en la base para una nueva concepción de número y para justificar los cálculos en el conjunto de los números enteros.

Esta entrada pone en escena modos de hacer y conceptos algebraicos que en la enseñanza habitual son objetos de enseñanza en sí mismos. Sin embargo, en esta propuesta se presentan al servicio de otras nociones; es decir, conviven con conocimientos implícitos vinculados al trabajo con los números negativos. El entramado de esa convivencia es una de las cuestiones que se fue esclareciendo en un proceso de problematización permanente en el grupo colaborativo. Así, por un lado, la construcción y simplificación de determinadas expresiones algebraicas más que estudiarlas en sí mismas, cumplen un rol fundamental en un recorrido que permite evolucionar de un cálculo aritmético a un cálculo algebraico y avanzar en las operaciones de los números enteros. Por otro lado, la comparación de expresiones, más que limitarse al tratamiento de inecuaciones, abre un camino para empezar a dar sentido al número negativo como el resultado de una diferencia negativa.

Nos posicionamos en esta problematización que permite evidenciar la ruptura necesaria entre lo aritmético y lo algebraico. Los objetos tales como las letras, los signos + y –, las técnicas de cálculo cambian su significado y emergen así nuevos objetos algebraicos, exigiendo una reflexión y toma de decisiones que dependen de su funcionalidad.

2.1 El rol de las expresiones algebraicas

A continuación, desarrollaremos el rol de las expresiones algebraicas para construir las reglas de cálculo para la suma y el producto de sumandos y sustraendos apoyados en los conocimientos de los números naturales.

En la suma. La propuesta didáctica propone un trabajo a partir de la manipulación de determinadas expresiones algebraicas o más precisamente programas de cálculos aritméticos, PCA[3], que permiten poner en juego los diferentes usos y significados de los signos + y – para construir reglas de cálculos para sumandos y sustraendos. Así, en una primera instancia, se parte de grupos de problemas del mundo sensible, que dan lugar a crear modelos que son expresiones algebraicas o PCA, para luego centrar el estudio en el funcionamiento de los mismos.

[3] Chevallard (2005), le da el nombre de programa de cálculo aritmético (PCA) a una cadena de operaciones aritméticas que se realizan a partir de los datos de un problema.

En principio, será necesario entonces, habilitar en el aula un trabajo en el que modelos del tipo $x - a + b$*, con* $a > b$ y con x, a y b números naturales, posibiliten cálculos que permitan gestionar el paso de expresiones tales como $x - 9 + 7$ a su forma reducida $x - 2$. Para ello hay que crear lazos entre la equivalencia de las expresiones $x - 9 + 7$ y $x - 2$, apoyada por el contexto. Por ejemplo, *cromos perdidos y ganados* con el cálculo $x - 9 + 7 = x - 2$, apoyado en las reglas *restar 9 y sumar 7 es lo mismo que restar 2*. Luego, en un proceso de descontextualización donde esos modelos se toman como objeto de estudio, dan la posibilidad a que emerjan las reglas de cálculos entre sumandos y sustraendos y que se constituyan en el soporte para la operatoria de los números enteros. Es decir, la producción de una expresión algebraica y el análisis del desarrollo de los cálculos involucrados en la misma, permitirá reemplazar las acciones de subir, bajar, perder, ganar, etc. por las de sumar y restar.

Advertir en este proceso que los significados de los signos + y – cambian según las decisiones que se toman en los cálculos, nos permitió ir reconociendo, si los procedimientos de resolución se encontraban en un ámbito aritmético o algebraico, más allá de la presencia o no de una letra. Por ejemplo, en la expresión $12 - 4 - 5 + 4$ si se hace $12 - 4 - 5 + 4 = 8 - 5 + 4 = 3 + 4 = 7$, los signos + y – estarían funcionando como operadores binarios entre números y se estarían resolviendo sumas y restas entre números naturales que asociamos con un cálculo aritmético en el ámbito numérico. Algo similar ocurre, aunque intervenga una letra, con la resolución de $x + 10 - 3 = x + 7$. Sin embargo, si se resuelve $12 - 4 - 5 + 4 = 12 - 5 - 4 + 4 = 12 - 5 = 7$, los signos + y – están funcionando como predicativos indicando una cualidad del número sin signo que acompañan una suma implícita[4], que asociamos con un trabajo más algebraico. Una vez distinguidos estos dos tipos de cálculos, y que tenemos asumido que están presentes en el manejo de los números negativos, nos preguntamos: ¿Cómo se pasa de un cálculo aritmético a un cálculo algebraico?

Esclarecer esta evolución, implicó abordar los diferentes significados de los signos + y – y usos de los paréntesis. Estos diferentes usos y significados muchas veces suelen pasar desapercibidos en la enseñanza, y no se tiene en cuenta que son conocimientos necesarios para el dominio de los números negativos. Así, es bastante común encontrarse con el uso de reglas del producto en la resolución de una operación que es del ámbito aditivo; es decir, se hace una

[4] En este caso se está resolviendo la suma de los términos +12, –4, –5 y +4, donde el signo binario, que indica la suma entre ellos, no aparece. Es una suma no escrita la que habilita ese modo de hacer, la resta entre naturales no es conmutativa. Reconocer que en este cálculo están involucradas implícitamente las propiedades asociativa, conmutativa, existencia del neutro y de los opuestos, propias de la operación suma de los números enteros, es lo que posibilita entrar en un proceso de construcción de dicha operación.

transferencia de reglas multiplicativas al campo aditivo, por ejemplo justificar que $4-(-2)$ es $4+2$ porque *menos por menos es más*[5]. El manejo de esos signos viene del álgebra y la simplificación de determinadas expresiones algebraicas pone en evidencia ese funcionamiento.

Habitualmente en la enseñanza se da por supuesto el tratamiento, funcionamiento y significado de los signos. Por ejemplo, en la escuela primaria los signos + y – indican la suma y la resta entre números sin signos. Sin embargo, cuando se avanza en la escuela secundaria y se entra en el álgebra, los significados de estos signos son importantes en las técnicas de cálculo algebraico, cuestión que pasa inadvertida y queda a cargo de los estudiantes.

Entendemos que hacernos cargo de esta problemática, es una puerta de acceso a la comprensión e interpretación de algunas de las dificultades en los aprendizajes de los alumnos a la hora de manipular los signos, que generalmente suelen traducirse como errores de ellos.

En el producto. Otra idea clave de la propuesta, que también se problematizó en el grupo colaborativo, fue la construcción de expresiones aditivo-multiplicativa a partir de diferencias de áreas de rectángulos, que dan lugar a las reglas de cálculo del producto de los números enteros. Estas expresiones aditivo-multiplicativas se gestan desde un contexto geométrico. ¿Cuál es la ventaja de un contexto geométrico? En particular, los problemas que involucran áreas de rectángulos conllevan a un sentido de la multiplicación más allá de la suma reiterada (ver tareas 29 y 32). Observamos que el cálculo de áreas de rectángulos en los que la medida de uno de sus lados se desconoce da lugar a analizar cuándo se hace necesario usar paréntesis en una expresión y a convenir la escritura del producto. En referencia a esta cuestión, identificamos un tipo de problemas que involucra la comparación de áreas de rectángulos en las que sólo varía uno de los lados, lo que permite encontrar y justificar que la diferencia entre las expresiones corresponde a un número. En este caso, el trabajo algebraico encuentra su apoyo en lo geométrico, pues el dibujo facilita encontrar la diferencia entre las áreas de los rectángulos sin necesidad de expresar las áreas: ax y $a(x+b)$. En esa certeza se gestiona la construcción de nuevas expresiones en las que el paréntesis empieza a tener protagonismo (Ver tarea 29).

Resaltamos expresiones de Cid (2015), en relación a que el control en el cálculo algebraico está en la sintaxis, y en este sentido es importante darle un lugar en la enseñanza a los códigos de escritura y a los significados de los signos. Asumir que en ax y que en $a(x+y)$

[5] El punto 6 del capítulo 3 de este libro: La introducción escolar de los números negativos..., hace referencia a este tipo de dificultades y errores.

hay una operación cuyo signo no se escribe y que hay nuevas reglas que involucran la propiedad distributiva forma parte de los conocimientos necesarios para avanzar en el cálculo algebraico. Así, al ingresar con el producto, se torna fundamental trabajar el uso de los paréntesis y la prioridad de las operaciones.

A medida que se avanza en la propuesta, se pone en juego hallar la diferencia entre expresiones del tipo $a(x \pm b)$ y $c(x \pm d)$ con a, x, b, c y d números naturales y a distinto de c, lo cual exige lidiar con cálculos como $a(x \pm b) - c(x \pm d)$, donde la propiedad distributiva tiene un rol fundamental. El estudio del funcionamiento de estas expresiones habilita la gestión de una operación entre paréntesis multiplicada por un sumando o un sustraendo. Se propone, trabajando primero con la propiedad distributiva y la supresión de paréntesis a partir de la creación y manipulación de los PCA, llegar a construir la regla de los signos para la multiplicación.

Reconocemos la importancia de abordar este trabajo siendo conscientes de que aquí también se pone en tensión un "hacer aritmético" que persiste y encuentra un límite en estos nuevos cálculos, de modo similar a lo que ocurre con las reglas para sumar. La búsqueda de las diferencias entre las expresiones indicadas anteriormente, obliga a cálculos que deberán evolucionar de aplicar la propiedad distributiva entre números naturales (ya conocida), hacia una propiedad distributiva entre sumandos o sustraendos. Las reglas de cálculo para la suma y la resta, construidas anteriormente, se constituirán en el soporte para llevar a cabo este proceso. El asunto es vincular las expresiones donde el sustraendo esté constituido por el producto de un número por una suma o diferencia como por ejemplo $8(b-3)-2(b+3)$, con las que se reducen a sumas de sumandos y sustraendos como $8b-24-2b-6$. Así, afirmándose en conocimientos disponibles como son la propiedad distributiva entre naturales y la regla "resta de una suma"[6] se da lugar a una nueva técnica que permitirá resolver el producto de un sumando o sustraendo por una suma o diferencia.

Hasta aquí hemos abordado la construcción de nociones que la propuesta tiene en términos de problematización, haciendo posible avanzar en los cálculos manipulando los números negativos a nivel implícito y buscando reflexionar para dar razones acerca de *por qué se hace lo que se hace*, con una mirada más amplia de la matemática que se enseña, frente a la presentación ostensiva en la enseñanza tradicional. Ahora nos preguntamos, ¿En qué otros

[6] Para resolver, por ejemplo, $x-(2y+6)$ se concibe como la resta de una suma y se usa la regla de cálculo: *Restar a+b es lo mismo que restar a y restar b*. Para ampliar esta idea ver tarea 23 del ANEXO en el capítulo 3 de este libro.

aspectos los objetos algebraicos juegan un rol importante a tener en cuenta para la construcción del número entero?

Nos abocaremos a analizar las nuevas concepciones que emergen en esta propuesta y que fueron también motivos de problematización en el grupo colaborativo. Estas son, la concepción de la resta entendida como una diferencia y la ampliación de la idea de número no asociada a las magnitudes.

2.2 Las nuevas concepciones

Atender el recorrido que presenta la propuesta implica emprender cambios/ampliaciones en términos de ideas matemáticas involucradas. Por un lado, este andar conduce un cambio del significado aritmético de la resta como sustracción, vinculada a la acción de quitar, al significado algebraico de la resta como diferencia. Por otro lado, la noción de número se amplía pues deja de estar asociada a las magnitudes.

La resta como diferencia es el resultado de una comparación entre los cardinales de dos conjuntos en un orden establecido que informa en cuánto es mayor o menor uno que otro. Por ejemplo, si A tiene una cantidad x y B tiene una cantidad y, la diferencia entre lo que tiene A y lo que tiene B es la cantidad $x - y$ *;* es decir, que A tiene $x - y$ elementos más/menos que B. ¿Cómo se presenta en la propuesta para cargar de sentido esta nueva concepción de diferencia?

El trabajo con expresiones algebraicas permite marcar cierta distinción con el álgebra en relación a la aritmética y así, aceptar objetos que en aritmética no tienen sentido. En álgebra es frecuente que no pueda establecerse de antemano cuál de los términos de una resta es mayor, y es por eso que una diferencia negativa tiene sentido. Reinterpretar la resta como diferencia da esa posibilidad y contribuye a dar sentido al número negativo ligado al álgebra y con la propiedad de ser menor que cero. De este modo, el cálculo de diferencias de expresiones hace viable una nueva concepción de número que se desprende de un trabajo algebraico. Así, un número negativo será el resultado de una diferencia en la que el minuendo es menor que el sustraendo.

Concebir este sentido de resta, permite construir las reglas de cálculo[7] para multiplicar sumandos y sustraendos y las de operación de operación[8], dando lugar a presentar los números

---

[7] Las reglas de cálculos para la multiplicación se tratarán en la tarea 34 del ANEXO en el capítulo 3 de este libro.
[8] Las reglas de cálculo de operación de operación se tratarán en la tarea 23 del ANEXO en el capítulo 3 de este libro.

negativos en un ámbito algebraico, desvinculado de las magnitudes. Al respecto Cid (2015) plantea que estos números no se construyen históricamente sobre la base de necesidades extramatemáticas, sino que surgen por necesidades internas a la matemática ligada a una mejor gestión del cálculo algebraico.

Tanto la concepción de número asociada a las magnitudes, como la idea de resta vinculada a la acción de quitar, son ideas que obstaculizan la construcción del número negativo. En este sentido, Cid, Godino y Batanero (2003), explican que bajo esta concepción, el cero indica la ausencia de cantidad de magnitud, por lo que no puede haber números menores que cero; la suma se asocia con acciones de añadir o reunir, por lo que el resultado tiene que ser mayor o, a lo sumo, igual que los sumandos; la resta se asocia con acciones de separar o quitar, por lo que el resultado tiene que ser menor o, a lo sumo, igual que el minuendo. Si en una resta el minuendo es menor que el sustraendo, la operación es imposible porque no se puede quitar más de lo que se tiene. Así, estas afirmaciones son consustanciales al concepto de número y tienen una influencia decisiva en su construcción. Sin embargo, aceptar la existencia de los números con signo supone asumir que los números y sus operaciones ya no tienen, en general, las propiedades antedichas. Entender que los números no siempre expresan medidas de cantidades de magnitudes absolutas, que existen números menores que cero $(-3 < 0)$, que cero no siempre indica ausencia de cantidad de magnitud, que sumar no siempre significa aumentar $((+3) + (-2) = +1)$, que restar no siempre significa disminuir $((+3) - (-2) = +5)$, que a un número se le puede restar otro número mayor $(6 - 8 = -2)$; exige una reestructuración del concepto de número. No se trata de añadir más información a la que ya se posee, sino de modificar sustancialmente nuestro concepto de número, de elaborarlo de nuevo, asumiendo que muchas propiedades fundamentales, que creíamos ciertas para todos los números, ahora ya no lo son (Cid, Godino y Batanero, 2003, p. 405).

Además, la comparación de expresiones está al servicio de otorgar sentido al número negativo. Por esta razón interesa poder determinar cuándo una expresión es mayor/menor que la otra para determinar que la diferencia entre ellas sea positiva o negativa. Esta idea permite abordar la escritura de los resultados de las diferencias, habilitando la presentación de un número negativo como resultado de una diferencia en la que el minuendo es menor que el sustraendo. Por ejemplo, la diferencia entre $(x - 4)$ y $(x - 1)$ es 3 y conocer que $(x - 4)$ es menor que $(x - 1)$ es lo que permitirá analizar la pertinencia de agregar el signo – al 3. Es decir –3 será el resultado que indica de cuánto es la diferencia entre esas expresiones y el signo del número se corresponde con que la primera expresión es menor que la segunda.

Esclarecer, por un lado, el vínculo entre el rol de las expresiones algebraicas y la operatoria de sumandos y sustraendos, y por otro lado, atender las nuevas concepciones que emergen en el tratamiento de la propuesta, nos ubicó en un proceso continuo de problematización y de deconstrucción/reestructuración de ideas relacionadas con la entrada tradicional de los números enteros.

A continuación, presentaremos otro de los puntos claves que resultaron ser eje de nuestras discusiones en los espacios de estudio compartido a la hora de pensar la implementación de la propuesta en aulas de la región.

3. Problematización de asuntos vinculados a la enseñanza

La propuesta hace aparecer ciertos objetos matemáticos acompañados con sus técnicas de manipulación los cuales se vuelven problemáticos tanto en la conceptualización como en la implementación, y en consecuencia es necesario realizar un análisis matemático-didáctico de los mismos. Nos preguntamos entonces, ¿Qué acciones didácticas serían oportunas/pertinentes para acompañar las tareas de la propuesta que permitan llegar a la operatoria de números enteros?

Uno de los puntos claves que resultaron ser eje de nuestras discusiones en los espacios de estudio compartido a partir de problematizar los objetos matemáticos y atender la problematización de los asuntos en la enseñanza, fue el modo de hacer los cálculos. La evolución de un cálculo aritmético a un cálculo de tipo algebraico, según lo proponen Cid (2015) y Cid y Bolea (2010), se da a partir de construir reglas de cálculos de sumandos y sustraendos usando expresiones algebraicas y reinterpretando los significados de los signos + y –. ¿Cómo se aborda este proceso en la propuesta?

A continuación, analizaremos de qué manera los modos de calcular en aritmética evolucionan hacia el quehacer algebraico en la implementación de la propuesta. Para ello consideraremos las tareas propuestas de la secuencia didáctica que se encuentran en el ANEXO del capítulo 3. En primer lugar, abordaremos las reglas de cálculo instalando la idea de sumandos y sustraendos a partir de manipular expresiones algebraicas para instalar los números con signos considerando cantidades positivas y negativas, llegando finalmente a los números enteros.

3. 1 Expresiones algebraicas aditivas y modos de hacer los cálculos

Los problemas contextualizados permiten al estudiante “hacer” y dan la posibilidad de controlar que, lo que se hace funciona, admitiendo una resolución a partir de las acciones de añadir, quitar, ganar, perder, subir, bajar. Esos procesos se realizan partiendo de una noción de la letra como variable (cantidad inicial de cromos, de pasajeros, etc.), donde para diferentes valores de la misma y mediante una cadena de operaciones aritméticas se obtiene un resultado numérico. Sin embargo, será necesario estudiar el funcionamiento de los programas de cálculo como modelos que representan un conjunto de situaciones.

Las tareas que presentamos y analizamos a continuación dan cuenta de este proceso:

> **Tarea 1***: Laura se llevó sus cromos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 cromos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos cromos le quedaron después de jugar?*

Las discusiones en el grupo y las diferentes implementaciones durante varios años, nos permitió esclarecer que la intención de este problema es la de comenzar a construir un contrato didáctico que habilite una entrada al trabajo algebraico y en ese sentido establecer con los alumnos que la respuesta a un problema puede ser una relación y no necesariamente un número, por ejemplo, *después de jugar le quedaron dos cromos menos que al inicio.*

Observamos que, por un lado, admite una solución apoyada en el contexto y en los conocimientos que los alumnos tienen de la operatoria con números naturales. Es posible que los estudiantes resuelvan cadenas de cálculos usando distintos valores para la cantidad de cromos inicial y luego, con una gestión del docente en principio se acepte la respuesta que *le quedaron dos cromos menos que al principio.* Por otro lado, esta situación donde falta un dato inicial podría asociarse con la expresión $x - 9 + 7$, donde x es la cantidad de cromos que Laura llevó al colegio. Nos preguntamos: ¿Cuándo y cómo aparece esta expresión en la clase? y ¿Para qué?

Después de llevar la tarea al aula, alertamos la conveniencia de no forzar la entrada de dicha expresión en la clase. En una de las primeras implementaciones, algunos estudiantes reclamaban que no se puede resolver el problema porque no se sabe cuántos cromos lleva Laura al colegio. Ante esta cuestión y pensando de manera conjunta la gestión de la clase, se avanza en que, si falta un dato o no se conoce una cantidad, puede usarse una letra. Esto condujo a producciones de los alumnos del tipo $x - 9$; $z + 7$ y N como resultado final, donde escribían una expresión por cada partida y usaban una nueva variable por cada estadio intermedio. Así, la clase gira alrededor del tratamiento del uso de la letra con una gestión laboriosa por parte del docente para recuperar la cadena de cálculos involucrados en la resolución del problema.

En las primeras clases observamos que los estudiantes podían decir que expresiones del tipo $x - 13 + 3$ son iguales a $x - 10$ apoyados en problemas que consisten en perder, ganar, subir, bajar; sin embargo, cuando se avanzó hacia el trabajo en las expresiones descontextualizadas aparecen respuestas del tipo $x - 16$, donde se sigue trabajando en un plano aritmético[9]. Una cuestión a considerar es que si se justifica que $x - 13 + 3$ es $x - 10$ eligiendo distintos valores para x cumpliéndose la igualdad, seguimos en un plano aritmético que no permite avanzar hacia la ruptura necesaria con el cálculo algebraico. Así, fue necesario pensar una gestión de la clase que tenga en cuenta una tensión entre la necesidad de volver al contexto para que los estudiantes adviertan el error y la necesidad de dejar el contexto para avanzar en el nuevo cálculo. Esa tensión es necesaria debido a que, por un tiempo en la clase, persiste el cálculo aritmético que es el soporte, pero que hay que abandonarlo, para dar lugar al cálculo algebraico a través de esa ruptura.

Este asunto nos llevó a (re)pensar en un ir y venir entre los problemas contextualizados y el trabajo en las expresiones descontextualizadas. ¿Cómo pasar de justificar la equivalencia de expresiones que representan una misma situación (basadas en contextos), a la construcción de las reglas de cálculos poniendo en juego la composición de traslaciones (sin contexto)? ¿Cómo ir construyendo el discurso que permite simplificar expresiones? Este trabajo es arduo y la gestión del docente se torna fundamental.

En expresiones del tipo $x - 13 + 3$ para justificar que es $x - 10$ será necesario que los estudiantes dejen de percibir sumas y restas de números naturales para comenzar a ver a los números asociados a las acciones de sumar y restar para luego reducir dos acciones a una sola. Para ello, debemos comenzar a instalar en el aula discursos tales como *restar 13 y sumar 3 es lo mismo que restar 10*, que luego se constituirán en reglas de cálculos. Esto trae a discusión ¿Cuál será el momento oportuno para comenzar a hablar en la clase en estos términos y cómo se gestionaría?

[9] En la Introducción del capítulo 3 de este libro, Cid hace referencia a este tipo de errores.

En varias ocasiones, durante la implementación, diseñamos más tareas[10], con la finalidad de hacer actividades de repaso o actividades para la evaluación. Para ello fue necesario ir explicitando las condiciones de las expresiones que se generan; es decir, poner a consideración algunas variables didácticas. Una de ellas fue proponer problemas que debían dar la posibilidad de construir expresiones que encuentren un límite en el cálculo aritmético, ¿Qué significa esto? ¿Cómo se logra este objetivo? Para ello, evitaríamos expresiones tales como $x + 9 - 7$ que permiten una resolución aritmética y no conllevan a una ruptura con este modo de calcular, pues a 9 se le puede quitar 7. Cid (2015) plantea que es necesario enfrentar a los estudiantes con un cálculo que no se pueda realizar en el ámbito aritmético. Es decir, hay que favorecer expresiones en las que la simplificación provoque un desafío. Por ejemplo, en expresiones del tipo $x + 7 - 9$, donde a 7 no le puedo sacar 9, o expresiones como $x - 9 + 7$, porque a *x* no le pueden quitar 9. Este tipo de expresiones permite evaluar la persistencia en el cálculo aritmético a partir de la aparición de algunos errores frecuentes como $x - 9 + 7 = x - 16$, como lo dijimos anteriormente. Por ello, se miran con gafas de carácter constructivo pues permite habilitar en el aula su tratamiento y así problematizar este asunto.

También es importante tener en cuenta otra variable didáctica y es la que considera que en la expresiones la letra no esté siempre en el inicio como por ejemplo $13 - x - 9$, para poner en juego, de manera implícita, la propiedad conmutatividad de la composición de traslaciones; es decir, para simplificar la expresión anterior se puede pensar que: *restar primero x y después 9 es lo mismo que restar primero 9 y después x* y resulta $13 - x - 9 = 13 - 9 - x = 4 - x$.

Considerar estas variables didácticas permite trabajar con la simplificación de expresiones algebraicas, reinterpretando las operaciones aritméticas de sumas y restas como composición de traslaciones que tienen propiedades y justifican dicho cálculo. Este análisis aporta un valor didáctico que favorece un trabajo en el aula mostrando la economía y destacando el carácter no algorítmico del cálculo algebraico. En este sentido, las tareas 6, 8, 20 y 21 nos resultaron representativas para hacer evidente estas cuestiones.

[10] Se llevaron a clase afiches, cada uno tenía escrito una de las situaciones del estilo de las que presentamos a continuación. Se les pidió a los alumnos en grupos de 4 ó 5 que escribieran en cada afiche la resolución y la respuesta del problema. Y que agregaran todas las explicaciones que consideren necesarias.

1) José llevó sus figuritas al colegio para jugar, en el primer recreo perdió 8 figuritas y en el segundo perdió 6, ¿con cuántas figuritas volvió José a su casa?

2) Ema tiene una cierta cantidad de dinero, compra $6 en chicles y $3 en caramelos. ¿Con cuánto dinero vuelve a su casa?

3) Lucas tiene una cierta cantidad de dinero, en el camino se encuentra $5 y luego compra $9 en gomitas ¿Con cuánto dinero vuelve a su casa?

La tarea 6 fue modificada[11] por el grupo colaborativo y es la siguiente:

Tarea 6 (modificada): *Un vendedor tiene celulares y tablets. Luego compra 21 celulares y 57 tablets. Después vende 30 celulares y 70 tablets. Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas*

N° inicial de celulares	*N° inicial de tablets*	*N° inicial de artículos*	*N° final de celulares*	*N° final de tablets*	*N° final de artículos*
80	150				
			65	120	
50					
				90	

La intención didáctica de este problema es que los alumnos, al completar la tabla reflexionen sobre los modos de hacer los cálculos. Nos preguntamos: ¿Por qué la presentación de esta actividad tiene formato de tabla? ¿Cuáles serían las ventajas didácticas de esta presentación? ¿Cómo interpretamos, en términos de variable didáctica, la última fila? Encontrar explicaciones para estos y otros interrogantes que fueron surgiendo a medida que avanzábamos en el análisis nos ayudaron a comprender en qué sentido esta actividad favorece la transición del cálculo aritmético al cálculo algebraico.

Observamos que, en las dos primeras filas de la tabla, los signos + y – son signos que intermedian entre dos números, signo operativo binario. En estas filas el control de los resultados es semántico, como en aritmética, pues depende del significado que tengan los números en el contexto del enunciado del problema. A partir de la tercera fila los signos que afectan a un solo número indican su papel como sumando o sustraendo, aparece un nuevo significado, el operativo binario generalizado[12]. Es decir, la falta de algún dato impide obtener una solución numérica y fuerza a plantear una expresión algebraica con la finalidad de contribuir a las técnicas de cálculo de la suma con números negativos a nivel implícito.

[11] La modificación del enunciado de la tarea 6 se hizo con el objetivo de proponer un contexto más familiar para los alumnos.

[12] Significado operativo binario generalizado: indica que un número tiene en la expresión algebraica un papel como sumando o sustraendo.

La ruptura entre lo aritmético y lo algebraico se inicia en la tercera fila. El no conocer la cantidad inicial o final de tablets hace que los alumnos den cuenta del uso de la letra para representar la cantidad desconocida T y la acción de vender y comprar del contexto, ayuda a pensar en sumandos y sustraendos. El tamaño de las celdas dificulta escribir la expresión $T + 57 - 70$, y esto da pie para proponer una escritura más reducida, dando lugar a un trabajo algebraico sobre la expresión $T + 57 - 70 = T - 13$. Si bien el problema se presenta contextualizado, su formato en tabla exige gran cantidad y variedad de cálculos que estarían favoreciendo la manipulación de las expresiones e ir dejando de lado el contexto. En la medida que se pasa de una celda a otra se van construyendo las reglas de cálculo que son necesarias para dar respuesta al problema.

El trabajo con el problema requirió varios análisis y reflexiones, que a su vez los fuimos tratando como asuntos que se volvieron problemáticos a la hora de pensar su implementación. Ahora bien ¿Cuáles son estas cuestiones a las que nos referimos? ¿Cómo pensar una gestión para trabajar este problema en el aula? ¿Qué conocimientos y estrategias disponen los alumnos para obtener la expresión $T - 13$? Realizar la operación $+57 - 70$ no es posible en el campo de los números naturales, aunque pueda resolverse ayudándose por el contexto.

Nos interesa retomar la idea que, desde la 1º fila**,** si bien se proponen números que posibilitan hacer los cálculos y encontrar un resultado numérico, estos pueden constituirse en el soporte para abordar el funcionamiento de los números como sumandos y sustraendos. Por un lado, para una cantidad inicial de 150 tablets, la cantidad final es 137; es decir, 13 menos que la cantidad inicial. Es posible asociar $150 + 57 - 70$ con $150 - 13$ apoyándose en el contexto: *sumar 57 tablets y luego restar 70 es lo mismo que restar 13 tablets.* Hacer notar el vínculo entre $150 + 57 - 70$ y *13 menos que al principio,* surge de pensar $+57 - 70$. Por otro lado, en la primera fila la cantidad inicial de celulares es 80 y la final es 71. En el trabajo algebraico de la cuarta fila resulta la expresión $C - 9$ para la cantidad final de celulares; es decir, que la cantidad final de celulares es nueve menos que la cantidad inicial. Discutir en la clase la relación que hay entre esta expresión y los cálculos involucrados en la primera fila, permite mostrar el funcionamiento algebraico de los cálculos, pues la relación entre 80 y 71 de la primera fila, está dada por 9 menos que la cantidad inicial. Es posible asociar $80 + 21 - 30$ con $80 - 9$ apoyándose en el contexto: *sumar 21 celulares y luego restar 30 es lo mismo que restar 9 celulares.* Estas construcciones son necesarias y su tratamiento en el aula debe resultar central. Del mismo modo, en la última fila para determinar la cantidad total de artículos, aparece en escena el trabajo con dos variables y deberán surgir así, por primera vez, la suma de dos expresiones algebraicas: $C - 9$ y $T - 13$. Será importante, entonces, la intervención del docente para hacer visible el funcionamiento de los signos para ir construyendo el sentido del número negativo en el ámbito algebraico y habilitar un modo de hacer las sumas de números enteros a nivel implícito.

Buscamos, con el análisis precedente, hacer vivir en la clase lo que Cid (2015) propone: evolucionar de las sumas y restas entre números naturales a la composición de sumandos y sustraendos, y del significado operativo binario de los signos + y – al significado operativo binario generalizado. Considerar los números como sumandos y sustraendos fue uno de los asuntos que se volvieron problemáticos, una y otra vez, antes de la implementación y a posterior de la misma, pues la escuela no lo considera como tal y es una de las ideas claves que presenta la propuesta. Es decir, esta construcción es necesaria para que la manipulación de expresiones algebraicas se torne un trabajo central en el aula. Atender didácticamente el paso del cálculo aritmético al cálculo algebraico supone pasar de un cálculo entre números sin determinación (números absolutos) a un cálculo en el que hay que tener en cuenta la condición de sumandos y sustraendos.

En un primer momento el contexto será el que provea el apoyo para realizar las intervenciones y hacer visible los modos de hacer los cálculos en términos de sumandos y sustraendos para construir el sentido del número negativo y la suma de números enteros, que hasta el momento aparecen en forma implícita. Luego, en los problemas descontextualizados las técnicas de cálculo algebraico pasan a tener un control sintáctico, en busca de reflexión y economía, permitiendo poner en evidencia las propiedades y el funcionamiento del cálculo. En este sentido, una de las tareas descontextualizadas es la siguiente:

Tarea 8: *Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:*

a) $d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13$

b) $27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q$

c) $18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x$

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

En esta tarea se pone en discusión los modos de realizar estos cálculos, permitiéndonos visualizar la diferencia entre un cálculo aritmético y un cálculo algebraico. La intención didáctica es dar cuenta del afianzamiento de la técnica de composición de sumandos y sustraendos construida hasta el momento y de las técnicas de simplificación de las expresiones algebraicas. Esta tarea nos resultó interesante pues permite tratar los errores que frecuentemente suceden en el aula, y ponerlos a consideración de los alumnos para interpretar lo realizado por otros, lo cual conlleva a reflexionar sobre las reglas ya construidas.

En el grupo colaborativo, cuando analizamos esta tarea, nos preguntamos: ¿Cómo nos vamos desligando del trabajo en el dominio aritmético para entrar en un dominio algebraico? ¿Cómo se gestiona esta actividad en el aula? Fue importante percibir en el grupo, que un error del tipo $d - 3 + 10 = d - 13$ es una producción que pone de manifiesto "un modo de hacer" que tuvo su éxito en el dominio de la aritmética y que es necesario hacerlo consciente y rechazarlo para dar lugar a otro modo de cálculo (Detzel, Ruiz y Colipe, 2020). La gestión del docente estuvo focalizada en la reinterpretación de las operaciones binarias en términos de composición de traslaciones. El hecho de que la primera operación en $d - 3 + 10$ no se pueda efectuar cambia completamente la interpretación que hay que dar a los signos. Ahora hay que entender que a d tenemos que restarle 3 y luego sumarle 10, lo que equivale a sumar 7 y por tanto $d - 3 + 10 = d + 7$. Otra cuestión a atender y que se desprende del análisis precedente es el significado del signo igual, pues debe mantener una relación de igualdad entre sus miembros; ya no conecta, como en aritmética, una operación indicada con su resultado, sino una equivalencia.

Abordar los modos de hacer los cálculos en términos de composición de traslaciones permite un mejor margen de maniobra en la manipulación de las expresiones algebraicas, ya que la composición en términos de sumandos y sustraendos tiene buenas propiedades (asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y opuesto) y contribuye a la justificación del cálculo algebraico, como se puede evidenciar en el ítem c.

Una cuestión que se puso a consideración en el grupo fue la implementación de esta tarea y las posibles ideas que pudiesen circular en la clase; si en este caso le asignamos valores a la variable *d*, continuaremos en un plano aritmético y no nos ayudaría a provocar la ruptura necesaria para entrar en un plano algebraico.

Las actividades descontextualizadas, como la desarrollada anteriormente, en las que se favorece la reflexión sobre cómo se efectúan las simplificaciones en las expresiones, favorecen la construcción en la clase de las técnicas de cálculo. Las siguientes tareas[13] ponen en evidencia,

[13] Completar las reglas de cálculo corresponden a las tareas 9 y 10 de la propuesta.

dando lugar a una institucionalización, las reglas vinculadas a la suma de sumandos y sustraendos:

- *Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que* _______________
- *Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que* _______________
- *Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que* _______________
- *Restar 5 y restar 2 es lo mismo que* _______________
- *Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que* _______ *primero 2 y* _______ *después 5.*
- *Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que* _______ primero *2 y* ________ *después 5.*
- *Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que* _______ *primero 2 y* _______ *después 5.*
- *Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que* _______ *primero 2 y* _______ *después 5.*

Hasta aquí nos centramos en visibilizar que las expresiones algebraicas con la operación suma de enteros a nivel implícito, son un medio para pasar de un cálculo aritmético a uno algebraico.

A medida que se avanzaba en el estudio de la propuesta para su implementación, nos encontrábamos con nuevos desafíos a la hora de tratar los cambios que debíamos enfrentar para asumir nuevos modos de calcular. Las siguientes tareas dieron lugar a numerosas discusiones y reflexiones en el grupo y nos resultaron representativas para dar cuenta del cambio de significado de los signos. Esas discusiones y reflexiones tenían que ver con cuestiones tales como, ¿Por qué cálculos aritméticos como éstos se presentan ahora en la propuesta? ¿Cómo tratarlos en un plano algebraico ya que están en el mundo aritmético? ¿Cómo se ve en estos cálculos mentales la funcionalidad del cálculo algebraico? ¿Cómo se relacionan las dos tareas?

Tarea 20: *Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?*

678 + 99   157 – 99   601 – 103   212 – 198   117 – 22

47 + 98   123 + 39   87 – 29   427 – 397

Tarea 21**:** *Coloca los signos + y – que faltan en las siguientes igualdades:*

765 – (100 – 1) = 765 – 99 = 765 __ 100 __ 1

80 – (30 – 1) = 80 – 29 = 80 __ 30 __ 1

141 – (100 + 2) = 141 – 102 = 141 __ 100 __ 2

92 – (42 + 3) = 92 – 45 = 92 _42 _3

325 – (200 – 3) = 325 – 197 = 325 _ 200 _ 3

La adaptación de la tarea 20, que discutimos y elaboramos en el grupo[14], tuvo que ver con el modo de llevarla al aula, no con el enunciado o el cambio de los cálculos que se proponen en ella. Nos interesaba el modo de tratarla sin que perdiera su esencia en la propuesta y, que permitiera a su vez, construir nuevas reglas de cálculo. Además percibimos, que la gestión en el aula iba a demandar un trabajo largo y complejo pues emergen nuevos objetos algebraicos. La intención didáctica que ambas tareas conllevan es la de resolver los cálculos indicados apoyándose en conocimientos aritméticos y apelando a estrategias de cálculo mental para construir las reglas que permitirán abordar operaciones de operaciones. Por ejemplo, los números redondos facilitan los cálculos; así sumar 100 y restar 1, es más fácil que sumar 99.

Atendiendo a esta intención didáctica se rediseñó la tarea a modo de juego[15] y se armaron los diferentes cálculos en power point, con el objetivo que pasaran con un tiempo de transición entre cada diapositiva y así llevar a los alumnos a poner en juego estrategias de cálculo mental. Analizando la tarea 20, en el grupo discutimos acerca de los cálculos que se presentan. Éstos, tienen la particularidad que dan lugar a descomposiciones utilizando números redondos, lo que facilita el cálculo mental. Los procedimientos que realizaron los alumnos fueron variados, algunos descomponen el primer sumando, por ejemplo, en $123 + 39$ hacían $122 + 40 = 162$;otros, lo hacían con el segundo sumando,$157 - 99$,que es lo mismo que$157 - (100 - 1)$.Si bien ambos procedimientos muestran una búsqueda del número redondo, en el segundo caso será necesario instalar el uso del paréntesis.

La actividad matemática involucrada en la tarea 21 se relaciona con la anterior; ya que, en $765 - (100 - 1)$ se visualiza la escritura con paréntesis. Aparece luego una relación de igualdad con $765 - 99$, que proviene de aplicar la prioridad que establece el paréntesis en aritmética y, a su vez, es una expresión en la que conviene usar la estrategia de los números redondos para finalmente completar los signos que establecen la igualdad con $765\_\_100\_\_1$. La búsqueda de economía de los cálculos lleva entonces a explorar una equivalencia entre $765 - (100 - 1)$y $765 - 100 + 1$, dando lugar a una nueva reinterpretación de los signos + y – (Detzel y otros, 2020). En este caso, el signo – delante del paréntesis deberá interpretarse también como un signo que provoca un cambio. Emerge de este modo el significado operativo unario que mantiene o cambia la condición de sumandos y sustraendos. Atender este nuevo significado nos permite establecer la equivalencia entre expresiones con y sin paréntesis.

[14] La adaptación de esta tarea se explicita en forma más detallada en el capítulo 2 de este libro.
[15] El modo de gestionar esta tarea se desarrolla en el Capítulo 5: Lo colaborativo en acción,...

Estas tareas vienen aparejadas con una nueva problemática. En las primeras tareas que se presentan en esta propuesta, se opera componiendo sumandos y sustraendos, pero ahora aparece la necesidad de hacer operaciones de operaciones; es decir, la necesidad de sumar o restar términos que a su vez son sumas o diferencias y que dan lugar a la construcción de las técnicas que requiere esta etapa. Estas se ven reflejadas en la tarea 23.

- *Sumar a + b es lo mismo que ________ a y ________ b*
- *Sumar a – b es lo mismo que ________ a y ________ b*
- *Restar a + b es lo mismo que ________ a y ________ b*
- *Restar a – b es lo mismo que ________ a y ______ b*

Hasta aquí se abordaron diferentes significados de los signos + y –; del operativo binario entre números naturales, al operativo binario generalizado y de allí al significado unario, y el rol que estos tienen en los modos de hacer los cálculos. Además, hemos mostrado cómo se construyen las reglas de cálculo, a partir de la manipulación de determinadas expresiones algebraicas, quedando establecida la estructura aditiva de sumandos y sustraendos. ¿Cuál es el sentido de esta construcción? ¿Cómo evolucionar de los cálculos de sumandos y sustraendos a los cálculos de números con signo?

Uno de los puntos claves que resultaron ser eje de nuestras discusiones en los espacios de estudio compartido a partir de problematizar los objetos matemáticos y atender la problematización de los asuntos en la enseñanza, fue el "modo de hacer los cálculos".

Veremos en el siguiente apartado, otro asunto problemático en la enseñanza, que resultó ser eje de nuestras discusiones. Nos referimos al recorrido propuesto para construir una nueva concepción de resta como diferencia, en el que la comparación de expresiones tiene un rol fundamental[16].

3.2 Comparación de expresiones y nuevas concepciones

La gestión de los objetos que emergen de la propuesta se volvió, una y otra vez, un asunto problemático. A continuación, trataremos de desentrañar la relación entre la comparación de expresiones y nuevas concepciones, como la diferencia y el número.

[16] Esta idea también es considerada por Cid en el apartado 9 del capítulo 3: La introducción escolar de los números negativos…

Nos encontramos con tareas cuya resolución involucra conocimientos matemáticos, tales como comparación de expresiones algebraicas, los que no podíamos identificar con contenidos curriculares habituales y su asociación más cercana que reconocíamos eran las inecuaciones. ¿Cómo gestionar la comparación de expresiones algebraicas para avanzar en la propuesta?

Tarea 17: *Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.*

E1) $x + 1$ $\quad$ $x - 10$

E2) $p - 7$ $\quad$ $p - 3$

E3) $2a + 5$ $\quad$ $3a + 12$

E4) $25 - z$ $\quad$ $25 - 2z$

E5) $a - 4b$ $\quad$ $a + b$

E6) $3n + 5$ $\quad$ $2n + 30$

Observamos expresiones como E1) y E2) en las que establecer el orden no genera conflicto. Sin embargo, con E3), E4) y E5) se podría encontrar un orden con un dominio de validez para los positivos, aunque no para todos los negativos. Y finalmente en E6) el orden entre ellas depende de un determinado valor positivo. ¿Cómo gestionar esta tarea en el aula? ¿Cuál es el alcance del análisis que se haría? ¿Hasta dónde explicitar estos dominios de validez que presenta cada caso?

Fue necesario ahondar en la propuesta para comprender qué ideas matemáticas se podrían rescatar en esta resolución. Luego de varias discusiones nos fuimos convenciendo que como venimos trabajando con los números naturales, salvo en la E6), es posible establecer un orden de esas expresiones en ese campo numérico. Así, la problematización se va focalizando en la gestión del inciso E6). En este caso, alertamos la conveniencia de no forzar un análisis para encontrar el valor a partir del cual el orden cambia, pues una gestión muy pesada en este sentido desdibuja que los conocimientos giren alrededor de encontrar una técnica de comparación entre expresiones. En este sentido E6) aparece para marcar el límite de la técnica provisoria de comparación y da lugar a concluir que hay expresiones en las que no es posible establecer un orden. Es decir, se pone en evidencia que a veces no se puede decidir cuál expresión es mayor, porque depende del valor de la variable. Nos preguntamos entonces ¿Para qué es necesaria esta técnica de comparación de expresiones? ¿Cómo se vincula con los números negativos?

La intención de esta tarea es encontrar una "técnica de comparación término a término" que permita decidir si una expresión es mayor o menor que otra. Por ejemplo, en la E3) se puede argumentar que $2a + 5$ es menor que $3a + 12$, pues $2a$ es menor que $3a$ (recordemos que a es un número natural), y en la primera expresión se suma 5 que es menor que 12, valor que se suma en la segunda expresión. Su resolución permite instalar un trabajo en el que hay que estudiar la forma de las expresiones a comparar. Interesa reconocer que a veces hay expresiones algebraicas en las que se puede decir que una es mayor/menor que otra y en otros casos, no es posible dicho orden.

Tener la certeza que una expresión es menor o mayor que otra, permitirá abordar cómo se escribe el resultado de su diferencia. En el caso que la primera expresión sea menor que la segunda dará la oportunidad de aparecer un número con signo –, que se corresponde con un nuevo significado del mismo, el predicativo[17].

Concepción de diferencia. Se trata de elaborar la idea que hallar una diferencia se asocia con cuantificar una comparación; es decir, establecer cuánto más o menos tiene uno en relación al otro y, además vincular la diferencia al cálculo de una resta. Las siguientes tareas ilustran lo explicitado:

Tarea 16: *Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:*

María	*Adrián*	*Luisa*
Recibe $10	*Gasta $5*	*Recibe $10*
Gasta $5	*Gasta $10*	*Recibe $5*
Gasta $15	*Gasta $15*	*Recibe $15*
	Recibe $30	*Gasta $35*

a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

b) Si al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y éste 30 $ menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

[17] Recordemos que ya se abordó este significado, los signos + y – indican una cualidad del número sin signo al que acompañan.

Tarea 24: *Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?*

Nº de canicas de Javier	
Nº de canicas de Carlos	
Nº de canicas de Marcos	
Nº de canicas de Enrique	
Diferencia entre el Nº de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el Nº de canicas de Carlos y Enrique	

La tarea 16 permite asociar la diferencia con la comparación y su cuantificación. Las primeras preguntas que se refieren a quién tiene más o menos, remiten a una comparación. La situación contextualizada habilita a dar respuestas a partir de las acciones de recibir y gastar, es posible responder que la diferencia es de 5, o de 10 según entre qué amigos se haga la comparación. Eventualmente podrían surgir respuestas como: la diferencia entre María y Luisa es de $5 o precisar un poco más planteando que María tiene 5 menos que Luisa, o Luisa tiene 5 más que María. En las respuestas coloquiales está subyacente la idea de diferencia negativa o de diferencia positiva, según el caso. Convenimos en el espacio de trabajo que es importante destacar en la clase, el modo en que se encuentran esas diferencias. Es decir, que para hallar una diferencia, por ejemplo, entre lo que tienen dos personas, está presente la comparación pues se evalúa cuánto más o cuánto menos tiene una en relación a la otra. Veremos más adelante que expresiones del tipo “se tiene tantos menos que”, se asocia con la idea de diferencias negativas y permitirá presentar el número negativo como el resultado de este tipo de diferencias.

La tarea 24 tiene por intención didáctica la de asociar la diferencia con el cálculo de una resta y el uso de paréntesis. Así, la discusión y análisis, al interior del grupo colaborativo de las posibles resoluciones del problema, nos llevó a reflexionar sobre las intervenciones del docente para abordar como conocimientos nuevos los códigos de escrituras correspondientes al registro de la diferencia como una resta y a la ocasión de escribir el paréntesis (Detzel y otros, 2020).

También las discusiones en torno a cómo hacer viable un trabajo en la clase, condujo a determinar algunas variables en el problema. Convenimos en que preestablecer las variables[18] favorece encontrar las cantidades de cada uno; para Carlos $\square + 6$y para Enrique $\square - 10$y así, focalizar el trabajo en el tratamiento de las expresiones. Interpretamos, que si se pretende priorizar el cálculo, la comparación debe ser insuficiente y para que esto ocurra se involucran dos variables. Así, como la comparación no es eficaz, entonces para efectuar la diferencia se avanza en el cálculo de una resta.

Al anticipar la resolución de los alumnos para completar la celda que solicita la diferencia entre Carlos y Enrique, pusimos el foco en el uso de paréntesis, pues es necesario proponer expresiones en las que se involucran la escritura de este símbolo y explicitar así el uso del paréntesis para expresar la resta de una suma o la resta de una resta. De este modo, expresar la diferencia entre $x + 6$ e $y - 10$ favorece discutir la pertinencia del uso del paréntesis en la escritura de la expresión $x + 6 - (y - 10)$.

Cabe destacar que este trabajo pone en juego el registro de la diferencia entre expresiones. Se pone de manifiesto a través de la escritura otro sentido del signo –, hay que asociar que una diferencia se registra como una resta. La idea de resta cambia su significación relacionada a la diferencia, más allá de concebirla sólo como una sustracción. El trabajo que será necesario realizar está enlazado con la simbolización de esos modos de indicar la respuesta y su posterior tratamiento en relación al cálculo. En ese sentido, reconocemos que completar la última celda de la tabla habilita un trabajo en relación a la significación de la resta como diferencia a partir de su representación simbólica; es decir, se pone en juego el registro de la diferencia entre expresiones y su cálculo[19]. Esto trajo aparejado la discusión en el grupo, ¿cómo y cuándo explicitar en la clase que ese registro se corresponde con una resta? y destacar la orientación de la misma, es decir aclarar que: “para indicar la diferencia entre x e y se escribe $x - y$ y para registrar la diferencia entre y y x se escribe $y - x$”.

Hasta aquí hemos visto que la diferencia obliga a trabajar desde un primer momento la comparación de expresiones algebraicas. La importancia de este trabajo de resignificar la resta como diferencia enlazado con la escritura simbólica, viene de la mano de concebir al número

---

[18] x e y representan las cantidades de bolitas de Javier y Marcos respectivamente.

[19] Recordemos que en las tareas 20 y 21 se producen conocimientos para construir las reglas de operación de operación explicitadas en la tarea 23, pero en la tarea 24 se focaliza su escritura.

negativo como posible resultado de esos cálculos, aportando una nueva concepción de número en el ámbito algebraico, un número con determinación.

Concepción de número. A continuación, analizaremos una tarea en la que convergen los conocimientos producidos en las anteriores para dar lugar a presentar en la clase al número negativo, esto es un número con signo. Al respecto Cid (2015) habla de una incipiente aparición del significado predicativo del signo –.

Tarea 25: *Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:*

i) $7p + 3q$	$2p - 2q$
ii) $4t - 6 - 15$	$4t - 3 - 2$
iii) $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$	$10m - 30 + 5m + 25$

En el análisis de las posibles respuestas que podrían surgir del inciso *ii),* aparecen ciertos interrogantes. Si se atiende en un sentido literal a la consigna, una respuesta podría ser "*la diferencia entre las expresiones es de 16, pues observando ambas expresiones son iguales en la cantidad de 4t, en una se resta 21 y en la otra se resta 5 esto significa que queda 16 sin equiparar, entonces esa es la diferencia"*. En tal caso, ¿sería aceptable esa respuesta? Este interrogante remite a discutir el significado de calcular la diferencia en el marco de la propuesta, puesto que los alumnos podrían dar ese tipo de respuestas. Más preguntas surgen, ¿Convendrá pensar intervenciones para avanzar en el funcionamiento de ese cálculo? ¿Qué aspectos se deberían destacar? El registro de la diferencia lleva a plantearnos su necesidad en esta tarea. Sin embargo, interesa traer a escena el resultado de esa diferencia, que es el número negativo. Se plantean las siguientes cuestiones: si se trata de hacer surgir como respuesta "–16", a partir de interpretar que la diferencia entre esas expresiones es 16 y el signo – deviene de que la segunda expresión es mayor que la primera, ¿Cómo gestionar la aparición de esa escritura? ¿Cómo surge la escritura del signo?

Aquí convergen conocimientos que se han venido construyendo a lo largo de la propuesta y que será necesario entrelazarlos. Se están involucrando las ideas de diferencias negativas, una expresión mayor que otra, la diferencia como cálculo de una resta, la resta de una resta a partir de la supresión de paréntesis, entre otras.

Así, como lo mencionamos antes, para el inciso *ii)* (considerando la diferencia entre $4t - 6 - 15$ y $4t - 3 - 2$) los alumnos usando la técnica de comparación término a término pueden responder que las expresiones difieren en 16 y también pueden decir cuál de ellas es mayor. Si bien la respuesta es –16, es poco factible que surja en la clase, porque hasta ahora no se había presentado un sustraendo aislado. Frente a esta situación se abre un espacio fértil para que el docente, a partir de sus intervenciones, pueda ir enlazando la respuesta probable del alumno, 16, con la presentación del número negativo, –16, interpretado como el resultado de una diferencia en la que el minuendo es menor que el sustraendo. ¿Cómo se enlazan esos conocimientos?

Para calcular la diferencia entre $4t - 6 - 15$ y $4t - 3 - 2$, también se podría realizar: $4t - 6 - 15 - (4t - 3 - 2)$, que implica recuperar la asociación de la diferencia con la resta y la aplicación del paréntesis. Esto da lugar al funcionamiento de las técnicas de cálculos, en un principio, las de la suma; por ejemplo "restar 6 y restar 15 es lo mismo que restar 21", obteniendo $4t - 21 - (4t - 5)$; luego las reglas de cálculo de la resta de una resta: "restar 4*t*–5 es lo mismo que restar $4t$ y sumar 5" quedando $4t - 21 - 4t + 5$ y por la técnica de simplificación se "tachan" 4*t* y –4*t*, finalmente se obtiene $-21 + 5$. Con este último cálculo surge un nuevo conocimiento, el número negativo como resultado de la diferencia.

Entonces, hay que asociar con el resultado de este cálculo: $4t - 6 - 15 - (4t - 3 - 2) =\ldots= -21 + 5 = -16$, que las expresiones $4t - 6 - 15$ y $4t - 3 - 2$ difieren en 16 y que la primera es menor que la segunda. Así, el –16 surge de interpretar por un lado el 16 como la cantidad en la que difieren las expresiones y por otro lado el signo – delante del número como la cualidad del número que indica que esa diferencia es negativa. Así, se comienza a aceptar a estos nuevos números con signo como resultado de una diferencia. Además, recíprocamente se puede establecer el cálculo de una diferencia como una técnica para comparar los términos de la misma, pues da información de cuál término es mayor o menor, según su resultado sea positivo o negativo. Esta técnica resultará útil para establecer el orden entre los números enteros[20].

[20] Ver tarea 45 del ANEXO en el capítulo 3.

3.3 Expresiones algebraicas aditivo-multiplicativas y modos de hacer los cálculos

Para abordar el producto de sumandos y sustraendos se sigue profundizando en el funcionamiento algebraico de algunos objetos matemáticos, contrapuesto al aritmético, como lo muestran las siguientes tareas:

Tarea 29: *Como ya saben, la fórmula del área de un rectángulo es A = ba, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura).*

i) Si nos dicen que a=3cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

ii) Si ahora te dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados?

iii) ¿Cuánto habrá aumentado su área?

Tarea 32: *A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 5 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.*

a) Haz un dibujo del primer rectángulo.

b) Haz un dibujo del segundo y tercer rectángulos.

c) Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos.

¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?

Nuestra experiencia nos ha mostrado la conveniencia de no apresurar los tiempos al momento de la implementación, y de detenerse en cada uno de estos incisos. Es importante dar lugar a discutir la forma de escribir el producto y la construcción de una expresión en la que interviene el paréntesis, cuestiones que pasan inadvertidas generalmente en la enseñanza. El enunciado de la tarea 29 expresa “el área de un rectángulo es $A = ba$ ”, esto dará lugar a la discusión acerca de cómo simbolizar el producto, a partir de analizar las distintas expresiones que puedan surgir para expresar el área del rectángulo: $3 \times b,\ 3.b,\ 3b$ o $b \times 3, b.3, b3$. En el inciso *ii*) el lado desconocido sufre modificaciones y el conocido no cambia. Para resolver lo solicitado, en primer lugar, se tiene que indicar la medida de un lado, que no es un número ni una letra, ahora es una expresión, en este caso " $b+2$ ". En nuestra experiencia, no fue natural para los estudiantes construir esta expresión, el cambio de contexto es un factor importante. Aunque ya venían construyendo expresiones, lo hacían en un contexto discreto[21] donde la letra representaba cantidad de pasajeros, cantidad de cromos etc., asociar la modificación (aumento o disminución) de una longitud desconocida con una expresión fue un asunto que mereció una atención especial.

En el grupo colaborativo, a partir de un trabajo de análisis evidenciamos que para comparar las áreas de los rectángulos no sería necesario realizar la diferencia de las expresiones ya que en este caso se puede desde el gráfico concluir que aumentó en 6. ¿Cómo se entrelaza lo algebraico y lo geométrico? ¿Cuál es la intención didáctica? Después de avanzar en otras tareas y analizar las producciones de los estudiantes, éstas nos devuelven cuestiones no resueltas, como veremos más adelante. Podemos afirmar entonces, que expresar el área del rectángulo ampliado conduce al asunto fundamental de cómo construir expresiones en las que el uso del paréntesis es objeto de análisis.

La resolución por parte de los alumnos en una de las implementaciones de la tarea 32, nos abre interrogantes cuyos esclarecimientos van aproximando una respuesta a esa pregunta. En esta tarea, a diferencia de las anteriores, deben comparar las áreas de dos rectángulos en los que los lados de ambos tienen aumentos o disminuciones en sus longitudes. Nos interesa traer a discusión su resolución por parte de algunos alumnos, la que nos llevó a tomar consciencia de la potencia de las tareas anteriores, en cuanto a los conocimientos que permiten abordar.

Las áreas de los tres rectángulos son: $A_1 = 5x; A_2 = 8(x-3); A_3 = 2(x+3)$ [22]. Un estudiante las expresa de la siguiente manera y argumenta que los tres rectángulos tienen igual área:

$A = 5.x\ cm$; $A = 8\ cm\ .x - 3$ *y* $A = 2\ cm\ .x + 3$ *y concluye que las áreas de los tres rectángulos son iguales.*

Justifica su procedimiento expresando: Con $A = 8\ cm\ .x - 3$ *como 8 con x no se puede, entonces hago 8 − 3 que son los números y luego paso la x, entonces queda* $5.x\ cm$*, del mismo modo con* $A = 2\ cm\ .x + 3$ *, hago 2 + 3 y paso la x, entonces también me da* $5.x\ cm$*.*

[21] Si bien los números representan medidas de longitud, el conjunto numérico con el que se trabaja son los números naturales.
[22] Las notaciones A_1, A_2, A_3 son nuestras.

¿Qué nos devuelve esta producción? Vemos que aparecen diferentes cuestiones tales como, la ausencia del paréntesis, una estrategia de operar números por un lado y letras por otro sin considerar la prioridad de los cálculos y el uso de unidades de medida. ¿Cómo abordar la cuestión de la escritura? ¿Por qué aparecen errores de cálculos nuevos? ¿Qué hacer con las unidades en las longitudes de los rectángulos? ¿Qué rol juegan las unidades de medidas en los enunciados de los problemas?

Resoluciones como ésta nos lleva a reflexionar que el uso del punto para indicar el producto no facilita, en este caso, recuperar conocimientos vistos anteriormente. En las tareas anteriores, los alumnos podían resolver que $2 + 3b + 9 - 3b = 11$, simplificando $3b$ con $-3b$, sin embargo, puede ocurrir que en la expresión $2 + 3.b + 9 - 3.b$ la resuelvan haciendo $5.b + 6.b = 11.b$. Observamos que los estudiantes no siempre asocian la expresión $2 + 3.b + 9 - 3.b$ con la expresión $2 + 3b + 9 - 3b$ y en consecuencia puede conducir a estrategias de resolución diferentes.

El análisis de estas producciones nos devuelve información sobre la permanencia de una estrategia aritmética, en la que se realizan las operaciones de izquierda a derecha y donde también persiste resolver juntando por un lado los números y las letras por otro.

Otra cuestión que mereció discusión y análisis en el grupo fue destacar el uso de paréntesis, pues en esta resolución es necesario proponer expresiones en las que se involucra la escritura de este símbolo; mientras que en la aritmética escolar el paréntesis en las expresiones viene dado. La experiencia que tienen los alumnos es interpretar la información que brinda ese símbolo en relación a la prioridad de las operaciones; en cambio, en esta tarea, se pone en juego un código de escritura que responde a una "norma matemática". Se abre así un espacio de problematización acerca de la oportunidad de explicitar en la clase el uso de paréntesis al expresar operaciones de operaciones.

En relación al uso de las magnitudes, aparecen en la clase producciones en las que intervienen las unidades de medida en el cálculo de la diferencia de las áreas de los rectángulos modificados:

$$8\,cm\,x - 24\,cm^2 - (2\,cm\,x\ + 6\,cm^2)$$
$$8\,cm\,x - 24\,cm^2 - 2\,cm\,x\ - 6\,cm^2$$
$$8\,cm\,x - 2\,cm\,x - 24\,cm^2\ - 6\,cm^2$$
$$6\,cm\,x - 30\,cm^2$$

Si bien el uso de las magnitudes puede invitar a estudiar la buena formación de la expresión, esto conlleva una gestión trabajosa. En este caso el análisis de la coherencia de la expresión $6\,cm\,x - 30\,cm^2$, nos lleva a reflexionar qué representa x. Como la variable x representa una magnitud en cm, esta operación tiene sentido.

A continuación, entramos en la última etapa de la propuesta, en la que Cid (2015) reconoce un enorme salto epistemológico al pasar del trabajo con sumandos y sustraendos a pensarlos como números con signo haciendo uso de nuevos significados del signo –, como el predicativo y el operativo unario[23] de números con signos. Además, la autora plantea la necesidad que esta problemática merece seguir siendo estudiada.

Advertimos que, así como la operatoria de sumandos y sustraendos encontró su apoyo en los cálculos de números naturales, ahora la operatoria de los números con signos debería encontrar su apoyo en la estructura aditiva de sumandos y sustraendos.

3.4 Operaciones entre números con signos

A medida que avanzábamos en el estudio de la propuesta y de su implementación nos encontrábamos con tareas que tienen por objetivo otorgar sentido a los sumandos y sustraendos en forma aislada, como nuevos números, los números enteros. De esta manera vemos cómo se consolida/declara el significado predicativo de los signos + y – , ahora no son signos que indican una operación, sino signos que indican una cualidad de los números. ¿Por qué decimos que se consolida este significado tan avanzada la propuesta? ¿Cómo llegamos a operar los números con signo?

Como ya hemos visto, la propuesta presenta, en una primera instancia, un conjunto de problemas contextualizados que favorecen un tratamiento de expresiones algebraicas cuya manipulación permite la interpretación de la letra como variable y que toma valores dentro del campo de los números naturales. Sin embargo, a medida que se avanza en la misma, la letra en su papel de variable toma valores positivos o negativos. Nuestro gran desafío fue entonces, ¿cómo posibilitar avances con estas nuevas conceptualizaciones/ resignificaciones?

En este sentido la tarea 39 abre un camino para analizar los modos de hacer los cálculos que la propuesta ofrece en esta etapa.

[23] Se interpreta el signo – como signo operativo unario cuando transforma un sumando en sustraendo y viceversa. Esto conduce a las reglas de supresión de paréntesis y permite establecer la equivalencia entre expresiones con paréntesis y sin paréntesis.

Tarea 39: *Alberto juega a los cromos.*

En la primera partida pierde tres cromos, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco cromos y en la cuarta pierde cuatro cromos.

a) ¿Cuántos cromos ganó o perdió?

b) Completa la siguiente tabla:

N° de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	*N° de cromos que ganó o perdió en total*
$+4$	
-6	
	$+5$
	-3

La intención didáctica de esta tarea y de las siguientes en esta etapa de la propuesta, es aceptar a los sumandos y sustraendos como representantes de cantidades positivas y negativas, para luego llegar a declarar los números enteros como conjunto numérico que amplía al de los números naturales.

Si nos adentramos en esta tarea, para dar respuesta a la misma, nos llevó como grupo a considerarla como un nuevo asunto que se volvió problemático a la hora de su implementación y a anticipar respuestas por parte de los estudiantes, en términos de sumandos y sustraendos. Por ejemplo, si consideran que en la segunda partida se gana, la situación sería $-3+a+5-4$; pero, si por el contrario, consideran que se pierde, la expresión sería $-3-a+5-4$. Así, con ambas expresiones y con el andamiaje provisto hasta el momento, de la operatoria de sumandos y sustraendos, se daría lugar a la aparición de las siguientes fórmulas: $-2-a, -2+a, a-2, -a-2$, para luego llegar a la unificación de una fórmula del tipo: $a-2$ ó $-2+a$. Es precisamente el poder sustituir la variable por un número positivo o negativo lo que permite unificar la fórmula. Ahí reside el interés de dar valores positivos y negativos a las variables.

Ante estas anticipaciones nos preguntamos: ¿cuáles serían las gestiones en la clase para convenir que la variable “a” está sumando, independientemente que se gane o se pierda en la segunda partida? ¿Qué intervenciones serían necesarias para llegar a la unificación de una fórmula? ¿Cómo abordar la idea de que la letra puede tomar diferentes valores positivos o negativos?

La tabla muestra que, tanto los datos presentados como las soluciones a encontrar, son cantidades que pueden interpretarse con un sentido de ganancia o pérdida (cantidades relativas); de ahí su escritura en términos de +4, para indicar que ganó 4 cromos en la segunda partida. También es interesante considerar que los números involucrados en la tabla funcionan como variables didácticas y hacen posible el uso de propiedades de manera implícita; así, si ganó 4 en la segunda partida, resulta $-3+4+5-4=-3+5+4-4=-3+5=+2$, ganó 2 en total. Los cálculos se facilitan y nos interesa hacer foco en los resultados que nos llevan al 2 y al 8 fácilmente, la cuestión es explicar que en un caso ganó y en otro perdió y así la necesidad de escribir +2 y –8. El tipo de respuesta exige poner una valoración al número pues importa si perdió o ganó y esto implica una gestión por parte del docente para ir consolidando el significado predicativo de los signos; es decir, conversar en la clase acerca del significado que indica la naturaleza positiva o negativa del número. Esto permitirá ir preparando el terreno para institucionalizar el conjunto de los números enteros[24].

Otra cuestión relacionada con esta tarea, que nos problematizó y demandó interesantes discusiones en el grupo, fue atender a las transformaciones involucradas en el enunciado en términos de partidas. Es decir, dar respuesta a la pregunta *¿Cuántos cromos ganó o perdió?* no refiere a la cantidad total de cromos, sino a los que perdió o ganó después de las 4 partidas que jugó. En esta situación lo desconocido es una transformación que tuvo lugar en un tiempo determinado y, en general, los problemas planteados en términos de transformaciones generan dificultades[25]. En este caso, al no conocer el estado inicial, algunos alumnos le asignaban una letra generando una expresión con dos variables, otros usaban la misma letra para el estado inicial y para la transformación, es decir la misma letra para dos variables distintas. La entrada en escena en la clase de estas expresiones, conlleva a una ardua gestión por parte del docente en el análisis de la pertinencia de dichas expresiones para dar respuesta al problema.

Con el tipo de tareas como la 39, que involucran números con signo, observamos que las acciones de quitar, sacar, perder dejan de estar asociadas a una resta. Esta cuestión trae aparejada la idea que la resta desaparece para asociarse a una suma, la suma del opuesto. Ahora bien, ¿Cómo abordar la resta de números enteros? ¿Cuándo usar la expresión $x-y$?

[24] Ver tarea 46 del ANEXO en el capítulo 3.
[25] Nos referimos a dichos de alumnos cuando expresan: "*no se puede saber qué pasó en la segunda partida si no se sabe cuántos tenía*".

Esta idea se pone de manifiesto en la tarea que presentamos a continuación. Además, pone en evidencia la necesidad de sustituir las letras con números con signo utilizando una sola fórmula, independientemente de que sean temperaturas sobre cero o bajo cero.

> **Tarea 44:** *a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y encuentra la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra.*
>
> *1) 6 sobre cero y 5 bajo cero;*
>
> *2) 7 sobre cero y 2 sobre cero;*
>
> *3) 3 bajo cero y 8 bajo cero.*
>
> *b) Si llamamos T a la temperatura más alta y t a la más baja, escribe la diferencia de temperaturas y utiliza esa fórmula para encontrar las diferencias en los casos anteriores. Comprueba si se obtienen con la fórmula las mismas diferencias que antes.*

Como lo señalamos anteriormente, en esta propuesta aparecen problemas contextualizados con un tratamiento en un ámbito algebraico, diferente a lo que generalmente se hace en la enseñanza. Las letras pueden tomar valores positivos y negativos, en términos de temperaturas sobre y bajo cero, lo que permite mostrar la gran ventaja de la utilización de la fórmula.

Una cuestión interesante a destacar en esta tarea en relación a los modos de hacer los cálculos es que los alumnos por primera vez se deben enfrentar a la notación completa[26]; es decir para el punto 1) se tiene $6-(-5)$, donde "restar el 5 que está restando es lo mismo que sumar 5". De ahí resulta la notación incompleta que ya los alumnos venían trabajando desde el inicio de la propuesta en términos de sumandos y sustraendos: $6+5=11$. Vemos que la gestión del docente para acompañar en cómo se opera con la notación completa toma un rol central. En este caso es importante vincular la notación completa con las reglas de cálculo ya construidas para la operación de operación. Así, se puede asociar $6-(-5)$ con $6-(0-5)$, donde "restar 0–5 es lo mismo que restar 0 y sumar 5". Por lo tanto $6-(-5)=6+5$.

Como se dijo recientemente los alumnos se enfrentan por primera vez a la notación completa, ahora será el momento de llevar adelante su tratamiento en los modos de hacer los cálculos que permite la reducción de la notación completa a la incompleta. Esta génesis de los

[26] La diferencia entre la notación algebraica completa y la incompleta es que en la primera figuran los signos de suma/resta como indicadores de operaciones binarias entre números con signo, mientras que en la incompleta estos símbolos se suprimen.

números enteros invierte el recorrido escolar habitual en la presentación de las notaciones. La razón de este cambio es que, si se analizan las técnicas de cálculo algebraico siempre se está trabajando con notaciones incompletas y, ante una expresión escrita en notación completa, se procede a transformarla haciendo uso de las siguientes reglas de cálculo que se explicitan en la propuesta[27]:

- *Sumar un número que suma es lo mismo que ________ dicho número*
- *Sumar un número que resta es lo mismo que ________ dicho número*
- *Restar un número que suma es lo mismo que ________ dicho número*
- *Restar un número que resta es lo mismo que ________ dicho número*

Hasta ahora vimos cómo la estructura aditiva de sumandos y sustraendos permite justificar las reglas de cálculos para sumar y restar números enteros. Del mismo modo la estructura aditivo-multiplicativa de sumandos y sustraendos se convertirá en el nuevo soporte para apuntalar las reglas de cálculos para la multiplicación de los números enteros. En la secuencia didáctica se proponen tareas en las que se requiere resolver multiplicaciones de números con signo, por ejemplo hallar $(-3)(-5)$. En este caso, para justificar $(-3)(-5) = 15$ se puede, en un primer momento vincular el cálculo propuesto con la siguiente expresión $0 - 3(0 - 5)$ para luego, recurrir a las reglas de cálculos conocidas "restar 3(0 – 5) es lo mismo que restar 3.0 y sumar 3.5."

Es importante sacar a la luz comportamientos que se vienen cumpliendo con los números naturales y que ahora dejan de ser ciertos, por ejemplo, la idea que la suma siempre agranda. Estos conocimientos han tenido su éxito en un dominio determinado y es necesario abordarlos para poder rechazarlos y dar lugar a nuevas conceptualizaciones. La siguiente tarea tiene esa intención y así, se podrá conversar en la clase acerca de las particularidades que caracterizan a los números naturales y a los números enteros.

[27] Ver Tarea 43 del ANEXO en el capítulo 3.

Tarea 49: *Las propiedades siguientes son ciertas para los números naturales. Indica si también se cumplen para los números enteros.*

1) Los sumandos son siempre menores o iguales que el resultado de la suma.

2) El minuendo de una resta es siempre mayor o igual que el resultado de la resta.

3) Si los factores de un producto son todos distintos de cero, entonces son menores o iguales que el resultado del producto.

4) El dividendo de una división es siempre mayor o igual que el cociente.

5) No hay ningún número que sea menor que cero.

Atender el recorrido que la propuesta ofrece en términos didácticos, implica emprender reestructuraciones/ ampliaciones de ideas matemáticas involucradas que a su vez, a la hora de la implementación, supone una problematización permanente en el mundo de las prácticas de enseñanza. Hacernos cargo como grupo de identificar y analizar asuntos de la enseñanza que emergen de la propuesta fue un gran desafío.

4. Consideraciones finales

En este capítulo compartimos conocimientos que forman parte de nuestra experiencia llevada adelante durante varios años, en la que estudiamos una propuesta de enseñanza de los números enteros y la implementamos en oportunidades y contextos diferentes. Retomamos aspectos que nos resultaron relevantes a partir de problematizar el objeto matemático involucrado y los asuntos que se vuelven problemáticos a la hora de su implementación en las aulas comunes de la región para resignificarlos a la luz de nuestro proyecto de enseñanza.

Emprendimos un camino entre las ideas que se producen al resolver las tareas y los saberes a enseñar. En ese andar aparecen conocimientos con cierta provisoriedad, tales como las reglas de cálculo para operar sumandos y sustraendos, a partir de manipular determinadas expresiones; también emergen nuevas concepciones en relación a la diferencia y al número.

Estos conocimientos tienen un rol fundamental, y por ello reconocer y apropiarse de los mismos fue parte del trabajo que se realizó en esta experiencia. Para cada aspecto abordado, nos fuimos formulando preguntas que nos interpelaron y abrieron a la vez nuevas perspectivas de análisis para ser consideradas en el mismo espacio colaborativo y en su implementación, en un ir y venir del aula.

La reflexión sobre la práctica hace visible un conjunto de elecciones potenciales, abriendo un espacio de estudio para apropiarnos de una organización matemática diferente y a la vez, de referencia explícita para la toma de decisiones didácticas. Tal como lo dijimos en un principio, fue necesario en el interior del grupo, un proceso de deconstrucción y una reconstrucción del conocimiento matemático-didáctico que dé lugar a la problematización y comprensión de esta propuesta para poder implementarla en aulas singulares. Esta experiencia nos llevó a ampliar nuestras miradas en relación a objetos matemáticos y a realizar acciones que rompían con nuestra práctica habitual en la enseñanza de los números enteros. Pudimos reconocer y extender nuestros marcos interpretativos, cuestionandonos desde diferentes lugares.

Finalmente, queremos volver una vez más a la idea de reconocer la fertilidad de estudiar y profundizar una propuesta de enseñanza diseñada en una investigación que no es propia y analizar una posible gestión de las actividades para las clases, dentro de un espacio colaborativo. En este sentido, Perrin-Glorian y Bellemain (2019), plantean que aún si en dicha investigación se ha tenido en consideración la complejidad de la enseñanza en el aula, las condiciones para su difusión en las clases requieren ser estudiadas.

Referencias

Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement: ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*, 13-28.

Bednarz, N. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation*, 1(39), 171-184. https://www.cairn.info/revue-carrefours-de-l-education-2015-1-page-171.htm

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'education secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux y P.L. Hennequin (eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*, vol. 168, (pp. 239-263). París: Publications del'APMEP.

Cid, E., Godino, J.D. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, vol. 1 (pp. 575-594). Université de Montpellier. Francia.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (eds.), *Un panorama de la TAD: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*. Centre de Recerca Matemàtica pp. 579-604, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L. y Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27 (1), 33-64.

Detzel, P., Barrio, E., Petich, A. y Martinez, R. (2014). Repensando la enseñanza de los números negativos en la escuela secundaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 163-170.

Detzel, P., Ruiz, M.E. y Colipe, L. (2020). Una construcción de las reglas de cálculo de los números enteros a partir de la manipulación de expresiones algebraicas. *Revista de Educación Matemática*, 36(1), 51-74.

Fiorentini, D. (2013). A Investigação em Educação Matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação. *Cuadernos*, 11, 61-82 IUFM de l'Académie de Montpellier.

Perrin-Glorian, M. J. y Bellemain, P. M. B. (2016). L'ingénierie didactique entre recherche et ressource pour l´enseignement et la formation des maîtres. Presentado en el *I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática-LADIMA*, Brasil, pp. 1-15.

Perrin-Glorian, M. J. (2019). A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. Presentado en el *1er Congrès (TACD)*, França, pp. 1-13.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M. E, Becerril, M. M., y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 9-30.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Becerril, M. M., Quaranta, M. E., y García, P. (2019). Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática: de la reflexión sobre las prácticas a la elaboración de ejes de análisis para la enseñanza. *Educación matemática*, 31(2), 105-131.

Capítulo 5

Lo colaborativo en acción, una experiencia sobre lo trabajado antes, durante y después de su implementación

Juan Zambrano

Introducción

Mi nombre es Juan Javier Zambrano, soy profesor en Matemática y Cosmografía. El relato cuenta la experiencia que tuvo lugar mientras me desempeñaba como docente de una escuela secundaria de la ciudad de Cipolletti, Río Negro. Durante los últimos ocho años participé de una práctica de trabajo colaborativo junto a profesores de escuelas secundarias, docentes investigadores de la UNCo y educadores de formación docente del nivel terciario. Dicha experiencia se abocó al estudio de una propuesta de enseñanza para los números enteros y en la búsqueda de una propuesta más atractiva para su desarrollo en la clase donde los alumnos pudieran darle sentido a ese conjunto numérico. Además, se hicieron varias implementaciones de la propuesta adaptada, principalmente en primer año del nivel medio y en una oportunidad en segundo año. La experiencia ha sido enriquecedora y me brindó la posibilidad de participar de congresos, talleres y ponencias en las que se daba a conocer el trabajo desarrollado y finalmente, de difundirla con la escritura de un capítulo en este libro. El mismo relata mi experiencia colaborativa.

1. Contextualización del trabajo en grupo.

Empezaba el año 2012 cuando una invitación para formar parte de un grupo de investigación de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo) llegaba al, por aquel entonces, Centro de Educación Media N° 14 (CEM N° 14) de la localidad de Fernández Oro, Río Negro. La convocatoria a formar parte de aquel grupo parecía muy interesante y estábamos dispuestos a asistir a aquella primera reunión para interiorizarnos de cuál era la proposición y la dinámica de la misma.

Allí, en la primera reunión, se nos informó de una propuesta que podía hacernos crecer profesionalmente, nos brindaría la posibilidad de ser escuchados en cuanto a las dificultades que se nos presentaban en nuestra labor áulica. Además, nos daría respuesta a la constante demanda que teníamos respecto de una propuesta que se pudiera implementar en el aula con posibilidades de un acompañamiento y de ser revisadas o mejoradas en función de lo que se podía ir manifestando al trabajarla con los estudiantes.

Desde hacía ya varios años, junto a mi compañero de trabajo, preocupados por mejorar nuestras prácticas y la enseñanza en la escuela secundaria, veníamos realizando gran cantidad de cursos y/o capacitaciones en las que se ofrecían sugerencias de actividades innovadoras que podían ser trabajadas con nuestros estudiantes. Eran algunas situaciones problemáticas muy interesantes para implementar, pero al momento de ser puestas en práctica, surgían, a veces, algunos inconvenientes o dudas en cuanto a cómo seguir adelante con el trabajo de las mismas. Lamentablemente, en ese momento nos sentíamos solos y no podíamos encontrarle la vuelta para seguir adelante, lo cual indefectiblemente tenía como final el abandono de esas nuevas ideas y volvíamos al trabajo tradicional.

En este grupo al que se nos invitaba, ofrecía la posibilidad del acompañamiento durante la puesta en marcha, lo cual resultaba más atrayente para nosotros.

En un principio el grupo comenzó a funcionar con seis integrantes, dos docentes de la UNCo, dos del CEM N° 14 y dos estudiantes de la carrera del Profesorado de Matemática. A lo largo de los años, fueron cambiando los integrantes del grupo; profesores investigadores y nuevos docentes de nivel medio se sumaron a la propuesta.

Las primeras reuniones del grupo se realizaban los días sábados por la mañana, con encuentros cada dos semanas. Durante las aproximaciones iniciales nos fuimos conociendo y tratando de llegar a un acuerdo en cuanto a la forma de trabajar y, por sobre todo, tomar conciencia de que sería un trabajo a largo plazo, con el cual debíamos comprometernos y tratar de alcanzar metas u objetivos claros.

Lo más interesante que pudimos acordar es que sería un trabajo colaborativo en el cual todas las partes se verían beneficiadas. Para los docentes del nivel secundario principalmente en el acompañamiento del estudio y futura implementación de la propuesta didáctica que podríamos llegar a construir, de las intervenciones en el dictado de la secuencia en el aula y la constante mejora de lo que se va elaborando. Para los docentes investigadores en la puesta en marcha de una experiencia en el sitio, en tiempo real y con la posibilidad de estar en el campo en el que se desarrollan y fluyen los conocimientos matemáticos, el aula del colegio.

Desde que iniciamos el grupo de estudio, siempre se abrió la invitación a formar parte del mismo a más docentes de distintos colegios, ya que considerábamos que mientras más profesores fuésemos trabajando en la propuesta, más rico sería su análisis y se podría llegar a más clases de matemática. Lamentablemente no tuvimos mucho éxito en ese sentido, algunos concurrían a una primera reunión y luego de la misma nos informaban que no disponían del tiempo suficiente como para dedicarle a la tarea de estudio que la investigación de la propuesta a producir requería. Finalmente, en el año 2015 se sumó el profesor José Cumín, quien se desarrollaba como docente en el CEM N° 15 y en un colegio privado de la localidad de Cipolletti, mostró mucho interés en la propuesta incorporándose al grupo. Su participación en el equipo y en el estudio de la secuencia, permitió que la propuesta también sea implementada en dos primeros años de otra institución de escuela secundaria, en el colegio Brentana (Cipolletti).

Con el transcurso de los años, se fueron sumando docentes de institutos de formación docente y otros de la UNCo, con lo cual las producciones y el crecimiento del grupo fueron aún más notorio. Pasamos a ser varios docentes abocados al hecho de buscar una alternativa a la enseñanza de los números enteros en el nivel medio.

2. Acerca de la elección del objeto de estudio para la enseñanza

En las primeras reuniones, al discutir entre todos cuál sería el asunto a abordar, sin lugar a dudas la temática de los números enteros resultó fundamental para el nivel secundario. Esta elección surge ya que solemos encontrarnos con alumnos del último año que presentan dificultades para operar con dicho conjunto numérico. Observamos que cuando tenían que resolver operaciones de suma y resta con números enteros, aplicaban la regla de los signos para determinar si el resultado era positivo o negativo. Por ejemplo: si tenían que resolver $-3-5$, eso era igual a 8, ya que hacían menos por menos, es más, entonces el resultado es positivo y luego se suma. Usaban esa lógica tanto para las operaciones de suma y resta, como así también para multiplicar o dividir.

Notamos que, al cometer ese tipo de error en el conjunto de los números enteros, el mismo se transfería al trabajar también con otros conjuntos numéricos, lo cual hacía aún más difícil la comprensión del funcionamiento de los signos en las distintas operaciones. Muchas veces hasta dudaban de los valores obtenidos al resolver con calculadora, si les quedaba negativo, ellos lo ponían positivo usando la lógica antes explicada.

Una vez escogido el tema sobre el cual nos pondríamos a investigar, fuimos buscando materiales para leer y tratar de tener una mejor interpretación del estado de la enseñanza del conjunto numérico y las dificultades que se les presentaban a nuestros estudiantes. El hecho de tener una idea más clara del por qué de los problemas de cálculo, nos llevaría a buscar soluciones. Fue así que comenzamos a leer distintos materiales bibliográficos que nos servirían de apoyo para iniciar el análisis y así lograr una mejor lectura del conjunto numérico.

En las discusiones empezaba a emerger un supuesto acerca de si los estudiantes lograban comprender los significados de los signos y surgían dudas acerca de cómo lograr que los alumnos hagan un uso correcto de los mismos en las distintas operaciones. Analizamos la manera tradicional de enseñanza con la que se acerca a los estudiantes al campo de los números negativos y pudimos observar que siempre se hacía desde situaciones en las que el número estaba asociado a una medida, longitudes sobre o bajo el nivel del mar, temperaturas sobre y bajo cero y eso podría terminar siendo una dificultad al avanzar, por ejemplo, en el ordenamiento del conjunto.

La idea que más nos atraía, para cambiar con la forma tradicional en la que se introducía el conjunto de los números enteros y lograr una mejor comprensión en cómo es su funcionamiento, era una nueva propuesta de trabajo, al menos para mí, en la que los estudiantes debían tomar un rol más protagónico en la clase. Al mismo tiempo la introducción en el campo de los números enteros se daría trabajando en un entorno algebraico, que es lo que dio origen al conjunto numérico mencionado. Dicha propuesta consistía en proponer una serie de situaciones problemáticas que impliquen un desafío y en la que los propios alumnos pudieran construir el nuevo conocimiento, dado que de esa manera podrían hacerlo propio y les resultaría mucho más fácil de recordar en todas las situaciones en las que tengan que volver a usarlos.

3. Algunos aspectos de la propuesta de estudio

Luego de considerar algunos materiales, finalmente pudimos acceder a una propuesta en particular que nos llamó mucho la atención por los fundamentos que la justificaban. Más precisamente, nos interesó cómo explicaba las dificultades que se presentan en la enseñanza habitual de los números enteros y exhibía al mismo tiempo la posibilidad de abordar el contenido conjuntamente con el álgebra. Comprender el porqué de los inconvenientes en el funcionamiento de la operatoria de los números con signos, nos permitiría poder encontrar soluciones para abordar su enseñanza.

En la propuesta de enseñanza, que diseñó Eva Cid (2015) para su tesis doctoral, es posible leer y comprender la naturaleza de las dificultades de los alumnos al trabajar con los números con signo, entre otras cuestiones como lo mencionamos anteriormente. Por ejemplo, es muy común el uso de las deudas y haberes o las temperaturas sobre y bajo cero para introducir al alumno en el conjunto de los números enteros, y en estos casos sucede que el

> "orden quedaría definido a partir de la afirmación: 12° C bajo cero (−12) es una temperatura más baja que 1° C bajo cero (−1). Dicho así, desde luego, −12 es más que −1. Del mismo modo, una persona que debe 500 pesetas tiene una deuda mayor que la que debe 100 pesetas, lo que podría llevarnos a decir que −500 es mayor que −100" (Cid, 2015, p. 237).

Otro punto que generaba conflicto en los estudiantes, es que en este conjunto numérico *Z*, ya no se cumplía con lo conocido y adquirido por los estudiantes, por ejemplo, la idea clara que tenían hasta el momento de que sumar siempre aumenta y ahora eso ya no funcionaba así.

Interpretaciones de este tipo, llevan a que los estudiantes no logren comprender el funcionamiento correcto del conjunto numérico y por consiguiente se generan errores que con el paso del tiempo es mucho más difícil de revertir.

Entendíamos que, si podíamos lograr que los estudiantes fueran capaces de construir con sentido la idea de los números con signos y su funcionamiento, con el paso de los años podrían usar esos conocimientos de una manera más clara y efectiva.

Continuamos con el análisis y estudio del material y pudimos observar que la autora de la tesis trataba a los números enteros desde su génesis, es decir desde la razón por la cual se creó el conjunto numérico, "el álgebra". Comprender con qué objetivo surgió y cómo operar con ellos nos aclaraba bastante cómo podríamos llevar adelante nuestra investigación y seguramente brindaría la posibilidad de obtener mejores resultados en las aulas. El acceso al material se hizo en forma gradual. Luego, obtuvimos una breve introducción de la investigación y la secuencia de problemas a trabajar. Más tarde, obtuvimos material de apoyo y ampliación a partir del contacto iniciado con Eva Cid. En él, hasta pudimos detenernos en las implementaciones que se habían realizado en aquella ciudad de España, para observar el funcionamiento en el aula con los estudiantes.

La secuencia de actividades está dividida en dos partes, una primera que es para ser trabajada en primer año del nivel secundario y la otra en el segundo año.

La primera sesión de tareas abarca, en forma general, los objetivos de:

- Construir y simplificar expresiones algebraicas.
- Construir las reglas de cálculo para operar con expresiones algebraicas.
- Comparar y establecer la relación de orden entre las expresiones algebraicas.

Mientras que la segunda sesión de actividades, aborda, también en forma general, los siguientes objetivos:

- Multiplicar expresiones algebraicas.
- Establecer la regla de los signos para la multiplicación.
- Primeras ideas de la potenciación.

A medida que se van alcanzando los objetivos planteados, vamos trabajando de manera implícita con los números enteros hasta llegar a la formalización del conjunto numérico.

4. Acerca del trabajo al interior del grupo

Como mencioné anteriormente, los encuentros se realizaban de manera periódica, cada quince días, los sábados por la mañana en el colegio CEM N° 14 de la localidad de General Fernández Oro.

Al año siguiente, nos trasladamos al CEM N° 15 de la ciudad de Cipolletti. Allí los encuentros se realizaban los días de semana, fuera del horario escolar y generalmente luego de alguna clase en la que se había implementado alguno de los problemas en el aula. Durante las reuniones, procedíamos a la lectura e interpretación de diferentes partes de la tesis de Cid (2015). Nos resultaba muy atrapante la forma en la que la autora de la tesis explica las dificultades que presentaba para los estudiantes la comprensión del conjunto numérico. Por ejemplo, el uso de los signos en los cálculos a realizar, que generalmente aparecen como cálculos aislados (operaciones combinadas, uso de propiedades y reglas) que no requieren de una interpretación o análisis de lo que se va resolviendo, sino simplemente hacer cuentas y aplicar reglas de cálculo indicadas por los docentes y con poco sentido para los estudiantes.

Mientras leíamos el material, podíamos darnos cuenta cómo la propuesta iniciaba el conjunto numérico a través de problemas de sencilla interpretación. En ellos aparecían situaciones de ganar, perder, subir, bajar, etc., lo cual permitía establecer cálculos de sumas o restas y al mismo tiempo junto a algún dato desconocido que, favorecería, con el transcurso de la resolución, la aparición de variables, lo que posibilitaría el trabajo algebraico.

Además, las situaciones podían ser resueltas haciendo uso de las técnicas de cálculo que se emplean para el conjunto de los números naturales, y esos conocimientos les bastaban para dar respuesta a las mismas. Dichas situaciones resultaban de contextos conocidos por los estudiantes, lo cual hacía que fuesen situaciones atrapantes y agradables y a la vez desafiante para los conocimientos que hasta ese momento disponían.

Ahora, esta forma de introducir este conjunto numérico presenta un nuevo problema que la autora afirma:

> "la necesidad de iniciar el álgebra escolar cuando aún no se dispone de las reglas de los signos, lo que dificulta, si es que no impide, el cálculo algebraico. Esto obliga a una introducción simultánea de los números negativos y del álgebra elemental en la que se posponga el desarrollo exhaustivo de las técnicas algebraicas" (Cid, 2015, p. 255).

Esto, en principio, parecía complicar más aún el camino hacia el tipo de trabajo que se proponía en este material de estudio. Daba la sensación de ser un desafío mucho más grande aún, pero teníamos la firme convicción de llegar hasta el final e ir desenmarañando esa red que nos estaba presentando un reto que deseábamos asumir con dedicación.

Cid (2015) propone una serie de criterios epistemológicos utilizados en la construcción de la génesis escolar de los números negativos, que vamos a utilizar para introducir este conjunto numérico en el aula. Algunos de ellos son:

- Los números negativos se introducen en el seno del álgebra elemental, entendida como instrumento de modelización algebraica funcional.
- Se simetriza aditivamente el conjunto de los números naturales por lo que el álgebra comienza siendo un álgebra en N para terminar siendo un álgebra en Z.
- No se asume el desarrollo de las técnicas correspondientes a todos los objetos algebraicos que se presentan. Solo se ejercitan las técnicas de cálculo con números enteros (simplificación de expresiones algebraicas, operaciones entre ellas y cálculo de su valor numérico).
- Convertimos en objeto de estudio los distintos significados de los signos + y $-$, la diferencia orientada resultado de la comparación de números y las reglas de simbolización algebraica.
- Proponemos inicialmente problemas aritméticos directos y parametrizados (la modelización inmediata viene dada por una fórmula), con el objeto de poner de manifiesto el significado de la letra como parámetro o variable y la necesidad de operar con sumandos y sustraendos.

Teniendo en cuenta esos criterios, la idea de cómo trabajaríamos desde esta perspectiva aparecía mucho más clara y nos brindaba una mayor tranquilidad para la continuidad del trabajo.

Pudimos distinguir que el material propone grupos de problemas que marcaban visiblemente el camino que debíamos seguir. Los títulos correspondientes a esos grupos son:

- Cómo construir expresiones algebraicas.
- Cómo simplificar expresiones algebraicas.

- Cómo comparar expresiones algebraicas.
- Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas.
- Cómo multiplicar expresiones algebraicas.

Una vez que tuvimos una idea más clara del camino que debíamos seguir, decidimos dar el siguiente paso: analizar y trabajar sobre la secuencia presentada por grupos de problemas que proponía la autora.

La internalización de la propuesta nos llevó a su estudio tanto desde lo matemático como desde lo didáctico, es decir no solo comprender que se trata de una idea de número entero a partir de reconocer el sentido directamente vinculado al álgebra, sino también desde la gestión de la clase. La propuesta conlleva la resolución de problemas, luego hacer una puesta en común y debate en clase, es en ese espacio que las distintas reglas de cálculo comienzan a tener fluidez en el aula. Que los estudiantes puedan abordar la situación y mostrar su estrategia, genera una mayor confianza en el trabajo matemático que van realizando y además mayor autonomía.

También tomamos la decisión de implementarla en uno de los cursos a mi cargo. Esa elección se debió principalmente a que las actividades estaban pensadas para un primer año de nivel secundario y de los docentes que componían el grupo, yo era el único que enseñaba en un curso de dicho año. Inmediatamente se hizo una petición a los directivos del entonces CEM Nº 15, de la Ciudad de Cipolletti (Río Negro), una escuela pública ubicada en el Barrio del Trabajo, cuya comunidad educativa está conformada por estudiantes de barrios carenciados de la zona. Solicitamos las autorizaciones correspondientes para que el grupo de investigación pudiese acudir a la institución con la finalidad de acompañarme en la puesta en marcha de las tareas y posteriores reuniones de debate sobre lo ocurrido en la clase. El equipo directivo que se encontraba en funciones vio con muy buenos ojos la posibilidad de que se diera el acercamiento entre ambas instituciones y las puertas estuvieron abiertas desde un comienzo.

6. Primeras aproximaciones y adaptación de la secuencia

Análisis de algunas actividades de la propuesta

Durante el estudio de la propuesta, fueron muchas las discusiones que se daban en cada encuentro, nos llevaban a preguntarnos y reflexionar sobre la intencionalidad de cada una de las actividades, las modificaciones y/o adaptaciones que serían necesarias para una mejor interpretación de las mismas que allí se proponían. A continuación, se van a analizar algunas de las tareas que resultan relevantes para comprender el funcionamiento de la propuesta de trabajo. Es importante su comprensión para entender cómo se va construyendo el conocimiento y cómo el estudiante va avanzando en la resolución de las actividades a pesar de las dificultades que van apareciendo en cada una de ellas.

✓ *Análisis a priori de la actividad 1*

De la lectura y el análisis correspondiente a cada una de las actividades surgieron algunos interrogantes respecto de aquellas que llevaríamos al aula y de las posibles adecuaciones que deberíamos realizar.

Por ejemplo, en las actividades que analizaré a continuación podremos observar muchas de las inquietudes que fuimos solucionando en el grupo de investigación, con el objetivo de que los estudiantes no tuviesen dificultades en su interpretación y pudiesen dedicarse solo a la elaboración de estrategias de resolución de las mismas.

> **Tarea 1:** *Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?*

Ésta es la primera actividad que propone la secuencia de tareas que diseñó Cid en su trabajo. Es importante dado que desde aquí surge la idea del dato desconocido y que luego dará origen a la letra, lo cual permitirá ir confeccionando de manera progresiva expresiones algebraicas y a medida que se avanza en la propuesta obtener expresiones cada vez más complejas.

Trataré de dejar plasmado cómo lo fuimos trabajando tanto en el grupo de trabajo como en el aula con los alumnos.

Algunas de las expectativas giraban en torno a las variantes lingüísticas que existen entre nuestro país y el país de origen de la propuesta, como así también nos preocupaba lo que podían plantear nuestros alumnos para dar una respuesta a los problemas.

En la interpretación de este primer problema, en el grupo colaborativo, fueron surgiendo las siguientes situaciones:

I) Lo primero que nos preguntamos era si nuestros estudiantes sabían qué eran los “tazos”, ya que, al tratarse de situaciones planteadas para estudiantes de un colegio ubicado en España, posiblemente aparecieran palabras, lugares o términos desconocidos para ellos. Para este problema, una primera solución fue cambiar la palabra “tazos” por “figuritas” y modificar esa palabra en el enunciado del problema, para no generar un obstáculo al momento de presentar la tarea.

II) En el momento que intentamos resolver esa actividad, nos condicionó bastante la lectura del marco teórico, el hecho de saber que se trataba de la introducción de los enteros en un entorno algebraico, prácticamente nos obligó, casi de manera inmediata, a trabajar con una variable. Pensamos entonces en la aparición inmediata de la letra que representase la cantidad inicial de tazos y planteamos la siguiente solución:

$$x - 9 + 7 = x - 2$$

III) Pensando en los posibles procedimientos que utilizarían nuestros estudiantes al momento de plantear y resolver el problema, se nos hizo, en principio, difícil corrernos de nuestros conocimientos al momento de imaginar lo que ellos podrían llegar a producir. Una primera idea que se nos ocurrió fue el hecho de que intentarían realizar una resta entre 9 y 7, dado que son los dos números que figuran en el enunciado del problema y una de las relaciones que aparece es **pierde**. Allí radica una de las intervenciones que deberíamos realizar para hacer ver cómo solucionar esa dificultad. Lo que haríamos es releer el problema y tratar de analizarlo más en profundidad, ver que además de la palabra **pierde**, está también **gana**, lo cual ya generaría un conflicto en la resolución mediante una suma o una resta solamente.

IV) Luego de algunas ejecuciones de la propuesta, nos dimos cuenta de que no era necesaria la aparición de la letra en esta actividad inicial, podían representar la cantidad inicial de tazos con un número que les permitiese resolver la situación y así poder dar solución al problema. La necesidad del uso de la letra se da en un problema posterior de la secuencia.

✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 1*

En las primeras implementaciones, estábamos muy pendientes de que apareciera la variable en la resolución de los estudiantes. La gestión de la clase estaba más que nada centrada en que los alumnos pudiesen representar el dato desconocido con una letra, obtener una expresión algebraica y operar con la misma. Esto dificultaba el trabajo áulico, dado que la representación del dato desconocido a través de una letra, era algo forzada y generaba cierta resistencia en el alumnado al momento de operar y dar una respuesta a la pregunta de la actividad. Luego de ese primer obstáculo, la cuestión a analizar se trasladó a la respuesta a la pregunta planteada, *¿cuántos tazos le quedaron después de jugar?* La expresión que da la respuesta era $x - 2$, pero en el contexto del problema ¿qué significaba? ¿Sería fácil interpretar el resultado obtenido? Para nosotros, la respuesta era clara, *dos tazos menos que al principio*, pero para los alumnos el orden de la letra, el número y un signo en el medio no sería un asunto fácil de descifrar para poder dar cuenta de la respuesta. Pensamos que tendríamos mucho para gestionar desde el trabajo con la expresión y su equivalencia para finalmente poder obtener la respuesta esperada. Una vez que comprendimos que la aparición de la letra se daría en actividades posteriores, nos pusimos a trabajar con menos presiones en cuanto a ese inconveniente. Al acordar que no era necesaria la aparición de la variable, tomamos de manera más ágil el trabajo en la clase. Seguramente saldría de manera recurrente en los estudiantes la siguiente idea: *pero no sabemos con cuántos tazos salió de su casa*, con lo cual deberían de pensar en una estrategia para poder sortear ese inconveniente. Una posible solución que imaginaron para esa situación, fue considerar una cantidad inicial de tazos y desde allí realizarán los cálculos correspondientes para finalmente dar una solución al problema. Por ejemplo, si la cantidad inicial de tazos es 16, podrían plantear lo siguiente:

$$16 - 9 + 7 = 14$$

Lo cual es válido para esa cantidad inicial. Allí tendría una respuesta para brindar: *vuelve con 14 tazos.* Aquí surgía otra cuestión a discutir, podríamos tener tantas respuestas como alumnos en el curso y allí tendríamos que gestionar para lograr una respuesta al problema, ya que necesitábamos unificar la gran diversidad que podían surgir. Logramos observar que la cantidad inicial de tazos que podrían imaginar no requeriría de mayor análisis, dado que con colocar una cantidad mayor a 9, les permitiría desarrollar la situación sin mayores dificultades. Entonces, ¿Qué sucedería si algún estudiante imagina como cantidad inicial justo 9? En ese caso nos remitiríamos a las reglas del juego, si luego de la primera partida se queda sin tazos, no podrá seguir jugando. Todo este análisis aparece dado que los conocimientos de los que se disponen son los números naturales y hay un contexto que, en este caso, tiene sus reglas y deben respetarse, además, se quiere avanzar en la operatoria de números con signo. Surgió también que, en algunos casos, nos encontrábamos con estudiantes que tenían conocimientos de ecuaciones, y podrían llegar a pensar en plantear una variable para la cantidad inicial de tazos y así intentar armar una ecuación, por ejemplo: $t - 9 + 7 =$, lo que los frenaría aquí es la imposibilidad de igualar a un número, con lo cual la resolución quedaría inconclusa.

- ✓ *Sobre la gestión de la clase*

En este punto nos detuvimos a pensar en cómo llevaríamos adelante la propuesta en el aula, pudimos suponer posibles métodos de resolución por parte del estudiantado y luego ir analizando cómo trabajaríamos con la secuencia didáctica. Debimos tomar decisiones en cuanto a si las actividades se resolverían en forma individual o en grupos y qué ideas fundamentales debían quedar fijadas para poder dar continuidad a los próximos problemas. Una de las decisiones que tomamos, fue la de imprimir todas las actividades de la secuencia en hojas que serían entregadas a los estudiantes para no ocupar el tiempo de la clase en el dictado o copiado de las tareas. Un asunto no menos relevante fue decidir si debíamos entregar todos los problemas juntos o ir trabajando de a uno. Pensamos que, en el caso de entregar todas las actividades juntas, podría ocurrir que algunos alumnos pudiesen resolver los problemas de manera más rápida y entonces avancen con las demás actividades y de esta manera se desdibuje la intencionalidad que tiene cada uno de los problemas planteados. Fue así que tomamos la determinación de ir entregando de una a la vez las actividades y al finalizar cada una de ellas hacer una puesta en común. Según la complejidad del problema, las actividades se trabajaban en forma grupal o individual.

Volviendo al ejemplo de la tarea 1, desde allí pudimos ir obteniendo algunas conclusiones importantes para continuar con la secuencia didáctica. Algunas de las cuestiones a destacar para institucionalizar en la puesta en común serían:

- ✓ Si tenemos un dato desconocido, podemos imaginar una cantidad inicial y así poder resolver el problema.
- ✓ No podemos tener varias respuestas numéricas, el problema es uno y por lo tanto la respuesta debe ser una oración que generalice a todas las soluciones.
- ✓ Para obtener una respuesta más general, debemos comparar la cantidad inicial imaginada con la cantidad final obtenida, en función de esa comparación responder a la pregunta del problema. Así, en la tarea 1, si comparamos la cantidad inicial imaginada 16 con la final obtenida 14, podemos decir que: *Laura vuelve a su casa con dos tazos menos*. Lo mismo sucedería para cualquier otra cantidad inicial de tazos que pudiesen imaginar.
- ✓ No es posible pensar en armar una ecuación, dado que no se tiene una cantidad a la cual igualar.
- ✓ Al imaginar la cantidad inicial del problema, debemos ser cuidadosos de que a misma nos permita operar con los números siguientes. En el ejemplo de la tarea 1, debíamos tomar cantidades iniciales mayores a 9.

Continuando con el análisis de lo trabajado, comentaremos lo sucedido con otra de las actividades.

✓ *Análisis a priori de la actividad 2*

Una segunda cuestión que pudimos observar con el paso de los años y las experiencias anteriores, es que en algunos casos era conveniente entregar de manera separada los ítems de un mismo problema, ya que considerábamos que, al hacerlo de esa manera, se podían estudiar o analizar otras alternativas de procedimientos que podría realizar el estudiante.

> **Tarea 2:** *a) El colectivo KoKo sale de Roca y viaja a Neuquén con cierta cantidad de pasajeros. En Allen bajan 19 y suben 15, luego en Cipolletti bajan 35 y suben 41. ¿Con cuántos pasajeros llega a Neuquén?*
>
> *b) Para responder a la pregunta, completen la siguiente tabla.*

N° inicial de pasajeros	*N° final de pasajeros*
57	
61	
P	

En su versión original, se trataba de un tren que salía desde Barcelona con destino a Gerona y haciendo dos paradas intermedias. En este caso, tomamos la decisión de cambiar el tren por una empresa de transporte público de nuestra zona y que recorre algunas de nuestras ciudades, para que sean lugares conocidos para nuestros alumnos. Consideramos un recorrido de la empresa que solo atraviesa las localidades que utilizaríamos en el problema.

En una primera implementación entregamos la tarea completa, con los dos ítems y vimos que en algunos casos directamente pasaban al ítem b para poder responder a la pregunta, ya que así lo indicaba la consigna, y se perdía toda la elaboración de las distintas estrategias de resolución que podían surgir.

- ✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 2*

Una de las estrategias que los estudiantes lograron usar, debido a que en la *Tarea 1* funcionó, es la posibilidad de imaginar una cantidad inicial de pasajeros y desde allí dar una respuesta al problema. Por ejemplo, algunos alumnos imaginaban por sí mismos una cantidad inicial de pasajeros cualquiera y podía suceder que luego, esa cantidad no les sirviera para resolver la segunda parada. Así, si elegían la cantidad inicial de pasajeros igual a 20, en Allen bajaban 19, quedaba 1 pasajero y si subían 15, salía de Allen con 16 pasajeros. Al llegar a Cipolletti, no podía suceder que bajen 35, con lo cual deberían pensar mejor en la cantidad inicial de pasajeros.

Cuando los estudiantes optaban por pasar directamente a la tabla (ítem b de la tarea), surgirían las siguientes opciones de resolución:

N° inicial de pasajeros	N° final de pasajeros	Análisis
57	57-19+15-35+41= 59	Para estas dos primeras filas sólo operarían con los números, realizando las restas y sumas correspondientes. Para responder a la pregunta, nuevamente como en la tarea 1, solo bastará con hacer una comparación entre la cantidad inicial de pasajeros y la final. Respuesta: “llega con dos pasajeros más”.
61	61-19+15-35+41= 63	
p	*p*-19+15-35+41= *p*+2	Aquí el estudiante se ve en la obligación de hacer uso de la letra para poder armar su “programa de cálculo[1]”. Y también, podrían surgir varias estrategias de resolución para poder arribar a la respuesta final. Se trata, entonces, de explicitar un análisis de diferentes estrategias que dan lugar a visibilizar un funcionamiento algebraico de los cálculos, los mismos se explicitan a continuación de la tabla.
p	*p*+2	Si la respuesta es “*p*+2”, sólo estarían haciendo uso de lo obtenido en las dos primeras filas: ya saben que “llega con dos pasajeros más”, entonces a la cantidad inicial “*p*” basta con sumarle dos pasajeros más. Esta expresión, nos permitiría luego hacer ver la equivalencia entre las expresiones obtenidas con este procedimiento y los resultados obtenidos al “simplificar” la expresión de la fila anterior.

Algunas estrategias que utilizaron los estudiantes para poder resolver la expresión $p - 19 + 15 - 35 + 41$:

1°) Podrían dar solución al problema mediante una representación con flechas:

$$\downarrow 19 \;\; \uparrow 15 \qquad \downarrow 35 \;\; \uparrow 41 \qquad\qquad \downarrow = bajan \quad \uparrow = suben$$

$$\downarrow 4 \qquad\qquad \uparrow 6$$

$$\uparrow 2$$

Mediante esas representaciones y analizando por parte lo que sucede en cada localidad, los estudiantes podían decir que, en Allen como estado final, bajaron cuatro pasajeros, mientras que en Cipolletti, subieron seis y como resultado final, comparando lo que sucedió entre las dos localidades, subieron dos pasajeros más.

Si bien el procedimiento es correcto y logra dar una respuesta al problema, no es el más adecuado ya que lo que se pretende es que aparezcan los cálculos para luego hacer

[1] Chevallard (2005), llama a un proceso de resolución o cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas con el nombre de “programa de cálculo aritmético”.

aparecer la regla de cálculo para este conjunto numérico.

2°) Podrían agrupar por un lado a todos los pasajeros que bajan y por otro lado a todos los que suben y luego hacer la diferencia entre ellos: está más aparejado a procedimientos convencionales

$p - 19 + 15 - 35 + 41$ bajan 19 y 35, en total 54

suben 15 y 41, en total 56

$p - 54 + 56$ si bajan 54 y suben 56, entonces subieron dos más

$p + 2$

El procedimiento de agrupar por un lado los negativos y por otro lado los positivos y luego restar los resultados parciales, no sería recomendable en este momento dado que no actuaría el programa de cálculo asociado a la simplificación de expresiones algebraicas, es decir, que no se estaría respetando la cadena estructurada y jerarquizada de la simplificación de expresiones algebraicas (se puede apreciar mejor en el siguiente procedimiento). Si bien esta táctica está visiblemente asociada a operaciones matemáticas, no es parte de la propuesta la aplicación mecánica del mismo.

3°) Procedimiento asociado a los programas de cálculo: Si bien, para ir dando solución al problema presentado, se irían apoyando en el contexto y así podrían ir analizando los distintos momentos:

$p - 19 + 15 - 35 + 41 \rightarrow$ Si en Allen bajan 19 y suben 15, podemos decir que bajaron cuatro

$p - 4 - 35 + 41 \rightarrow$ Si en Cipolletti bajan 35 y suben 41, podemos decir que subieron seis

$p - 4 + 6 \rightarrow$Si en Allen bajaron 4 y en Cipolletti subieron 6, llega a Neuquén con dos más

$$p + 2$$

Este planteo se acerca más a lo que necesitamos que empiece a ser claramente visible para los alumnos, ya que luego podrán derivar de manera más directa en las reglas de cálculo que pretendemos para la resolución y simplificación de expresiones algebraicas.

Eso haría que la gestión de la clase requiriera de mucha más intervención, pues habría que trabajar bastante más para que los estudiantes pudieran visibilizar una de las reglas de cálculo que emergen del análisis y construcción del conocimiento, dicha regla debía quedar clara en esta primera parte de la secuencia: restar 19 y sumar 15 es lo mismo que restar 4.

✓ *Sobre la gestión de la clase*

Luego de realizar una reflexión sobre la lectura del material y el análisis de los problemas, llegamos a la conclusión de que no era tan necesario hacer aparecer la letra en el primer problema puesto que, en esta actividad, en el cuadro, ya aparece la letra y es un dato que debe usarse, con lo cual es necesario que los alumnos tengan que pensar en su uso y ver de qué manera funcionaría en la resolución de la situación planteada. Esta actividad permite visibilizar la idea de la autora en relación a que los programas de cálculo se constituyan en objeto de estudio y así se va dando lugar al trabajo algebraico implicado en las resoluciones de estas actividades. Es muy importante hacer, y ver funcionar las reglas de cálculo entre sumandos y sustraendos desde el inicio de la secuencia.

Otra situación que se hacía visible en la implementación de la actividad con sus dos ítems al mismo tiempo, es que si pasaban a resolver la tabla directamente podían encontrar el número final de pasajeros sin pasar por el cálculo algebraico, recordando que en una primera implementación pensábamos en la aparición de la letra desde el inicio de la secuencia de ejercicios y apelando a lo trabajado en la Tarea 1, podían comparar la cantidad inicial de pasajeros y la final y, en función de la comparación obtenida usar la letra. Por ejemplo, si lograban determinar que llegaba con dos pasajeros más, podían usar la letra y responder directamente $p + 2$.

Finalmente, pensando en la idea de si entregar las dos actividades juntas o no, definitivamente y luego de analizar detenidamente en si era conveniente hacerlo de esa forma, decidimos que en las siguientes implementaciones las entregaríamos de manera separada, como tareas 2 y 3 respectivamente.

También debíamos pensar en las puestas en común, cómo elaborarlas para dar participación a la mayor cantidad posible de estudiantes y que todos puedan sentir que sus aportes son importantes para la continuidad de las actividades.

Es fundamental destacar aquí que tanto los estudiantes como también en mi caso, no estábamos acostumbrados a este tipo de trabajo, lo que suponía todo un desafío en el sentido que ellos debían ir construyendo sus propias estrategias de resolución y yo debía actuar más de mediador entre sus producciones y los conocimientos que debía ir circulando en el salón de clases. Además, otro desafío era proponer a los alumnos compartir sus procedimientos de resolución y hacerse entender con sus pares. De ese modo el conocimiento empezaría a circular en la clase y ser más cercano entre los estudiantes, ¡qué mejor que la explicación de un compañero para comprender de manera más eficiente los distintos procedimientos utilizados.

Continuando con las actividades que tenían como propósito construir y simplificar expresiones algebraicas, empiezan a aparecer algunas con mayores grados de complejidad y que van planteando nuevos desafíos, tal es el caso de la actividad que analizaré a continuación.

✓ *Análisis a priori de la actividad 8*

Observamos al llegar a esta actividad que planteaba un nuevo desafío, el cuál consistía principalmente en que después de construir y simplificar las expresiones algebraicas debían compararlas. El hecho de tener que determinar, entre dos o más expresiones, cuál de ellas es mayor, menor o igual a la otra, no es algo sencillo de realizar.

Además, surgía la necesidad de crear dos o más expresiones en las que, para poder compararlas, debían trabajar con la misma variable en las distintas expresiones.

Tarea 8: *Al empezar la semana, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su alcancía. Entre lunes y jueves gastan o reciben las siguientes cantidades:*

María	*Adrián*	*Luisa*
Recibe $10	*Gasta $5*	*Recibe $10*
Gasta $5	*Gasta $10*	*Recibe $5*
Gasta $15	*Gasta $15*	*Recibe $15*
	Recibe $30	*Gasta $35*

*¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno***?**

Para poder plantear y resolver la situación pensamos en algunos de los procedimientos que podría desplegar el estudiante, y lo primero que se nos ocurrió es que podrían utilizar una variable distinta para cada una de las personas involucradas en la situación y empezar a trabajar desde esa idea principal. Seguramente no presentaría mayores dificultades el hecho de armar la expresión correspondiente a cada personaje y tener que simplificarlas, pero si surgirían muchas dudas al momento de tener que compararlas entre sí. Establecer una relación de orden entre dos expresiones como "$x + 3$" y "$m - 2$" no es para nada sencillo si no conocemos qué valor tiene cada una de esas variables. Es así que el trabajo más fuerte tendría que residir en hacer ver que "al principio de la semana, todos tenían la misma cantidad", con lo cual debían usar la misma variable para los tres amigos y eso ayudaría más a la comparación entre la cantidad de dinero que tenía cada uno.

✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 8*

En primer lugar, los estudiantes plantearían las expresiones para cado una de las personas involucradas en el problema, entonces:

<table>
<tr><td>María</td><td>Adrián</td><td>Luisa</td></tr>
<tr><td>$M + 10 - 5 - 15$</td><td>$A - 5 - 10 - 15 + 30$</td><td>$L + 10 + 5 + 15 - 35$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cómo lo habíamos pensado en el análisis previo, los alumnos utilizaron una letra distinta para cada uno de los personajes del problema, emplearon la inicial del nombre de cada uno, para designar la cantidad inicial de dinero, aquí la letra está siendo utilizada como una etiqueta.
Apelando a las reglas de cálculo ya conocidas y aplicadas en diferentes actividades, podrían simplificar cada una de las expresiones para luego comenzar a responder a las preguntas.</td></tr>
<tr><td>$M - 10$</td><td>A</td><td>$L - 5$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Una vez simplificadas las tres expresiones comenzaría el trabajo de compararlas para poder responder a las distintas preguntas planteadas.</td></tr>
</table>

Y luego abordamos las preguntas: *¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos?*

Aquí los estudiantes intentaron comparar las expresiones, determinando quién de ellos tiene más o menos dinero. La pregunta más recurrente en este caso fue ¿Y cómo sabemos cuánto valen M, A y L?

✓ *Sobre la gestión de la clase*

Durante la clase y ante las constantes consultas sobre cómo podían comparar la cantidad de dinero que tenía cada uno de ellos, tuve que hacer una primera y muy importante intervención, ya que como vemos en el ejemplo, se utiliza una letra inicial distinta para cada una de las personas que intervienen en el problema. Esto representa un obstáculo en la posterior comparación entre la cantidad de dinero que tiene cada uno. Realicé la siguiente pregunta, ¿Sabemos cuánto dinero tenía cada uno en su alcancía? La respuesta fue que no, por eso usaron una letra al inicio de cada expresión algebraica.

Entonces les planteé la siguiente duda, las letras que usaron para indicar la cantidad de dinero que tenían al principio, ¿Son iguales? A lo que responderán que no, entonces volveríamos a leer el enunciado del problema, haciendo hincapié *en el mismo dinero en su* *alcancía*, y preguntaríamos entonces, si María tiene "*M*", Adrián tiene "*A*" y Luisa tiene "*L*", ¿todos tienen la misma cantidad al iniciar la semana? Allí entonces empezarían a reflexionar sobre el uso de una misma letra para indicar la cantidad inicial que tenían en sus alcancías, teniendo en cuenta que todos tenían igual cantidad de dinero al principio.

Una vez solucionado ese inconveniente, podrían pasar a comparar sin mayores obstáculos las tres expresiones.

Realizando el cambio de la letra para cada una de las expresiones y que queden todas con una misma, algunas de las expresiones que fueron surgiendo eran:

María	Adrián	Luisa
$x - 10$	x	$x - 5$

Podrían decir entonces que el que más dinero tiene es Adrián, ya que al finalizar la semana tiene lo mismo que tenía al principio.

Luego sigue Luisa, ya que en total sólo gastó $5 de lo que tenía al comenzar la semana.

Y la que menos tiene es María, ya que fue quien más gastó de los tres, $10.

Entonces: $x > x - 5 > x - 10$

Respecto de la última pregunta: *¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?*

La comparación más fácil de realizar es la de María y Luisa respecto de lo que tiene Adrián, podrían responder que María tiene $10 menos que Adrián y Luisa $5 menos que Adrián.

Haciéndolos pensar en esa respuesta, podrían también decirlo de la siguiente manera: Adrián tiene $10 más que María y $5 más que Luisa. No es una relación fácil de establecer para los alumnos por los signos menos en ambas expresiones. Pero se podría solucionar con hacer ver una opción y su recíproca, por ejemplo, si María tiene $10 menos que Adrián, entonces Adrián tiene $10 más que María.

La mayor dificultad estaría en comparar a María o Luisa respecto de los otros dos. Eso pasaría principalmente al comparar a María respecto de los otros dos, ¿Tiene $5 más o menos que Luisa? Puede representar una dificultad debido al signo de ambas expresiones.

Con problemas como éste, en el que nuevamente el estudiante es puesto a trabajar en un contexto que conoce y puede manipular con relativa facilidad, comienza a realizar comparaciones entre dos expresiones algebraicas y puede establecer cuál de ellas es mayor o menor que la otra. Una idea que debe quedar bien establecida para así poder aproximar una idea de cómo instituir el orden de los números enteros.

Luego de estas primeras actividades seguían otras que tenían el mismo objetivo, construir y simplificar y comparar expresiones algebraicas.

Es importante destacar que la secuencia misma tiene algunas actividades en las que se van formalizando las reglas de cálculo y la forma de operar, para que los estudiantes vayan adquiriendo el lenguaje propio del álgebra y al mismo tiempo se vaya logrando una uniformidad en el diálogo que se tiene en las puestas en común.

Seguidamente haré una breve reseña de algunas de esas actividades.

✓ *Análisis a priori de la actividad 13*

Al llegar a esta actividad, vimos que empezaríamos a construir el lenguaje propio de la propuesta y que serviría de ayuda a nuestros estudiantes al momento de comprender el funcionamiento de la operatoria de los números con signo. Principalmente, nos ayudaría a que todos podamos manejar la misma terminología, y tanto la puesta en común como sus explicaciones serían claras para todos.

Tarea 13: *Completa las frases siguientes:*

*Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que*_____________________________

*Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que*_____________________________

*Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que*_____________________________

*Restar 5 y restar 2 es lo mismo que*_____________________________

Si bien no parecía una tarea difícil de realizar, debíamos tomar recaudos en cuanto a lo que los estudiantes podrían llegar a plantear al momento de completar las frases, como así también a su interpretación para usos posteriores.

✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 13*

Cuando los estudiantes se encontraron con esta actividad, lo primero que les llamó la atención, fue el hecho de que no aparecía una situación problemática para resolver, no había que armar, simplificar o comparar expresiones algebraicas.

Y las primeras preguntas que surgieron fueron, ¿Sumar 5 y sumar dos? ¿A qué cosa profe? Evidentemente les faltaba algo, tenían que completar la frase, pero no les terminaba de quedar en claro cómo podían hacerlo.

✓ *Sobre la gestión de la clase*

Para poder dar respuesta a los estudiantes, comencé a indagarlos sobre lo que ellos mismos preguntaban.

Ellos decían que les faltaba algo, entonces les pregunté: Y en los problemas, cuando les faltaba algo, ¿Cómo hacían? Sus respuestas eran que usaban una letra que representaba una cantidad inicial y luego podían ir armando las expresiones.

Entonces les propuse que pensaran en expresiones que pudieran ayudarlos a completar las frases. Y empezaron a construir y simplificar expresiones, por ejemplo:

$$x + 5 + 3 = x + 8$$

Una vez simplificada la expresión, tratábamos de leerlas en función de las frases a completar:

Leíamos entonces: sumar 5 y sumar 3 es igual a sumar 8. Que luego cambiábamos el es igual a por es lo mismo que y finalmente podían cumplir con la actividad planteada. Del mismo modo pudieron completar las tres frases restantes.

Ya formalizada la regla para la suma y la resta de números con signo, seguía ahora la formalización de una de las propiedades de la suma. Seguramente muchos de los estudiantes ya la conocían, pero necesitábamos darle el marco correspondiente a la secuencia que estábamos trabajando.

Para abordar la propiedad conmutativa de la suma trabajamos la siguiente actividad.

✓ *Análisis a priori de la actividad 14*

Al llegar a este punto, sabíamos que lo ya trabajado en la actividad anterior podía servir de trampolín para poder dar una respuesta a lo planteado aquí. Ya los estudiantes estarían mejor preparados para trabajar de manera más independiente.

Tarea 14: *Completa las frases siguientes:*
Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que ____ primero 2 y _______ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que ____ primero 2 y ______ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que ____ primero 2 y ______ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que _____ primero 2 y ______ después 5.

En este caso la consigna a cumplir era muy similar a la actividad anterior, motivo por el cual los alumnos se pusieron a trabajar de inmediatamente.

- ✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 14*

Aquí no surgieron dudas en cuanto a lo que debían realizar. Cada estudiante en su lugar se abocó a completar las frases, dando fluidez a lo trabajado hasta el momento.

- ✓ *Sobre la gestión de la clase*

Los estudiantes comenzaron a armar expresiones algebraicas que respondían a lo planteado en cada frase, luego procedían a su lectura y así podían completarla. Por ejemplo:

$$x + 5 + 2 = x + 2 + 5 = x + 7$$

Decían entonces: *sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que sumar 2 y sumar 5*. Si bien ellos simplificaban la expresión, tuve que hacer ver que la actividad no requería de ese paso. De todas maneras, me tomé el tiempo como para que pudieran verificar que la simplificación estuviese bien realizada, para así reafirmar lo trabajado hasta el momento.

Bien, volviendo a la actividad, a esto que ellos leían, les faltaba agregar el orden de cada sumando, como para hacer más visible la propiedad conmutativa, finalmente y luego de hablarlo con los estudiantes, pudieron completar las distintas frases y dar por finalizada la actividad.

Cumplimentada la actividad, ya quedaba oficialmente formalizada la propiedad conmutativa con el lenguaje que la propuesta elaborada requería.

Así, ya teníamos abordado tres de los grandes objetivos de este trabajo: construir, simplificar y comparar expresiones algebraicas. Además, claro, que ya iba quedando instaurando el lenguaje propio que la secuencia necesitaba.

Llegaba el momento de encarar otro de los grandes propósitos de la propuesta: “Encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas”. Para ello se trabaja con un nuevo grupo de actividades que permitirán ir elaborando las estrategias necesarias para poder alcanzar la meta propuesta en esta sesión de tareas.

✓ *Análisis a priori de la actividad 20*

Cuando llegamos a esta actividad, vimos que solicitaba que los estudiantes realicen cálculos mentales. Nuestra principal inquietud era saber si estaban preparados para poder dar solución a las situaciones planteadas y ver si nos encontraríamos con las estrategias más convenientes para llegar a lo que necesitábamos para poder encarar la nueva secuencia de tareas que permitirían ir visualizando la diferencia entre expresiones. Pensamos en que sería conveniente hacer algunos ejercicios de práctica para observar qué tipo de resoluciones podíamos encontrar.

Otro aspecto importante a considerar, era ver cómo podíamos hacer para que los estudiantes se vean en la necesidad de realizar cálculos mentales y no recurran a la cuenta parada en una hoja de la carpeta. Teníamos que encontrar una variante que los ponga en situación de pensar alguna manera de resolver rápidamente los cálculos presentados.

Tarea 20: *Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?*

678 + 99	*47 + 98*	*157 - 99*
123 + 39	*87 - 29*	*601 - 103*
427 + 397	*212 - 198*	*117 - 22*

En esta actividad como en otras se usó el programa Power Point, con la finalidad de brindarles otro tipo de presentación en las que tuvieron la necesidad de usar estrategias rápidas y de fácil cálculo. Eran, más que nada, aquellas en las que los estudiantes tenían que realizar cálculos apoyándose en conocimientos aritméticos y apelar a estrategias de cálculo mental. Valiéndonos de esta herramienta informática y la posibilidad que brinda de colocar tiempos de transición entre una diapositiva y otra, podíamos favorecer ese tipo de cálculo en los estudiantes, dado que no tenían demasiado tiempo como para realizar el cálculo convencional y poder estar listos para la cuenta siguiente.

✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 20*

Una vez finalizada la actividad, en la puesta en común, comenzamos a observar y analizar las distintas estrategias de resolución que plantearon los alumnos. Nos encontramos con algunas tácticas como, por ejemplo:

$678 + 100 - 1 \qquad 157 - 100 + 1 \qquad 212 - 200 + 2$

Esas son solo algunas, que tomamos como las más representativas con el fin de abordar una de las operaciones fundamentales para la simplificación de expresiones algebraicas “una operación de otra operación”, el “uso de paréntesis” y su posterior “supresión”.

Si tomamos el primer ejemplo, 678 + 99:

$$678 + (100 - 1)$$

El término + (100−1) es lo que denominamos operación de operación, en el lenguaje que se va creando en la resolución de la secuencia, se lo designa como “la suma de una resta”. En los otros dos casos serían “la resta de una resta”. Estas operaciones y formas de nombrarlas son importantes ya que van generando herramientas útiles para poder plantear y resolver otras tareas en las que se va formalizando la supresión de paréntesis y el lenguaje propio de esta forma de trabajo.

✓ *Sobre la gestión de la clase*

Una vez que los alumnos presentaron las distintas posibilidades de solución, se trabajó en la escritura, sus equivalencias y su análisis para poder obtener los cálculos anteriores. Es así que obteníamos las siguientes interpretaciones:

678 + 99	157 − 99	212−198
678 + (100 − 1)	157 − (100 − 1)	212 − (200 − 2)
678 + 100 − 1	157 − 100 + 1	212 − 200 + 2
778 − 1	57 + 1	12 + 2
777	58	14

Una de las cosas que más tuvimos que trabajar fue la inclusión del paréntesis en la operación, ellos consideraban que no era necesario ya que al momento de realizar las cuentas no lo habían utilizado para nada. El modo en el que logramos convencerlos de la necesidad de su uso, fue que, si queríamos representar, por ejemplo, el número 99 como la resta de dos números (100 – 1), era conveniente indicar con paréntesis qué números y qué operación era la que reemplazaba al 99. De ese modo podíamos ver claramente qué tipo de sustitución se estaba realizando.

A los efectos de llegar a ver las operaciones de operaciones y ver cómo se modificaban los signos o no, al eliminar los paréntesis, puedo decir que obtuve un buen resultado.

Una vez finalizada la actividad, la puesta en común y comprendida la importancia de los paréntesis y como se podían modificar los signos, teníamos que formalizar lo trabajado.

Así, para poner en el lenguaje propio de la resolución, y luego de haber trabajo con algunas otras actividades, se presenta la tarea con la que ya quedan expresadas las reglas de cálculo que debían usar al realizar las operaciones, en este caso la supresión de paréntesis.

✓ *Análisis a priori de la actividad 24*

En la actividad que analizaré a continuación, pudimos observar que nuevamente se trataba de completar frases. Pensamos que los estudiantes ya contaban con las herramientas necesarias como para poder cumplir con el requerimiento de la consigna, es decir que podían observar algún ejemplo de los anteriormente desarrollados y usarlos como "modelos" para lograr completar las frases.

Tarea 24. *Completa las siguientes frases:*

Sumar a + b es lo mismo que …………. a y …………… b.

Sumar a – b es lo mismo que …………. a y …………… b.

Restar a + b es lo mismo que…………. a y …………… b.

Restar a – b es lo mismo que…………. a y …………… b.

Ésta es otra de las tareas que presentan reglas de cálculo que deberán usar los alumnos al realizar las operaciones, al mismo tiempo va ampliando el lenguaje propio de la propuesta. En este caso la regla permite eliminar paréntesis en una expresión algebraica para luego poder simplificarla.

✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 24*

En algunos casos, pudimos observar que los alumnos no entendían cómo completar las frases. Algunos decían que en las oraciones no mencionaban los paréntesis y que por tanto no sabían cómo utilizar los "modelos" de los que ellos disponían.

✓ *Sobre la gestión de la clase*

En el grupo de estudio pensamos que para lograr que los alumnos comprendieran lo que se solicitaba en estas actividades, podríamos recurrir a presentarles un ejemplo de una expresión algebraica que represente la situación a partir de la cual los alumnos pudieran completar la frase. Por ejemplo:

$$x + (5 + 7) = x + 5 + 7$$

Al leerlas entre todos, la expresión oral de lo escrito en la expresión sonaba de la siguiente manera: *sumar 5 más 7 es igual a sumar 5 y sumar 7*. Entonces, los mismos alumnos lograban darse cuenta de que no era necesario mencionar los paréntesis al momento de leer la expresión y su igualdad, con lo cual pudieron avanzar con el resto de las frases.

Finalmente, una nueva regla de cálculo y el lenguaje propio de la propuesta quedaba establecida en el aula. En este caso la supresión de paréntesis y lo que se da a llamar "operaciones de operaciones" en la secuencia trabajada.

Hasta aquí ya muchos de los objetivos estaban trabajados en la clase. Podíamos ver que lo tratado estaba, dentro de todo, bastante bien incorporado en los estudiantes y que podían desenvolverse de manera más o menos independiente al momento de plantear y simplificar distintas expresiones algebraicas.

Nos quedaba ahora afrontar la cuestión de la "diferencia entre expresiones algebraicas". Para poder abordar esta nueva cuestión, se presentan actividades en la que además de comparar las expresiones, deben hallar la diferencia entre ellas.

✓ *Análisis a priori de la actividad 27*

Esta actividad presentaba un grado de complejidad un poco mayor a las trabajadas hasta el momento. Además de poder simplificarlas y compararlas, debían hallar la diferencia entre estas expresiones y aquí podían encontrarse con una diversidad de situaciones que ameritarían un análisis más profundo y una mayor gestión en la clase.

Si bien las expresiones no parecían ser muy complicadas, la forma en la que tenían que representarlas para compararlas y luego calcular su diferencia, seguramente sería lo más difícil de lograr.

Tarea 27: *Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:*

i. $7p + 3q$ $\qquad$ $2p - 2q$

ii. $4t - 6 - 15$ $\qquad$ $4t - 3 - 2$

iii. $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$ $\qquad$ $10m - 30 + 5m + 25$

Como podemos observar, las expresiones a comparar son muy variadas, desde algunas que parecen de fácil resolución a otras que se van complicando por la cantidad de términos que tienen. De todas maneras, los alumnos ya estaban acostumbrados a trabajar con expresiones que eran un poco más extensas.

✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 27*

Para poder calcular la diferencia entre las expresiones los alumnos comenzaron a colocarlas entre paréntesis y luego empezaron a operar con las reglas establecidas hasta el momento.

$i\ 7p + 3q \qquad\qquad 2p - 2q$

En primer lugar, con lo ya trabajado pueden establecer que la expresión $7p + 3q$ es mayor que $2p - 2q$, ahora restaría encontrar la diferencia entre ambas, para ello, las expresan de la siguiente manera:

$$(7p + 3q) - (2p - 2q)$$

Para eliminar el primer paréntesis, solo sacan, ya que no hay ninguna operación que interfiera en ello. Para el segundo término de la expresión dicen que restar $2p - 2q$ es lo mismo que restar $2p$ y sumar $2q$, quedando de la siguiente manera:

$$7p + 3q - 2p + 2q$$

Y ahora: sumar 7p y restar 2p es lo mismo que sumar $5p$; y sumar $3q$ y sumar $2q$ es lo mismo que sumar $5q$. Con lo cual la expresión simplificada sería:

$$5p + 5q$$

Con el segundo ítem:

$ii.\ 4t - 6 - 15 \qquad\qquad 4t - 3 - 2$

Comparar estas dos expresiones también les resultó relativamente fácil, dado que las dos tienen al inicio la misma cantidad, en la primera “pierde” o “gasta” (tomando como referencia el problema en el que gastan o reciben dinero, contexto favorable para una mejor interpretación) más que en la segunda, entonces la segunda expresión es mayor que la primera.

Para lograr simplificar, en la expresión $4t - 6 - 15$, dicen: resta 6 y restar 15 es lo mismo que restar 21; y en la segunda restar 3 y restar 2 es lo mismo que restar 5, entonces queda de la siguiente manera:

$4t - 21 \qquad\qquad 4t - 5$

Para proceder a calcular la diferencia las colocan entre paréntesis y luego resuelven:

$$(4t - 21) - (4t - 5)$$

Siguiendo las reglas ya trabajadas e incorporadas en su trabajo de programas de cálculo:

$$4\cancel{t} - 21 - 4\cancel{t} + 5$$

$4t$ y $-4t$, *l*os tachan, dado que son iguales y uno está sumando y el otro está restando. Y para continuar con los números, restar 21 y sumar 5 es lo mismo que restar 16. Con lo cual el resultado de la expresión simplificada es: -16.

Aparece por primera vez un número negativo solo, sin la compañía de una letra. Esto llamó mucho la atención a los estudiantes, dado que no podían darle un sentido lógico. Hasta el momento siempre estaba asociado a una acción o a una operación con algo más, la variable. Para generarles cierta tranquilidad y poder avanzar en el trabajo, lograron asociarlo a una acción, decían, por ejemplo, *es como que perdió 16*.

Y, por último, en el tercer ítem:

$$iii.\ 21-2m+3-23+5m \qquad 10m-30+5m+25$$

Intentaron simplificar las expresiones para poder manipularlas de manera más controlada:

$$1+3m \qquad 15m-5$$

Algunos intentaron aplicar conmutativa en la primera expresión:

$$3m+1 \qquad 15m-5$$

Aquí la comparación no les resultó tan fácil de realizar, dado que, si bien en la primera expresión suma una cantidad pequeña y en la otra resta una mayor, en la segunda expresión al inicio tiene más que en la otra. Con lo cual es necesario pensar en que en este caso depende de cuánto vale la letra "*m*".

Hacían la diferencia:

$$(3m+1)-(15m-5)$$
$$1+3m-15m+5$$
$$-12m+6$$

A los estudiantes este resultado no les llamó mucho la atención, dado que podrían aplicar la propiedad conmutativa y les quedaría algo bastante conocido por ellos.

- ✓ *Sobre la gestión de la clase*

A continuación, nos adentramos en la tarea de analizar los resultados obtenidos de la diferencia entre las expresiones algebraicas:

i	$5p + 5q$	Al realizar la diferencia entre las dos expresiones, el resultado obtenido es una

		expresión cuyos términos son positivos (pensando siempre en el campo de los naturales) y como dijimos, en su comparación, la primera expresión es mayor que la segunda.
ii	-16	Aquí la comparación nos arroja un número (también podría ser una expresión) con signo menos y en la comparación dijimos que la segunda era mayor que la primera o también la primera es menor que la segunda.
iii	$-12m + 6$	En este caso, tenemos un término negativo y uno positivo (trabajando en los naturales). En el análisis dijimos que no podíamos establecer cuál era mayor o menor que la otra, que requería de un análisis más profundo.

Tratamos de que quedase en claro, entre los estudiantes que, si la diferencia entre dos expresiones era positiva, la primera expresión era mayor que la segunda, y si la diferencia entre ellas era negativa, la segunda era mayor que la primera.

Este sería un primer trabajo que luego nos permitirá ir estableciendo la relación de orden entre los números enteros.

Cabe destacar que, a estas alturas del trabajo realizado, ya eran muchas las reglas de cálculo elaboradas y las estrategias desplegadas por los estudiantes al momento de enfrentarse con una nueva actividad a resolver. Trataba todo el tiempo de que circule en el aula dichas formas de resolución y el lenguaje que se iba adquiriendo a medida que avanzábamos, todo esto favorecía la comunicación al momento de la puesta en común y todos lográbamos comprender lo que se transmitía.

Para ejemplificar todo lo que se había logrado hasta el momento, voy a analizar la actividad que sigue a continuación. En la misma podremos observar cómo se van desplegando las estrategias y las reglas incorporadas por los estudiantes a lo largo de la propuesta.

✓ *Análisis a priori de la actividad 29*

Esta actividad permitía hacer uso de todas las reglas de cálculo adquiridas por los estudiantes hasta el momento. Para poder dar solución a los distintos ítems, debían recurrir a suprimir paréntesis, aplicar propiedad conmutativa y para lograr simplificar las expresiones, sumar o restar números con signo. Pensamos que era una actividad muy potente para ver dónde nos encontrábamos parados con lo que veníamos trabajando a lo largo de todo lo implementado.

Tarea 29: *Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:*

1) $a-(a-8)+b-8-(a+10)$ 2) $17-(4-x)+(5-y)-15-2$
3) $c+(25-c+15)-(25-c-15)$ 4) $2m-(7-5m)-(7m+5)$
5) $20-10z-(5z-(10-2w))$

Aquí es posible observar que solo se tratan de expresiones algebraicas en las que tenemos que suprimir los paréntesis para poder cumplir con lo solicitado en la consigna.

A continuación, presento sólo uno de los cinco cálculos de la tarea, en la que los estudiantes deben recurrir a todas las reglas anteriormente mencionadas para poder simplificar la expresión.

- ✓ *Aspectos de la implementación en el aula de la actividad 29*

Los alumnos ya tenían una gran variedad de estrategias y conocimientos adquiridos, con lo cual se pusieron a trabajar inmediatamente en la simplificación de las distintas expresiones. Algunos podían avanzar más rápido que otros, y quienes lograban terminar con su trabajo intentaban dar una mano a algunos de sus compañeros. Era reconfortante ver como se había creado un lindo clima de trabajo. Algunas de las actividades presentaron más dificultades que otras, pero de todas formas pudieron dar una solución.

- ✓ *Sobre la gestión de la clase*

Para mostrar lo que se fue trabajando en el aula, tomaré sólo el ítem 2 de la tarea, y lo que se fue dialogando en la puesta en común sobre esa expresión en particular y la forma en la que van apareciendo las distintas reglas de cálculo. Tomemos entonces la siguiente expresión:

$$17 - (4 - x) + (5 - y) - 15 - 2$$

Aquí, para poder empezar con el trabajo de la simplificación de la expresión, primero tuvieron que eliminar los paréntesis. Haciendo uso de las reglas de cálculo para la operación de una operación:

Sería: Restar $4 - x$ es lo mismo que restar 4 y sumar *x*.

Sumar $5 - y$ es lo mismo que sumar 5 y restar *y*.

La expresión queda entonces:

$$17 - 4 + x + 5 - y - 15 - 2$$

Luego, haciendo uso de distintas técnicas trabajadas a lo largo de la secuencia los estudiantes comienzan a simplificar la expresión algebraica. Lo primero que realizan es una supresión de números opuestos:

$$\cancel{17} - 4 + x + 5 - y - \cancel{15} - \cancel{2}$$

Así, pueden tacharlos, ya que restar 15 y restar 2 es lo mismo que restar 17. Entonces, como 17 – 17 = 0 se pueden tachar, la expresión se vuelve a copiar sin esos números y queda de la siguiente manera:

$-4 + x + 5 - y$

En este punto de la actividad, en primer lugar, queda un número que no resta con nada, el menos cuatro, algo que no les es desconocido, dado que aplicando la propiedad conmutativa se puede solucionar el inconveniente, entonces: restar 4 y sumar *x* es lo mismo que sumar *x* y restar 4.

$x - 4 + 5 - y$

Ahora, restar 4 y sumar 5 es lo mismo que sumar 1.

$x + 1 - y$

La expresión podría quedar simplificada de esa manera o bien, volver a aplicar la propiedad conmutativa, sumar 1 y restar *y* es lo mismo que restar *y*, y sumar 1.

$x - y + 1$

Siendo este el resultado final.

Tanto ésta como las distintas actividades siempre eran revisadas en una puesta en común en la que los mismos alumnos podían expresar con sus palabras los pasos que seguían para llegar al resultado final, aunque siempre tratábamos que sea el lenguaje descripto en las distintas actividades de formalización del vocabulario propio que la secuencia de problemas propone.

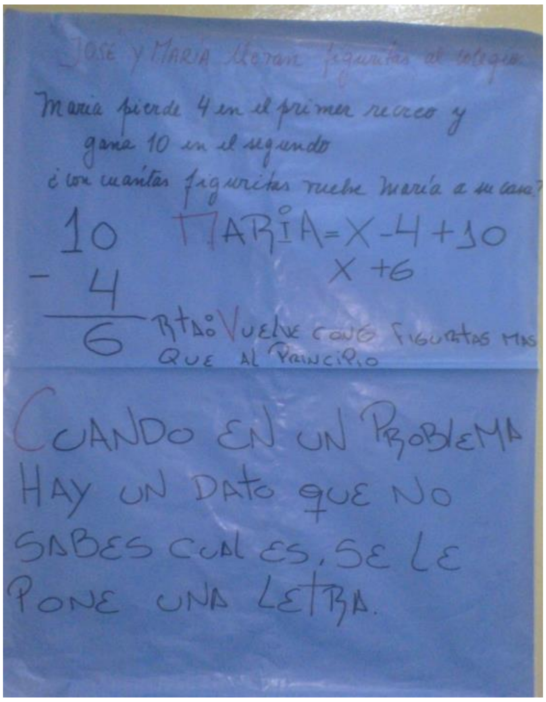
Tratábamos siempre que el trabajo fundamental de la puesta en común fuera el de verificar las equivalencias entre las distintas expresiones que se obtenían al resolver, dado que a veces los procedimientos de simplificación podían variar en cuanto al orden de las letras o números y en ocasiones aparecían expresiones más o menos simplificadas.

En resumen, fueron muchas y muy variadas las actividades que fuimos trabajando y analizando a lo largo del estudio de la secuencia. Presenté algunas de ellas para dar cuenta del arduo trabajo que realizamos en el interior del grupo, como así también con los estudiantes en las clases en que las actividades eran llevadas al aula. Incontables horas en las que, después de trabajar en el aula con los estudiantes, nos quedábamos en el colegio debatiendo sobre la pertinencia de cada una de las tareas trabajadas, sobre la puesta en común y las cosas más importantes que debíamos retomar en la próxima clase. Si algo parecía no funcionar, alentarnos entre nosotros y buscar siempre la manera de seguir adelante y cada vez más convencidos de lo que estábamos haciendo y que los resultados que obteníamos eran muy satisfactorios. Fue muy importante el apoyo de todos y cada uno de los integrantes del grupo para no claudicar en esta tarea bastante interesante en la que nos habíamos embarcado.

7. El trabajo de los alumnos en clases

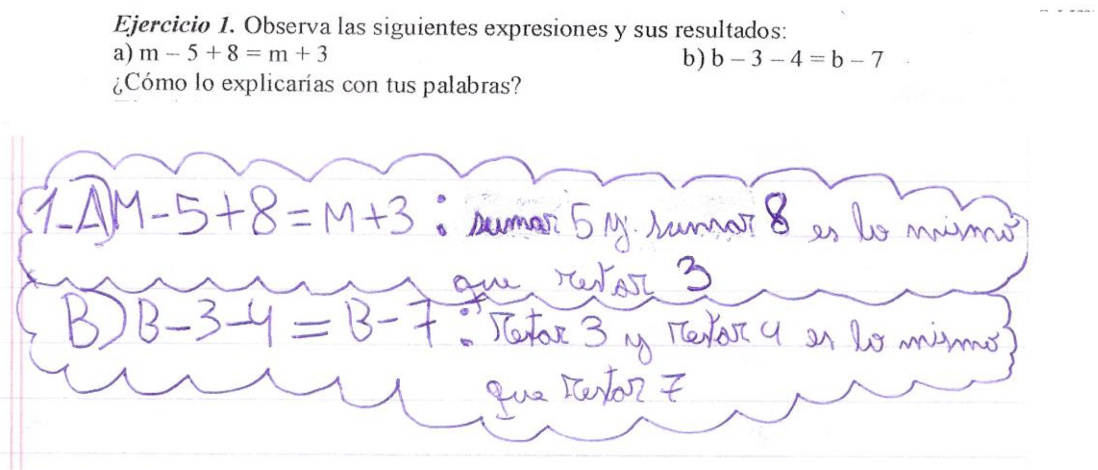
Al finalizar algunos grupos de actividades, dejábamos en claro las ideas más relevantes de cada una de ellas en función de que fuese un conocimiento que estuviese claro y a disposición para poder ser usado en otra situación problemática. Las anotaciones generalmente quedaban registradas en la carpeta, elaboradas con sus propias palabras para una mejor comprensión y en ocasiones se realizaban afiches, que los mismos estudiantes confeccionaban, con algunas conclusiones y aportes importantes para estar disponibles y a la vista de todos, como ayuda memoria. Ante una nueva situación planteada, los estudiantes podían recurrir a esos modelos, adaptarlo al nuevo problema y resolver de una manera más eficiente. Resultó ser una herramienta de mucha utilidad para la clase en general, en mi caso, ante consultas de estudiantes, les indicaba que busquen entre los afiches cuál se asemejaba más a la nueva tarea planteada y usasen las reglas escritas por ellos mismos para intentar resolver, esto tuvo como resultado una mayor autonomía en los estudiantes. Los alumnos también se apoyaban mucho en estas producciones para luego poder fundamentar, en las puestas en común, las estrategias usadas en la resolución de la tarea presentada y también entre ellos mismos se indicaban cuál era el modelo de problema que más se acercaba al propuesto en el caso de que algún estudiante no supiera cómo empezar a plantear el problema. También representaba un recurso útil para quienes faltaban a algunas clases y así poder refrescar lo visto hasta el momento.

La siguiente imagen muestra un afiche realizado por un grupo de estudiantes con la resolución y conclusiones que elaboraron de un problema que fue propuesto con el objetivo de ir cerrando una primera etapa de problemas y con las cuestiones más importantes que debían recordar:



Como vimos hasta aquí, las dos primeras actividades requerían de bastante análisis y reformulaciones necesarias para que puedan ser trabajadas por nuestros alumnos. Del mismo modo se fueron analizando y estudiando en profundidad cada una de las actividades. El objetivo era ir previendo posibles procedimientos de resolución por parte del estudiante y así poder anticipar las intervenciones en la gestión de la clase. Teníamos que tratar de ir aproximándonos a los objetivos que se iban proponiendo para cada conjunto de actividades y lograr que sean conocimientos que el estudiante tenga a disposición.

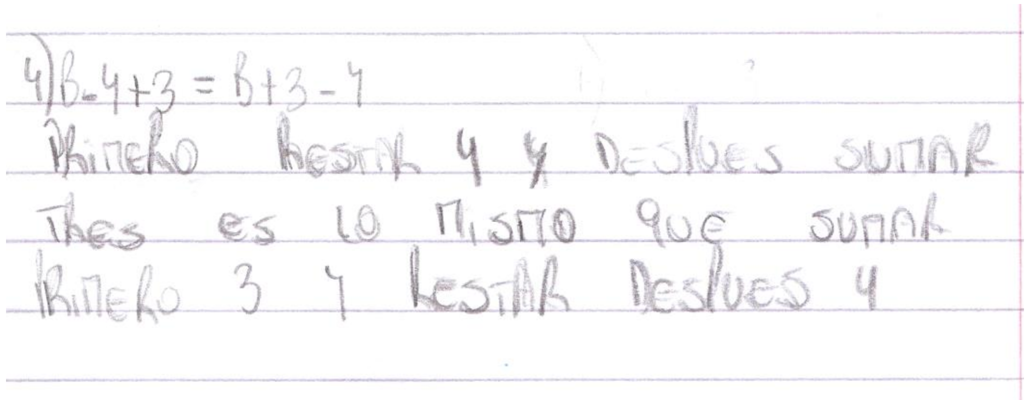
En la siguiente imagen podemos observar cómo un estudiante va elaborando un lenguaje propio de las reglas de cálculos para resolver expresiones algebraicas. Si bien tiene un error en el primer ejemplo, ya que sería "restar 5 y sumar 8", de todas maneras, va generando una estrategia de resolución y además puede comunicarla de una manera más sencilla, logrando internalizar ese conocimiento y sobre todo, tenerlo al alcance para ser usado en cualquier otra situación que así lo requiera.



Ejercicio 1. Observa las siguientes expresiones y sus resultados:
a) m − 5 + 8 = m + 3 b) b − 3 − 4 = b − 7
¿Cómo lo explicarías con tus palabras?

1-A) M-5+8=M+3: sumar 5 y sumar 8 es lo mismo que restar 3
B) B-3-4=B-7: restar 3 y restar 4 es lo mismo que restar 7

Otro ejemplo, sería una actividad en la que los estudiantes dejan por escrito una regla que les permite conmutar los términos de una expresión algebraica:



4) B-4+3 = B+3-4
PRIMERO RESTAR 4 Y DESPUES SUMAR
TRES ES LO MISMO QUE SUMAR
PRIMERO 3 Y RESTAR DESPUES 4

Recordemos que la propiedad conmutativa es posible en el álgebra por su estructura aditiva (como vemos en el siguiente desarrollo), y se utiliza justamente la suma porque goza de **buenas propiedades**, su escritura completa sería:

$$B + (-4) + 3$$

Aplicando la propiedad, quedaría:

$$B + 3 + (-4)$$

Esta escritura completa aún no aparece para los estudiantes, pero comienzan a hacer uso de **propiedades** que se ponen en juego en forma implícita, justificando dicho cálculo y les facilita la simplificación de expresiones algebraicas.

Es importante destacar que, como vimos anteriormente, la secuencia misma tiene algunas actividades en las que se van formalizando las reglas de cálculo y la forma de operar, para que los estudiantes vayan adquiriendo el lenguaje propio del álgebra y al mismo tiempo se vaya logrando una uniformidad en el diálogo que se tiene en las puestas en común.

8. La experiencia personal y del grupo en la implementación

En nuestra experiencia, desde que iniciamos con la implementación, siempre pudimos llevarla adelante en primer año de manera ininterrumpida desde el año 2013 hasta el año 2018, siempre con mejoras que íbamos realizando en función de las experiencias pasadas.

Por diversas razones, la organización institucional, por ejemplo, la segunda parte no siempre podía ser implementada en segundo año, con lo cual la mayor experiencia en el trabajo está centrada en primer año.

En una oportunidad, pudimos empezar con la implementación de la segunda parte en un segundo año, también del CEM N° 15.

Fue grande la satisfacción al ver que los estudiantes que habían trabajado con la propuesta el año anterior aún recordaban el lenguaje y las reglas de cálculo trabajadas, comenzamos con problemas de revisión para que pudiesen entrar en ritmo y recordar todo lo trabajado el año anterior, y luego arrancamos con la segunda parte de la secuencia.

Aquí hago un paréntesis para mencionar el caso de un estudiante que dos años antes había cursado el primer año del colegio y trabajó con la propuesta de primer año, luego cursó segundo año con otro docente (aclaro esto por el tema de que no tuvo una continuidad en el trabajo con números enteros abordado desde un entorno algebraico) y repitió el año. Al encontrarse nuevamente con actividades en las que repasábamos los objetivos alcanzados en primer año, podía trabajar sin mayores dificultades con las expresiones algebraicas, podía simplificarlas y lo único que tenía que trabajar nuevamente era el lenguaje propio de la propuesta. Nos sorprendió para bien el hecho de observar que el conocimiento que el alumno había construido durante el primer año, aún perduraba en su memoria y podía usarlo.

Volviendo a la implementación en el segundo año del colegio, veníamos trabajando de manera fluida, con los percances típicos de un nuevo conocimiento que se está generando, pero bastante bien. Las actividades se trabajaban en grupos o individualmente y seguíamos con la puesta en común para que circule la palabra del estudiante. Pudimos continuar con un buen ambiente de trabajo y los estudiantes ya estaban acostumbrados a esa forma del quehacer matemático, lo cual hacía que la clase tuviese ya un ritmo de trabajo interesante.

Lamentablemente, ese mismo año la escuela tuvo problemas en las instalaciones de gas y las clases estuvieron suspendidas por aproximadamente unos tres meses, ya que debían realizar toda la instalación nuevamente.

La continuidad del trabajo se vio interrumpida, ya que el contacto con los estudiantes se redujo al envío de actividades vía redes sociales institucionales y la propuesta requiere de la presencia de los actores en el aula, para poder debatir, mostrar distintos procedimientos e ir elaborando las reglas de cálculo que esta segunda parte permitiría alcanzar.

En los años siguientes, no pudimos volver a intentar su implementación debido a una reorganización del personal de la institución, por una reforma que se dio en el sistema educativo de la provincia de Río Negro, y no tuve más a mi cargo ninguno de los segundos años. Es hasta el momento la cuenta pendiente que nos quedó como grupo de investigación, llegar a implementar la propuesta en el segundo año.

9. Trabajos prácticos y evaluación

Respecto de este apartado, es importante aclarar que fue todo un desafío cambiar de la manera tradicional en la que evaluaba a mis estudiantes, por dos razones principales:

La primera: estaba muy acostumbrado a la evaluación escrita, la cual se daba al finalizar un tema, en la que al estudiante se les brinda una determinada cantidad de ejercicios que debían resolver aplicando las propiedades vistas, de forma muy mecánica y usando las formas y estrategias enseñadas por el docente. Cada uno ubicado en su banco y en lo posible en silencio.

La segunda: la demanda de los mismos estudiantes por una **calificación** que dé cuenta de su rendimiento y que les brinde la seguridad de que lo que vieron hasta el momento lo tienen **aprobado**. Era una confirmación de que todo lo visto estaba debidamente aprendido y, además, reflejaba una necesidad de verlo expresado en un número que indique cuán mucho o poco habían logrado entender.

Y sin perder de vista que también es una especie de elemento **controlador** y/o **motivador** para que los estudiantes se mantengan atentos y participen de las clases. Les da una razón por la cual resolver las distintas actividades y presentar sus procedimientos de resolución. Funciona, para muchos, como la **recompensa** a todo lo que pudieron producir a lo largo de las clases.

En esta forma de trabajo, lo más importante se iba dando en forma escalonada, un nuevo conocimiento brindaba las herramientas necesarias para ir generando otro, era muy interesante el proceso que se daba día a día en el aula y poder observarlo detenidamente en cada uno de los alumnos y de manera grupal requería de estar atento a todo lo que sucedía en el salón de clases.

Durante las primeras implementaciones estaba acompañado en el aula con uno o dos docentes más del grupo colaborativo, quienes, además de observar lo que sucedía en la clase con la resolución de las actividades, me brindaban apoyo en la atención de consultas o dudas que iban surgiendo por parte de los estudiantes. Estaban atentos a procedimientos importantes que se realizaban y hasta me daban una mano en la puesta en común para que el conocimiento generado sea más claro para todos los integrantes del aula y del grupo de investigación en general.

Las actividades se iban resolviendo una tras otra, las ideas principales eran abordadas en la puesta en común y podíamos observar que el conocimiento "circulaba" en el salón de clases, los alumnos, en su gran mayoría, se encontraban abocados a resolver las distintas situaciones que les presentábamos y todo parecía marchar de la mejor manera. Luego de unas semanas de clases, surgió como demanda de los propios estudiantes la necesidad de ser evaluados, necesitaban tener una nota, algo escrito donde puedan ver el resultado de todo lo que se venía elaborando en clase. Les explicaba que veníamos teniendo en cuenta el proceso, que todo lo que se estaba logrando hasta el momento era gracias a que estaban pudiendo relacionar lo visto en ese período y que, si eran capaces de resolver una nueva actividad, era porque lo que se había trabajado anteriormente estaba debidamente aprendido. Aún así, insistían en la evaluación, motivo por el cual en el grupo colaborativo nos encontramos en la necesidad de elaborar algunas actividades extras con el objetivo de que los estudiantes tuviesen la evaluación y la nota que tanto solicitaban.

Esto nos llevó a diseñar algunos trabajos prácticos evaluativos con actividades que considerábamos importantes por su contenido y por las **reglas** que debían quedar bien en claro en los estudiantes. Entonces, luego de terminar cada grupo de problemas, los estudiantes realizaban un trabajo práctico con el cual, además de considerar su proceso, fijábamos de manera más efectiva los conocimientos que debían circular en el aula y el alumno se sentía más seguro al momento de abordar un nuevo conjunto de situaciones problemáticas.

La experiencia de los primeros años de implementación también nos dejó en claro que en muchas ocasiones, trabajar solo con las actividades de la secuencia no era suficiente para que los estudiantes puedan captar la regla a seguir para la resolución de las actividades. Esta situación se brindaba principalmente por tres razones que pudimos identificar:

1. La discontinuidad en las clases. A veces de una clase del día jueves hasta la próxima del lunes de la semana siguiente, lo trabajado anteriormente no se

recordaba bien. Y tratar de hacer una revisión sobre la tarea ya resuelta no brindaba buenos resultados. Lo mismo pasaba si, por alguna razón (feriados, actos escolares, suspensiones de clase u otras), pasaban varios días sin tener clases de Matemática.

2. Las reiteradas inasistencias de los alumnos. Por distintas razones, en ocasiones nos encontrábamos con grupos de estudiantes en los que las faltas a clases era algo bastante frecuente, a veces las mismas eran muy prolongadas, semanas e inclusive meses. Al regresar a clases, debíamos tratar de ponerlos al día con todo lo que se venía trabajando.
3. Dar fluidez a la resolución de la secuencia. Tratábamos de tener una continuidad en la resolución de las tareas, terminaban una, hacíamos la puesta en común, dialogábamos sobre las cuestiones más importantes y pasábamos a la siguiente. Al pasar tres o más de las actividades, gracias al trabajo conjunto de reflexión que se daba en el grupo colaborativo, pudimos observar que algunas cosas no estaban bien en claro y eso dificultaba poder seguir adelante, debíamos volver a trabajar sobre todo lo anterior y nos retrasaba bastante.

Presenté estas cuestiones como una inquietud hacia el interior del grupo y me pareció pertinente la posibilidad de que elaboremos actividades de revisión o fijación y que las mismas sean dadas a los estudiantes como tareas para aquellos días en los que sabíamos que tendríamos discontinuidad en las clases, entonces, al regresar podíamos hablar y repasar sobre todo lo que ya veníamos trabajando hasta la clase anterior.

También nos servirían para reforzar aquellas cuestiones que considerábamos importantes y que lográbamos observar que no habían quedado del todo claro al finalizar algunas de las actividades.

Fue importante también la predisposición de los profesores integrantes del grupo colaborativo, que estaban presentes en las clases, en cuanto a la atención personalizada que les brindaban a los estudiantes que se reincorporaban a clase luego de algunas inasistencias. Trabajaban en forma particular con ellos, tratando de que puedan ver todo lo que se había trabajado hasta el momento y así pudiesen alcanzar a sus compañeros. Esto fue de gran ayuda para mí, dado que podía seguir adelante con las clases sin **retrasar** a quienes asistían a clases regularmente.

Pudimos, finalmente, proveernos de una buena cantidad de **actividades extras**, de las cuales disponíamos en todas las clases y podíamos hacer uso de las mismas para evitar o solucionar los inconvenientes anteriormente planteados.

10. La visita de Eva Cid

Transcurría el año 2016 y la idea de que la autora de la tesis en la que veníamos trabajando desde hace cuatro años pudiese llegar hasta nuestro país, comenzaba a tomar fuerza.

Pensábamos que la presencia de la doctora Eva Cid y la posibilidad de escucharla personalmente, podía llegar a aclarar muchas de las cosas que aún no nos quedaban del todo claro. Hacía algunos años que veníamos implementando la propuesta en distintos cursos y con muchos alumnos, y teníamos la plena convicción de que la propuesta funcionaba, pero aún a nivel grupo de investigación, quedaban algunas preguntas sin responder. Algunos de los interrogantes tenían que ver con las actividades en particular, en cuanto a objetivos a alcanzar y la necesidad o no de hacer uso de las unidades de medición en el grupo de problemas para abordar la multiplicación, por ejemplo.

El grupo de docentes investigadores del grupo colaborativo, perteneciente a la Universidad Nacional del Comahue comenzó con los contactos y los trámites necesarios para gestionar que la visita de Eva Cid, a nuestro país y en particular a la universidad y al colegio en el que estábamos implementando la secuencia sea posible. Cuando el proyecto fue presentado a Eva Cid, le gustó mucho la posibilidad de poder conocer el país y le parecía increíble que **al otro lado del mundo** un grupo de docentes estuviese analizando, trabajando e implementando en el aula su investigación. Ella nos decía que no se le había ocurrido la idea de que su trabajo fuese a trascender fronteras.

Finalmente, y luego de algunos meses de trámites pertinentes a su visita, en el mes de marzo de 2016, llegó Eva y la ansiedad de conocerla, escucharla y poder trabajar a su lado era cada vez más grande.

Casi inmediatamente comenzamos las reuniones del grupo de investigación con Eva, poder escucharla contar el porqué de la elección de los números enteros para elaborar su tesis de doctorado y saber que coincidimos en esas inquietudes. Esas mismas intranquilidades también nos llevaron a nosotros a elegir ese tema para su estudio, entender que la preocupación era bastante grande ya que afectaba a todo el nivel de escolarización por su importancia, aún para la resolución de las distintas operaciones en otros conjuntos numéricos. Poder encontrar una nueva forma de avanzar sobre ese problema era su mayor preocupación y el hecho de, ahora, encontrar a otros profesores abocados a trabajar con su tesis de doctorado para abordar el inconveniente de la enseñanza de los números con signo era muy motivador para ella y para nosotros. Las reuniones se hacían largas y muy ricas en cuanto al diálogo y al conocimiento que podíamos ir retroalimentando entre sus explicaciones a nuestras incertidumbres y ella al nutrirse de nuestras experiencias en el aula.

Finalmente llegó el día en que Eva conocería el CEM N° 15 de la ciudad de Cipolletti, el lugar físico en el cual su propuesta, con nuestras modificaciones, se estaba llevando adelante desde hacía 3 años. Conocería el colegio y el grupo de estudiantes que en ese momento estaban trabajando con la propuesta didáctica. Fue una visita en la que realizó un breve recorrido por las instalaciones de la escuela y luego tuvo el encuentro, tipo entrevista, con el grupo de alumnos.

El diálogo entre los estudiantes y Eva era bastante fluido, charlaron un poco de cómo era España y la ciudad en la que ella vivía, de cómo le surgió la idea de realizar **ese tremendo trabajo** y de cómo eran los estudiantes de allá.

Ellos le contaron a Eva acerca de su forma de trabajar en las clases, que les resultaba muy interesante y que lo mejor era que ya no tenían pruebas y que con trabajar en clases y hacer los trabajos prácticos podían aprobar matemática. Fue una charla muy linda e interesante para todas las partes involucradas en este trabajo.

Luego llegó el momento en que Eva brindaría una conferencia en la Universidad, para nosotros, todos los docentes de nivel medio o universitario y estudiantes del profesorado de Matemática interesados en participar de la misma. Hubo una concurrencia bastante grande, pudimos compartir toda su experiencia en la elaboración de su investigación, escuchamos las fundamentaciones de la propuesta con mucha claridad. También se tomó un tiempo para contar sobre la implementación de la propuesta en los colegios en los que se puso a prueba el funcionamiento de la secuencia.

11. Presentaciones en conferencias, talleres y cursos de capacitación

Algunos de los mayores provechos, a nivel personal y profesional, que pude lograr desde que soy parte del grupo de investigación es haber conformado un panel de exposición en Congresos Nacionales de Matemática en los que relatábamos la experiencia del trabajo colaborativo de investigación. Ser parte y haber trabajado en la escritura y posterior presentación ante grupos de docentes de nivel medio, universitario, estudiantes de los profesorados y destacados investigadores en didáctica de la matemática, nacionales y, en ocasiones, hasta internacionales, es algo que no pensaba que se podía llegar a dar cuando empecé con mi carrera como docente. Tal fue el caso de la participación en la EDIMAT 2017, con la ponencia “Problematización del conocimiento matemático en un espacio de trabajo colaborativo”, que se desarrolló en la UNCo, Facultad de Economía y Administración. Sin duda una de las mejores experiencias, exponer ante tantos profesionales y futuros profesionales, dar a conocer todo el trabajo que se venía desarrollando desde hacía ya cinco años, reuniones de estudio, planificaciones de clases, readecuación de las actividades, pensar en las puestas en común, gestión de las clases, nuevos modos de evaluar y toda la predisposición del grupo para revisar, poner un freno y volver a arrancar, sin dudas experiencias que fueron, son y serán inolvidables.

También me abrió puertas a participaciones en ponencias que se desarrollaban en otros lugares del país, como por ejemplo en San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro en el año 2018. En una ocasión anterior en la Universidad Nacional del Litoral, provincia de Santa Fé (2017), llegar hasta allí y poder contar la experiencia vivida y hacer conocer nuestra propuesta de trabajo y como fuimos creciendo año tras año, fue algo que, personalmente, me hacía valorar cada vez todo lo vivido en el grupo.

Ahora, la primera vez que me tocó realizar una ponencia, fue en la ciudad de Cipolletti, Río Negro en el año 2013, tan solo un año y medio después de haber iniciado el grupo de investigación. Un desafío muy grande, en primer lugar, por tener que redactar una experiencia de trabajo de investigación y puesta en marcha, por primera vez, de la propuesta y luego ser el expositor en forma individual en un congreso de educación, una práctica totalmente nueva para mí y poder estar a la altura, gracias al apoyo del equipo, generó la confianza suficiente como para después animarme a la participación en otros congresos.

También me abrió la puerta a ser docente co-formador. Durante algunos años, estudiantes del Profesorado de Matemática de la UNCo, fueron recibidos en el colegio en el que trabajaba para poder realizar sus prácticas de residencia. Fue muy productivo para mí interactuar con ellos, conocer sus propuestas de trabajo y elaboración de sus planificaciones, verlos desenvolverse como docentes y poder acercarles parte de mi experiencia en charlas grupales o individuales, dialogar sobre los modos de evaluación y su acercamiento a los estudiantes de nivel medio. Fue sin dudas una experiencia que me aportó mucho desde lo profesional.

Otra experiencia muy relevante para mi carrera profesional fueron las posibilidades de participar en el armado y dictado de talleres y cursos de capacitación para otros docentes y estudiantes de la carrera del profesorado de matemáticas. Fue un trabajo que demandó al grupo mucho tiempo de elaboración y diagramación de la forma en que trabajaríamos las distintas actividades. Todo lo que logramos fue bastante grande, dado que debíamos en primer lugar introducir a los participantes, de una manera bastante acotada, en la metodología del trabajo pensado y armado por Eva. También introducirlos en los distintos significados del signo y los objetivos que debíamos alcanzar en cada etapa de las tareas que trabajaríamos. A nosotros nos llevó algunos años de lectura, análisis, implementación y reelaboración de actividades, poder interpretar y llevar adelante de manera adecuada la secuencia. Tratar de transmitir todo eso en un taller o curso de capacitación era una tarea bastante grande.

Al encontrarnos ante ese desafío, es que se veía la fortaleza que teníamos como grupo y lo coordinado que estábamos para poder trabajar en el diseño de los talleres y cursos. Todos participando del dictado de alguna de las etapas, nos dividíamos en grupos más reducidos y cada subgrupo tenía a su cargo el dictado de una parte. Mientras un grupo estaba al frente del taller, el resto participaba en el trabajo de los asistentes a dichos eventos, asesorando o guiando las producciones de ellos. Todos hablábamos el mismo idioma y el mismo fluía de manera natural, no aparecían baches en el dictado de la misma.

Los participantes se mostraron muy agradecidos por la presentación de una nueva forma de trabajar con los números con signo, les resultaba una propuesta muy interesante y podían captar la metodología de trabajo. Algunos de ellos se sumaron a trabajar con la propuesta o parte de ella en sus cursos y mantenían el contacto con nuestro grupo para hacer consultas.

Para nosotros era muy importante poder acercarles una nueva herramienta para su práctica docente, la idea siempre fue poder difundir lo más posible la propuesta, debido a lo potente de la misma y a los resultados que nosotros podíamos observar en nuestras implementaciones. Seguramente requería de mucho estudio y dedicación para poder llegar a obtener los resultados esperados, pero llegar a comprender su funcionamiento y ver que los estudiantes pueden ir alcanzando los objetivos es muy satisfactorio, al menos para nosotros y tratábamos de transmitir la pasión por lo que hacíamos.

Todas estas experiencias de brindar capacitaciones, ser un expositor en conferencias o ser docente co-formador, no estaban en mi horizonte cuando me recibí de Profesor en Matemática y Cosmografía. Siempre me vi como asistente a esas charlas o formaciones.

Ser parte de este grupo de investigación me abrió muchas puertas, pero lo más importante es que me mostró que siempre se puede hacer más.

12. Palabras finales

Todo lo vivido a lo largo de estos casi ocho años de ser parte del grupo colaborativo me deja muchas satisfacciones profesionales y personales.

En lo profesional, sobre todas las cosas me permitió pensar en distintas formas de abordar la enseñanza de un determinado contenido. Me ayudó a adquirir nuevas metodologías de trabajo, pensar en distintas formas de abordar la clase, trabajar sobre las puestas en común, reflexionar sobre otras formas de evaluación y a trabajar en la variedad de situaciones posibles de una clase. Poder compartir el aula con profesores del grupo y saber que me escuchaban en cuanto a mis aportes al trabajo áulico y adquirir toda la experiencia que ellos me transmitían con sus consejos para la gestión de la clase, sumó mucho a mi desempeño como docente. Las amplias charlas en torno al análisis de la propuesta y al conocimiento matemático que esperábamos lograr eran muy fructíferas para todos, dentro del grupo todos somos iguales, docentes en busca de generar mejores condiciones para la enseñanza de la matemática.

En lo personal, conocí un grupo de docentes, muchos de ellos con experiencia en el trabajo con la didáctica de la matemática, que me trataron como un par más. Confiaron en mis capacidades y en mis ganas de querer crecer en lo profesional y todo el tiempo me alentaron a seguir adelante. Me presentaban los desafíos de ser capacitador o expositor y solo me quedaba responderles de la mejor manera. Tener su reconocimiento y su aceptación ante mis propuestas y mi trabajo me llena de satisfacción.

Referencias

Cid, E. (2015). Obstáculos Epistemológicos en la Enseñanza de los Números Negativos. Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'education secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux y P.L. Hennequin (eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*, vol. 168, (pp. 239-263). París: Publications del'APMEP.

Capítulo 6

Reflexiones al revisar un proceso de Diseño y desarrollo de talleres para la apropiación de una propuesta proveniente de la investigación didáctica en la formación continua

Rosa Martinez - Analía Petich - Ethel Barrio

1. Introducción

El estudio conjunto[1], entre docentes investigadores (DI) y docentes de aula (DA), correspondiente a nuestro trabajo colaborativo desarrollado en el capítulo 2, nos permitió una apropiación de la propuesta de Cid y Ruiz Munzón (2011) y Cid (2015) que fue configurando una comprensión de algunos aspectos nodales relativos a los saberes en juego. Con ese camino recorrido organizamos, como grupo de trabajo, el desarrollo de talleres[2] para compartir la propuesta de enseñanza, de los números enteros, con otros docentes que no participaban de los espacios colaborativos. Así, el estudio conjunto de la adaptación y exploración en el aula de ese producto de investigación, devino en el desarrollo de acciones en talleres que articulan la formación continua con la investigación.

Pensamos que las acciones que se desarrollan en los talleres pueden actuar como canales de difusión, en tanto posibilitarían que profesores que enseñan matemática en escuelas de nivel secundario tomen contacto con una propuesta que favorece avanzar sobre algunas de las dificultades presentes en la enseñanza de los números negativos. A la vez, estas acciones, permitirían crear una vía de acceso, que creemos necesario explicitar, para contribuir a la asequibilidad de la propuesta de investigación.

La elección del formato taller estuvo determinada por la intención de generar un escenario[3] de intercambio posible para difundir, analizar y reflexionar a partir de la resolución de un conjunto de problemas seleccionados, a propósito de caracterizar los aspectos centrales de la propuesta.

[1] El estudio conjunto entre DA y DI se inició en marzo de 2012.
[2] Los talleres se desarrollan a partir de 2016. Todo ese tiempo dio lugar a un proceso de estudio y análisis de la propuesta en un ir y venir con la implementación.
[3] Otros escenarios destinados al estudio y tratamiento de la propuesta, desde el año 2015, han sido espacios curriculares del profesorado de Matemática de la FaEA, UNCo, concebidos para analizar propuestas de enseñanza a la luz de herramientas teóricas de la Didáctica de la Matemática.

Estos talleres[4] se fueron sucediendo en diferentes lugares con distintos docentes, cuyos trabajos acontecían en diferentes instituciones. Las características singulares de cada experiencia fueron dando lugar a otros análisis, a conceptualizaciones más profundas que fueron integrándose a otras interpretaciones y que devinieron en la no repitencia rutinaria de estos talleres. Además, las retroalimentaciones que se daban en los espacios colaborativos, con relación al trabajo de la misma propuesta durante su desarrollo, ha sido otro matiz que reconocemos como transformador de ideas en los espacios de los talleres.

Los talleres se diseñaron con una configuración que algunas veces estaba preestablecida (en Jornadas de educación y/o Congresos), y en otras, se ajustaba a los regímenes laborales de los profesores. En ambos casos, la variable tiempo estuvo en un promedio de ocho horas reloj. Desde el inicio de los talleres, uno de los desafíos consistió en: ¿Cómo difundir en pocos días una propuesta novedosa, constructiva, cuyo estudio y adaptación nos demandó años en el grupo colaborativo[5]? Nuestra intención y nuestra tarea fueron, por cierto, muy ambiciosas. En nuestro trabajo docente, la variable tiempo siempre nos atraviesa, ¿Cómo usar esta variable "a nuestro favor" en el desarrollo de los talleres? Este desafío se transformó en una potencialidad, exigiéndonos un análisis más profundo de la propuesta de Cid para poder desentrañar y abordar sus aspectos claves, sin dejar de reconocer los límites que tiene un trabajo con tiempos acotados.

Asumimos la complejidad de la tarea de coordinación de los talleres con la convicción de entrar en diálogo con las prácticas de enseñanza de los docentes participantes a los mismos. Esto nos planteó otro desafío, el de integrar una propuesta –surgida a partir de otras intencionalidades– a las necesidades reales de estos docentes, con un funcionamiento singular en sus clases, con un modo particular de manejo de la incertidumbre y del margen de maniobra que proporciona cada situación (Perrin-Glorian y Moreira Baltar Bellemain, 2016).

En este capítulo presentamos algunas reflexiones al revisitar lo acontecido en estos talleres. Tomamos la idea de "revisitar" que propone Nicastro (2006), referida al énfasis en una mirada "con ansias de descubrimiento, de exploración" que nos permitió echar luz a cuestiones que hasta el momento no se explicitaban como tales. La reflexión sobre nuestro quehacer

[4] Los Talleres a los que nos referimos son: en el marco de REPEM (2016), Santa Rosa pcia de La Pampa; como Actividad de Extensión UNCo (2017), Neuquén Capital; en el marco del Proyecto Extensión UNCo (2018), Chos Malal pcia de Neuquén; en el marco de REPEM (2018), Santa Rosa pcia de La Pampa; en el marco de ERUMA (2018), Bariloche pcia de Río Negro; en el marco del Proyecto Extensión UNCo (2019), Chos Malal pcia de Neuquén; en el marco de IV JEM (2019), Salta capital.

[5] Ver capítulo 2 de este libro.

genera así un efecto de extrañamiento de nuestro propio accionar al volver a mirar y (re)pensarlo desde un lugar de distanciamiento. En este sentido, analizamos e interpretamos las elecciones que se iban sucediendo, en el espacio de los talleres, reconociendo “algo nuevo” en una dinámica de problematización. La construcción de adaptaciones que se producían, atendió a la singularidad común de las experiencias de los docentes que participaron en las distintas jornadas.

Para esta revisita, en primer lugar recuperamos nuestra intencionalidad, que los docentes participantes puedan reconocer a la propuesta como una herramienta genuina que les ofrece mejores condiciones de enseñanza y mejores oportunidades de aprendizaje para sus alumnos. Hablamos de herramienta genuina, en tanto que la apropiación de un resultado que surge de la investigación para la enseñanza de los números enteros en escuelas secundarias sea de interés por estudiar. Es decir, nos referimos a que pueda ir dando respuestas a aquellos problemas de enseñanza que los docentes identifican y enfrentan en sus aulas a propósito de este objeto de conocimiento y de enseñanza. Esta apropiación “no va de una”, no es evidente; pecaríamos de ingenuos si pensáramos que por conocerla ya estarían resueltas esas dificultades. Asimismo, conocerla no es sinónimo de apropiarse de la misma: la disponibilidad de la propuesta no garantiza su accesibilidad (Kalman, citado en Delprato. M., 2013).

Consideramos que los siguientes aspectos contemplados en nuestras elecciones abonan a la idea de herramienta genuina para “atrapar la propuesta” y hacerla más asequible:

- el estudio de las potencialidades, los límites de las situaciones que la componen y las relaciones que hay entre ellas en tanto generadoras de producción y progresión de ciertos conocimientos;

- la identificación de aquellos saberes que se convertirían en conocimientos, en el sentido de Brousseau (2000), a partir de la puesta en juego de esas situaciones y luego se re-descontextualizarían como resultado del trabajo con ellas; y

- la entrada en diálogo de esos conocimientos –constitutivos de la enseñanza y el aprendizaje de ciertos saberes– con los rasgos constitutivos de las prácticas de enseñanza de aquellos profesores con quienes realizamos el tratamiento de tales problemas.

Este revisitar nos abre un camino para mirar las cuestiones que configuran el entramado entre lo nuevo y lo propio que atraviesa todo nuestro análisis. Lo nuevo, está vinculado a cómo acceder a esta estructura de los números negativos en el ámbito algebraico, ideas matrices[6] de la propuesta de Cid (2015) y lo propio, está vinculado a los saberes de los docentes en relación a la especificidad de cada dominio de conocimiento, a los conocimientos de los alumnos y a los conocimientos institucionales. Atender al entramado entre lo nuevo y lo propio, en términos de herramienta genuina, y desplegar el juego de la problematización, como hilo conductor, fue nuestro encuadre para el desarrollo de los talleres. De esto, trataremos en el apartado 2, Entramado entre lo Nuevo y lo Propio.

En consonancia con lo expresado anteriormente, los aspectos mencionados en nuestra concepción de herramienta genuina, refieren a dos focos de análisis, uno anclado en echar luz sobre cuestiones inherentes de los objetos matemáticos en cuestión, y otro, relativo a las vinculaciones con las aulas comunes. Esta distinción nos permite dar cuenta de la complejidad que reviste la apropiación de los núcleos conceptuales involucrados en la propuesta y a la vez la discusión de su viabilidad para las aulas y alumnos de los docentes con los que trabajamos. Atendiendo a dichos focos de análisis y para comunicar las acciones desarrolladas en los talleres, enmarcadas en el entramado entre lo nuevo y lo propio, identificamos dos opciones didácticas llevadas adelante: Hacer explícito lo implícito de la propuesta y el diálogo con el aula. Creemos que estas opciones nos posibilitaron desnaturalizar algunos asuntos tratados en los talleres dando cuenta de una continua problematización en los análisis y elaboraciones que integraron y orientaron las mismas. En este sentido, la relevancia de este revisitar, según nos parece, habilita la posibilidad de elaboración de argumentos que actuarían de alguna manera como conocimientos didácticos que estructuraron nuestro trabajo de difusión en tanto ideas que posibilitaron favorecer cierto acceso y asequibilidad de la propuesta. Su desarrollo se encuentra en el apartado 3, Opciones Didácticas.

Finalmente, en el apartado 4, Reflexiones finales, retomamos el encuadre del entramado entre lo nuevo y lo propio en el proceso de escritura de este capítulo que nos permite explicitar las opciones didácticas que conformaron "los textos" de los talleres y que orientaron el análisis que precede como anclajes para el estudio de la propuesta y su posible exploración en las aulas.

2. Entramado entre lo nuevo y lo propio

El tratamiento de la propuesta, a través de la modalidad de taller, nos llevó a debatir profundos análisis y reflexiones que resultaron movilizadores de un proceso de resignificación de la

[6] El lector puede consultar el capítulo 3 de Cid para ampliar sobre los fundamentos de la propuesta.

actividad de “hacer matemática”[7]. Las conversaciones didácticas que se fueron sucediendo en esos espacios de taller, enriquecieron los puntos de vista y las miradas de todos los actores involucrados, contribuyendo a hacer visible de alguna manera las ideas subyacentes que inciden esencialmente en la comprensión de los aspectos nodales de la propuesta. Estas reflexiones demandaron mucho tiempo, en un ir y venir de un proceso de apropiación que tensiona “lo nuevo” y “lo propio” (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007). Es decir, fue necesario entramar aspectos de la historia personal y de la formación profesional docente con aspectos de la propuesta misma para asumir estos retos, y pensar en cómo se podrían enfrentar desde la realidad del aula (Block y otros, 2007).

En este andar, nos encontramos con otros desafíos, otras dificultades que marcan ciertas disparidades en relación a las prácticas habituales. Fuimos pivoteando entre saberes algebraicos y saberes sobre los números enteros, como dominios matemáticos fragmentados que emergen en las discusiones, y los conocimientos aritméticos disponibles al resolver los problemas. En contrapartida, analizamos una propuesta que, desde la enseñanza, aborda conjuntamente los números enteros y el álgebra, cuestión diferente a lo habitual; y, desde el aprendizaje, convoca a los alumnos a enfrentar problemas algebraicos partiendo de conocer solo los números naturales y sus operaciones. Este reto nos llevó a hacer énfasis en cómo favorecer la construcción de relaciones entre los conocimientos disponibles desde la experiencia docente y los involucrados en la propuesta.

La problematización como hilo conductor

Nuestras decisiones estuvieron signadas, en todo momento, en atender a la construcción del sentido del conocimiento (Brousseau, 2000) que la propuesta permite desplegar y, por ende, a la problematización como medio de avance en la comprensión y en la apropiación de la misma. La intención es construir el sentido de los números enteros y el sentido del álgebra a la vez. El desafío es enorme, ya que implica estudiar los tipos de problemas que el cálculo algebraico permite resolver, así como las limitaciones del cálculo aritmético y de los números naturales y las potencialidades de los procedimientos de resolución algebraicos. El análisis de los tipos de problemas de la propuesta y las vinculaciones con la ruptura aritmético-algebraica marcaron

[7] Hacer matemática en el sentido de dar lugar a procesos de producción de distintos procedimientos; ofrecer oportunidades de ensayos, exploraciones, ajustes; promover puestas en común como espacios para discutir, argumentar, justificar.

nuestro itinerario para su problematización, atravesado por las experiencias que los docentes traen a estos espacios, relativas a los objetos en cuestión.

La propuesta de Cid, objeto de estudio para el aula, se desprende de un trabajo de investigación que propone un conjunto de problemas que atienden a las razones de ser de los números enteros en un entorno algebraico. En su elaboración subyace una perspectiva en la que la modelización algebraica vertebra y viabiliza las necesidades del surgimiento de reglas de cálculos que se requieren para concebir y operar con los números negativos. Somos conscientes de la complejidad y la diferencia que reviste la misma en relación a las prácticas de enseñanza habituales, puntos de apoyo del quehacer docente y que, en muchos casos, tensan este camino de apropiación por la incertidumbre generada. Igualmente consideramos que esta propuesta es constructiva, porque posibilita que los conocimientos emergen a partir de su necesidad de uso y para responder preguntas tomando en cuenta, valorando o apoyándose en los conocimientos incompletos de los alumnos.

En el desarrollo de los talleres se propició la misma perspectiva de trabajo matemático constructivo en la búsqueda de explicitar cuáles son los conocimientos nuevos que supone la propuesta y cómo se abordan. Dicha propuesta rompe radicalmente con la concepción del número y da lugar a la funcionalidad de los cálculos, ya que colisiona con los saberes disponibles[8] respecto de esos objetos. Esta cuestión tensiona la relación entre esos conocimientos nuevos y los propios como el conocimiento de los números enteros que se tienen disponibles. Desentrañar el vínculo entre lo numérico y el funcionamiento algebraico, habilitó un nexo para problematizar entradas tradicionales al álgebra escolar como el campo de las ecuaciones y a los números enteros negativos como opuestos de los números naturales, ligados a las magnitudes.

Como ya lo señalamos, sostuvimos, tanto en los diferentes momentos de los talleres como en los distintos talleres, la problematización como hilo conductor de nuestras interacciones, buscando generar espacios de discusión que nos permite ahondar en las conceptualizaciones de los objetos matemáticos involucrados y en aspectos de sus prácticas de enseñanza.

A continuación, presentamos las elecciones que realizamos, en términos de opciones didácticas, las cuales pretenden conjugar la complejidad de la propuesta con las expectativas

[8] Nos referimos a conocimientos disponibles de los números negativos como opuestos de los naturales y del álgebra asociado a las ecuaciones.

de los docentes participantes. Analizamos estas opciones para explicitar las razones que ayudan a dar cuenta en qué sentido las mismas intentan captar lo relevante de la propuesta, asumiendo también la complejidad que insume su puesta en marcha.

3. Opciones didácticas

Desde esta mirada de extrañamiento, distinguimos dos opciones didácticas, a modo de ejes de análisis, que contribuyeron a problematizar el conocimiento a enseñar involucrado en la propuesta en cuestión. Una de ellas trata sobre “Hacer explícito lo implícito de la propuesta”, en términos de comprensiones de aquellas ideas esenciales de la misma; y otra, vinculada al “Diálogo con el aula”, buscando evidencias de lo plausible.

Estas opciones didácticas pretenden interpelar y desnaturalizar ciertos conocimientos que se disponen, vinculados con el saber-hacer docente, que posibilitaron entramar un marco compartido con los docentes participantes. Para el desarrollo de la primera opción, “Hacer explícito lo implícito de la propuesta”, tomamos como referencia una cierta organización del tiempo que sostuvimos en el transcurso de los talleres. En primer lugar, recuperamos algunas anticipaciones efectuadas, en relación a los objetos que emergen, al iniciar los encuentros y cuya intencionalidad era preparar el terreno de entrada a la propuesta. En segundo lugar, traemos la perspectiva de la modelización matemática, como eje estructurador de las actividades de la propuesta de Cid consideradas en el desarrollo de los talleres. Para la segunda opción, “Diálogo con el aula”, hacemos un análisis de la relevancia que implicó traer a los encuentros las voces de los docentes que implementaron la propuesta y las voces de alumnos reales o hipotéticos. Esta elección permitió darle un matiz de realidad como propuesta enseñada, otorgando una mirada socialmente posible.

3.1 Hacer explícito lo implícito de la propuesta

Una de las opciones didácticas tiene como propósito central hacer visible la construcción de nociones involucradas en la propuesta en forma implícita que, dada su importancia a partir de problematizaciones en los talleres, se explicitó tanto en lo matemático como en lo didáctico. En otras palabras, nos referimos a la intención de convocar a un trabajo que favorezca sentar la producción de conocimientos en la resolución de problemas a partir de instalar la idea de sumandos y sustraendos para manipular expresiones algebraicas, instalar el quehacer algebraico para la construcción de las reglas de cálculo, instalar un nuevo significado de la resta como diferencia para ampliar el concepto de número, entre otras cuestiones.

Atender estos asuntos nos lleva a ciertos desafíos e interrogantes: ¿Cuáles son las decisiones que hacen que esta propuesta –proveniente de la investigación– se haga amigable? ¿Cómo otorgar sentido a frases/palabras[9] que emergen de la propuesta para "resguardar" su propia lógica? ¿Qué selecciones y recortes hacemos para dar lugar a la construcción de esas ideas condicionadas por el tiempo de desarrollo de los talleres? Estos cuestionamientos nos llevan a la necesidad de hacer explícito lo implícito de la propuesta en dos momentos distintos de los talleres: uno, al inicio del trabajo, para ir adentrándonos hacia una primera aproximación de la misma y otro, en el transcurso de los talleres, para profundizar sobre la perspectiva de la modelización matemática, que constituye la base que sustenta la esencia de la propuesta.

3.1.1 Preparando el terreno… anticipaciones en relación a los objetos que emergen. Para el diseño y organización de estos espacios de taller, previamente discutimos qué cuestiones anticipar sobre los grupos de problemas que abarca la propuesta, de modo que los docentes participantes puedan vislumbrar un horizonte en este planteo novedoso, constructivo y tan diferente a la manera usual de la enseñanza de los números enteros. Encontrar el equilibrio entre qué cuestiones explicitar antes del desarrollo de las actividades en las jornadas y qué aproximaciones realizar, sin coartar la posibilidad de producción de los docentes en términos de problematización, fue motivo de profundas e interesantes discusiones en el seno del equipo de coordinación. En los párrafos siguientes desarrollamos algunas de estas anticipaciones.

Aproximaciones al cálculo algebraico desde el cálculo aritmético. Una de las cuestiones centrales en la enseñanza de los números enteros está relacionada con los modos de hacer los cálculos. Desde esta mirada, que busca (re)construir el sentido de dichos números desde un funcionamiento algebraico, lo que se intenta discutir específicamente en esta anticipación son las condiciones que legitiman un cálculo algebraico involucrado en la siguiente expresión: $7 - 10 - 3 + 10$.

La naturalización del funcionamiento de los cálculos, a partir de hacer el menor número de ellos, lleva a utilizar la técnica de simplificación. Discutir el ámbito de validez de esta técnica, en el marco de esta propuesta, pone en tensión los conocimientos disponibles. Tengamos en cuenta que nos movemos en el campo de los números naturales, entonces la propiedad cancelativa no entra como un conocimiento disponible y por consiguiente no se

[9] Nos referimos, por ejemplo: "los problemas ayudan a construir las reglas de cálculo", "el número negativo aparece como resultado de una diferencia".

puede “achicar” el cálculo. En ese cálculo está implicada la suma de números enteros en forma implícita $(+7)+(-10)+(-3)+(+10)$. Es necesario advertir que allí está oculto el funcionamiento de la suma algebraica; es decir, lo que no se escribe es la suma de esos números con signo. Justamente, el conocimiento de esos números no se dispone y es intención de la propuesta poder construirlo. Es decir, aparece una técnica de cálculo algebraico que aporta economía, sin necesidad de explicitarla como una propiedad de la suma de enteros, números que aún no fueron declarados. Esta técnica encuentra su lugar a través del aporte algebraico que hace la propuesta[10], posibilitando de esta manera dar sentido a este tipo de cálculo.

Expresiones diferentes vs significados diferentes. Otra cuestión que esta propuesta destaca y media en su construcción es la distinción de los significados de los signos[11] en las distintas expresiones. Por esta razón, nos pareció importante atender, al inicio de los talleres, la discusión sobre los distintos significados de los signos “+” y “–” que están presentes en los usos habituales y cuyo tratamiento se ve desdibujado en la enseñanza. Por ejemplo, proponemos analizar el significado de los signos en esta tarea: *Si* $a=-5$ *¿cuánto vale –a?*

La elección de este ejemplo tuvo como supuesto problematizar “otros” significados del signo “–”. ¿Qué significado tiene el signo menos del –5? ¿Y cuál es el significado del signo menos del *–a?* ¿Representan lo mismo en una tarea habitual para los alumnos? La relevancia de este análisis conlleva la intención de desnaturalizar lo que significa el signo “–”, tanto en el número como en la expresión. La discusión en relación a esta cuestión emerge como necesaria ya que contribuye a considerar didácticamente los diferentes significados de los signos que la propuesta toma a cargo para su desarrollo. Esta anticipación nos pareció sustancial dado que la propuesta toma como objeto de estudio los diferentes significados de los signos “+” y “–”, que de no ser así quedaría a cargo de los alumnos. La toma de conciencia por parte de los docentes de esta complejidad aporta a desentrañar y a profundizar en la comprensión de aquellas dificultades de aprendizaje que habitualmente señalamos en la enseñanza como errores de “manipulación de signos”. Además, aporta otra intención más general ligada a disponer de una mirada global de la propuesta en relación al camino algebraico que posibilita la construcción de los números enteros.

[10] El lector puede consultar el capítulo 4 “Problematización y asuntos que se vuelven problemáticos en la enseñanza de los números enteros. Adaptación de una propuesta”, para profundizar sobre este aporte algebraico al que nos referimos.
[11] Para ampliar sobre estas ideas se puede consultar Barrio y Petich (2018).

Otras miradas, otras conceptualizaciones. La propuesta de enseñanza, como venimos diciendo, hace foco en el tratamiento de los números enteros vinculado al trabajo algebraico y esto trae aparejado, por un lado, una nueva concepción de número y por otro lado, un tratamiento diferente para su enseñanza.

Esas ideas están puestas al servicio de hacer visible otra conceptualización del número entero que se desprende del trabajo algebraico, particularmente del cálculo de diferencias de expresiones. Buscamos así centrar el estudio de los números enteros en el contexto algebraico que propone Cid, avanzando sobre otras ideas que también existen tales como concebir al número negativo como resultado de una medida y como opuesto del número natural que, si bien son útiles en algunas situaciones, coaccionan la razón de ser de estos números.

Además, esta perspectiva nos llevó a contrastar la secuenciación de conocimientos involucrada en la propuesta con la contenida en la enseñanza habitual. De esta manera, se da lugar a una necesaria deconstrucción de una lógica matemático-didáctica arraigada para el abordaje de los números enteros, regida por una cierta organización del tipo: dar una caracterización de los números, reglas para establecer el orden y posteriormente, reglas para las operaciones entre dichos números. En esta propuesta esta organización cambia en varios aspectos, por ejemplo, es la diferencia entre números con signo lo que establece el orden en los enteros.

3.1.2 Transitando el taller… cómo juega la perspectiva de la modelización matemática. El desarrollo de los encuentros en los talleres estuvo orientado, entre otras cuestiones, por este interrogante ¿Cómo juega la perspectiva de la modelización matemática en la propuesta? Así, nos centramos en analizar esta óptica que hizo posible avanzar en los cálculos manipulando los números negativos a nivel implícito, buscando reflexionar y mirar esos cálculos para dar razones acerca de “por qué se hace lo que se hace”, con una mirada más global de la actividad matemática, que trasciende la fragmentación de tareas inherentes en la enseñanza tradicional.

Esta perspectiva conlleva ideas que ya hemos formulado en este escrito, como lo es la producción de conocimiento a partir de la resolución de los problemas que la propuesta ofrece. Creemos que, atender a una comprensión desde este lugar, ayuda a reconocer el camino que brindan estos grupos de problemas para avanzar sobre la cadena de operaciones aritméticas involucrada en los mismos, en términos de sumandos y sustraendos. En ese sentido, consideramos esencial reconocer que los tipos de problemas se modelizan con ciertas expresiones algebraicas, pues la manipulación de dichas expresiones es la que lleva a la explicitación de los números enteros como producto de un proceso de construcción. Las reflexiones que se dieron en el transcurso de los talleres tomaron relevancia en tanto que, reconocer los modelos algebraicos que soportan las diferentes resoluciones, garantizan los sentidos de los números enteros.

El valor didáctico de explicitar esta actividad de modelización ofreció nuevas comprensiones sobre los objetos matemáticos a enseñar, favoreciendo mejores aproximaciones a esta propuesta al recuperar el papel productor de estos problemas. Así, el reconocimiento de las relaciones matemáticas imbricadas redundará en un mayor margen de maniobra en la enseñanza, con un espectro más amplio de elementos para actuar en la clase. Es decir, este trabajo pretendió aportar condiciones para generar un debate en el cual la reflexión sobre las cuestiones involucradas constituye una vía potente: ¿Cuál es el sentido de la distinción de los diferentes grupos de problemas?[12] ¿Cómo juega la idea de modelo algebraico y las relaciones matemáticas inmersas en la resolución de los problemas para la construcción de las nociones? De esta manera, en el desarrollo de los talleres, volvimos al análisis de las actividades seleccionadas y a poner en discusión desde una mirada integradora las cuestiones planteadas. Identificar los modelos implicados en cada grupo de problemas permitió ir armando explícitamente las reglas de cálculos que conlleva el trabajo con los números con signo y, por ende, visibilizar el número entero. Este volver sobre los problemas, con la mirada puesta en la modelización, lo propusimos una y otra vez a medida que se avanzaba en el análisis de los mismos.

Adentrarnos en este proceso, implicó compartir la idea acerca de que un “buen modelo algebraico del problema[13]” debe dar la mayor cantidad de información posible sobre el mismo y como tal, soportar cantidades positivas y negativas, consideradas como sumandos y sustraendos. Este valor del buen modelo algebraico sustenta la consideración de los números con signo; llegar a esta instancia, haciendo explícito lo implícito, es el resultado del camino recorrido desde el primer grupo de problemas hasta el último, dando lugar a una concatenación de ideas.

[12] Cid (2015) propone los siguientes grupos de problemas: Problemas para construir y simplificar expresiones algebraicas/ Problemas para comparar expresiones algebraicas/ Problemas para encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas/ Problemas para multiplicar expresiones algebraicas/ Problemas para operar con los números con signo.

[13] Utilizamos la idea de buen modelo algebraico del problema en los términos que lo propone Cid (2015, p. 288).

Todo este trabajo, que engloba la propuesta de Cid, es complejo y sostenido en el tiempo[14] porque los números enteros como objeto institucionalizado en el aula deviene de un largo proceso de entramados, de relaciones en el ámbito algebraico, donde los alumnos se familiarizan con estos nuevos números al cargarlos de sentido en el seno del álgebra, es decir, a partir del estudio de su funcionamiento en el cálculo.

Esta elección de reconocer el papel primordial de la modelización, nos permitió entrar en diálogo con los docentes en términos de vínculos entre el cálculo algebraico y los significados de los signos, a la vez que abrió un camino para abordar la ruptura con el cálculo aritmético. Ocuparnos de esa ruptura con los docentes participantes de los talleres, ha sido uno de los desafíos. Buscamos que los docentes adviertan que el tratamiento de los problemas en esta propuesta consiste en que los alumnos se apoyan en conocimientos aritméticos para resolverlos. La idea implícita aquí es una introducción escolar del álgebra como herramienta funcional que permita llevar a cabo una actividad de modelización matemática (Cid, 2015). Ahora bien, ¿Cómo cargar de sentido ideas tales como "el álgebra como herramienta funcional" en la propuesta con los docentes? ¿Cómo juega la perspectiva de modelización en todo esto?

Abordar la relevancia de la idea de modelización algebraica nos permitió plantear un análisis que destaca dos vínculos, uno con los problemas contextualizados-descontextualizados y otro, con la ampliación del concepto de número. A continuación, desarrollamos estos asuntos.

Problemas contextualizados-descontextualizados y su vínculo con la modelización. El análisis de los problemas contextualizados[15] deja al descubierto la actividad de modelización algebraica que la autora propone desde el inicio de la propuesta. Con la resolución de los problemas se discute, ¿Qué implicancias tiene el trabajo algebraico en la enseñanza de los números enteros? ¿Cuáles son las potencialidades de dicho trabajo imbricado en la propuesta? ¿Qué vínculos subyacen entre el álgebra y los números negativos? ¿Qué significa este doble juego en términos didácticos para el profesor?

Hacer foco en el juego entre problemas contextualizados y descontextualizados, buscó visibilizar la construcción de modelos algebraicos en complejidad creciente a lo largo de la secuencia. Profundizar en ese análisis, nos permitió hacer explícito la importancia de reconocer

[14] La propuesta de investigación está organizada en 7 sesiones con un total de 50 problemas.
[15] Ejemplo de enunciados de problemas: "Ana lleva sus figuritas para jugar en la escuela. En el primer recreo pierde 9 y en el segundo recreo ganó 7. ¿Con cuántas figuritas vuelve a su casa?"

cómo los modelos algebraicos que surgen de los problemas concretos implican un trabajo con los números negativos a nivel implícito, en el dominio de los números naturales.

Atender a cómo la propuesta toma a cargo la problemática del sentido de los números con signo, nos llevó a discutir dichos números en "el terreno de la negatividad[16]", conversando didácticamente con los docentes acerca de lo implícito. Reconocer lo implícito en el tratamiento de los problemas conllevó a identificar y explicitar nociones provisorias relativas a dicha negatividad en la manipulación de expresiones, mientras se iban construyendo distintos objetos algebraicos. Es decir, el análisis apuntó a que los profesores asuman que se va armando, en términos didácticos, el camino para luego declarar los números enteros.

Nuestra gestión en los talleres, en consonancia con el propósito de explicitar la relación entre lo algebraico y la negatividad, condujo a promover interacciones que ponen de manifiesto diferencias y similitudes con planteos tradicionales. Así, identificamos cómo juegan los contextos concretos de los problemas que, aunque sean similares, su tratamiento conlleva sentidos muy diferentes.

La reflexión sobre los modelos ofreció una vía para centrar el trabajo sobre la cadena de operaciones involucradas en la resolución de los problemas contextualizados. Pasar de la expresión del tipo $x - 9 + 7$ a la respuesta $x - 2$ (ejemplo referenciado en la nota al pie 11) implica asumir un funcionamiento reflexivo del cálculo, avanzando hacia un uso algebraico de las operaciones. Esta mirada modelizadora nos habilita a resolver operaciones, haciendo uso de las reglas de cálculo, en expresiones del tipo $x - a + b$, con a, b naturales y $a > b$ aún sin haberse presentado los números negativos. De este modo, el juego entre los conocimientos movilizados en las resoluciones contextualizadas y la reflexión en situaciones descontextualizadas resultó sustancial para la construcción del número entero.

Nuestras intervenciones intentaron destacar rupturas en varios aspectos. Una ruptura que emerge de la reflexión de los problemas contextualizados tuvo foco en identificar la negatividad contenida en las respuestas a los mismos. Reconocer en qué sentido está implícita la idea de número negativo en una expresión del tipo $x - 2$ nos llevó a hacer visible cómo es que en $x - 9 + 7$ está inmerso el tratamiento de la negatividad. Es decir, se trató de transparentar el juego entre dichas expresiones apoyadas en un marco contextual, resignificando el álgebra como herramienta funcional. La explicitación de este aspecto permite al docente accionar como mediador en el proceso de ampliación del rango de los números

[16] Para ampliar ver el capítulo 3 de este libro.

considerados y sumar nuevas interpretaciones en relación a la información que ofrece la escritura del modelo.

Los modelos que surgen de los problemas contextualizados llevan a tratar lo desconocido primero en términos de cantidades iniciales o finales y luego, a medida que avanzamos con la propuesta, en términos de transformaciones[17], de lo que "sucede" (se gana, se pierde…). Esta complejidad creciente, inmersa en la interpretación del modelo algebraico, permite avanzar sobre el rango numérico, de los números naturales a los números enteros.

Hacia nuevas conceptualizaciones de objetos matemáticos implicadas en la actividad de modelización. Nuestro desafío fue responder a la pregunta de cómo se posibilita el avance en las conceptualizaciones mediante estos nuevos problemas, a través de respuestas que se elaboran a partir de las ideas ya construidas con los números naturales pero que no son suficientes. Es necesario evolucionar sobre esas significaciones; para ello, jugó un papel importante en el desarrollo de los talleres hacer notar las transformaciones que subyacen en la manipulación de los modelos. Entonces, considerar una transformación como una cantidad intermedia, es decir, una ganancia o una pérdida, posibilita una entrada a cantidades positivas o negativas. Enfatizamos un análisis que deje ver que del marco contextual "se tiene una ganancia/pérdida", emerge una cantidad "positiva/negativa". El buen modelo tiene que contemplar las dos posibilidades, esto conlleva la necesidad de asumir que una misma expresión admite representar sumandos y sustraendos, es decir admitiremos los números con signos. Veamos. El análisis pretendió hacer visible que las expresiones $-3+x+5-4$ ó $-3-x+5-4$ simplificadas corresponden a $x-2$ ó $-x-2$, respectivamente[18]. La unicidad de la fórmula $x-2$, que soporte ganancias y pérdidas en los términos del problema en cuestión, lleva consigo la consolidación del buen modelo algebraico. La reflexión acerca de la búsqueda del buen modelo pone foco en el rol de la letra como unificadora de la transformación desconocida. Avanzado hasta esta etapa, se prevé la institucionalización de los nuevos números, los números enteros.

La cuestión que pretendemos explicitar es la ampliación de la idea de número –adelantado en la anticipación correspondiente ***Otras miradas, otras conceptualizaciones***– como resultado del trabajo minucioso y sistemático con problemas contextualizados y

[17] Ejemplo de un problema que da lugar a transformaciones: Alberto juega a las figuritas. En la primera partida pierde tres figuritas, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco figuritas y en la cuarta pierde cuatro figuritas. ¿Cuántas figuritas ganó o perdió?

[18] Expresiones que surgen como modelos del problema de la nota al pie 17.

descontextualizados, enfatizando la ligazón con la noción de modelización. Las discusiones acerca de la fertilidad didáctica de los grupos de problemas –comparación de expresiones y cálculo de diferencia– en términos de las ideas matemáticas involucradas junto con el juego algebraico que se plantea, hizo posible conversar sobre la noción de número que subyace en la propuesta. Discutimos alrededor de las siguientes preguntas: ¿Cómo emerge la idea de número negativo a partir de esos grupos de problemas? ¿Cuál es el vínculo entre comparación de expresiones y de cálculo de diferencia, y número negativo? ¿Cuál es la idea de número negativo que se gesta? ¿En qué sentido esta propuesta avanza sobre una enseñanza tradicional que también se apoya en modelos concretos? ¿El modelo concreto modeliza la matemática o la matemática modeliza un modelo concreto?

En este camino, tiene cabida un análisis del tipo ¿Qué significado tiene por ejemplo "–6"? Esta perspectiva de enseñanza propone asumir que "–6" surge de una diferencia entre expresiones algebraicas haciendo uso de reglas que se van construyendo, como se muestra en el siguiente ejemplo: $(t-11)-(t-5)=t-11-t+5=-6$. Ese "–6" ya no surge como resultado de una medida, es un número que cuantifica y califica una diferencia. En este caso se interpreta que la diferencia entre dos expresiones es 6 y la primera es menor que la segunda. Este análisis permite clarificar la ampliación de la concepción de número al desligarse de una conceptualización vinculada a las magnitudes y transparentar su conexión con el álgebra.

A continuación, presentamos la segunda opción didáctica que adquiere importancia por el debate desplegado alrededor de la factibilidad de la propuesta, tensionado por los conocimientos pedagógicos y didácticos propios que interpelaron problemas de enseñanza de los docentes y dificultades de aprendizaje de sus alumnos.

3.2 Diálogo con el aula

Otra opción didáctica considerada se vincula con la intención de poner en diálogo la propuesta de trabajo de los talleres con la perspectiva que encuentran cotidianamente en sus aulas los docentes participantes. ¿Por qué y cómo hacer posible esa intención?

Como sostenemos en nuestro trabajo colaborativo[19], varias investigaciones (Perrin-Glorian y Moreira Baltar Bellemain, 2016; Perrin-Glorian, 2019; Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril y García, 2016) han mostrado que pocas secuencias didácticas provenientes de la investigación, aunque muy atractivas en el plano didáctico y probadas con éxito, son

[19] Para más detalle, ver capítulo 2 de este libro.

efectivamente usadas en las clases. Por esta razón, creemos necesario un trabajo de estudio conjunto entre el equipo de investigación y los docentes atendiendo a los tiempos y singularidades de cada uno de ellos para que forme parte de su repertorio didáctico al estudiar/explorar sus posibilidades de funcionamiento y así intentar implementarla en sus aulas.

Por esta razón, creemos necesario un trabajo de estudio conjunto entre el equipo de investigación y los docentes, atendiendo a los tiempos y singularidades de cada uno de ellos, para que forme parte de su repertorio didáctico al estudiar/explorar sus posibilidades de funcionamiento. De esta manera los talleres se configuran como dispositivos que, aunque limitados en tiempo, contribuyen a que los docentes participantes conozcan la propuesta, comiencen los primeros pasos de su estudio y apropiación, profundicen sus conocimientos didácticos y sus posibilidades de comprensión de los fenómenos del aula al considerar una posible implementación.

Las voces de los docentes que implementaron la propuesta adaptada de Cid –en algunos talleres en forma presencial y en otros evocando sus vivencias– junto a producciones de sus alumnos, emergieron como una necesidad ya que otorgan un viso de "realidad local" al compartir sus ajustes, reflexiones y elecciones realizadas a propósito del trabajo en sus aulas. Así, el estudio se encontró impregnado de las singularidades de alumnos de escuelas medias de la región y del país, con problemáticas similares y realidades particulares. Estas reflexiones advirtieron sobre distintos niveles del trabajo matemático involucrado en los problemas, al poner en palabras cuestiones claves de las implementaciones, favoreciendo echar luz sobre los conocimientos que se construyen en cada grupo de problemas. Cuestión que nos parece relevante pues la propuesta involucra conocimientos que no se corresponden con enunciaciones tradicionales.

Desde esta mirada uno de los desafíos de los talleres, con el firme compromiso de lograr una mayor comprensión de la propuesta en su diálogo con el aula, fue favorecer el acompañamiento a los docentes participantes, de una posición analítica descontextualizada del aula a otro escenario de adaptación de la propuesta a sus propias aulas. Desafío que fuimos transitando y progresando, anclados en nuestra experiencia, en pos de mejores aproximaciones en relación a los sentidos en juego en una clase. Discutir acerca de los significados en juego nos llevó a distinguir –para cada grupo– cuáles son los conocimientos necesarios para desplegar la propuesta en el aula en dos planos: uno, en términos de conocimientos de los alumnos y otro, en términos de conocimientos matemático-didácticos de los profesores. Poder discernir esta distinción ha sido una tarea compleja y enriquecedora a la vez, ya que nos permitió avanzar en mayores comprensiones y claridad de la estructura de la propuesta. A modo de ejemplo, tomamos la actividad citada en la nota al pie 15 cuya resolución involucra, para el alumno, aprender y usar la regla de cálculo “restar 9 y sumar 7 es lo mismo que...”. Para el docente, conlleva reconocer que los números enteros funcionan como “sumandos y sustraendos”, y que implica un pasaje de significados de los signos + y –, del “operativo binario entre números” al “operativo binario generalizado”[20]. En otras palabras, la identificación de los conocimientos matemáticos que la resolución de los problemas permite construir, a la par de la identificación de los conocimientos matemático-didácticos asociados que informan al docente en qué medida la propuesta sostiene el sentido de los números enteros, es un aporte sustancial, según nos parece, para la apropiación de la propuesta de la autora.

Como ya dijimos, la propuesta es a largo plazo y constructiva, se hace necesario visibilizar sus rasgos claves difíciles de identificar, y que, por ello, requieren otras intervenciones didácticas para atraparlos. Reconocer y explicitar para cada grupo de problemas las nociones a instalar –tal lo señalado en la opción didáctica de hacer explícito lo implícito– favorece anticipar el abanico de posibles procedimientos de los alumnos, en términos de validez y de avance.

Otro de los desafíos, con la intención de facilitar el análisis precedente, ha sido distinguir los alcances y los límites de los conocimientos involucrados en cada grupo de problemas. Nos referimos a identificar los conocimientos disponibles para abordar cada grupo: ¿Cuáles son las relaciones entre los objetivos y los conocimientos que emergen de cada grupo de problemas? ¿En qué sentido los problemas abonan el camino a lo que se espera? ¿Qué conocimientos se van a institucionalizar a partir de la resolución de esas actividades?

Estas distinciones aportaron conocimientos acerca de la potencialidad de los problemas en el marco de la propuesta. Vislumbrar esta mirada global potenciadora contribuyó, según nos parece, a dar un mayor margen de maniobra a los docentes participantes de los talleres, otorgando más seguridad a posibles implementaciones y a regular la incertidumbre que podría generarse. La claridad acerca de los conocimientos en juego es un aspecto importante para ir identificando progresos en los procedimientos de los alumnos, profundizando la conceptualización de las cuestiones que se estudian. A continuación, compartimos reflexiones a propósito de la elección de incluir las voces de los docentes y de los alumnos.

[20] Para ampliar ver Barrio, Petich (2018) y el capítulo 4 de este libro.

3.2.1 La voz de los docentes. Los docentes que implementaron la propuesta[21] formaron parte del equipo coordinador de estos talleres. Este rasgo hizo posible nutrir las discusiones y reflexiones referidas al conocimiento matemático-didáctico de la propuesta con aportes relacionados con sus propias prácticas de enseñanza (experiencia de trabajo áulico, resignificaciones de los objetos matemáticos en juego, conocimiento de los tiempos de la clase, condicionamientos institucionales, entre otros).

La participación de estos profesores permitió, entre varias cuestiones, descomprimir la exigencia y rigidez (rigor) que requiere el transitar con una propuesta nueva que proviene de una investigación. Su perspectiva[22] brindó una mirada de la enseñanza aportando ciertos visos de flexibilidad a la adaptación de la propuesta y así, poder concebirla más viable para una futura implementación por parte de los docentes que asistían a los talleres.

Asimismo, los docentes que realizaron la puesta en aula, fueron abonando el análisis en los diferentes talleres, dando lugar a una retroalimentación con los demás docentes participantes. Es decir, su voz posibilitó profundizar en las interpretaciones de sus decisiones constituyéndose en aportes didácticos relacionados con la propia vivencia de la implementación. ¿Qué sentidos restituye/aporta la voz de estos dos profesores? Su experiencia de aula les permite compartir ideas sobre conocimientos en acto, propios de sus alumnos, de su escuela particular y trae la condición de lo plausible, pues se comparten preocupaciones similares en relación al aula de nivel secundario con sus pares.

Esas voces ponen en mejores condiciones los vínculos entre la propuesta y las prácticas de enseñanza de los docentes talleristas porque sus dichos vienen de la exploración misma, vienen a certificar una posibilidad real de abordar las dificultades de enseñanza de los números enteros. Sus aportes ahondaron en reflexionar acerca del manejo de “la incertidumbre” que genera la puesta en aula, al compartir argumentos de las diferentes elecciones que se suscitaban, algunas anticipadas y otras emergentes, frente a lo que les iba sucediendo en las implementaciones que realizaron. Contrastar el análisis a priori y el análisis a posteriori a propósito de algunos problemas que fueron llevados al aula, fue otra ocasión fértil que contribuyó de alguna manera a dar credibilidad a esta propuesta novedosa.

---

[21] Nos referimos a la implementación que se llevó a cabo durante los años 2014, 2015, 2016 y 2017 por Juan Zambrano y José Cumin, profesores de escuelas secundarias de la ciudad de Cipolletti, Río Negro.

[22] Para ampliar sobre la apreciación personal de uno de los profesores que fue parte de la experiencia en el diseño de los Talleres, ver capítulo 5 de este libro.

Estos intercambios habilitaron un espacio de ida y vuelta accediendo a las inquietudes, devoluciones de docentes participantes en la construcción de los sentidos en juego. De esta manera, permitió concientizarnos que la "exigencia" tiene que ver más con el respeto por la vigilancia epistemológica, que con la construcción e institucionalización de los objetos matemáticos involucrados en la misma y con los tiempos destinados a dichos procesos.

3.2.2 La voz de los alumnos. Durante el desarrollo de los talleres, recuperamos la voz de los alumnos a partir del análisis de producciones que tuvieron lugar en las diferentes implementaciones, de la evocación a las mismas a partir de los profesores que llevaron adelante la propuesta en sus aulas y de la reflexión sobre procedimientos posibles de los alumnos de los docentes participantes.

La discusión sobre resoluciones de alumnos –reales o posibles– a efectos de anticipar y problematizar lo que puede ocurrir en sus aulas al trabajar con la propuesta, nos permitió hacer más matemática al acceder a modos y sentidos del conocimiento desde lo que los alumnos piensan, a la par de visibilizar la plausibilidad de estos problemas cuando se llevan al aula.

La elección de discutir resoluciones de alumnos y, particularmente una respuesta desacertada, abona la idea de comprender lo que implica transitar y avanzar en la ruptura con el cálculo aritmético hacia lo algebraico, uno de los rasgos claves y difíciles de observar que hicimos alusión anteriormente: ¿Qué significa en términos globales y particulares que la propuesta toma a cargo la ruptura con el modo de trabajo aritmético? Propusimos este planteo concibiendo que hacerse cargo de esta ruptura epistemológica demanda profundos y potentes análisis y reflexiones de todos, de naturaleza cognitiva y didáctica (Sadovsky y otros, 2016).

En referencia a lo explicitado en el párrafo anterior, propusimos un análisis de posibles procedimientos a la hora de encontrar una escritura más económica a partir de la necesidad de simplificar la expresión que surge del problema. Retomamos el ejemplo ya mencionado de la expresión $x - 9 + 7$, cuya resolución "típica"[23] es $x - 16$. Su consideración trae a discusión el valor de esa producción pensada como un estado de conocimiento por parte de quien la propone, y, en ese sentido, nos preguntamos: ¿Qué se juega en ese hacer y cómo lo interpretamos? Analizar la respuesta de ese encadenamiento de operaciones nos habilita a reflexionar cuestiones cognitivas inmersas en la resolución, en nuestro ejemplo: el número 16 en la respuesta desacertada se obtiene al considerar la suma entre los números naturales 9 y 7.

[23] Nos referimos a "típica" en el sentido que los alumnos podrían dar esa respuesta atendiendo a la búsqueda de resultado del problema explicitado en la nota al pie 15.

Es necesario identificar allí que aún hay visos de cálculos aritméticos en tanto 9 y 7 se siguen concibiendo como números y no como sumandos y sustraendos. Este análisis brinda elementos didácticos para proponer interacciones que promuevan reconocerlos como términos lo que permitiría avanzar sobre un funcionamiento algebraico de los cálculos.

La reflexión del análisis precedente nos habilita para tratar dos asuntos importantes en los talleres; por un lado, comprender cómo vive y toma su lugar la funcionalidad del cálculo algebraico a partir de avanzar sobre un pensamiento aritmético. Por otro lado, adquirir otras "gafas conceptuales", al reconocer en esa respuesta que aún no se produce la ruptura con el cálculo aritmético. La elección de colocarnos en una posición de comprender las respuestas desajustadas de los alumnos, es una clara oportunidad para propiciar una dialéctica entre un tipo de problemas que lleva a utilizar las operaciones entre números propias de la aritmética, con problemas que exigen la realización de operaciones cuyos términos son a su vez operaciones o relaciones.

Además, traer a la escena de los talleres producciones de alumnos que ocurrieron en las puestas en aula efectuadas, nos permitieron tomar conciencia de algunas relaciones implicadas en términos de sus resoluciones. El análisis hizo foco en detectar, en los modos de responder de los alumnos, ciertos indicios de un engranaje algebraico que empieza a andar. Por ejemplo, avizoramos lo dicho en las resoluciones de los alumnos en formato papel, cuando plasmaban expresiones del tipo: "cuando no sabemos la cantidad de dinero/figuritas que tiene le ponemos una letra por ejemplo *x*", "*x* representa un número desconocido que nos ayuda a resolver el problema", "hay que tener ojo con cada cálculo del problema, tenemos que prestar atención a la pregunta", "no puede ser 16 porque primero se restó 9".

Al mismo tiempo, con el análisis nos propusimos visibilizar cómo emergen objetos nuevos en las respuestas a un problema contextualizado, tanto en el camino de construcción como en la respuesta en sí. Nos referimos a las discusiones que llevamos adelante en torno a los significados didácticos que tienen los procedimientos y las respuestas de los alumnos en el marco de esta propuesta. Discusiones que permiten relevar ideas directrices de la propuesta que no son transparentes, pero sí muy importantes, en tanto dan pistas al docente para sostener un funcionamiento algebraico en los modos de abordar los problemas en pos de encaminar el trabajo hacia la conceptualización de los números enteros. Dicho de otro modo, este análisis pretende clarificar la relación que hay entre el trabajo algebraico que el docente debe dar lugar en el aula a partir de desplegar un juego entre problemas y resoluciones algebraicas lo que lleva la necesidad de elaborar reglas de cálculo para que en ese escenario emerjan los negativos.

Volver sobre ese análisis tiene la intención de esclarecer los objetos nuevos que emergen, conjugando el trabajo en los dos universos, el del álgebra y el de los números enteros. Desanudar los objetos algebraicos y numéricos inmersos en esas producciones permite enlazarlos con los conocimientos declarados a enseñar. Desde nuestra perspectiva, ocuparnos de esa relación es una necesidad didáctica ya que es prioritario asumir este reto, problematizando y reflexionando con argumentos; reto más desafiante aun cuando no se condice con el enfoque habitual de enseñanza de los números enteros y el álgebra. Nos referimos a objetos tales como composición de traslaciones, la letra como variable, la suma de expresiones algebraicas, las reglas de cálculo, la representación simbólica de programas aritméticos de cálculo, ecuaciones de primer grado, el tipo de respuesta, entre otros.

Un análisis que merece especial atención y que de alguna manera da cuenta de lo complejo que resulta transitar de la aritmética al álgebra, son las respuestas que dan los alumnos ante una pregunta cuantificadora de un problema. Hasta ahora siempre han respondido con una cierta cantidad en el ámbito aritmético. Los modos de dar la respuesta en esta secuencia de problemas cambian, pues pertenecen al ámbito algebraico; es decir, las respuestas ya no son cantidades sino relaciones. Distintas representaciones pueden utilizarse en la forma de dar las respuestas y en todos los casos hay un funcionamiento algebraico. Ese funcionamiento requiere ser relevado por el docente para instalar el trabajo algebraico que se necesita en esta propuesta. Para ilustrar la idea traemos las siguientes respuestas, a propósito del problema de la nota al pie 15, “ $x-2$ ”, “dos menos que al inicio”.

La opción de considerar el análisis de producciones de los alumnos, en los espacios de los talleres, nos permitió resignificar la idea que se pretende abordar en el aula en relación al “funcionamiento algebraico”. Idea que ayuda a configurar la noción implícita de los números enteros como sustraendos y sumandos, asociados a la acción de restar/sumar junto a datos desconocidos y a un nuevo significado de los signos, ideas constitutivas del concepto de número negativo. Al interpretar las ideas que se van conformando, en el proceso de resolución subyacente en el hacer de los alumnos, se da la oportunidad de reconstruir los objetos matemáticos y su estructuración en el conjunto de la propuesta y al mismo tiempo se logra identificar aspectos que quedan por tratarse. Esta reflexión facilita establecer vinculaciones entre las significaciones en juego y los sentidos de los objetos matemáticos de enseñanza[24].

[24] Para dar cuenta de esta idea de funcionamiento algebraico se sugiere ver el capítulo 5 de este libro en el que se analiza producciones de alumnos correspondientes a la implementación llevada a cabo.

El análisis deja ver que hay cuestiones constitutivas de las nociones matemáticas en juego que aún no afloran y es el docente quien tiene que gestionar en ese sentido. Así, ¿Qué implicancias tiene atender a respuestas desacertadas con otras gafas conceptuales? ¿Qué supone el tratamiento de nuevos objetos? Si bien la propuesta tiene su estructura potente, la experiencia de su implementación –en términos de estas voces– nos permite ampliar el margen de maniobra ya que hay aspectos de la propuesta sobre los que aún hay que reflexionar. De este modo, en ese juego de fortalecer el análisis didáctico circulan nuevas ideas en torno a los conocimientos matemáticos que no se corresponden con los declarados habitualmente en la enseñanza y los constituyen en su esencia. Este trabajo de reflexión ahonda en hacer matemática a propósito de profundizar en sentidos, modos, miradas del trabajo aritmético-algebraico imbricado en la propuesta en cuestión, facilitado por un diálogo entre lo matemático y lo didáctico.

4. Reflexiones finales

Nuestra intención, en los talleres, ha sido que un producto de investigación se conciba como una herramienta genuina adaptada a las necesidades de enseñanza de los docentes participantes, ofreciéndoles mayores márgenes de maniobra y mejores oportunidades de aprendizaje para sus alumnos.

Esta escritura, al tomar distancia del ir y venir de los talleres realizados, y revisitar lo acontecido en esos espacios, nos llevó a analizar, desde un lugar de distanciamiento, los aspectos centrales que conformaron nuestras elecciones al crear un entramado entre lo nuevo y lo propio, en términos de opciones didácticas.

Para cada una de las opciones didácticas elaboradas en este capítulo, formulamos preguntas y argumentos que de alguna manera vienen a dar indicios sobre en qué medida la problematización atraviesa tanto nuestro análisis como el despliegue de los talleres. En ese sentido, la primera opción didáctica “hacer explícito lo implícito”, permitió abordar la ruptura epistemológica que supone entrar al álgebra desde esta propuesta, a modo de debatir el papel de la modelización algebraica, en términos del tratamiento de los problemas contextualizados-descontextualizados y la ampliación de la idea de número. Las anticipaciones que realizamos conforman la primera opción didáctica, que favorecieron la toma de conciencia de los objetos en juego, en términos de problematización entre lo que se conoce y lo que la propuesta ofrece. La segunda opción didáctica se refirió al “diálogo con el aula” con la participación de las voces de los docentes que la implementaron y de los alumnos como centro del proceso de estudio.

Esa elección otorgó un viso de aula real fortaleciendo lo plausible de la propuesta al interpretar las producciones de los alumnos en términos de conocimientos, abordando de este modo, la problemática de las prácticas de enseñanza.

Este análisis ha querido interpelar y desnaturalizar los objetos involucrados, profundizando en el saber-hacer docente y dejando huellas de configuración de un cierto marco compartido. Creemos que el trabajo de revisitar lo acontecido, que confluyó en las opciones reconocidas y explicitadas, permitió visibilizar que las elecciones involucradas en el desarrollo de los talleres viabilizan un acceso a la esencia de esta propuesta, actuando como indicadores que intentan una asequibilidad de la misma en el terreno de las prácticas de enseñanza. Somos conscientes de que las opciones identificadas no son exhaustivas y que su análisis podría ampliarse con nuevas contribuciones. Esta experiencia es posible extenderse a otras propuestas de enseñanza que emergen de investigaciones, otorgándole así ciertas características de generalidad.

Referencias

Barrio, E. y Petich, A. (2018). El rol de los significados de los signos “+” y “–” en la construcción de los negativos, presentada en Mesa Temática “Educación Matemática” en el marco del VII Congreso Nacional y V Internacional de Investigación Educativa, FACE, UNCo, abril.

Block, D.; Moscoso, A.; Ramírez, M. y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. RMIE, ABRIL-JUNIO 2007, VOL. 12, NÚM. 33, PP. 731-762.

Brousseau, G. (2000), Educación y didáctica de las matemáticas, en *Educación Matemática*, Vol. 12 No. 1 Abril 2000, pp. 5-8. México.

Cid, E. (2015) *Obstáculos Epistemológicos en la enseñanza de los números negativo*s. (Tesis doctoral), Universidad de Zaragoza, España.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*, 579-604. Centre de Recerca Matemática (CRM), Universitat Autónoma de Barcelona.

Delprato, M. (2013). Condiciones para la enseñanza de la matemática a adultos de baja escolaridad. Tesis de doctorado en educación, Córdoba, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Filosofía y Humanidades.

Nicastro, S. (2006). Revisitar la mirada sobre la escuela. Exploraciones acerca de lo ya sabido. Rosario: Homo Sapiens. https://www.sadlobos.com/wp-content/uploads/2016/03/Nicastro-Revisitar-la-mirada-sobre-la-escuela.pdf

Perrin-Glorian, M. J. y Moreira Baltar Bellemain, P. (2016) L’ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l’enseignement et la formation des maitres, I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. novembro de 2016, Bonito - Mato Grosso do Sul - Brasil. https://pdfs.semanticscholar.org/72fb/714c2194b630afd3896bfca96ad969363584.pdf

Perrin-Glorian, M. J. (2019) A l’interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques, presentado en el 1er Congrès (TACD), França, pp. 1-13.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M. E, Becerril, M. M. y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. Educación Matemática, 28(3), pp. 9-30.

Epílogo

Las investigaciones participativas: recursos para el desarrollo profesional

Marta Anadón, Profesora emérita, Université du Québec a Chicoutimi
Quebec, Canadá

Para cerrar este libro, me pareció interesante exponer el desarrollo de lo que se ha dado en llamar las investigaciones participativas (investigación-acción, la investigación formación, la investigación colaborativa, etc.), porque mas allá de las diferentes denominaciones con las que se hace referencia a esas modalidades, ellas son el resultado de un mismo movimiento que se afirmó en las ciencias sociales. Ese movimiento partió de la necesidad de ligar teoría y práctica, de tomar en cuenta la voz de los participantes o de los actores locales en la producción de un saber ligado a sus propias prácticas sociales.

Durante la década de los años 90, la investigación en ciencias sociales y humanas (educación, comunicación, trabajo social, criminología, salud comunitaria) conoció en algunos países y fundamentalmente en Quebec un desarrollo extraordinario, poniendo en evidencia que la investigación pertenece de menos en menos a un "mundo aparte" de especialistas alejados de la realidad. La realización de investigaciones que valorizan la participación de los actores sociales, así como las finas y potentes dinámicas que se han podido observar entre investigadores y actores de terreno, han obligado a repensar las relaciones concebidas tradicionalmente como aquellas entre un "experto" y un "neófito". Las bases epistémicas, teóricas y metodológicas de la investigación evolucionan y los investigadores se dan como tarea la de acompañar las transformaciones de la sociedad.

Por consiguiente, en un intento de contribuir a las transformaciones sociales, las ciencias sociales se han dado un doble rol, de revelación y de acompañamiento. Por un lado, ellas revelan relaciones sociales, formas de dominación y sus resultados, si son socialmente accesibles, permiten que los actores puedan pensar su propia situación, legitimar sus afirmaciones y actuar en consecuencia. Por otro lado, ellas acompañan los actores sociales en la tarea de modificar la perspectiva a partir de la cual piensan y actúan aquellos que detienen el poder como aquellos que luchan por un cambio social. Así el interés es acercar el desarrollo de la investigación a las preocupaciones de los actores sociales y producir conocimientos incorporándolos en todo el proceso de investigación.

La investigación en el campo educativo también experimentó una gran expansión, dos principales razones pueden ser identificadas en la base de ese desarrollo. Una primera razón hace referencia a la toma de conciencia por parte de los grandes organismos internacionales (OCDE; UNESCO; Banco Mundial; Banco Interamericano de Desarrollo; etc.) del papel central que juega la educación en nuestras sociedades cada día más complejas. Esta toma de consciencia se manifiesta en los estudios preocupados tanto por el funcionamiento de los sistemas educativos y en su capacidad para responder a las necesidades de un alumnado cada vez más diversificado, como así también por la oferta de una formación inicial y continua de un cuerpo docente de calidad, capacitado para combatir la deserción escolar y asegurar la perseverancia y el éxito escolar. La segunda razón alude al carácter interdisciplinario de las ciencias de la educación y cómo los avances y cuestionamientos en las ciencias sociales y humanas (psicología, sociología, lingüística, antropología, economía, etc.) alimentan y enriquecen la investigación educativa.

En ese contexto, los investigadores del campo educativo se dieron como objetivo acompañar los cambios en las profesiones, en los modelos de formación, en el desarrollo personal y profesional de los actores, etc. Esas exigencias engendran maneras diferentes de investigar, susceptibles de producir conocimientos de acuerdo con los actores implicados. De ese modo, la investigación evoluciona centrándose en los actores de la educación y en sus preocupaciones profesionales, valorizando perspectivas teóricas y metodológicas comprensivas/interpretativas que realzan el papel de la intencionalidad, de las subjetividades y del proceso de interpretación de la acción humana, así como también la toma en cuenta de la irreductible unión entre conocimiento y acción. Las problemáticas de investigación son abordadas en términos de acción/significación poniendo el acento en una perspectiva global, contextualizada en función de las significaciones que los propios actores atribuyen a la situación educativa y a sus propias acciones o prácticas profesionales.

De un punto de vista epistemológico, estas investigaciones cuestionan la secuencia producción de conocimientos y su posterior aplicación y valorizan la sincronía entre conocimiento y acción. Así, el acercamiento de los conocimientos que provienen de la investigación a aquellos que provienen de la práctica constituye el corazón de "una ciencia que se está haciendo" (Sebillote, 2007, traducción libre del francés) en la cual el investigador actúa sobre la realidad participando con los otros actores para transformarla. Toda jerarquía de conocimientos es abandonada y se propone una relación de co-construcción y de co-producción de saberes entre investigadores y prácticos. En efecto, esas perspectivas valorizan los saberes prácticos, enraizados en una realidad compleja en la cual los actores sociales son involucrados en todas las etapas de la investigación desde la formulación del problema hasta la difusión de resultados, pasando por las instancias de recolección y análisis de datos. Por ende la investigación se realiza “con” y “para” los actores, valorizando la intencionalidad de los actores así como la complejidad y el carácter cambiante de los procesos que son la base del desarrollo educativo ya que los actores no se pueden reducir a una lógica única, a una estructura determinista, a un rol o a una programación cultural de comportamientos.

Coherentes con esa posición epistemológica, en el plano teórico la concepción subyacente es la de una acción social en la que intervienen valores e intencionalidad, porque es imposible desvincular la producción de conocimientos de las condiciones socio-históricas en las cuales ese conocimiento se produce. Así toda acción social es única, compleja, cambiante no puede ser aprehendida por un investigador externo. Esta concepción no responde más a aquella heredera del modelo tradicional de investigación, basada en la distancia, la neutralidad y la objetividad en relación al objeto de estudio.

Metodológicamente la investigación en educación se preocupa de tomar en cuenta los diferentes contextos y puntos de vista de los actores en la construcción de un saber compartido objetan los marcos tradicionalmente establecidos e invitan a privilegiar perspectivas que ponen el acento en la interacción investigador-actor y en la subjetividad de cada uno. En efecto, las relaciones más estrechas entre investigadores y actores de terreno implican necesariamente un cambio de posición en los investigadores. En estos modelos los actores dejan de ser el objeto de estudio para ser los protagonistas de la investigación, una investigación “con” los actores y no “sobre” los actores. Esa relación mas simétrica entre investigadores y participantes caracteriza las perspectivas de investigación llamadas “participativas” que se definen necesariamente por inducir una relación activa y co-construída entre los conocimientos y la realidad y de esa forma contribuir al desarrollo profesional de los actores.

Las investigaciones reunidas en este libro se inspiran de un modelo de investigación participativa, modelo que como Bednarz explicita en el capítulo 1, se desarrolló en Quebec con el objetivo de integrar el punto de vista de los docentes en la construcción de conocimientos adaptados a la realidad de la práctica profesional, siempre tomando en cuenta la complejidad de esa práctica.

Por ende, en el proceso de ese modelo de investigación colaborativa, investigadores y participantes no tienen una mirada normativa sobre las prácticas, ni intentan identificar lo que se debe cambiar, lo que los moviliza es la comprensión de un objeto de mutuo interés. La idea subyacente es que esta manera de abordar la práctica contribuirá a la construcción de un conocimiento profesional, producto de la combinación de dos lógicas complementarias, la del investigador y la de los prácticos. Cada uno reconoce las competencias del otro y el poder de influencia que cada uno ejerce y ambos se concentran en trabajar juntos en la búsqueda de objetivos comunes. Entonces lo que se reconoce es la capacidad reflexiva de los profesionales y una experticia diferente pero complementaria a aquella de los investigadores. Esta mediación que pone en relación conocimientos teóricos y conocimientos de acción se fundamenta en el concepto de «actor competente» (Giddens, 1987) y en ese sentido la competencia del actor social es condición para la acción. Esto quiere decir que todo actor es competente cuando se trata de estudiar su propia práctica, habilidad ligada a su capacidad reflexiva, a su capacidad de racionalizar su propia experiencia y así poder expresarla.

Los investigadores del campo educativo, como lo afirma Desgagné (1997), han utilizado mucho este modelo de investigación colaborativa porque busca dar respuesta a las críticas que denuncian la aplicación mecánica por parte de los docentes de saberes producidos por investigadores alejados de la realidad educativa. Trata de conciliar, en un mismo movimiento, la producción de conocimientos sobre la práctica y la formación de los prácticos. Aunque no sea un objetivo explícito en los escritos que definen el modelo no hay duda que este tipo de investigación contribuye al desarrollo profesional docente.

Como podemos constatar en la lectura de los estudios presentados en este libro, la investigación colaborativa permitiría a los docentes y otros profesionales del mundo de la educación jugar un rol activo y aportar una contribución significativa en la comprensión cada vez más fina de situaciones de enseñanza y en la elaboración de estrategias educativas.

Al fin de cuentas, lo que interesa es la calidad de la educación y los alumnos podrán tirar beneficio al igual que el cuerpo docente porque ese tipo de investigaciones tienen un propósito emacipatorio.

Referencias

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative: l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants, *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 23, no 2, 371-393.

Giddens, A. (1987). L*a constitution de la société: éléments de la théorie de la structuration,* traduit de l'anglais par M. Audet, Paris, Presses universitaires de France, coll. Sociologies.

Sebillotte, M (2007). Quand la recherche participative interpelle le chercheur. En M. Anadon, *La recherche participative: Multiples regards* (pp.49-87) Québec: les Presses de l 'Université du Québec.

Acerca de los autores

Ethel Barrio

Profesora de Matemática y Especialista en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, con la dirección de Mabel Panizza y Jean-Philippe Drouhard, por la Universidad Nacional del Comahue. Se desempeñó como profesora en colegios secundarios y en la formación docente del nivel primario. Ha participado de múltiples espacios en temáticas relacionadas con la enseñanza de la matemática. Actualmente está jubilada, forma parte de un grupo de investigación de la Facultad de Economía y Administración (FaEA) de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo) y asesora de instituciones educativas de la región.

ethel.barrio@gmail.com

Nadine Bednarz

Es profesora emérita en la Universidad de Quebec en Montreal y miembro del Grupo de Investigación de la Formación en la Enseñanza de la Matemáticas (GREFEM). Fue directora del Centro Interdisciplinario de Investigación sobre Aprendizaje y Desarrollo en Educación (CIRADE) donde desarrolló varios programas de investigación centrados en el aprendizaje y la enseñanza de aritmética, la introducción al álgebra y la transición aritmética-álgebra, las cuestiones relacionadas con el uso del simbolismo, la intervención en clases de alumnos socioeconómicamente desfavorecidas o sobre cuestiones de transición entre la escuela primaria y secundaria. Además, contribuyó a desarrollar en Quebec las Investigaciones colaborativas en Educación Matemática. Sus trabajos recientes buscan esclarecer la tarea de los asesores pedagógicos en el tema de la resolución de problemas y del acompañamiento a los docentes, las problemáticas de la transición entre la formación inicial, los primeros años de práctica docente y la formación continua en enseñanza de la matemática en el nivel primario.

descamps-bednarz.nadine@uqam.ca

Eva Cid Castro (Ver en “Acerca de los revisores”)

ecid@unizar.es

Lucas Manuel Colipe

Profesor de Matemática egresado en FaEA-UNCo. Estudiante de la Maestría en Matemática, FaEA-UNCo. Docentes en las áreas álgebra del departamento de Matemáticas dependiente de la FaEA-UNCo. Actualmente integra proyectos de investigación y extensión relacionados con la enseñanza de la matemática en el nivel medio, desarrollando estudios en colaboración con docentes de ese nivel.

lukscolipe@gmail.com

Patricia Detzel

Magister en Educación en Ciencias, Orientación Matemática, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Profesora en Matemáticas, título otorgado por Universidad Nacional del Comahue. Se desempeña como Profesor Adjunto, dedicación completa en Área de Álgebra, del Departamento de Matemática de FaEA, UNCo. Docente de la carrera de posgrado Maestría Enseñanza en Escenarios Digitales en sede Universidad Nacional del Comahue. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en temáticas relacionadas con enseñanza de la matemática.
pdetzel@gmail.com

Adolfo Emanuel Issa Nuñez

Profesor de Matemática por la FaEA-UNCo. Estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, orientación matemática, FaIN-UNCo. Desempeña sus funciones docentes en las áreas álgebra y didáctica de la matemática, de la FaEA y FaCE respectivamente, ambas de la UNCo. Integra proyectos de investigación y extensión relacionados con la enseñanza de la matemática en el nivel medio, desarrollando estudios en colaboración con docentes de ese nivel, desde el año 2012.
issaemanuel@gmail.com

Rosa Martinez

Es profesora de Matemática de la FaEA-UNCo. Magister en Educación en Ciencias orientación Matemática, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue (FI-UNCo). Profesora Adjunta e Investigadora del área Didáctica de la Matemática en el Profesorado Universitario de Matemática UNCo. Se ha desempañado en diferentes ámbitos vinculados a la formación docente continua de matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en temáticas de la enseñanza de la matemática. Actualmente investiga sobre temas relacionados con la conformación de grupos colaborativos entre docentes e investigadores alrededor del estudio e implementación de situaciones de enseñanza para el aula.
rosifmartinez@gmail.com

Rene Morari

Profesor de Matemática, FaEA, Universidad Nacional del Comahue (UNCo). Actualmente Profesor con dedicación parcial en el Área Álgebra del Departamento de Matemática de FaEA. Profesor de la Asignatura Matemática General en IFDC - Roca; Profesor de la asignatura Epistemología e Historia de la Matemática IFDC - Río Colorado. Actualmente cursando Maestría en Matemática en la UNCo cohorte 2019. Integra proyectos de investigación y extensión relacionados con la enseñanza de la matemática en el nivel medio.
rmorari1@gmail.com

Analía Petich

Profesora en Matemática y Física. Especialista en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, con mención en Matemática por la Universidad del Comahue (UNCo), con la dirección de Mabel Panizza y Jean-Philippe Drouhard. Se ha desempeñado como profesora en el nivel secundario y en la formación docente de los niveles inicial y primario, en espacios curriculares referidos a la enseñanza de la matemática. Ha participado en numerosos ámbitos de la formación docente continua con docentes que enseñan matemática. Actualmente integra el equipo de matemática de la Dirección General de Formación Docente del Consejo Provincial de Educación de Neuquén y es investigadora de la FaEA-UNCo sobre temáticas vinculadas con la conformación de grupos colaborativos entre docentes e investigadores en el estudio e implementación de situaciones de enseñanza de matemática para el aula.
apetich@gmail.com

María Elena Ruiz

Es Profesora de Matemática, otorgado por Universidad Nacional del Comahue y Magister en Educación en Ciencias, orientación Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Se desempeñó como Profesora Adjunta del área de Análisis del Departamento de Matemática de la FaEA- UNCo y de la Universidad Nacional de Río Negro. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en temáticas relacionadas con la enseñanza/aprendizaje de la matemática. Actualmente está jubilada y forma parte de un grupo de investigación de la FaEA- UNCo, sobre temas relacionados con la conformación de grupos colaborativos entre docentes e investigadores.
ruiz.melena@gmail.com

Juan Zambrano

Profesor en Matemática y Cosmografía, título otorgado por el Instituto de Formación Docente N° 9 de la ciudad de San Pedro de Jujuy. Profesor en distintas escuelas de nivel medio de la Provincia de Río Negro desde el año 2005 al 2018. Actualmente trabaja en formación docente en la UNCo, en la carrera del Profesorado de Nivel Inicial. Ha participado en congresos de educación y capacitación docente. Integrante del grupo de de investigación colaborativa entre docentes e investigadores dedicados al estudio e implementación de situaciones de enseñanza en el aula.
juanchy211@gmail.com

Acerca de los revisores

Marta Anadón

Profesora emérita de la Universidad del Québec. Radicada en Canadá desde hace más de 40 años, recibió en 1986 su diploma de Ph.D. (Philosophiæ doctor) en Sociología de la Educación de la Université Laval, Quebec y se ha desempeñado como Profesora Titular en el Departamento de Ciencias de la Educación de la Université du Québec a Chicoutimi hasta 2012, año en el que se jubiló y fue nombraba emérita. Es investigadora asociada del Centro Interdisciplinario sobre la formación y la profesión docente, CRIFPE (http://www.crifpe.ca/). Sus trabajos de investigación y sus publicaciones se orientan en la Epistemología de ciencias sociales y de la educación, de los fundamentos de la educación, del análisis socio-político de los fenómenos educativos, de los procesos de identidad, de las perspectivas cualitativas de investigación y de las investigaciones participativas (investigación-acción, investigación colaborativa). Se ha desempeñado como profesora en la Universidad de Rio Negro, Universidad del Comahue, Universidad de La Pampa (Argentina), en la Universidade Federal de Sao Carlos (Brasil) y como profesora invitada en varias universidades latinoamericanas (Argentina, Brasil, Chile, México) y europeas (France, Portugal, Suiza).

Eva Cid

Licenciada y doctora en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza (España). Durante más de 30 años ha sido Profesora Titular del área de Didáctica de las Matemáticas en la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza. Actualmente está jubilada y tiene un nombramiento de Colaboradora Extraordinaria. Como profesora universitaria ha dado clase de didáctica de las matemáticas en los Grados de Magisterio y en el Máster de Profesorado de Educación Secundaria. Como investigadora, he estudiado la problemática didáctica asociada a la introducción escolar de los números negativos y, más recientemente, los fenómenos didácticos que plantea el paso de la aritmética escolar al álgebra escolar. Los resultados de su trabajo pueden encontrarse en distintas publicaciones.

María Cecilia Papini

Profesora de Matemática y Física y Magister en Educación (Facultad de Cs. Exactas y Humanas, UNICEN). Docente de la Escuela Nacional Ernesto Sabato (UNICEN) y del Profesorado de Matemática e Investigadora en el área de Didáctica de la Matemática del grupo Educación en Ciencias con Tecnologías (ECienTec) de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Ha participado, durante los últimos diez años, en espacios de formación docente continua con docentes de nivel primario, secundario y superior. Investiga sobre temas relativos a la constitución de grupos colaborativos entre docentes e investigadores que se proponen estudiar situaciones de enseñanza y aprendizaje de matemática que incluyen las TIC en el aula.

Marta Sofía Porras

Magíster en Educación en Ciencias. Orientación Matemática.Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Profesora de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional del Comahue. Actualmente jubilada.

Patricia Sadovsky

Es profesora de Matemática egresada del InstitutoSuperior del Profesorado Joaquín V. González y doctora en Educación (mención Didáctica de la Matemática) por la Universidad de Buenos Aires (UBA). Es profesora e investigadora de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) e integrante de la Secretaría de Cultura y Educación del Sindicato Único de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires (Suteba). Ha investigado sobre problemas didácticos relativos al álgebra escolar, al sistema de numeración y sobre el papel del análisis de las prácticas en la formación docente. Actualmente su foco de estudio es el de la constitución del trabajo colaborativo entre investigadores y docentes.

Dilma Fregona

Es Profesora en Matemática, Magister en Matemática Educativa y Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Bordeaux con la dirección de Guy Brousseau. Se desempeñó como docente e investigadora en la Universidad Nacional del Comahue y en la Universidad Nacional de Córdoba, de la cual es actualmente Profesora Consulta. Participó en proyectos de investigación sobre temáticas vinculadas a la formación inicial y continua de docentes que enseñan matemática.

REUN
RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES

educo
Editorial Universitaria
Universidad Nacional del Comahue

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
1972